

# Mécanique générale

Nouvelle édition, revue et augmentée

CHRISTIAN GRUBER  
WILLY BENOIT

Professeurs à l'Ecole polytechnique  
fédérale de Lausanne

Presses polytechniques et universitaires romandes



à Inge  
Catherine  
Florence

à Eliane





## AVANT-PROPOS

Cet ouvrage développe les bases de la mécanique en s'appuyant sur l'observation et l'expérimentation. Les mathématiques sont considérées comme un outil qui sera construit pour décrire et analyser les résultats expérimentaux. Ce même outil permettra d'établir les lois fondamentales, de prédire de nouveaux phénomènes, de calculer l'évolution et les forces dans les systèmes. C'est un exposé didactique rédigé avec deux soucis constants : introduire la mécanique comme base de la physique et relier le formalisme mathématique aux concepts fondamentaux. Il s'adresse à des lecteurs ayant une formation de baccalauréat et couvre, en l'approfondissant, la matière enseignée en première année dans les écoles d'ingénieurs et les universités. Pour l'étudiant en physique, ce livre constitue la charnière entre l'enseignement pré-universitaire et les cours de mécanique avancée : on utilise les lois de Newton pour effectuer une analyse qualitative des orbites dans l'espace de phase, mais on n'expose pas les théorèmes généraux concernant les systèmes intégrables ou la théorie des perturbations.

Un premier but de l'ouvrage est de réaliser une synthèse entre les deux approches possibles de l'enseignement de la mécanique, l'approche expérimentale qui a l'avantage de mettre en évidence la démarche conduisant de l'observation aux lois, mais qui est souvent trop élémentaire du point de vue mathématique pour permettre la résolution de problèmes concrets, et l'approche abstraite qui présente la mécanique de façon déductive, avec toute la rigueur des mathématiques, en partant d'axiomes et de définitions, mais qui n'accorde que peu d'importance à la discussion des concepts physiques. On se propose de faire découvrir les lois de la mécanique et les superlois de la physique par l'observation des phénomènes naturels, puis d'utiliser les mathématiques pour déduire les conséquences logiques de ces lois. Ceci nous amènera par exemple à étudier le mouvement central dans le cadre de la cinématique, pour arriver ainsi à la loi de la gravitation et mettre en évidence l'existence de constantes du mouvement qui conduisent aux lois de conservation.

Un deuxième but est de faire ressortir le fait que la physique est basée sur un certain nombre de choix arbitraires : choix des unités, du référentiel, des variables. L'invariance des prédictions théoriques par rapport à ces choix, aussi appelé *principe d'objectivité*, permet de développer des méthodes d'investigation très puissantes, par exemple l'utilisation de modèles réduits, pour les études théoriques et expérimentales des systèmes complexes.

Objectifs  
et  
méthodes

Importance des lois  
de Kepler

Principe  
d'objectivité

Systèmes physiques

D'autre part, on considère que la mécanique est l'étude des systèmes réels et que le point matériel n'est qu'un modèle préliminaire. Cela signifie que nous n'avons pas adopté la démarche traditionnelle qui consiste à diviser la mécanique en deux parties, la mécanique du point, suivie de la mécanique des systèmes. Au contraire, à chaque étape – description de la position, cinématique, équations du mouvement, lois de conservation – le point matériel sert d'introduction pour aborder le cas général des systèmes matériels et le cas particulier des solides.

Finalement, nous avons particulièrement insisté sur les concepts de base, leur contenu physique et leur interprétation.

Dans la plupart des universités, la mécanique occupe le premier volet du cycle d'enseignement de la physique générale. Ceci nous a incité à présenter, en première partie, une esquisse du cadre général de la physique, la place de la mécanique, l'évolution des concepts de base, de la physique classique à la physique contemporaine, et une image de l'univers, des quarks aux galaxies (chap. 1-3). Cette introduction aborde des questions qui se retrouvent dans de nombreux domaines de la physique. Elle a pour objectif d'éveiller la curiosité et de stimuler la réflexion. Certains paragraphes, plus abstraits, ne doivent pas décourager le lecteur, mais l'inciter à réfléchir et à revenir sur certains points soulevés tout au long de ses études.

Les chapitres 4 à 9 sont consacrés à la cinématique, à laquelle nous avons redonné une grande importance. En effet, par la description de la balistique (Galilée) et du mouvement des planètes (lois de Kepler), nous voulons insister sur l'importance de la cinématique comme base expérimentale de la dynamique.

Les chapitres 10 à 15 sont alors consacrés à la dynamique des systèmes matériels, où la présentation tient compte, dans la mesure du possible, des développements récents de la physique.

Les chapitres 16 à 20 sont consacrés à divers cas particuliers ou applications.

Le chapitre 21 est consacré à la relativité restreinte. Le chapitre 22, qui traite de la mécanique analytique, ne doit pas être considéré comme une annexe, mais comme une présentation de l'aboutissement de l'effort remarquable de conceptualisation qui a eu lieu au cours des XVII<sup>e</sup>, XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles. L'étudiant doit donc savoir, très tôt, que cet outil théorique est à sa disposition pour résoudre des problèmes de la mécanique.

**Les premiers chapitres conduisent aux deux sommets de la mécanique, les équations de la dynamique (sect. 11.1) et le théorème de l'énergie (§ 13.6.1), à partir desquels on peut admirer la beauté, la simplicité conceptuelle et la très grande généralité de la mécanique.**

Rappelons qu'historiquement le succès de la mécanique newtonienne fut colossal et que ses applications se sont étendues bien au-delà de son domaine d'origine, la mécanique céleste. La physique étant « l'explication des phénomènes observés », on peut dire que pendant deux siècles, l'explication consistait à interpréter les phénomènes observés au moyen des équations de Newton.

## CONVENTIONS

Le présent ouvrage est divisé en 22 chapitres repérés par un nombre arabe (chap. 10). Chaque chapitre est divisé en sections, repérées par deux nombres (sect. 10.2), et chaque sous-section est divisée en paragraphes, repérés par trois nombres (§ 10.2.1).

Les figures et tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres précédés de « Fig. » ou « Tableau ». Les équations sont numérotées par deux nombres entre parenthèses (10.12), dont le premier rappelle le chapitre concerné.

Les **définitions** sont introduites en caractères gras dans une trame de couleur rose. Souvent ces termes se retrouvent dans la marge ou dans un titre afin d'en faciliter la recherche.

Les résultats particulièrement importants, ou utiles, et les théorèmes sont mis en évidence au moyen d'une trame grise. Une liste des principaux symboles utilisés est donnée en annexe.

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier très chaleureusement nos collègues MM. les professeurs A. Chatelain, P. Cornaz, Ph. Choquard et Ph. Rosselet, B. Vittoz et G. Wanders.

Notre gratitude va également à MM. P. Braissant, B. Egger et M<sup>me</sup> Y. Fazan qui ont préparé les expériences de cours et à S. Bolognini qui s'est occupé des photographies.

La réalisation de cet ouvrage a été rendue possible grâce à la collaboration des personnes suivantes, auxquelles nous tenons à exprimer notre reconnaissance : M<sup>lle</sup> M. Aeschlimann et M. F. Vuille (dactylographie), M<sup>lle</sup> M. Spiridon, MM.L. Bataillard et O. Bremnes (dessins).



# TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	vii
--------------	-----

TABLE DES MATIÈRES	xi
--------------------	----

## CHAPITRE 1 BUTS ET MÉTHODES DE LA PHYSIQUE

1.1 But de la physique	1
1.2 Méthodologie de l'approche scientifique	6
1.3 Observables. Distinction entre physique classique et quantique	8
1.4 État d'un système. Distinction entre physique générale et physique statistique	10
1.5 Espace-temps et évolution temporelle	15
1.6 Théories classiques non relativistes	21
1.7 Mécanique	22
1.8 Problèmes	24

## CHAPITRE 2 UNITÉS ET SIMILITUDES : UNE AUTRE APPROCHE DE LA PHYSIQUE

2.1 Systèmes d'unités et dimensions	27
2.2 Lois	30
2.3 Analyse dimensionnelle et lois d'échelle	31
2.4 Changements d'unités et homogénéité	32
2.5 Applications du théorème d'homogénéité	34
2.6 Changements d'unités et changements d'état	36
2.7 Similitudes	39
2.8 Conclusion	41
2.9 Systèmes d'unités	42
2.10 Problèmes	44

## CHAPITRE 3 IMAGE DE L'UNIVERS ET ORDRES DE GRANDEUR

3.1 Des atomes aux quarks	47
3.2 Des atomes aux galaxies	55
3.3 Constantes physiques (Valeurs admises en 1986 [26])	59
3.4 Problèmes	59

CHAPITRE 4 POSITION INSTANTANÉE D’UN SYSTÈME ET ANALYSE VECTORIELLE

- 4.1 Référentiel ..... 61
- 4.2 Système de coordonnées ..... 64
- 4.3 Calcul vectoriel : aspect géométrique ..... 69
- 4.4 Structure mathématique sur les vecteurs ..... 74
- 4.5 Calcul vectoriel : aspect algébrique ..... 78
- 4.6 Torseurs ..... 80
- 4.7 Torseurs particuliers ..... 86
- 4.8 Centre de masse ..... 89
- 4.9 Technique pour la recherche du centre de masse ..... 90
- 4.10 Problèmes ..... 97

CHAPITRE 5 CINÉMATIQUE DU POINT

- 5.1 Vitesse (du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) ..... 106
- 5.2 Accélération (du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) ..... 113
- 5.3 Mouvements simples ..... 116
- 5.4 Illustrations ..... 120
- 5.5 Vitesse et accélération en coordonnées curvilignes ..... 124
- 5.6 Vitesse et accélération en coordonnées généralisées ..... 133
- 5.7 Problèmes ..... 134

CHAPITRE 6 BASES CINÉMATIQUES DE LA DYNAMIQUE

- 6.1 Chute des corps et mouvement uniformément accéléré ..... 139
- 6.2 Balistique et mouvement uniformément accéléré ..... 142
- 6.3 Corps suspendu à un ressort et mouvement oscillatoire harmonique ... 147
- 6.4 Mouvement circulaire. Vitesse et accélération angulaires ..... 152
- 6.5 Mouvement des planètes autour du Soleil et mouvement central ..... 153
- 6.6 Mouvement central en  $r^{-2}$  ..... 160
- 6.7 Mouvement autour de la Terre ..... 170
- 6.8 Diffusion d’une particule chargée ..... 176
- 6.9 Mouvement central en  $r$  ..... 178
- 6.10 Problèmes ..... 181

CHAPITRE 7 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES ET ANALYSE QUALITATIVE

- 7.1 Évolution temporelle et équations différentielles ordinaires ..... 187
- 7.2 Intégrales premières et constantes du mouvement ..... 189
- 7.3 Exemples simples ..... 190
- 7.4 Analyse qualitative de  $m\ddot{x} = f(x)$  ..... 195

CHAPITRE 8 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

- 8.1 Définition du solide indéformable ..... 199
- 8.2 Déplacement d’un solide ..... 199
- 8.3 Évolution d’un solide ..... 203
- 8.4 Solides en contact ..... 211
- 8.5 Mouvement plan ..... 214
- 8.6 Problèmes ..... 217

**CHAPITRE 9 MOUVEMENTS RELATIFS NON RELATIVISTES**

9.1	Énoncé du problème . . . . .	221
9.2	Axiomes non relativistes . . . . .	223
9.3	Compositions des vitesses et des accélérations . . . . .	225
9.4	Cas particuliers . . . . .	229
9.5	Composition de deux changements de référentiel . . . . .	232
9.6	Vitesse et accélération en coordonnées sphériques . . . . .	234
9.7	Illustrations . . . . .	235
9.8	Symétrie et invariance . . . . .	239
9.9	Problèmes . . . . .	242

**CHAPITRE 10 BASES DE LA MÉCANIQUE NEWTONNIENNE**

10.1	Généralités . . . . .	245
10.2	Masse – Quantité de mouvement – Forces . . . . .	246
10.3	Troisième loi de la mécanique . . . . .	252
10.4	Lois du mouvement pour le point matériel . . . . .	256
10.5	Illustrations . . . . .	265
10.6	Épistémologie . . . . .	278
10.7	Problèmes . . . . .	283

**CHAPITRE 11 DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS**

11.1	Équations générales de la dynamique newtonnienne . . . . .	287
11.2	Théorème du centre de masse . . . . .	289
11.3	Lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique . . . . .	291
11.4	Théorème du moment cinétique . . . . .	293
11.5	Propriétés et théorèmes du moment cinétique . . . . .	295
11.6	Applications . . . . .	299
11.7	Importance des lois de conservation . . . . .	307
11.8	Problèmes . . . . .	309

**CHAPITRE 12 ANALYSE DES FORCES**

12.1	Forces gravifiques . . . . .	314
12.2	Forces électromagnétiques . . . . .	317
12.3	Forces de frottement visqueux . . . . .	325
12.4	Forces de frottement sec . . . . .	333
12.5	Illustrations des frottements secs . . . . .	341
12.6	Forces de liaison . . . . .	350
12.7	Tensions internes, déformations et loi de Hooke . . . . .	360
12.8	Problèmes . . . . .	372

**CHAPITRE 13 PUISSANCE – TRAVAIL – ÉNERGIE**

13.1	Puissance et travail . . . . .	377
13.2	Énergie cinétique . . . . .	383
13.3	Forces conservatives et potentiel . . . . .	387
13.4	Énergie potentielle et énergie mécanique d'un point matériel . . . . .	390
13.5	Illustrations : forces conservatives . . . . .	393
13.6	Énergie potentielle et énergie mécanique d'un système matériel . . . . .	401

13.7	Illustrations : forces actives conservatives	405
13.8	Illustrations : forces actives non conservatives	408
13.9	Au-delà de la mécanique	411
13.10	Problèmes	421
CHAPITRE 14 DYNAMIQUE DU SOLIDE		
14.1	Solide en rotation autour d'un axe fixe	428
14.2	Dynamique du solide : cas général	433
14.3	Applications	442
14.4	Énergie cinétique des solides	450
14.5	Ellipsoïde d'inertie et axes principaux	456
14.6	Classification des solides	459
14.7	Équations d'Euler	460
14.8	Mouvement d'un solide isolé	461
14.9	Solide avec point fixe : Gyroscope	467
14.10	Problèmes	472
CHAPITRE 15 DYNAMIQUE DANS LES RÉFÉRENTIELS EN MOUVEMENT		
15.1	Dynamique newtonienne dans les référentiels en mouvement : forces d'inertie et forces de Coriolis	477
15.2	Référentiels en translation uniforme et principe de la relativité de Galilée	479
15.3	Référentiels $\mathcal{R}'$ en translation non uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ . Principe d'équivalence d'Einstein	481
15.4	Référentiel $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$	486
15.5	Dynamique terrestre	489
15.6	Équivalence de la masse d'inertie et de la masse gravifique	496
15.7	Marées	498
15.8	Problèmes	500
CHAPITRE 16 ÉQUILIBRE ET STATIQUE		
16.1	Équation générale de la statique	503
16.2	Conditions d'équilibre	505
16.3	Équilibre et stabilité	508
16.4	Équilibre des câbles souples	512
16.5	Équilibre des poutres	516
16.6	Problèmes	523
CHAPITRE 17 MOUVEMENTS OSCILLANTS		
17.1	Importance des mouvements oscillants	527
17.2	Oscillateur harmonique libre	528
17.3	Oscillateur harmonique amorti	530
17.4	Oscillateur harmonique forcé et résonance	535
17.5	Résonance paramétrique	543
17.6	Oscillateurs harmoniques couplés : systèmes à deux degrés de liberté	546
17.7	Petits mouvements autour d'une position d'équilibre : systèmes à $N$ degrés de libertés	550
17.8	Problèmes	552



CHAPITRE 18	PROBLÈME À DEUX CORPS. MOUVEMENT CENTRAL ET DIFFUSION	
18.1	Problème à deux corps	555
18.2	Mouvement central	558
18.3	Diffusion	563
18.4	Applications	566
18.5	Problèmes	569
CHAPITRE 19	CHOCS ET PERCUSSIONS	
19.1	Équations des chocs	573
19.2	Centre de percussion	576
19.3	Illustrations	578
19.4	Problèmes	585
CHAPITRE 20	SYSTÈMES OUVERTS	
20.1	Introduction	589
20.2	Équations du mouvement	590
20.3	Illustrations	593
20.4	Problèmes	594
CHAPITRE 21	INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ RESTREINTE	
21.1	Introduction	597
21.2	L'espace-temps de la relativité restreinte	599
21.3	Transformations de Lorentz	605
21.4	Conséquences de la transformation de Lorentz	613
21.5	Propriétés de l'espace-temps	616
21.6	Dynamique relativiste du point matériel	622
21.7	Formulation quadrimensionnelle	627
21.8	Illustrations	630
21.9	Systèmes de particules	637
21.10	De la relativité restreinte à la relativité générale	641
21.11	Problèmes	642
CHAPITRE 22	INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE	
22.1	Formalisme lagrangien	646
22.2	Illustrations du formalisme lagrangien	654
22.3	Particules dans un champ électromagnétique	659
22.4	Théorème de Noether	661
22.5	Formalisme hamiltonien	664
22.6	Illustrations du formalisme hamiltonien	666
22.7	Formalisme hamiltonien non relativiste dans l'espace de phase étendu	669
22.8	Formalisme lagrangien et hamiltonien relativiste	670
22.9	Problèmes	674
APPENDICE A	DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.4	677

APPENDICE B	VECTEURS ET TENSEURS	
B.1	Changements de repère	679
B.2	Tenseurs	682
B.3	Conclusion	687
B.4	Problème	688
APPENDICE C	PROPRIÉTÉS DU CHAMP DE GRAVITATION	689
APPENDICE D	THÉORÈMES GÉNÉRAUX	
D.1	Equations Différentielles Ordinaires autonomes (E.D.O.)	693
D.2	Equilibre et stabilité	694
D.3	Linéarisation	696
APPENDICE E	CALCUL DES VARIATIONS	
E.1	Illustrations	697
E.2	Equations d'Euler-Lagrange	698
E.3	Solutions des deux illustrations	700
E.4	Principe de Hamilton	701
	RÉPONSE AUX PROBLÈMES	703
	BIBLIOGRAPHIE	
1.	Ouvrages conseillés	715
2.	Ouvrages pour ingénieurs	715
3.	Ouvrages avancés (et mécanique analytique)	715
4.	Ouvrages historiques	716
5.	Références	716
	NOTATIONS	719
	INDEX ALPHABÉTIQUE	723
	INDEX DES NOMS	735

## CHAPITRE I

# BUTS ET MÉTHODES DE LA PHYSIQUE

Avant d'aborder la mécanique, il nous semble intéressant de donner une introduction générale à la physique. Cela nous permettra de situer la mécanique classique dans le cadre de la description du monde qui nous entoure, et de soulever un certain nombre de questions concernant la démarche du physicien. C'est ce que nous allons faire dans les trois premiers chapitres.

Dans ce chapitre, nous analysons les buts et méthodes de la recherche scientifique et nous essayons de répondre aux questions suivantes : quelle est la distinction entre physique « classique » et « quantique », physique « générale » et « statistique », physique « relativiste » et « non relativiste » ? Nous dicutons brièvement la notion d'espace spatio-temporel, espace dans lequel se déroulent les phénomènes que la physique se propose d'expliquer ou de prédire. Finalement, nous introduisons le sujet de cet ouvrage, la mécanique classique. Le lecteur trouvera dans la bibliographie une liste de livres qui présentent un point de vue complémentaire à celui que nous avons adopté.

### 1.1 BUT DE LA PHYSIQUE

Le but de la physique est parfois exprimé par la formule laconique « expliquer les phénomènes naturels », en ajoutant peut-être, comme le fait Einstein [1], « y compris ceux de la vie ».

Phénomènes naturels  
et phénomènes  
observés

Si cette définition exprime le vœu de certains physiciens jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les développements de la physique au XX<sup>e</sup> siècle ont montré qu'il fallait revenir à une définition plus modeste : « expliquer les phénomènes observés ».

Dans cette section, nous voulons développer la distinction entre phénomènes « naturels » et « observés », puis ce qu'il faut entendre par « expliquer ».

#### 1.1.1 Description classique

Jusqu'à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la recherche scientifique est basée sur la description classique. C'est la description que nous adopterons, mais que nous voulons expliciter et nuancer pour tenir compte des développements modernes

de la physique et pour faire ressortir les hypothèses à la base de cette description. Historiquement, ces hypothèses étaient généralement admises de façon implicite comme des vérités évidentes.

Cette description classique s'est élaborée au cours des siècles à partir de l'*observation répétée*, consciente ou inconsciente, de phénomènes qui apparaissent avec une *grande régularité*, tels que le mouvement des corps célestes ou la chute des objets à la surface de la terre. Ces régularités nous sont tellement familières que nous avons acquis la certitude qu'elles se produiraient indépendamment de la présence de l'observateur qui les perçoit : nous admettons, par exemple, qu'une pierre qui tombe fera du bruit même si personne n'est là pour l'observer.

Réalité indépendante  
de l'observateur

Nous avons ainsi été conduits à généraliser les affirmations que nous pouvons faire concernant les phénomènes observés. Nous disons « la Lune tourne autour de la Terre » au lieu de dire « on observe que la Lune tourne autour de la Terre » ; de même on a pris l'habitude de dire « la lumière est une onde », au lieu de dire « dans certaines expériences, on observe des propriétés ondulatoires de la lumière ». Cette manière de nous exprimer signifie que nous admettons qu'il existe une *Réalité* indépendante de l'observation.

Déterminisme et  
homogénéité du  
temps

Pour rendre compte des régularités observées, nous supposons que cette *Réalité* obéit à un ensemble de règles, appelées *lois naturelles*. Cette confiance en l'existence de lois régissant l'évolution temporelle repose sur deux principes fondamentaux : le **déterminisme** et l'**homogénéité du temps**. Le déterminisme affirme que la *Réalité*, telle qu'elle existe à un instant donné, détermine univoquement l'évolution future et, dans certains cas, contient l'histoire d'un passé pas trop lointain (§ 1.5.5). L'homogénéité du temps est le principe selon lequel deux situations identiques, réalisées à des instants différents, doivent évoluer de façon identique : en répétant les « mêmes » expériences, sous les « mêmes » conditions, on doit obtenir les « mêmes » résultats. Ces deux principes sont à la base de la méthode scientifique.

La mission du physicien est de découvrir les lois fondamentales, à partir desquelles il sera possible de déduire l'ensemble des lois de la nature et d'obtenir une description de la *Réalité*.

**Pour énoncer ces lois, l'approche classique admet que tout système est caractérisé par un ensemble de grandeurs ayant à tout instant une valeur bien définie.**

Le déterminisme s'exprime alors en disant que la valeur de ces grandeurs à un instant donné détermine univoquement les valeurs à tout autre instant.

Notre conviction que la connaissance de la *Réalité* doit venir des résultats expérimentaux et aboutir à ceux-ci signifie qu'il doit être possible d'observer, mesurer et comparer les valeurs des grandeurs au cours de l'évolution. Par conséquent, l'approche classique admet implicitement les hypothèses suivantes :

Hypothèses  
classiques

- Il est possible de mesurer les grandeurs avec la *précision* que l'on désire, c'est uniquement un problème de technologie.

- Il est possible de mesurer « *simultanément* » toutes les grandeurs ; c'est-à-dire qu'il est possible de mesurer la grandeur B, immédiatement après avoir mesuré la grandeur A, sans modifier la valeur de A.
- Il est possible de mesurer les grandeurs *sans modifier les valeurs* qu'elles auraient en l'absence de toute observation.

Il découle de l'approche classique que les concepts et les lois fondamentales ne sont pas des créations de l'esprit humain, mais qu'ils sont logiquement déduits, par abstraction, des faits expérimentaux. Les lois de la physique, expressions des lois de la Nature, sont ainsi des lois exactes et immuables.

Les succès, aussi bien théoriques qu'expérimentaux, obtenus à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, semblaient confirmer le bien-fondé de cette attitude et portaient à penser que l'on avait effectivement trouvé l'ensemble des lois fondamentales : on considérait que l'univers était composé de « particules » et de « champs électro-magnétiques » évoluant dans le vide. L'évolution des particules était décrite par les lois de Newton, l'évolution des champs par les lois de Maxwell et l'interaction entre les particules et les champs par la loi de Lorentz.

Remarquons pour terminer que la physique a connu plusieurs révolutions au cours de son histoire avec les travaux de Galilée, Newton, puis Einstein. Cependant, jusqu'à l'introduction de la physique quantique, aucune de ces révolutions n'avait mis en doute le bien-fondé de la description classique.

Lois de la physique  
= Lois de la Nature



BOHR Niels  
Physicien danois  
1885-1962  
Prix Nobel de physique  
1922

### 1.1.2 Description moderne

L'observation des phénomènes à des échelles de plus en plus petites et à des températures de plus en plus basses a conduit à une révolution de la pensée qui a remis en question les bases mêmes de la description classique.

En effet, les expériences du XX<sup>e</sup> siècle ont montré qu'il fallait distinguer entre *observation* et *réalité*. En particulier, l'observation des propriétés corpusculaires de l'électron n'implique pas que l'électron *est* une particule, au sens classique du terme où particule signifie objet qui ressemble à une bille ; de même, l'observation des propriétés ondulatoires de la lumière n'implique pas que la lumière *est* une onde. En effet, dans d'autres expériences, il sera possible d'observer des propriétés ondulatoires de l'électron et des propriétés corpusculaires de la lumière.

De plus, ces mêmes observations ont conduit à la conclusion suivante : si l'on veut maintenir le principe du déterminisme, il faut abandonner la description des phénomènes en terme de grandeurs spatio-temporelles ; inversement, si l'on veut garder une description spatio-temporelle, il faut abandonner le déterminisme.

On est ainsi arrivé à une nouvelle conception de la Réalité, exprimée par exemple dans le **principe de complémentarité** de N. Bohr (1928) :

- Les propriétés corpusculaires et ondulatoires sont deux aspects complémentaires d'une même réalité, mais elles ne sont jamais simultanément observables.
- Le déterminisme et la description des phénomènes au moyen de grandeurs spatio-temporelles sont deux aspects complémentaires d'une même réalité, qui ne peuvent pas toujours être simultanément satisfaits.

Observation  $\neq$   
Réalité

Principe de  
complémentarité

Il suit du principe de complémentarité que l'observation d'un phénomène (dans l'espace-temps) ne permet plus d'affirmer que le même phénomène se produirait en l'absence d'observation (déterminisme). Mentionnons également que ce principe n'a pu être énoncé qu'après avoir remarqué les faits suivants, contraires aux hypothèses classiques :

Hypothèses  
quantiques



HEISENBERG Werner  
Physicien allemand  
1901-1976  
Prix Nobel de Physique  
1932

- Il existe des grandeurs qui ne peuvent pas toujours être exactement et simultanément mesurées. C'est le contenu du **principe d'incertitude** de Heisenberg (1927). Cela signifie qu'il existe une limite à la précision qu'il est possible d'atteindre lors de la mesure « simultanée » de deux grandeurs, et ceci quelle que soit la technologie : plus la précision sur l'une des mesures augmente et plus la précision sur l'autre diminue.
- Quelle que soit la technologie, la mesure d'une grandeur s'accompagne généralement d'une *modification non déterministe de l'évolution*.

Les principes de complémentarité et d'incertitude, à la base de la physique quantique, vont bouleverser la pensée classique et remettre en question les objectifs mêmes de l'approche scientifique. Il va émerger de ces réflexions que les concepts fondamentaux de la physique ne sont pas définis par rapport à une « Réalité » indépendante de toute observation, mais, au contraire, sont définis par rapport à la « connaissance » que nous possédons de cette Réalité.

**La physique n'apparaît plus comme une description de la Réalité, mais seulement comme une description de l'« image » que nous nous faisons de cette Réalité.**

Modèle

En particulier, il faut reconnaître qu'une théorie n'est qu'un « modèle » destiné à expliquer un aspect des phénomènes étudiés.

Ainsi, le problème n'est plus, comme ce fut le cas aux XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles, d'étudier une Réalité indépendante de l'observation, mais d'analyser l'ensemble des connaissances que nous en possédons, et de chercher à mettre en évidence des relations entre les phénomènes observés dans le but de *prédire* de nouveaux résultats. Par exemple, le problème n'est pas de savoir si l'électron est une onde ou une particule, mais de prédire en quel endroit de la plaque photographique on observera l'électron ayant traversé un champ magnétique. On revient ainsi au point de vue de Galilée qui ne se demandait pas « pourquoi », mais « comment » les corps tombent. En particulier, il médita longuement sur cette question de la relation existant entre l'observation et la Réalité [61].

Lois de la physique  
= Image de la Réalité

En conclusion, il découle de l'approche moderne que les concepts et les lois fondamentales sont l'expression de notre connaissance à une époque donnée, et *notre image de l'univers ne peut jamais être définitive*. Nous devons toujours être prêts à modifier les fondements de la physique et chaque génération aura la possibilité d'arriver à des découvertes importantes.

### 1.1.3 Expliquer les phénomènes observés

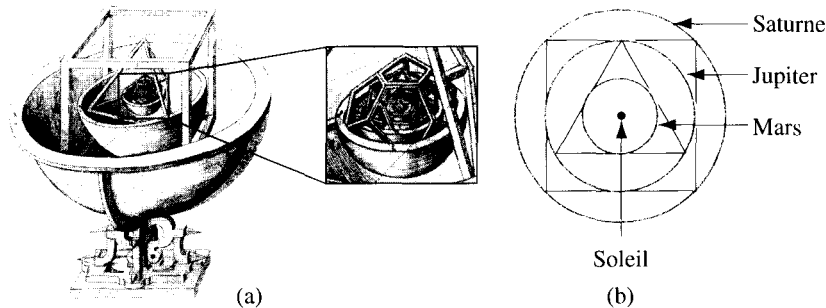
Comme nous l'avons remarqué, le but de la physique est d'expliquer les phénomènes observés. Mais quelles sont les observations qui peuvent être

expliquées ? Selon Wigner [2] « *the specification of the explainable may have been the greatest discovery of physics so far* ».

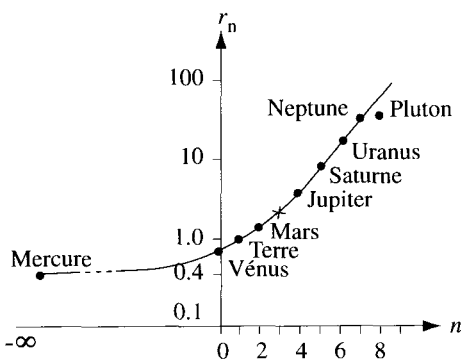
Par exemple, Kepler, ayant obtenu les lois décrivant le mouvement des planètes autour du soleil, chercha d'autres lois pour expliquer le nombre des planètes et les dimensions relatives des orbites (fig. 1.1-1.3). Newton, au contraire, rejeta cette tentative en considérant que ces observations ne demandent pas à être expliquées. Aujourd'hui, on pense que la distribution régulière des orbites planétaires résulte de circonstances particulières liées à la formation du système solaire [60].



WIGNER Eugene  
Physicien américain  
1902-1994  
Prix Nobel de physique  
1963



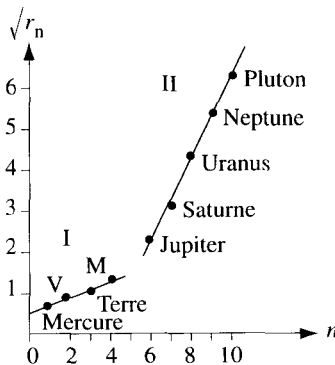
**Fig. 1.1** (a) Figure tirée de « *Mysterium cosmographicum* » de J. Kepler (1569). (b) Illustration à deux dimensions. Kepler explique les distances au soleil des six planètes connues à cette époque au moyen de sphères inscrites et circonscrites aux cinq polyèdres réguliers, sphères sur lesquelles les planètes se déplacent : Sphère de Saturne – Cube – Sphère de Jupiter – Tétraèdre – Sphère de Mars – Dodécaèdre – Sphère de la Terre – Icosaèdre – Sphère de Vénus – Octaèdre – Sphère de Mercure.



**Fig. 1.2** Loi de Titius-Bode (1772)

$$r_n = (0,4 + 0,3 \cdot 2^n) \text{ UA}$$

Astéroïde :  $n = 3$ .



**Fig. 1.3** Loi de Schmidt (1943)

I)  $\sqrt{r_{n+1}} - \sqrt{r_n} = 0,2$

II)  $\sqrt{r_{n+1}} - \sqrt{r_n} = 1,0$ .

Pour expliquer les phénomènes observés, la physique cherche à découvrir des lois.

Une **loi de la nature** est une règle qui doit rendre compte des régularités observées. Elle détermine le comportement des objets sous certaines conditions, mais elle laisse toutefois encore beaucoup de liberté. Les éléments qui ne peuvent pas être déterminés par les lois sont les **conditions initiales**.

Par analogie, le code de la route est un ensemble de règles imposées à l'automobiliste (rouler à droite, s'arrêter au feu rouge, ...) mais il lui laisse beaucoup de liberté : heure de départ, vitesse, arrêt, ...

En conclusion, « expliquer » signifie trouver les conditions initiales (soit les variables) et les lois de la nature (c'est-à-dire les relations entre les variables), à partir desquelles il est possible de décrire les phénomènes observés.

#### 1.1.4 Principes d'invariance ou Superlois [2]

De même que les lois imposent certaines conditions menant aux régularités observées, il existe des « superlois » imposant certaines conditions aux lois elles-mêmes. (Par analogie, la constitution impose certaines règles qui doivent être satisfaites par le code de la route discuté plus haut.) Ces superlois sont les « principes d'invariance » déjà introduits par Galilée, mais qui ont pris une très grande importance, surtout depuis 1930. Ces principes d'invariance, que nous discuterons en détail, sont associés aux différentes manières de décrire un même phénomène : les prédictions de la théorie ne doivent pas dépendre de la manière choisie, elles doivent être « invariantes ».

Invariance et symétrie L'importance accordée aux principes d'invariance est justifiée pour deux raisons. D'une part, ils jouent le rôle de garde-fou dans l'élaboration d'une théorie et servent de critère dans la recherche des lois fondamentales : *pour être acceptable, une loi physique doit être consistante avec les principes d'invariance*. D'autre part, ils conduisent à des lois fondamentales, dites *lois de conservation*, exprimant le fait que certaines grandeurs restent constantes au cours de l'évolution temporelle si le système est isolé : conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, etc. Grâce au théorème de Noether (§ 22.4.2), on verra que que ces lois de conservation sont intimement liées à des propriétés fondamentales de *symétrie* : homogénéité du temps et de l'espace, isotropie de l'espace, ...

## 1.2 MÉTHODOLOGIE DE L'APPROCHE SCIENTIFIQUE

Système physique

Pour expliquer les phénomènes observés, la physique étudie des **systèmes**, c'est-à-dire des portions de l'univers qu'il est possible de considérer, dans une première approximation, comme isolés du reste de l'univers.



Cette étude s'effectue en quatre étapes : description, recherche des lois, déduction des conséquences de ces lois, vérifications expérimentales.

- *Description*. La première étape consiste à définir le système ou la classe de systèmes que l'on veut étudier et à préciser les grandeurs qui présentent un intérêt. Ces grandeurs, appelées **observables**, peuvent être mesurées par des appareils. En outre, cette étape s'attache à caractériser l'état actuel du système, ou **état instantané**, et à mettre en évidence certaines relations entre les données expérimentales.

Observables

État

- *Recherche des lois*. Dans cette deuxième étape, on cherche à trouver par induction les concepts et les principes fondamentaux à partir desquels il sera possible de déduire (en se servant des mathématiques) les résultats expérimentaux. A ce stade, il n'existe pas de méthode systématique ; en particulier, il n'existe aucun chemin logique conduisant de l'expérience au schéma mathématique ; ce schéma est une création de l'esprit humain et c'est là qu'apparaît l'acte de génie.

Induction

On procède généralement en inventant un « **modèle** », représentation idéalisée du système, obéissant à un ensemble de lois. Les conséquences du modèle doivent correspondre aux résultats expérimentaux connus (par exemple, le modèle du point matériel et les lois de Newton permettent d'expliquer les observations de Kepler).

Modèle

- *Analyse des conséquences*. On étudie ensuite les conséquences qui découlent du modèle dans le but de prédire de nouveaux résultats et de nouveaux phénomènes : connaissant l'état du système à un instant donné, la théorie se propose de prédire la valeur des observables à cet instant, ainsi que l'**évolution temporelle de l'état**, c'est-à-dire l'état du système à tout autre instant.

- *Vérifications*. Un modèle purement logique qui n'aurait jamais été confronté à l'expérience ne présente que peu d'intérêt. Pour tester le schéma mathématique proposé, il est nécessaire de procéder à une vérification expérimentale des prédictions.

Nous voyons ainsi que toute approche scientifique se trouve confrontée dès le départ à des concepts intuitifs qui sont mal définis :

« système », « observable », « état », « évolution temporelle ».

En essayant de préciser ces concepts fondamentaux, on se rendra compte qu'ils ne sont pas définis par rapport à une *réalité*, mais par rapport à la connaissance que l'observateur possède de cette réalité (ce qui nous ramène à la description moderne discutée au paragraphe 1.1.2).

De plus, nous remarquons que les mathématiques ont une relation très particulière avec la physique. En fait, pour les Grecs, les postulats mathématiques (par exemple les axiomes d'Euclide) apparaissent comme des lois de la nature. Plusieurs siècles plus tard, Galilée affirmera : « *La philosophie est écrite dans ce livre immense qui se tient continuellement ouvert sous nos yeux – l'Univers – et qui ne peut se comprendre que si l'on a préalablement appris à en comprendre la langue et à connaître les caractères employés pour l'écrire. Ce livre est écrit dans la langue mathématique.* »



PYTHAGORE

VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C.

(Stalle de la cathédrale d'Ulm, sculptée par J. SYRLIN) :

« Toutes choses sont des nombres »

Mathématiques

Cette conception des mathématiques comme langage de la physique peut s'interpréter de deux façons :

- c'est le langage de la Nature que l'homme doit assimiler ;
- c'est le langage de l'homme pour traduire les faits de la Nature.

C'est cette deuxième interprétation, reliée du reste à la description moderne, qu'adopte Heisenberg quand il affirme : « *Les formules mathématiques ne représentent plus la Réalité, mais la connaissance que nous en possédons* ».

Finalement, on remarquera que les mathématiques sont beaucoup plus qu'un langage : c'est la manière de penser du physicien.

### 1.3 OBSERVABLES. DISTINCTION ENTRE PHYSIQUE CLASSIQUE ET QUANTIQUE

#### 1.3.1 Observables

Pour un *observateur O*, le système étudié est caractérisé par les concepts suivants :

- un ensemble de *grandeurs mesurables constantes*, appelées *propriétés*, qui permettent de reconnaître le système ; l'observateur sait que s'il effectuait la mesure de ces grandeurs, il obtiendrait un résultat connu d'avance et il n'effectuera pas ces mesures ;
- un ensemble de *grandeurs mesurables variables* que l'observateur pourrait mesurer au moyen d'appareils et qu'il pourrait en principe faire varier à volonté ;
- un ensemble de *contraintes* (liaisons) qui sont des restrictions sur les valeurs possibles des grandeurs mesurables.

Observables =  
grandeurs  
mesurables

**En conséquence, pour l'observateur *O*, le système est caractérisé par un ensemble d'*observables*, grandeurs qu'il est possible de mettre en évidence, de mesurer, et que l'observateur a choisi d'étudier.**

Il faut insister sur le fait que le choix des observables dépend de l'observateur. Considérons, par exemple, des atomes d'argent contenus dans une ampoule sphérique. Le mot « argent » englobe un ensemble de propriétés se trouvant dans les tables et « ampoule » définit une contrainte. Un premier observateur choisira comme observables des grandeurs thermodynamiques : volume, température, pression, densité, chaleur spécifique, ... ; un deuxième observateur choisira des grandeurs mécaniques : position et vitesse de chaque atome ; un troisième choisira la position, la vitesse, et le spin des électrons et des noyaux.

Ayant choisi l'ensemble des observables, l'observateur peut effectuer des mesures. Dans l'exemple précédent, si le premier observateur mesure successivement la pression, la température, et à nouveau la pression, il constatera — pour autant que les deux mesures de pression soient effectuées dans un

bref intervalle de temps – que la mesure de la température n’a pas modifié la valeur de la pression ; on dit alors que les deux observables sont *simultanément mesurables*, ou aussi *compatibles*. Si un autre observateur envoie des atomes d’argent à travers un champ magnétique inhomogène, il observera que les atomes sont déviés, soit à gauche, soit à droite ; en répétant la même mesure sur le même atome, l’observateur obtiendra toujours le même résultat, gauche ou droite. Appelons  $A$  la grandeur mise en évidence par cet appareil de mesure. Cette grandeur peut prendre deux valeurs,  $g$  (= gauche) ou  $d$  (= droite). Si l’observateur tourne le champ magnétique de  $90^\circ$ , il observera une déviation soit vers le haut, soit vers le bas ; appelons  $B$  la grandeur mesurée par ce nouvel appareil, grandeur pouvant prendre les valeurs,  $h$  (= haut) ou  $b$  (= bas). Supposons alors que cet observateur effectue successivement les mesures de  $A$ ,  $B$ , puis à nouveau  $A$  ; il constatera que la mesure de  $B$  a complètement modifié la valeur de  $A$ . Dans ce cas il dira que les deux grandeurs ne sont pas simultanément mesurables, ou aussi qu’elles sont *incompatibles*.

Observables  
simultanément,  
mesurables ou  
compatibles

Si toutes les observables sont simultanément mesurables, on dit que le système est décrit par une *théorie classique*. Si un autre observateur, ayant fait un autre choix d’observables, constate qu’il existe des grandeurs incompatibles, il dira que ce même système est décrit par une *théorie quantique* : la distinction entre théorie « classique » et théorie « quantique » est donc une distinction tirée de l’expérience et dépend de l’observateur.

Théorie classique et  
quantique

### 1.3.2 Structure mathématique sur les observables

Pour analyser les propriétés du système, il faut introduire une *structure mathématique* sur l’ensemble des observables. Nous supposons que les unités ont été choisies une fois pour toutes et nous reviendrons sur cette question au chapitre suivant. Dans la suite de cette section, nous considérons uniquement la partie numérique du résultat de la mesure.

Si toutes les observables sont compatibles, il est possible de définir la multiplication d’une observable  $A$  par un nombre réel  $\lambda$ , soit  $C = \lambda A$ , ainsi que la somme  $D = A + B$  et le produit  $E = AB$ , à partir des résultats des mesures des observables  $A$  et  $B$ . Par exemple, l’observable  $E = AB$  est la grandeur qui prend la valeur numérique  $e = ab$ , si les observables  $A$  et  $B$  ont respectivement les valeurs  $a$  et  $b$ . En conséquence, dans toute théorie classique, l’ensemble des observables peut être muni d’une structure algébrique commutative ( $AB = BA$ ).

Physique classique

S’il existe des observables incompatibles, on fait l’hypothèse qu’il est toujours possible de munir l’ensemble des observables d’une structure algébrique, mais, comme le résultat des mesures dépend de l’ordre dans lequel elles sont effectuées, l’algèbre doit être non commutative ; cela signifie qu’il est possible de définir le produit  $AB$ , où  $A$  est mesuré après  $B$ , mais  $AB$  n’est pas identique à  $BA$  si les observables  $A$  et  $B$  sont incompatibles. D’autre part si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, le produit  $AB$  ne correspond pas à une grandeur que l’on peut

Physique quantique

Algèbre des observables

En conclusion, l'ensemble des observables est muni d'une structure algébrique commutative dans le cas classique et non commutative dans le cas quantique.

Remarquons pour terminer que les propriétés du système (par exemple la masse ou la charge des particules) sont représentées par des multiples de l'identité (observable  $\mathbb{1}$  dont la valeur est toujours 1) : les multiples de l'identité représentent des grandeurs mesurables constantes.

1.4 ÉTAT D'UN SYSTÈME. DISTINCTION ENTRE PHYSIQUE GÉNÉRALE ET PHYSIQUE STATISTIQUE

1.4.1 État d'un système

Reprenons l'exemple précédent et supposons que l'on désire connaître la vitesse  $v$  des atomes d'argent pour une température et une pression données. Pour cela, il suffit en principe de percer une ouverture dans l'ampoule et de mesurer la distance entre l'ampoule et le point d'impact des atomes sur le sol (fig. 1.4) : connaissant cette distance on en déduit facilement la vitesse  $v$  cherchée (§ 6.2.2).

De cette expérience, nous dégageons les constatations suivantes :

- L'appareil de mesure (c'est-à-dire la règle) comportant une échelle graduée avec une certaine division  $\varepsilon$ , nous pouvons uniquement dire que le résultat d'une mesure est compris entre  $n\varepsilon$  et  $(n + 1)\varepsilon$  où  $n$  est entier.
- En répétant la mesure, on n'observe pas toujours le même résultat : il y a des *fluctuations*.

L'analyse des résultats de mesure s'effectue alors au moyen d'un graphique, appelé *histogramme*, obtenu en reportant  $N(v)/N$  en fonction de  $v$ , où  $N(v)$  est le nombre de mesures ayant donné le résultat  $v$  et  $N = \sum_v N(v)$  est le nombre total de mesures (fig. 1.4 b). Dans la limite où  $N$  est très grand, le nombre  $p(v) = N(v)/N$  représente la *probabilité* que le résultat de la mesure donne la valeur  $v$  ; c'est une estimation du nombre de fois que l'on peut espérer obtenir la valeur  $v$  si l'on effectue  $n$  fois la mesure.

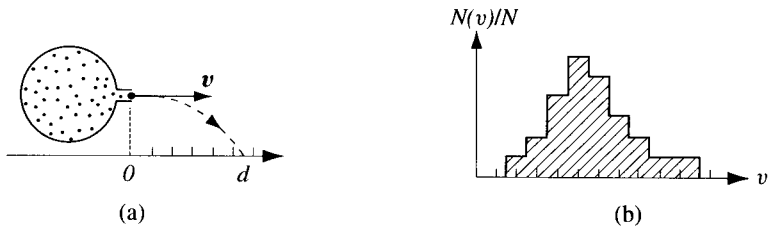


Fig. 1.4 (a) Mesure de la vitesse  $v$  et (b) histogramme de la vitesse des molécules d'un gaz.

De cette manière, l'observateur associe à toute observable  $A$  une fonction Probabilités  
 $p_A = p_A(a)$ , appelée **distribution de probabilité**, ayant les propriétés

$$p_A(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_a p_A(a) = 1. \quad (1.1)$$

Cette fonction représente la probabilité que le résultat de la mesure de  $A$  donne la valeur  $a$ , sachant que le système a été préparé d'une manière bien définie, c'est-à-dire connaissant l'état du système.

L'état représente l'information que possède l'observateur sur le système étudié.

Mathématiquement, cette information, c'est-à-dire l'état, peut être représentée par l'ensemble des fonctions  $p_A(a)$ ,  $p_B(b)$ , ..., obtenues en effectuant  $N_A$  mesures de  $A$ ,  $N_B$  mesures de  $B$ , ... :

$$p_A(a) = \frac{N_A(a)}{N_A}, \quad p_B(b) = \frac{N_B(b)}{N_B}, \quad \dots \quad (1.2)$$

où  $N_A(a)$  est le nombre de mesures de  $A$  ayant donné la valeur  $a$ ,  $N_B(b)$  est le nombre de mesures de  $B$  ayant donné la valeur  $b$ , ...

Connaissant l'état du système, on introduit la **moyenne**, ou **espérance mathématique**, ou **valeur**, de l'observable  $A$  dans l'état  $\rho$ . C'est le nombre réel, Valeur de  $A$  dans l'état  $\rho$   
 noté  $\langle \rho; A \rangle$  ou simplement  $\langle A \rangle$ , défini par

$$\langle A \rangle = \langle \rho; A \rangle = \sum_a a p_A(a) \quad \left( \cong \frac{1}{N_A} \sum_a a N_A(a) \right). \quad (1.3)$$

C'est la moyenne au sens habituel, obtenue après avoir effectué  $N_A$  fois la mesure de la grandeur  $A$ .

Pour tout  $k$  entier, on définit de même la moyenne de  $A^k$ , soit

$$\langle \rho; A^k \rangle = \sum_a a^k p_A(a) \quad ; \quad \langle \rho; A^0 \rangle = \langle \rho; \mathbb{1} \rangle = 1. \quad (1.4)$$

Un théorème fort intéressant de probabilité [3] affirme que la donnée de tous les nombres réels  $\langle \rho; A^k \rangle$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  détermine univoquement la distribution de probabilité  $p_A(a)$ .

Par conséquent, l'état est défini par une application  $\rho: A \rightarrow \langle \rho; A \rangle$  des observables dans les réels, telle que  $\langle \rho; \mathbb{1} \rangle = 1$  (normalisation). État = Information

De plus, il suit de la structure mathématique introduite sur l'ensemble des observables que l'application  $\rho$  est linéaire et positive; c'est-à-dire que pour toute observable  $A$  et  $B$  et tout nombre réel  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons

$$\langle \rho; \alpha A + \beta B \rangle = \alpha \langle \rho; A \rangle + \beta \langle \rho; B \rangle \quad (\text{linéarité}) \quad (1.5)$$

et

$$\langle \rho ; A^2 \rangle \geq 0 \quad (\text{positivité}). \tag{1.6}$$

Observables et états

En conclusion, les observables représentent les grandeurs à mesurer et l'état représente l'information que possède l'observateur sur le résultat des mesures qu'il pourrait effectuer.

Du point de vue mathématique, l'état est une application linéaire, positive, normée de l'algèbre des observables dans les réels.

1.4.2 Structure mathématique sur l'ensemble des états

L'interprétation probabiliste de l'état conduit à introduire la *structure mathématique* suivante sur l'ensemble des états : pour tout couple d'états  $\rho^{(1)}$  et  $\rho^{(2)}$ , et tout nombre réel  $\alpha \in [0, 1]$ , on définit l'état  $\rho = \alpha \rho^{(1)} + (1 - \alpha) \rho^{(2)}$  par l'application

$$\rho : A \mapsto \langle \rho ; A \rangle = \alpha \langle \rho^{(1)} ; A \rangle + (1 - \alpha) \langle \rho^{(2)} ; A \rangle \tag{1.7}$$

On vérifie facilement que cette application définit un état.

L'état  $\rho$  (1.7) décrit l'état d'un système pour lequel on sait qu'il se trouve avec probabilité  $\alpha$  dans l'état  $\rho^{(1)}$  et probabilité  $(1 - \alpha)$  dans l'état  $\rho^{(2)}$ .

A titre d'illustration, considérons les personnes vivant en Suisse, ayant entre 18 et 65 ans. Supposons que l'on s'intéresse aux grandeurs (= observables)

- $A =$  âge (à  $\pm 1$  an) ;      $H =$  taille (à  $\pm 1$  cm) ;
- $C =$  compte en banque (à  $\pm 100$  francs) ;
- $S =$  sexe ( $s = 1$  pour un homme ;  $s = 2$  pour une femme).

On admet que l'on possède les informations suivantes (= état) :

$$\begin{aligned} &N_S(1), N_A^{(1)}(a), N_H^{(1)}(h), N_C^{(1)}(c) \\ &N_S(2), N_A^{(2)}(a), N_H^{(2)}(h), N_C^{(2)}(c) \end{aligned}$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} N_S(s) = \text{nombre d'hommes } (s = 1), \text{ resp. de femmes } (s = 2) ; \\ N_A^{(s)}(a) = \text{nombre d'hommes } (s = 1), \text{ resp. de femmes } (s = 2), \\ \qquad \qquad \qquad \text{ayant l'âge } a ; \\ \qquad \qquad \qquad \dots \end{array} \right.$

Si l'on prend un homme, respectivement une femme, au hasard dans cette population (= système), on pourra dire que la probabilité que son âge soit  $a$  est

$$p_A^{(s)}(a) = \frac{N_A^{(s)}(a)}{N_S(s)} \qquad s = 1 \text{ ou } 2, \qquad a = 18, \dots, 65$$

et que son âge est en moyenne

$$\langle A \rangle^{(s)} = \sum_{a=18}^{65} a p_A^{(s)}(a) \quad s = 1 \text{ ou } 2.$$

Mais si l'on prend un individu (homme ou femme) au hasard dans la population considérée, la distribution de probabilité de son âge et l'âge moyen sont :

$$p_A(a) = \alpha p_A^{(1)}(a) + (1 - \alpha) p_A^{(2)}(a), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{N_S(1)}{N_S(1) + N_S(2)}$$

$$\langle A \rangle = \alpha \langle A \rangle^{(1)} + (1 - \alpha) \langle A \rangle^{(2)}.$$

De même pour les autres grandeurs

$$p_H^{(s)}(h) = \frac{N_H^{(s)}(h)}{N_S(s)}, \quad \langle H \rangle^{(s)} = \sum_h h p_H^{(s)}(h),$$

et

$$p_H(h) = \alpha p_H^{(1)}(h) + (1 - \alpha) p_H^{(2)}(h)$$

$$\langle H \rangle = \alpha \langle H \rangle^{(1)} + (1 - \alpha) \langle H \rangle^{(2)}.$$

En conclusion, dans l'état  $\rho$  (où  $s = 1$  et  $2$  avec probabilité  $\alpha$  et  $(1 - \alpha)$  respectivement), on a moins d'information que dans l'état  $\rho^{(1)}$  (on sait que l'individu est un homme) et  $\rho^{(2)}$  (on sait que c'est une femme). Dans cet exemple, le maximum d'information correspond à connaître exactement l'âge, la taille, le compte en banque, et le sexe de chaque individu.

Une illustration similaire, mais physique, est l'étude des atomes d'un alliage Cu-Zn dans un volume  $V$ . Dans ce cas,  $s = 1$  pour le cuivre et  $s = 2$  pour le zinc et les grandeurs  $A$ ,  $H$ ,  $C$  sont par exemple la position, la vitesse et l'énergie cinétique.

### 1.4.3 États purs et états de mélange

On dit que l'état  $\rho$  est un *état de connaissance absolue pour l'observable*  $A$  si la distribution de probabilité  $p_A$  est telle que  $p_A(a) = 1$  pour  $a = a_0$  et  $p_A(a) = 0$  pour  $a \neq a_0$ ; dans un tel état, la mesure de  $A$  donnera toujours la valeur  $a_0$ , et il n'y a pas de fluctuation.

Dans le cas où il y a des fluctuations, on caractérise l'*incertitude* sur la valeur de  $A$  dans l'état  $\rho$  au moyen de l'*écart quadratique moyen*  $\Delta A$ , aussi appelé déviation standard, défini par

Incrtitude

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\sum_a (a - \langle A \rangle)^2 p_A(a)} \quad (1.8)$$

On peut démontrer les propriétés suivantes :

- $\rho$  est un état de connaissance absolue pour  $A$  si et seulement si  $\Delta A = 0$ . En effet, comme  $p_A(a) \geq 0$ ,  $\Delta A = 0$  entraîne  $(a - \langle A \rangle)^2 p_A(a) = 0$  et  $p_A(a) = 0$  pour tout  $a$  tel que  $a \neq \langle A \rangle$ .
- Inégalité de Chebyshev [3] : la probabilité que le résultat de la mesure soit en dehors de l'intervalle  $\langle A \rangle \pm \delta$  est inférieure à  $[\Delta A / \delta]^2$ .
- Pour des fluctuations normales, c'est-à-dire qui ne sont pas associées à une erreur systématique, il y a une probabilité de 67% pour que le résultat de la mesure soit compris dans l'intervalle  $\langle A \rangle \pm \Delta A$ .

État pur, état de mélange

Par définition, on appelle **état pur** un état qui correspond à l'information maximale que peut obtenir l'observateur, et **état de mélange** un état qui correspond à une information partielle. Sans entrer dans plus de détails, remarquons qu'une même information définit un état pur pour un observateur, mais un état de mélange pour un autre. Dans l'exemple des atomes d'argent, la donnée du volume, de la température et de la pression définit un état pur pour le premier observateur, et un état de mélange pour les deux autres.

Du point de vue mathématique, un état est pur s'il n'admet aucune décomposition de la forme (1.7), avec  $\alpha \neq 0$  ou 1 ; c'est un état de mélange dans le cas contraire.

#### 1.4.4 Physique générale et physique statistique

Physique statistique

Par définition, une théorie qui étudie les états de mélange est dite **statistique** ; on parle de **physique (générale)** lorsque l'on étudie uniquement les états purs. Il est possible de démontrer le résultat suivant.

Dans les théories classiques, les états purs correspondent à une connaissance absolue de toutes les observables : l'information maximale consiste à connaître la valeur exacte de toutes les observables. Nous retrouvons ainsi la description classique (§ 1.1.1).

Au contraire, dans les *théories quantiques* les états purs correspondent à une connaissance absolue de certaines observables uniquement. Par exemple, si  $x_i$  et  $v_i$  représentent la composante  $i$  des vecteurs position et vitesse d'une particule de masse  $m$ , les relations de Heisenberg (§ 1.1.2) montrent que

Relation d'incertitude 
$$\Delta x_i \Delta v_i \geq \frac{\hbar}{2m} \quad \text{où} \quad \hbar \cong 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ J s.} \quad (1.9)$$

De façon générale

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} | \langle (AB - BA) \rangle |. \quad (1.10)$$

Par conséquent, si  $A$  et  $B$  sont compatibles,  $AB - BA = 0$  et il sera possible d'avoir  $\Delta A = \Delta B = 0$  ; au contraire si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, alors  $AB - BA = C \neq 0$  et  $\Delta A \cdot \Delta B$  est strictement positif pour tout état  $\rho$  tel que  $\langle C \rangle \neq 0$ .



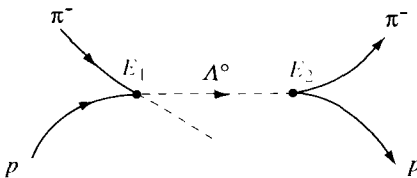
## 1.5 ESPACE-TEMPS ET ÉVOLUTION TEMPORELLE

### 1.5.1 Espace, temps, événement

Les phénomènes que nous observons se déroulent dans un cadre appelé « espace-temps » dont chacun de nous a une idée intuitive. Le caractère absolu qu'on lui attribue provient de l'accord entre les hommes sur son utilisation pratique. Par exemple, si nous disons « rendez-vous le 8 juillet 2010 à 12h30 au sommet du Cervin », notre interlocuteur connaîtra immédiatement le lieu et l'instant, c'est-à-dire l'événement dont nous parlons . . . , même s'il est incapable d'y arriver. Nous remarquons ainsi qu'il est possible d'introduire un concept d'**événement**, phénomène élémentaire défini par un lieu et un instant déterminés (fig. 1.5). Un événement définit un point d'un ensemble appelé **espace-temps**, et l'on peut considérer les phénomènes observés comme une succession d'événements.

La définition et les propriétés intrinsèques – c'est-à-dire indépendantes de l'observateur – de l'espace-temps est un problème qui a passionné les philosophes et les physiciens de l'Antiquité à nos jours. Il suffit de penser à Aristote, St Augustin, Descartes, Newton, Leibniz, Kant, Bergson ou Einstein. Ce problème a été abordé en invoquant Dieu, la raison pure, ou les faits expérimentaux. Cependant, il faut reconnaître que l'étude de ces concepts n'est pas achevée.

Expérimentalement, l'espace nous apparaît comme un continu à trois dimensions (il faut trois nombres pour repérer la position d'un point) et le temps comme un continu linéaire, orienté par la « flèche du temps » qui distingue le futur du passé. Remarquons déjà que le concept de simultanéité n'a pas de signification absolue dans les théories relativistes (§ 21.3.1). Il faut également mentionner que les théories actuelles de la gravitation remettent en question cette notion d'espace-temps continu à des échelles de l'ordre de  $10^{-35}$  m et de  $10^{-43}$  s ; cependant, du point de vue expérimental, on est capable de mesurer des distances de l'ordre de  $10^{-18}$  m et des temps de l'ordre de  $10^{-24}$  s.



**Fig. 1.5** Événement  $E_1$  : création du  $\Lambda^0$ . Événement  $E_2$  : annihilation du  $\Lambda^0$ .  $\Delta t \sim 2,6 \cdot 10^{-10}$  s.

Finalement, étant donné deux événements  $E_1$  et  $E_2$  (fig. 1.5), on admet qu'il est possible de définir et de mesurer l'intervalle de longueur  $\Delta \ell$  et l'intervalle de temps  $\Delta t$  qui les séparent.

Événement

Espace-temps

Dimension de  
l'espace et du temps

St AUGUSTIN  
(354-430)

*Les confessions* :

« Le temps, c'est quoi donc ? N'y a-t-il personne à me poser la question, je sais ; que, sur une question, je veuille l'expliquer, je ne sais plus. »

RAMUZ Charles-F.  
(1878-1947)

*Une main* :

« Il y a deux temps : il y a le temps intérieur et il y a le temps extérieur, celui qui est marqué par les horloges. »

### 1.5.2 Intervalle de longueur et propriétés de l'espace

Pour mesurer une distance à l'échelle du laboratoire, nous utilisons une « règle graduée » (en pouce, pied, cm, m, ...). Sachant mesurer des intervalles de longueur, on peut ensuite définir la notion de « droite » entre deux points : c'est la courbe de longueur minimale. Nous pouvons également mesurer l'angle entre deux droites. Il est alors aisé de vérifier que la géométrie euclidienne décrit correctement la portion d'espace au niveau du laboratoire : la somme des angles d'un triangle est  $180^\circ$ , la circonférence d'un cercle est proportionnelle au rayon, le théorème de Pythagore est vérifié.

Espace  
euclidien

**Pour mesurer les distances qui ne sont pas accessibles avec la règle, on fait l'hypothèse que l'espace physique, vide de matière et de rayonnement, est un espace euclidien, et que la lumière se propage en ligne droite.**

Les méthodes de triangulation permettent alors de calculer les distances et de tester la validité de cette hypothèse. Par exemple, on peut considérer le triangle défini par les positions de la Terre à six mois d'intervalle et d'une étoile fixe lointaine (figure 3.20) et vérifier si la somme des angles est  $180^\circ$  (méthode suggérée puis utilisée par Gauss vers 1820). De même, on peut vérifier s'il est possible de reproduire à l'échelle du laboratoire un modèle réduit de n'importe quelle portion de l'Univers (argument dû à E. Kant [4]) : si les astronomes mettaient en évidence l'existence de cinq étoiles équidistantes, nous serions incapables de construire un modèle à l'échelle et nous serions forcés de conclure que l'espace physique n'est pas euclidien. Les mesures astronomiques effectuées jusqu'à des distances de plusieurs millions d'année-lumière ne fournissent aucune raison de mettre en doute la structure euclidienne de l'espace. Pour mesurer des distances à des échelles microscopiques, diverses méthodes ont été élaborées et sont discutées par exemple dans le chapitre 5 du livre de Feynmann [5] : l'espace apparaît euclidien jusqu'à des distances de  $10^{-15}$  m.



GAUSS Carl Friedrich  
Astronome, physicien,  
mathématicien  
allemand  
1777-1825

Horloge et  
mouvement  
périodique

### 1.5.3 Intervalle de temps

Pour mesurer l'intervalle de temps entre deux événements, on utilise une « horloge » ; c'est un appareil qui associe à tout événement la position d'une « aiguille » en mouvement. Mais comment graduer un tel appareil ? *A priori*, n'importe quelle graduation peut être utilisée. On choisira par conséquent une échelle telle que les lois de la physique soient les plus simples et la condition d'homogénéité du temps satisfaite sous la forme suivante : si l'état du système (supposé isolé) à l'instant  $t_2$  est identique à l'état du système à l'instant  $t_1$ , alors pour tout  $\Delta t$ , l'état à l'instant  $t_2 + \Delta t$  sera identique à l'état à l'instant  $t_1 + \Delta t$ . Ainsi, n'importe quel système effectuant un « cycle » peut être utilisé comme échelle de temps et l'on définira l'horloge au moyen de phénomènes périodiques. Pour s'assurer de la périodicité d'un mouvement, on le compare à d'autres mouvements supposés également périodiques et, en cas de désaccord, il faudra décider lesquels sont effectivement périodiques.



KANT Emmanuel  
Philosophe allemand  
1724-1804

Par exemple, en supposant que le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles est uniforme, on définit le *jour solaire* et le *jour sidéral* (§ 9.7.4). On s'aperçoit alors que ces deux unités présentent des variations pouvant aller jusqu'à  $\pm 25$  s par jour au cours de l'année. Comme il est possible d'expliquer la variation du jour solaire à partir de la deuxième loi de Kepler, et du fait que la distance Terre-Soleil varie de  $\pm 1,7\%$  au cours de l'année, on choisira le jour sidéral comme unité. Avec cette unité, on observe ensuite que le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas périodique : soit le mouvement de la Terre autour du Soleil s'accélère, soit le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ralentit. Comme il est possible d'expliquer le ralentissement de la rotation de la Terre par le phénomène des marées, alors qu'une accélération du mouvement de la Terre autour du Soleil serait en désaccord avec la loi fondamentale de la gravitation, on définit l'échelle de temps par le mouvement de la Terre autour du Soleil : c'est le *temps des éphémérides*, introduit en 1956. Cette hypothèse fut ensuite confirmée par l'introduction du *temps atomique* défini en 1967 au moyen des horloges atomiques, dont le principe est basé sur le fait que les atomes excités émettent des ondes de fréquence constante.

Jour sidéral ou jour solaire



MAXWELL James  
Clerk  
Physicien écossais  
1831-1879

#### 1.5.4 Espace et temps ou espace-temps : physique non relativiste et relativiste

Pour élaborer la mécanique, Newton [6] admet qu'il existe un « *espace absolu, sans relation aux choses externes, toujours similaire et immobile* » et un « *temps absolu, vrai et mathématique, sans relation avec l'extérieur, qui coule uniformément et s'appelle durée* ». En particulier, il admet que l'intervalle de temps  $\Delta t$  et l'intervalle de longueur  $\Delta \ell$  entre deux événements simultanés, sont des invariants, c'est-à-dire des grandeurs qui ne dépendent pas de l'observateur. Cependant, la mécanique newtonienne était incapable de mettre en évidence cet espace et ce temps absolus.

Invariants  
newtoniens  
 $\Delta t, \Delta \ell$

Au XIX<sup>e</sup> siècle, l'étude de l'électromagnétisme culmine avec les travaux de Maxwell, mais soulève également un grand nombre de questions. Par exemple, les équations de Maxwell font apparaître la vitesse de la lumière  $c$  et l'on admet que c'est la vitesse par rapport à un référentiel privilégié attaché à « l'éther », milieu hypothétique dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques. Les expériences de Fizeau, vers 1850, ayant montré que l'éther n'est pas entraîné par l'observateur, il devait être possible de mettre en évidence le mouvement de l'observateur par rapport à l'éther (§ 21.1.1). Cependant, les expériences de Michelson et Morley (1881 ; 1887) qui auraient dû mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther se sont soldées par un échec.

Difficultés avec les  
concepts relativistes



MICHELSON Albert  
Physicien américain  
1852-1931  
Prix Nobel 1907

De plus, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, on se rend compte que les lois de la mécanique d'une part et de l'électromagnétisme d'autre part ne s'inscrivent pas dans le même cadre spatio-temporel : les transformations de Galilée (§ 9.4.1), associées aux changements d'observateurs en translation uniforme les uns par rapport aux autres, laissent les équations de Newton invariantes, mais pas les



MINKOWSKI Hermann  
Mathématicien  
allemand  
1864-1909

Invariants  
relativistes,  $c$  et  
 $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \ell^2$



EINSTEIN Albert  
1879-1955  
Prix Nobel 1921  
Photo de 1900

Théorie non  
relativiste ou  
relativiste

équations de Maxwell. On introduit alors de nouvelles transformations, appelées transformations de Lorentz (§ 21.3.2), dans lesquelles les coordonnées d'espace et de temps sont simultanément modifiées de manière à ce que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels d'inertie, ce qui permettait d'expliquer le résultat des expériences de Michelson et Morley. Mais la signification physique de cette transformation n'était pas comprise.

En 1905, Einstein introduit le postulat que la vitesse de la lumière dans le vide est une constante universelle et arrive à la conclusion que le concept de simultanéité n'est pas un concept absolu. De plus, ce postulat l'oblige à rejeter également les concepts newtoniens de temps et d'espace absolus et à leur substituer celui d'espace-temps. Lors d'une conférence à Cologne en 1908, Minkowski s'exprime dans les termes suivants : « *Messieurs, les idées d'espace et de temps que je voudrais vous présenter ont germé dans le sol de la physique expérimentale et c'est de là qu'elles tirent leur force. Elles sont radicales. Désormais, l'espace en soi et le temps en soi sont des notions condamnées à périr et ce n'est qu'une sorte d'union des deux qui restera une réalité autonome.* » Dans cette nouvelle approche de l'espace-temps, l'intervalle de temps  $\Delta t$  et l'intervalle de longueur  $\Delta \ell$  dépendent de l'observateur, mais la vitesse de la lumière  $c$  et la grandeur  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta \ell^2$  sont invariants.

Le postulat sur la vitesse de la lumière et les prédictions de la théorie d'Einstein furent brillamment confirmés. Par exemple, en 1964, on a observé que la vitesse de la lumière émise par des particules élémentaires  $\pi^0$  ayant une vitesse de  $0,99975 c$  était égale à  $c$ , indépendamment de la direction d'émission, avec une précision relative de  $10^{-4}$  [7]. On a également observé que la durée de vie de muons de vitesse  $0,9994 c$  était 30 fois plus longue que la durée de vie de muons immobiles [8].

Mentionnons encore l'expérience réalisée en 1971 avec deux horloges atomiques transportées en avion autour du monde, l'une dans la direction Est-Ouest, l'autre dans la direction Ouest-Est [9]. Bien que les horloges fussent synchronisées au départ avec celle de l'observatoire terrestre, elles n'indiquaient pas la même heure à l'arrivée, celle se déplaçant vers l'Ouest avançait de  $273 \cdot 10^{-9}$  s, celle se déplaçant vers l'Est retardait de  $59 \cdot 10^{-9}$  s, en accord avec les prédictions théoriques.

En conclusion, une théorie sera dite *non relativiste* ou *relativiste* selon qu'elle considère  $|\Delta t|^2$  et  $\Delta \ell^2$ , ou  $c^2$  et  $\Delta s^2$ , comme des invariants par rapport aux changements d'observateurs.

Pour terminer cette discussion sur l'unification des concepts d'espace et de temps, nous nous devons d'insister sur le fait qu'il serait faux d'affirmer que l'espace et le temps ont des qualités identiques. En particulier, il sera toujours possible de définir le « passé » et le « futur » d'un événement (§ 21.5.1) et cette distinction introduit une dissymétrie entre l'espace et le temps [10].

### 1.5.5 Évolution temporelle

Le concept de « temps » est relié à deux notions différentes déjà reconnues par Newton :

- la notion d'intervalle de temps entre deux événements, grandeur mesurée par une horloge, analogue à la notion d'intervalle de longueur ;
- la notion de succession dans l'ordre des événements, liée à la notion de causalité, associée à l'image d'un temps qui s'écoule uniformément et qui décrit l'évolution temporelle.

Au cours de l'évolution temporelle, l'état du système se modifie. Cette évolution peut être représentée par une courbe dans l'espace des états, courbe qui sera paramétrisée par un paramètre arbitraire  $\tau$ . Désignons alors par  $\rho(\tau)$  l'état à l'instant  $\tau$  ; l'évolution temporelle d'une observable  $A$  sera définie par la fonction  $a(\tau) = \langle \rho(\tau) ; A \rangle$  qui représente la valeur de  $A$  à l'instant  $\tau$ . Nous aurons en particulier pour les observables « temps », « position », et « quantité de mouvement » d'un point matériel,

$$t(\tau) = \langle \rho(\tau) ; \text{temps} \rangle, \quad x(\tau) = \langle \rho(\tau) ; \text{position} \rangle,$$

$$p(\tau) = \langle \rho(\tau) ; \text{quantité de mouvement} \rangle.$$

On représente l'évolution du point matériel (fig. 1.6) soit par une courbe dans l'espace des états (si l'on étudie des états de mélange), soit par une courbe dans l'espace de phase étendu  $\{x, p, t\}$  (si l'on étudie des états purs).

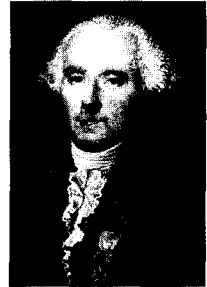
La structure mathématique associée à l'évolution temporelle est basée sur le principe du **déterminisme laplacien** : « Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si, d'ailleurs, elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux. » (Essai philosophique sur les probabilités, 1814.)

Cela signifie que l'état  $\rho$  du système à l'instant  $\tau = 0$ , et les données de l'extérieur à tout instant, déterminent univoquement l'état  $\rho(\tau)$  du système à l'instant  $\tau$ . Ce principe implique que l'évolution est définie par une famille d'applications de l'espace des états dans lui-même,

$$T_\tau : \rho \mapsto T_\tau \rho = \rho(\tau), \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

qui, en vertu de l'interprétation probabiliste que nous avons donnée, doit être linéaire, c'est-à-dire quel que soit  $\alpha \in [0, 1]$

$$T_\tau(\alpha \rho^{(1)} + (1 - \alpha) \rho^{(2)}) = \alpha T_\tau \rho^{(1)} + (1 - \alpha) T_\tau \rho^{(2)}. \quad (1.12)$$



LAPLACE Pierre Simon  
(Marquis de)  
Astronome, physicien  
et mathématicien  
français  
1749-1827

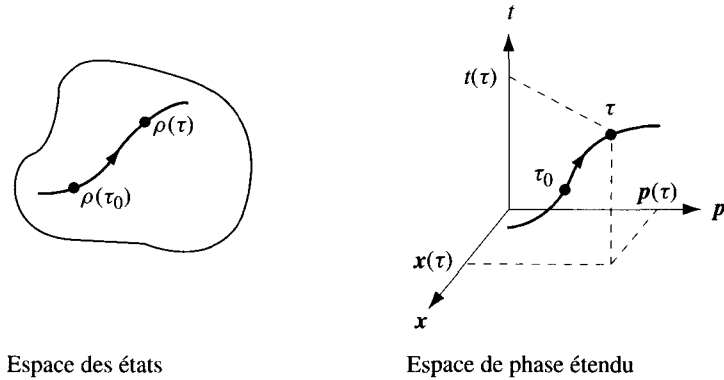


Fig. 1.6 Évolution temporelle du point matériel.

Dans le cadre des théories non relativistes où le temps est universel, le paramètre utilisé pour décrire l'évolution est le temps lui-même et l'on introduit l'espace des *états à un instant  $t$  donné* ou *états instantanés*. Dans ce cas, l'évolution est définie par une famille à deux paramètres de transformations sur l'espace des états instantanés :  $T_{t_2, t_1} \rho$  représente l'état à l'instant  $t_2$  si le système est dans l'état  $\rho$  à l'instant  $t_1$ . Nous avons alors pour tout état  $\rho$

$$T_{t, t} \rho = \rho \quad \text{et} \quad T_{t_2, t_1} (T_{t_1, t_0} \rho) = T_{t_2, t_0} \rho. \quad (1.13)$$

Homogénéité du temps *L'homogénéité du temps pour les systèmes isolés* s'exprime par la condition

$$T_{t_2, t_1} = T_{t_2 - t_1}. \quad (1.14)$$

Évolution non relativiste *Dans une théorie non relativiste, l'évolution temporelle d'un système isolé est décrite par un groupe à un paramètre de transformations sur l'espace des états instantanés :  $T_t \rho$  représente l'état du système à l'instant  $t_0 + t$  si le système est dans l'état  $\rho$  à l'instant  $t_0$  et*

$$T_{t=0} = \mathbb{1} \quad T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_2 + t_1}. \quad (1.15)$$

Il nous faut insister sur le fait que le déterminisme laplacien affirme que l'état à l'instant  $t_0$  détermine aussi bien l'état dans le futur  $t > t_0$  que dans le passé  $t < t_0$ . Au contraire, en thermodynamique, les équations d'évolution permettent uniquement de définir l'état dans le futur et, dans ce cas, on parle de « déterminisme dans le futur ».

## 1.6 THÉORIES CLASSIQUES NON RELATIVISTES

Nous avons vu que dans les théories classiques, un état pur associe à toute observable  $A$  un nombre réel  $a$  qui est la valeur numérique de  $A$ . L'expérience montre qu'il n'est pas possible de préparer le système de manière telle que toutes les observables aient une valeur arbitraire choisie d'avance : ayant fixé un certain nombre de grandeurs, les autres sont univoquement déterminées. Le problème sera alors de trouver un ensemble d'observables qui soit maximal, en ce sens que les valeurs de ces observables déterminent univoquement la valeur de toutes les autres observables du système. Un tel ensemble d'observables constitue un ensemble de **variables** que nous noterons  $X_0, X_1, \dots, X_n$  où  $X_0$  est l'observable « temps ». Par exemple, dans le cas d'un point matériel, on pourra choisir comme variables les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , définissant la position du point matériel, et les trois composantes de la vitesse  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ . En général, on choisira un ensemble de *variables indépendantes* c'est-à-dire que la valeur de ces variables peut être arbitrairement choisie. Si les variables choisies ne sont pas indépendantes, on dit qu'il existe des *contraintes* liant ces variables (par exemple  $x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2$ , dans le cas du pendule de longueur  $\ell$  constante).

Variables

Ayant fait un choix de variables, chaque observable  $A$  est représentée par une fonction  $a = a(t, x_1, \dots, x_n)$ , exprimant la valeur de  $A$  lorsque les variables ont la valeur  $(t, x_1, \dots, x_n)$ . Par exemple, l'énergie cinétique  $T$  du point matériel ci-dessus est représentée par la fonction  $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ .

Nous arrivons ainsi à la conclusion que tout état pur peut être représenté par  $(n+1)$  nombres réels  $(t, x_1, \dots, x_n)$  : l'espace des états purs est un sous-espace  $\Gamma^e$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dans les théories non relativistes, où le temps est le paramètre décrivant l'évolution, l'état pur instantané est représenté par un point de  $\mathbb{R}^n$ . Le sous-espace  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$  décrivant l'ensemble des états purs instantanés est appelé **espace de phase**, tandis que  $\Gamma^e$  est appelé **espace de phase étendu**.

Espace  
de phase

Il faut insister sur le fait que *le choix des variables est arbitraire* et, selon ce choix, la même grandeur sera représentée par différentes fonctions. Dans l'exemple du point matériel, si l'on choisit comme variables les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  définies au paragraphe 4.2.2 et leur dérivée temporelle  $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ , alors la grandeur énergie cinétique  $T$  est maintenant représentée par la fonction

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2).$$

Cependant, les prédictions doivent être indépendantes du choix des variables et, dans certains cas, on s'efforcera de formuler la théorie d'une manière qui ne dépende pas explicitement de ce choix (par exemple un vecteur peut être défini indépendamment du choix des coordonnées).

Principe  
d'objectivité

Dans une théorie classique non relativiste, l'évolution du système sera connue dès que l'on connaît l'évolution des variables, c'est-à-dire les fonctions  $x_i(t)$ , exprimant la valeur de  $X_i$  à l'instant  $t$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . On peut montrer

Évolution  
classique  
non relativiste

[11], qu'il suit des propriétés de l'évolution temporelle que les fonctions  $x_i(t)$  sont solutions d'un système d'équations différentielles (chap. 7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{array} \right. \tag{1.16}$$

Inversement, la donnée des fonctions  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  et des conditions initiales  $x_i(t=0)=x_i^0$  définit univoquement l'évolution temporelle. L'homogénéité du temps s'exprime par le fait que les fonctions  $f_i$  ne dépendent pas explicitement du temps.

En conclusion, le but de la physique classique sera de trouver les fonctions  $a = a(t, x_1, \dots, x_n)$  exprimant la relation entre observables et variables et les fonctions  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  définissant l'évolution.

1.7 MÉCANIQUE

1.7.1 Objet de la mécanique

Systèmes  
mécaniques

La mécanique est l'étude du mouvement – et du repos – de systèmes matériels caractérisés par des observables spatio-temporelles. De façon plus précise, les *systèmes mécaniques* seront définis par un ensemble fini ou infini de points matériels soumis à des forces appliquées supposées connues, ainsi qu'à des forces de liaison (inconnues). Il est intéressant de relever ici la démarche suivie par Newton qui, en partant de l'observation des corps, est arrivé au modèle du *point matériel*, pour ensuite concevoir ces mêmes corps, non plus comme des points, mais comme formés d'un ensemble de points matériels. Remarquons aussi que la notion de « point » n'est pas prise au sens du mathématicien, mais au sens du physicien : c'est un système dont les états purs sont définis par 7 paramètres correspondant au temps  $t$ , à la position  $\mathbf{x}$  et à la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$ . Ce concept de point matériel pourra être appliqué à des objets aussi grands que la Terre, le Soleil ou la Galaxie, mais ne pourra pas s'appliquer à la boule sur la table de billard.

But de la mécanique

Le but de la mécanique, tel qu'il est présenté par Newton dans la préface des *Principia*, comporte deux aspects : « *trouver* les forces qu'emploie la Nature, par les Phénomènes du mouvement que nous connaissons, et *démontrer* ensuite, par là, les autres Phénomènes ».

Les systèmes que nous considérons dans ce livre sont caractérisés par des ordres de grandeur qui sont ceux du laboratoire (jusqu'aux dimensions du système solaire). Cependant, la théorie que nous allons développer possède



différents prolongements qui seront nécessaires pour étudier les systèmes au niveau de l'atome, au niveau de l'univers, et à des vitesses proches de celle de la lumière (fig. 1.7). De plus, la mécanique classique est la base pour étudier des systèmes plus complexes (fluides, corps déformables) et pour comprendre l'origine microscopique de la thermodynamique (mécanique statistique, théorie cinétique). En fait, les idées, résultats et méthodes de la mécanique vont se retrouver dans presque tous les domaines de la physique.

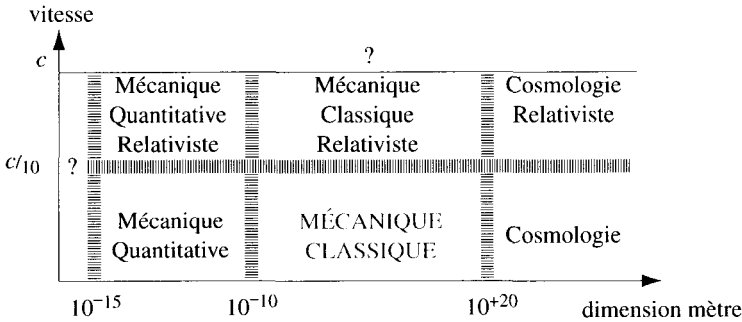


Fig. 1.7 Place de la mécanique classique.

### 1.7.2 Développements historique de la mécanique

Le développement de la mécanique s'est effectué en trois étapes. Cette étude commence avec Aristote (384-322 av. J.-C.) et Archimède (287-212 av. J.-C.) pour se poursuivre de manière *qualitative* jusqu'à Galilée (1564-1642), Kepler (1571-1636), et Huygens (1629-1695). Avec Newton (1642-1727), on voit apparaître une étape *quantitative*, étape poursuivie par Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Jacobi (1804-1851) et Hamilton (1805-1865). A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, confronté à l'impossibilité de résoudre le problème à 3 corps, et à la difficulté d'expliquer l'apparition du hasard à partir d'équations purement déterministes, Poincaré (1854-1912) revient à une description *qualitative*. Cette description cherche à obtenir des résultats généraux sur l'évolution sans connaître la solution des équations du mouvement (1.16); elle se poursuivra jusqu'à aujourd'hui, en particulier avec les travaux de Kolmogoroff (1903-), Moser (1928-) et Arnold (1937-).

### 1.7.3 Marche à suivre pour la résolution des problèmes

Les problèmes étudiés en mécanique appartiennent à l'un des trois groupes suivants :

- *Expérimental*. On connaît l'évolution temporelle du système et l'on désire trouver les forces responsables du mouvement.
- *Théorique*. On connaît les forces et l'état à un instant initial, et l'on désire trouver l'évolution temporelle.
- *Problèmes avec contraintes*. On connaît une partie des forces et certaines informations sur l'évolution (par exemple la trajectoire). On désire alors trouver l'évolution temporelle et les forces inconnues.

L'expérience de l'enseignement montre qu'il est nécessaire d'être systématique dans la résolution des problèmes et nous engageons le lecteur à adopter le schéma suivant, ... après avoir lu la donnée du problème.

● **Description**

1. Définir le ou les systèmes étudiés ; faire un dessin.
2. Choisir un référentiel.
3. Définir les contraintes.
4. Dessiner les forces.
5. Choisir les variables (= coordonnées).

● **Résolution**

6. Choisir les lois applicables.
7. Exprimer les grandeurs intervenant dans les lois et les contraintes au moyen des variables choisies.
8. Écrire les équations du mouvement.
9. Étude qualitative, puis explicite (si possible) des solutions.

● **Interprétation**

10. Discussion des résultats ; regarder des cas particuliers très simples à titre de contrôle.

## 1.8 PROBLÈMES

**Histogramme 1.8.1** En répétant la mesure de la longueur  $L$  d'un pendule, on a obtenu les résultats suivants (en mètres) :

1,500 ; 1,502 ; 1,503 ; 1,502 ; 1,504 ; 1,502 ; 1,502 ; 1,501 ; 1,499 ;  
 1,501 ; 1,502 ; 1,503 ; 1,502 ; 1,501 ; 1,504 ; 1,502 ; 1,501 ; 1,502 ;  
 1,504 ; 1,501.

Dessiner l'histogramme des résultats. Calculer la moyenne  $\langle L \rangle$  et l'écart quadratique moyen  $\Delta L$ . Estimer la distribution de probabilité de la longueur.

En admettant que la période  $T$  des oscillations du pendule est reliée à sa longueur par la formule  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$  ( $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ), évaluer la moyenne  $\langle T \rangle$  et l'écart quadratique moyen  $\Delta T$  de la période du pendule.

**Relation d'incertitude 1.8.2** En utilisant la relation d'incertitude (1.9) et les valeurs numériques de la section 3.3 :

- évaluer l'incertitude minimale  $\Delta v$  sur la mesure de la vitesse d'un proton dont la position est connue avec une incertitude  $\Delta x$  de 1 fermi ( $= 10^{-15} \text{ m}$ ) ;
- même question pour un atome d'hydrogène dont la position est localisée avec une incertitude de 1 Ångström ( $= 10^{-10} \text{ m}$ ) ;

- même question pour une cellule ( $m \cong 10^{-12}$  kg) dont la position est localisée avec une incertitude de 1 micron ( $= 10^{-6}$  m).

**1.8.3** Dans un univers unidimensionnel, un roi demande à ses géomètres de mesurer les distances entre trois planètes. Les géomètres reviennent en affirmant que les planètes sont équidistantes les unes des autres.

Espace euclidien ou non

1. Est-ce que le roi peut construire dans son palais un modèle réduit de l'univers ?
2. Est-ce que le roi peut faire confiance aux géomètres ?

**1.8.4** La durée de vie d'un  $\pi^0$  immobile est  $\tau = 0,87 \cdot 10^{-16}$  s. Quelle sera la distance parcourue par un  $\pi^0$  de vitesse  $v = 0,9999c$ , si l'on admet l'hypothèse de Newton (temps absolu) ?

Temps relativiste

La théorie d'Einstein (chap. 21) prédit que la durée de vie d'un  $\pi^0$  de vitesse  $v$  est  $\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$ . Quelle sera la durée de vie du  $\pi^0$  (de vitesse  $v = 0,9999c$ ), et quelle sera la distance parcourue, si l'on admet la théorie d'Einstein ?

**1.8.5** Vérifier que l'évolution temporelle définie sur l'espace de phase  $\mathbb{R}^6$ , associé aux variables

Évolution temporelle : balistique

$$(x, p) = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$$

par la transformation

$$\Phi_t : \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ p^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = x^{(0)} + \frac{1}{m} p^{(0)} t + \frac{1}{2} g t^2 \\ p(t) = p^{(0)} + m g t \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

où  $m$  et  $g$  sont des constantes, satisfait la propriété de groupe :

$$\Phi_{t=0} = \mathbb{1} \quad ; \quad \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_2+t_1}.$$

Trouver le système d'équations différentielles (1.16) associé à cette évolution (qui décrit la chute libre d'un corps à la surface de la Terre).

**1.8.6** Reprendre le problème 1.8.5 avec l'évolution temporelle définie par la transformation

Évolution temporelle : ressort

$$\Phi_t : \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ p^{(0)} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = x^{(0)} \cos wt + \frac{p^{(0)}}{mw} \sin wt \\ p(t) = -mw x^{(0)} \sin wt + p^{(0)} \cos wt \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

où  $m$  et  $w$  sont des constantes (c'est le mouvement oscillatoire harmonique).



## CHAPITRE 2

# UNITÉS ET SIMILITUDES : UNE AUTRE APPROCHE DE LA PHYSIQUE

### 2.1 SYSTÈMES D'UNITÉS ET DIMENSIONS

#### 2.1.1 Mesure d'une observable

Nous avons vu qu'une *observable* est une grandeur qu'il est possible de définir et de mesurer : poids d'un corps, distance Terre-Soleil, température de l'air, ... Ayant défini l'observable  $A$ , la première étape consiste à choisir une *unité*, notée  $[A]$ , et à construire un *appareil de mesure* : l'appareil établit une correspondance entre la valeur de  $A$  et la position d'une aiguille ; l'unité définit une échelle graduée sur le cadran. Unité

Le résultat de la mesure, noté  $\langle A \rangle$  ou simplement  $A$ , s'exprime par un nombre réel  $a$  ( $=$  valeur numérique de  $A$ ) auquel on associe l'unité choisie

$$A = a[A].$$

#### 2.1.2 Remarques

Le choix de l'unité est entièrement arbitraire. Suivant les pays ou les domaines étudiés, on utilise différentes unités (sect. 2.9) parce qu'elles apparaissent plus naturelles ou qu'elles apportent des simplifications. Choix des unités

Dans ce chapitre, nous représentons par le même symbole  $A$  la grandeur et le résultat de la mesure. Par la suite, suivant l'usage, nous ne ferons plus de distinction de notation entre la grandeur, le résultat de la mesure, et la valeur numérique.

Il est évident que le résultat numérique n'a aucune signification si l'on ne précise pas l'unité choisie, mais les prédictions de la théorie ne devront pas dépendre de ce choix. Nous verrons que cette *invariance par rapport au choix des unités* conduit à des méthodes d'investigation qui sont d'autant plus utiles que les phénomènes étudiés sont complexes. Invariance par rapport au choix des unités

2.1.3 Grandeurs fondamentales et dérivées

Dimension      Deux observables qui peuvent être mesurées avec la même unité sont dites de **même dimension**.  
Une observable est une **constante** si la valeur numérique est un nombre fixé qui ne dépend que de l'unité choisie.

Grandeur fondamentale      Une grandeur définie par une unité arbitrairement choisie, sans référence à d'autres grandeurs mesurables, est appelée **grandeur fondamentale**, et l'unité correspondante est dite **unité fondamentale**. Cependant, l'expression « fondamentale » ne signifie pas que ces grandeurs ont plus d'importance que les autres.

Le nombre et le choix des grandeurs fondamentales est en principe arbitraire. En mécanique on adopte généralement trois grandeurs fondamentales : la *longueur*, le *temps* et la *masse*.

Grandeur dérivée      Les autres grandeurs, appelées **grandeurs dérivées**, sont définies au moyen de relations algébriques entre les grandeurs fondamentales. Par exemple, la grandeur

$$X = c A^{n_1} B^{n_2} \tag{2.1}$$

où  $A$  et  $B$  sont des grandeurs fondamentales, et  $c, n_1, n_2$  sont des nombres fixés indépendants des unités choisies, est la grandeur définie par la valeur numérique  $x = c a^{n_1} b^{n_2}$  et l'unité  $[X] = [A]^{n_1} [B]^{n_2}$ .

Equation aux dimensions      D'une manière générale, une grandeur dérivée  $X$  est ainsi définie par une fonction  $x = x(a_1, \dots, a_k)$  et une *équation aux dimensions* : la fonction exprime la valeur numérique de  $X$  lorsque les grandeurs fondamentales  $A_i$  ont les valeurs  $a_i$  ; l'équation aux dimensions est une formule exprimant l'unité  $[X]$  – et par conséquent la dimension de  $X$  – au moyen des unités fondamentales. On écrira également  $X = X(A_1, \dots, A_k)$ .

Système d'unités      On appelle **système d'unités** l'ensemble des unités fondamentales choisies. Le système d'unités définit également l'unité associée à n'importe quelle grandeur dérivée.

**Exemples.** En prenant la longueur  $[L]$ , le temps  $[T]$  et la masse  $[M]$  comme unités fondamentales, on introduira par exemple les grandeurs dérivées indiquées sur le tableau 2.1.

Tableau 2.1 Exemple de grandeurs dérivées.

Grandeur	Définition	Valeur numérique	Unité
Vitesse	$V = \frac{dL}{dT}$	$v = \frac{d\ell}{dt}$	$[V] = [L][T]^{-1}$
Accélération	$A = \frac{dV}{dT}$	$a = \frac{dv}{dt}$	$[A] = [L][T]^{-2}$
Energie cinétique	$E^{\text{cin}} = \frac{1}{2}MV^2$	$e^{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$	$[E^{\text{cin}}] = [M][L]^2[T]^{-2}$

Grandeurs sans dimension

Les grandeurs dont la valeur numérique est indépendante des systèmes d'unités considérés sont dites *sans dimension*. Par exemple, si *A* et *B* sont deux observables de même dimension, alors l'observable *A/B* est la grandeur sans dimension qui représente la valeur de *A* si l'on prend *B* comme unité.

Cette distinction entre grandeurs dimensionnées et grandeurs sans dimension est toutefois une question de convention. Ainsi, on admet en physique que l'angle est une grandeur sans dimension définie par le rapport de la longueur de l'arc à la longueur du rayon de la circonférence. Dans d'autres domaines, on sera amené à exprimer l'angle au moyen de différentes unités (tour, degré, radian, ‰, ...) et l'angle sera alors une grandeur dimensionnée.

La vitesse est généralement considérée comme une grandeur dimensionnée ; cependant, ayant observé que la vitesse de la lumière dans le vide *c* est une constante, il est possible de poser *c* = 1 ; cela revient à définir la vitesse d'un point comme le rapport entre le temps mis par le point et le temps mis par la lumière pour parcourir une même distance. De cette manière, l'unité de longueur s'identifie à l'unité de temps (c'est la longueur parcourue par la lumière dans le vide pendant l'unité de temps) et la vitesse est une grandeur sans dimension. Ce point de vue est celui adopté dans les théories relativistes.

2.1.4 Dimension d'une grandeur dérivée

**Théorème.** La dimension d'une grandeur dérivée est un monôme en puissance des dimensions des grandeurs fondamentales,

$$[X] = \prod_{i=1}^k [A_i]^{n_i}.$$

(2.2)

Ce théorème, qui est du reste intuitif, est démontré dans l'Appendice A.

Il en découle qu'il n'est possible d'additionner que des grandeurs ayant même dimension et même unité. En particulier, tous les termes d'une équation physique devront avoir même dimension. *La vérification de la dimension des termes d'une équation sera un contrôle très utile.*

Analyse  
dimensionnelle

## 2.2 LOIS

### 2.2.1 De l'observation aux lois

Considérons trois observables  $A$ ,  $B$  et  $G$  définies de façon indépendante et supposons que l'expérience montre que l'expression numérique  $ga^{-n_1}b^{-n_2}$  est une constante  $k$  qui ne dépend que du système d'unités (avec  $n_1, n_2$ , des constantes sans dimension). Nous pouvons conclure que la grandeur  $K = GA^{-n_1}B^{-n_2}$  est une constante, de dimension  $[K] = [G][A]^{-n_1}[B]^{-n_2}$ . L'expérience a ainsi établi l'existence d'une loi que nous exprimons sous la forme

$$G = KA^{n_1}B^{n_2} \quad (2.3)$$

soit

$$g = ka^{n_1}b^{n_2} = g(a, b) \quad (2.4)$$

où  $k$  est une constante qui dépend du système d'unités.

La relation (2.3) ne dépend pas des unités ; cependant, contrairement à l'expression d'une grandeur dérivée (2.1), la constante  $K$  peut avoir une dimension et la fonction  $g(a, b)$  dépend du système d'unités.

Plus généralement, ayant introduit les observables  $A_1, \dots, A_n$  et  $G$  de façon indépendante, il se peut que la valeur  $g$  de  $G$  soit univoquement déterminée par les valeurs  $a_i$  des observables  $A_i$ , c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $g = g(a_1, \dots, a_n)$  telle que la donnée  $A_i = a_i[A_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , implique

Loi  $G = g(a_1, \dots, a_n)[G]$ . On dira alors qu'il existe une **loi**. Cette relation entre les observables  $A_1, \dots, A_n$  et  $G$  faisant intervenir des constantes dimensionnées, la fonction  $g(a_1, \dots, a_n)$  dépend du système d'unités. Au contraire, la fonction  $g(a_1, \dots, a_n, k_1, \dots, k_\ell)$ , dans laquelle apparaissent explicitement les constantes dimensionnées, ne dépend pas du système d'unités et la fonction  $G(A_1, \dots, A_n, K_1, \dots, K_\ell)$  est une relation entre observables indépendante des systèmes d'unités.

### 2.2.2 Remarque : définition ou loi

Il faut remarquer que toutes les lois n'ont pas le même degré de généralité : certaines lois ne sont valables que pour des systèmes particuliers (loi de Titius-Bode § 1.1.3), d'autres ne sont valables que sous certaines conditions (loi de Hooke § 12.7.3, loi de Stokes § 12.3.2), d'autres encore sont valables dans tout un domaine de la physique (lois de Newton sect. 10.4), finalement certaines lois sont considérées aujourd'hui comme universelles (conservation de l'énergie sect. 13.6).

D'autre part, il faut mentionner que la distinction entre « loi » et « définition » n'est pas toujours clairement établie. Ainsi pour Newton, la quantité de mouvement  $p$  est définie par  $p = mv$  alors qu'aujourd'hui on considère  $p = mv$  comme une loi de la mécanique classique (§ 10.2.2).

### 2.2.3 Diminution du nombre de grandeurs fondamentales

Ayant établi l'existence d'une loi, il sera possible dans certains cas de considérer que l'une des grandeurs  $A_i$  ou  $G$  est une grandeur dérivée des autres, et



de choisir les unités de sorte que la loi se simplifie. De cette manière, on diminuera le nombre de grandeurs fondamentales.

Par exemple, ayant introduit les cinq grandeurs fondamentales, longueur, temps, masse, force et charge électrique, l'expérience établira les lois suivantes :

$$\text{Loi de Newton} \quad F = K M A \quad (2.5)$$

$$\text{Loi de Coulomb} \quad F = \bar{K} \frac{Q_1 Q_2}{|X|^3} X \quad (2.6)$$

$$\text{Loi de la gravitation} \quad F = -G \frac{M_1 M_2}{|X|^3} X \quad (2.7)$$

où  $K$ ,  $\bar{K}$ ,  $G$  sont des constantes dimensionnées ( $F$ ,  $M$ ,  $A$ ,  $Q$ ,  $X$  représentent les grandeurs force, masse, accélération, charge et position).

Nous pouvons alors choisir des systèmes d'unités tels que  $K = 1$  et la loi de Newton s'exprime simplement par  $F = MA$ . Si l'on adopte ce point de vue, la force n'est plus une grandeur fondamentale, mais une grandeur dérivée, d'unité  $[F] = [M][L][T]^{-2}$ .

5, 4, 3, 2 ou 1  
grandeurs  
fondamentales

De façon analogue on peut choisir des systèmes d'unités tels que  $\bar{K} = 1$  (c'est le cas du système CGS-électrostatique) et la loi de Coulomb s'exprime par  $F = Q_1 Q_2 |X|^{-3} X$ ; si l'on adopte ce point de vue (et  $K = 1$ ), la charge devient une grandeur dérivée, d'unité  $[Q] = [M]^{1/2} [L]^{3/2} [T]^{-1}$ .

Finalement, on pourrait considérer des systèmes d'unités tels que  $G = 1$ ; si l'on prend  $K = G = 1$ , la force et la masse deviennent des grandeurs dérivées, d'unité  $[F] = [L]^4 [T]^{-4}$  et  $[M] = [L]^3 [T]^{-2}$ . En relativité générale, on utilise souvent le système d'unités défini par  $K = G = c = \bar{K} = 1$ , et dans ce cas il n'y a plus que la longueur comme grandeur fondamentale.

### 2.3 ANALYSE DIMENSIONNELLE ET LOIS D'ÉCHELLE

Il est possible d'établir des lois qualitatives en se basant uniquement sur la notion de dimension : ce sont les lois d'échelle que nous illustrerons au moyen de l'exemple suivant tiré du livre de J. Smith [12]. Dans le désert, les animaux doivent franchir de grandes distances entre les sources d'eau. Quelle est la relation entre la taille  $L$  de l'animal et le temps  $T$  pendant lequel il peut courir ?

Illustration

Pour répondre à cette question, on remarque que les réserves d'eau dans le corps sont proportionnelles au volume du corps, soit à  $L^3$ . L'évaporation d'autre part est proportionnelle à la surface du corps et au temps, soit à  $L^2 T$ . Par conséquent, le temps maximal pendant lequel l'animal peut courir est tel que  $L^3 = K L^2 T$ , c'est-à-dire que le temps est proportionnel à la taille.

## 2.4 CHANGEMENTS D'UNITÉS ET HOMOGÉNÉITÉ

### 2.4.1 Formules de transformation

Considérons deux systèmes d'unités, notés [ ] et [ ' ]. Pour toute observable  $A$ , nous avons

$$\langle A \rangle = a [A] = a' [A]'. \quad (2.8)$$

Par exemple,  $\langle L \rangle = 0,9144 \text{ m} = 3 \text{ ft}$ .

Soit  $A'_0$  l'observable définissant la nouvelle unité  $[A]'$ ; comme le rapport de deux observables de même dimension est sans dimension, on a

$$\langle A'_0 \rangle = 1 [A]' = \alpha [A] \quad \text{et} \quad \frac{\langle A \rangle}{\langle A'_0 \rangle} = \frac{a'}{1} = \frac{a}{\alpha}$$

où  $\alpha$  est la valeur numérique de la nouvelle unité mesurée avec l'ancienne unité. Ainsi

$$\text{Changement d'unités} \quad 1 [A]' = \alpha [A] \quad \text{implique} \quad a' = \alpha^{-1} a \quad (2.9)$$

et réciproquement.

Considérons ensuite la grandeur dérivée (2.1)  $X = c A^{n_1} B^{n_2}$ . Pour le changement d'unité

$$1 [A]' = \alpha [A] \quad 1 [B]' = \beta [B]$$

nous aurons selon (2.9)

$$x' = c a'^{n_1} b'^{n_2} = c (\alpha^{-1} a)^{n_1} (\beta^{-1} b)^{n_2}$$

d'où  $x' = \alpha^{-n_1} \beta^{-n_2} x$ .

Nous voyons par ailleurs que

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= x [X] = x [A]^{n_1} [B]^{n_2} \\ &= x' [X]' = x' [A']^{n_1} [B']^{n_2} = x' \alpha^{n_1} \beta^{n_2} [A]^{n_1} [B]^{n_2} \end{aligned}$$

et  $1 [X]' = \alpha^{n_1} \beta^{n_2} [X]$ .

Par conséquent, il sera possible de manipuler les équations contenant des unités comme les équations numériques. Par exemple, on pourra remplacer l'expression  $[A]^n$  par  $\alpha^n [A]^n$ .

### 2.4.2 Exemple

Considérons un point matériel obéissant aux deux lois

$$F = MA \quad (2.10)$$

$$F = -G \frac{M_1 M_2}{|X|^3} X \quad (2.11)$$

Dans le Système International (§ 2.9.1) où

$$[L] = \text{m} \quad [M] = \text{kg} \quad [T] = \text{s} \quad (2.12)$$

Système  
International

nous avons

$$[F] = [M][L][T]^{-2} = \text{kg m s}^{-2}$$

$$[G] = [M]^{-1}[L]^3[T]^{-2} = \text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$$

et  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} [G]$ .

Dans le système d'unités anglo-saxon (§ 2.9.2) défini par

$$[L]' = \text{ft} \quad [F]' = \text{lb} \quad [T]' = \text{s}$$

Système anglo-saxon

ft = foot = pied  
lb = pound = livre

où  $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$  et  $1 \text{ lb} = 4,448 \text{ kg m s}^{-2}$

nous aurons

$$[M]' = [F]'[L]'^{-1}[T]^2 = \text{lb ft}^{-1} \text{s}^2$$

et

$$1 [M]' = \frac{4,448}{0,3048} \text{ kg} = 14,59 \text{ kg}.$$

De plus,

$$[G]' = [F]'^{-1}[L]'^4[T]'^{-4} = \text{lb}^{-1} \text{ft}^4 \text{s}^{-4}$$

et

$$G = g' [G]' = g' \frac{(0,3048)^4}{4,448} [G] = 6,67 \cdot 10^{-11} [G]$$

d'où  $g' = 3,44 \cdot 10^{-8}$ .

### 2.4.3 Théorème d'homogénéité

Toute relation entre les observables  $A_1, \dots, A_n$  et  $G$  – variables et constantes dimensionnées – s'exprime par une fonction  $g = g(a_1, \dots, a_n)$  homogène, c'est-à-dire que pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$g(\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_n a_n) = \gamma g(a_1, \dots, a_n) \quad (2.13)$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma$ , sont des coefficients associés au changement d'unités inverse

Attention à la  
notation

$$1 [A_i] = \alpha_i [A_i]', \quad 1 [G] = \gamma [G]' \quad \text{d'où} \quad a'_i = \alpha_i a_i \quad \text{et} \quad g' = \gamma g.$$

La démonstration de ce théorème, conséquence naturelle de la discussion précédente, est similaire à la démonstration du théorème (2.1.4).

## 2.5 APPLICATIONS DU THÉORÈME D'HOMOGENÉITÉ

Le théorème (2.4.3) permet d'obtenir certaines relations entre les observables sans connaître les lois qui régissent les phénomènes considérés.

Dans les exemples qui suivent, nous choisissons la longueur, le temps et la masse comme grandeurs fondamentales et considérons les changements d'unités définis par

$$\begin{array}{l} \text{Changements} \\ \text{d'unités} \end{array} \quad \ell' = \lambda \ell \quad t' = \tau t \quad m' = \mu m. \quad (2.14)$$

### 2.5.1 Pendule mathématique plan

Un pendule de masse  $m$  et de longueur  $\ell$  est lâché sans vitesse initiale d'une position initiale  $\theta_0$  (fig. 2.2).

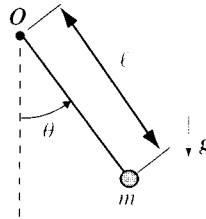


Fig. 2.2 Pendule mathématique.

Lorsque les frottements sont négligeables, les seuls paramètres du problème sont  $(\theta_0, \ell, m, g)$  où  $g$  est l'accélération terrestre à l'endroit considéré. La période  $T$  du mouvement est une fonction des paramètres du problème, d'où

$$T = T(\theta_0, \ell, m, g). \quad (2.15)$$

De  $[g] = [L][T]^{-2}$ , il suit que pour tout changement d'unités (2.14) nous avons  $g' = \lambda \tau^{-2} g$  et, quels que soient  $(\lambda, \tau, \mu)$ , le théorème (2.4.3) implique

$$T(\theta_0, \lambda \ell, \mu m, \lambda \tau^{-2} g) = \tau T(\theta_0, \ell, m, g) \quad (2.16)$$

En choisissant les valeurs

$$\lambda = \ell^{-1} \quad \mu = m^{-1} \quad \tau^2 = g/\ell \quad (2.17)$$

nous obtenons

$$T(\theta_0, 1, 1, 1) = T(\theta_0) = \sqrt{g/\ell} T(\theta_0, \ell, m, g)$$

d'où, quels que soient  $(\ell, m, g)$ ,

$$T(\theta_0, \ell, m, g) = \sqrt{\ell/g} T(\theta_0) \quad (2.18)$$

avec  $T(\theta_0)$  une fonction qu'il faudra déterminer.

En conséquence, la période du pendule est indépendante de la masse et elle est proportionnelle à  $\sqrt{\ell/g}$ . En particulier les périodes  $T_1$  et  $T_2$  de deux pendules de longueur  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , lâchés d'un même angle initial  $\theta_0$ , satisfont la relation

Période d'un pendule

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}. \quad (2.19)$$

De même, l'évolution temporelle est définie par une fonction

$$\theta = \theta(t, \theta_0, \ell, m, g)$$

et, du théorème (2.4.3), on a (avec  $\gamma = 1$ , car  $[\theta]$  n'est pas modifiée)

$$\theta(\tau t, \theta_0, \lambda \ell, \mu m, \lambda \tau^{-2} g) = \theta(t, \theta_0, \ell, m, g).$$

En particulier, en choisissant les valeurs (2.17), on a

$$\theta(\sqrt{g/\ell} t, \theta_0, 1, 1, 1) = f(\theta_0, \sqrt{g/\ell} t) = \theta(t, \theta_0, \ell, m, g)$$

c'est-à-dire que l'évolution est de la forme

$$\theta(t) = f(\theta_0, \sqrt{g/\ell} t). \quad (2.20)$$

Par conséquent, si l'on considère deux pendules de longueur  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , lâchés d'un même angle initial  $\theta_0$ , les évolutions  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$  satisfont la relation

$$\theta_2(t) = \theta_1(\sqrt{\ell_1/\ell_2} t). \quad (2.21)$$

En conclusion, connaissant l'évolution d'un pendule de longueur  $\ell$  on en déduit l'évolution d'un pendule de longueur arbitraire.

### 2.5.2 Objet en mouvement dans un fluide au repos

Considérons un objet se déplaçant à la vitesse  $v$  constante dans un fluide incompressible au repos (fig.2.3).

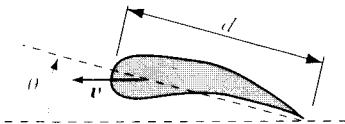


Fig. 2.3 Aile d'avion :  $\theta$  est l'angle d'attaque et  $d$  une dimension.

L'expérience montre que pour une forme donnée de l'objet, la force  $f$  nécessaire pour maintenir  $v$  constant dépend des paramètres  $(\theta, d, v)$  de l'objet, et

des paramètres  $(\rho, \eta)$  du fluide où  $\rho$  est la masse spécifique du fluide (§ 10.2.1) et  $\eta$  la viscosité (§ 12.3.2) :

$$[\rho] = [M][L]^{-3}, \quad [\eta] = [M][L]^{-1}[T]^{-1} \quad \text{et} \quad [F] = [M][L][T]^{-2}.$$

Nous avons ainsi  $f = f(\theta, d, v, \rho, \eta)$  et le changement d'unité (2.14) avec le théorème (2.4.3) implique

$$f(\theta, \lambda d, \lambda \tau^{-1} v, \mu \lambda^{-3} \rho, \mu \lambda^{-1} \tau^{-1} \eta) = \mu \lambda \tau^{-2} f(\theta, d, v, \rho, \eta)$$

quels que soient  $(\lambda, \tau, \mu)$ . En choisissant

$$\lambda = d^{-1}, \quad \tau = d^{-1} v, \quad \mu = \rho^{-1} d^{-3} \quad (2.22)$$

nous obtenons

$$f(\theta, 1, 1, 1, \rho^{-1} d^{-1} v^{-1} \eta) = \rho^{-1} d^{-2} v^{-2} f(\theta, d, v, \rho, \eta). \quad (2.23)$$

Force sur l'objet

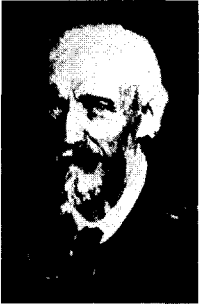
En conséquence, la force s'exprime par une relation de la forme

$$f(\theta, d, v, \rho, \eta) = \rho d^2 v^2 \varphi(\theta, R_e) \quad (2.24)$$

où  $R_e$  est la grandeur sans dimension, appelée **nombre de Reynolds**, définie par

$$R_e = \frac{\rho d v}{\eta}. \quad (2.25)$$

Ce résultat montre que la grandeur qu'il faut déterminer – expérimentalement ou théoriquement – est la fonction  $\varphi(\theta, R_e)$  ; c'est l'un des problèmes importants en mécanique des fluides (sect. 12.4).



REYNOLDS Osborne  
Ingénieur et Physicien  
britannique  
1842-1912

## 2.6 CHANGEMENTS D'UNITÉS ET CHANGEMENTS D'ÉTAT

### 2.6.1 Point de vue passif : changement d'unités

Nous avons vu qu'en physique classique, l'état d'un système est défini par  $(n + 1)$  variables  $(X_0 = \text{temps}, X_1, \dots, X_n)$ . Ayant choisi un système d'unités, toute observable  $A$  est alors représentée par une fonction  $a(t, x_1, \dots, x_n)$ . On écrira indifféremment  $x_0$  ou  $t$  pour la valeur du temps.

Introduisons un nouveau système d'unités ; nous avons

$$\langle X_i \rangle = x_i [X_i] = x'_i [X_i]' \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.26)$$

où

$$x'_i = \xi_i x_i \quad \text{et} \quad 1 [X_i] = \xi_i [X_i]'$$

Ainsi, à toute valeur  $(x_0, \dots, x_n)$  des variables par rapport aux unités  $[X_i]$ , on peut associer  $(x'_0, \dots, x'_n)$ , valeur de ces mêmes variables par rapport aux nouvelles unités  $[X'_i]$  : le changement d'unités définit une transformation  $T$  sur l'espace  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,

$$T: (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x'_0, \dots, x'_n). \quad (2.27) \quad \text{Changement d'unités}$$

Le **point de vue passif** considère la transformation  $T$  comme elle a été introduite : c'est un changement d'unités sans modification de l'état. L'observable  $A$  sera alors représentée par une nouvelle fonction, soit  $a'(x'_0, \dots, x'_n)$ .

De façon explicite, soit  $A(X_0, \dots, X_n, K_1, \dots, K_\ell)$  la relation exprimant l'observable  $A$  en fonction des variables  $X_i$  et des constantes dimensionnées  $K_j$ , alors

$$a(x_0, \dots, x_n) = a(x_0, \dots, x_n, k_1, \dots, k_\ell) \quad (2.28)$$

et

$$a'(x'_0, \dots, x'_n) = a(x'_0, \dots, x'_n, k'_1, \dots, k'_\ell) \quad (2.29)$$

où  $k_j$  et  $k'_j$  sont les valeurs numériques des constantes dans l'ancien et le nouveau système d'unités.

### Exemple 1. Point matériel attaché à un ressort

Considérons un point matériel attaché à un ressort harmonique unidimensionnel ; c'est un système décrit par les variables  $(t, \ell, v)$  et obéissant aux lois

$$F = MA \quad \text{et} \quad F = -KL \quad \text{Lois}$$

où  $L$  est l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre et  $(M, K)$  sont des constantes (fig. 2.4).

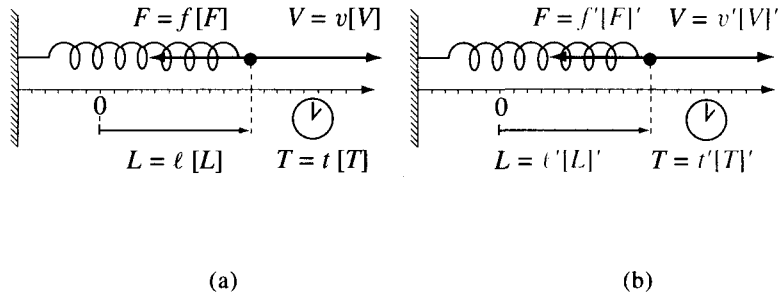
Le changement d'unités

$$1[L] = \lambda [L]', \quad 1[T] = \tau [T]', \quad 1[M] = 1[M]' \quad (2.30)$$

est illustré sur la figure 2.4 où l'état n'est pas modifié. Ce changement d'unités induit la transformation sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  définie par

$$T: (t, \ell, v) \mapsto (t' = \tau t, \ell' = \lambda \ell, v' = \lambda \tau^{-1} v). \quad (2.31)$$

Cette tranformation (2.31) exprime les nouvelles valeurs du temps, de la position et de la vitesse lors du changement d'unités (2.30) ; la valeur numérique de la force ( $F = MA$ ) devient  $f' = \lambda \tau^{-2} f$ , et la valeur de la constante de rappel ( $K = -FL^{-1}$ ) devient  $k' = \tau^{-2} k$ . Passif



**Fig. 2.4** Changement d'unités ; point de vue passif : l'état du système n'est pas modifié.

### Exemple 2. Force gravifique

Considérons un point matériel décrit par les variables  $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  et obéissant aux lois

$$\text{Lois} \quad \mathbf{F} = M\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = -G \frac{M_1 M}{|\mathbf{X}|^3} \mathbf{X}.$$

Le changement d'unités (2.30) induit la transformation sur  $\mathbb{R}^7$  définie par

$$T: (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto (t' = \tau t, \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}, \mathbf{v}' = \lambda \tau^{-1} \mathbf{v}) \quad (2.32)$$

Lors de ce changement d'unités, la valeur numérique de la force devient  $f' = \lambda \tau^{-2} f$ , et la valeur  $g$  de la constante de la gravitation  $G$  sera  $g' = \lambda^3 \tau^{-2} g$ .

### 2.6.2 Point de vue actif : changement d'état

Changement  
d'échelle

Le **point de vue actif** considère la transformation  $T$  (2.27) comme un changement de l'état du système sans modification des unités.

Dans ce nouvel état, nous avons  $X'_i = x'_i[X_i]$ ; cela signifie que si l'ancien état était défini par  $(t, x_1, \dots, x_n)$  alors le nouvel état est défini par  $(t', x'_1, \dots, x'_n)$ . Comme il n'y a pas de changement d'unités, les observables sont représentées par les mêmes fonctions, d'où  $A' = a'[A]$  avec  $a' = a(t', x'_1, \dots, x'_n)$  et les constantes dimensionnées ne sont pas modifiées. La transformation (2.27) associée au point de vue actif est souvent appelée un *changement d'échelle*.

Point matériel  
attaché à un ressort

Dans l'exemple 1 du paragraphe 2.6.1, le point de vue actif revient à considérer une nouvelle position, une nouvelle vitesse et un nouveau temps du même système (fig. 2.5). Dans ce *nouvel état*, la valeur de la force est  $f' = -k\ell' = \lambda f$ .



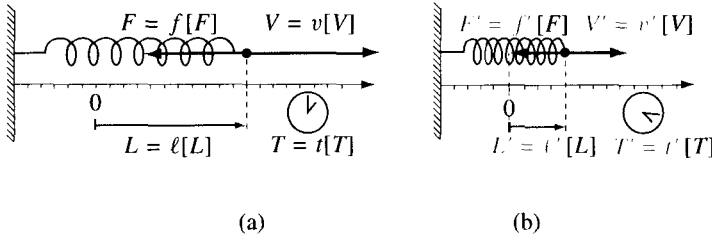


Fig. 2.5 Point de vue actif : (a) ancien état ; (b) nouvel état. Pas de changement d'unités.

## 2.7 SIMILITUDES

### 2.7.1 Définition

Si dans l'exemple 1 du paragraphe 2.6.1 on considère les changements d'unités définis par (2.30) avec  $\tau = 1$ , c'est-à-dire  $t' = t$ , on obtient

$$k' = \tau^{-2} k = k, \quad f' = \lambda f = -k\ell',$$

et les valeurs numériques des constantes ( $k$  et  $m$ ) sont inchangées.

De même, si, dans l'exemple 2 du paragraphe 2.6.1, on considère les changements d'unités définis par (2.30) avec

$$\tau = \lambda^{3/2}, \quad \text{soit} \quad \ell' = \lambda \ell \quad \text{et} \quad t' = \lambda^{3/2} t \quad (2.33)$$

nous aurons  $g' = g$  et les valeurs numériques des constantes ( $g$ ,  $m$ ,  $m_1$ ) seront à nouveau inchangées.

Dans ces deux exemples, les valeurs numériques des constantes sont inchangées pour les changements d'unités choisis, et les valeurs numériques des grandeurs relativement au nouveau système d'unités s'identifient aux valeurs numériques de ces mêmes grandeurs dans le nouvel état introduit par le point de vue actif. Nous sommes ainsi amenés à introduire la définition suivante.

La transformation (2.27), associée à un changement d'unités, est une **similitude** du système étudié si les valeurs numériques de *toutes* les constantes sont inchangées.

Similitude

### 2.7.2 Propriété

Si (2.27) est une similitude alors, du point de vue numérique, les lois sont identiques dans les deux systèmes d'unités et les observables sont représentées par les mêmes fonctions, ainsi que le montrent les équations (2.28) et (2.29).

Par conséquent, si la transformation  $T$  est une similitude, il n'est pas possible de distinguer entre l'ancien état mesuré avec les nouvelles unités (point de vue passif) et le nouvel état mesuré avec les anciennes unités (point de vue actif).

Modèle réduit

Similitude et  
évolution temporelle

Comme l'évolution temporelle du système est définie par des lois et que celles-ci sont inchangées si (2.27) est une similitude, il s'en suit que si  $(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in \mathbb{R}$ , décrit l'évolution du système dans les unités  $[X_i]$ , alors l'image  $(t', x'_1(t), \dots, x'_n(t))$  par (2.27) décrit aussi bien la même évolution relativement aux nouvelles unités  $[X'_i]$ , qu'une nouvelle évolution relativement aux anciennes unités. En conclusion, toute similitude associe aux  $n$  fonctions  $x_i(t)$  décrivant l'évolution de conditions initiales  $x_i^0$  à  $t = 0$ ,  $n$  nouvelles fonctions  $y_i(t) = x'_i(\tau^{-1}t)$  décrivant l'évolution temporelle de conditions initiales  $y_i^0 = x'^0$  à  $t = 0$ .

### Exemple 1. Point matériel attaché à un ressort

Nous avons remarqué (§ 2.7.1) que la transformation définie par

$$\ell' = \lambda \ell, \quad t' = t, \quad m' = m \quad (2.34)$$

est une similitude pour l'exemple 1 du paragraphe 2.6.1. Par conséquent, si  $x(t)$  décrit l'évolution de conditions initiales  $(x^0, v^0)$ , alors  $y(t) = \lambda x(t)$  décrit l'évolution de conditions initiales  $(y^0 = \lambda x^0, \tilde{v}^0 = \lambda v^0)$ . En particulier, si l'on sait que le mouvement est périodique, on peut conclure que la période  $T$  est indépendante de l'élongation initiale. La période dépend ainsi uniquement des constantes  $m$  et  $k$  et le théorème (2.4.3) implique

$$T(\mu m, \mu \tau^{-2} k) = \tau T(m, k)$$

d'où

$$T(1, 1) = \sqrt{k/m} T(m, k).$$

Ressort

En conclusion, la période du ressort harmonique est proportionnelle à  $\sqrt{m/k}$ .

### Exemple 2. Troisième loi de Kepler

Nous avons remarqué (§ 2.7.1) que la transformation définie par

$$\ell' = \lambda \ell, \quad t' = \lambda^{3/2} t, \quad m' = m \quad (2.35)$$

est une similitude pour l'exemple 2 (§ 2.6.1). Nous pouvons ainsi conclure que pour toute évolution  $x(t)$  il existe un mouvement semblable d'équation

$$y(t) = \lambda x(\lambda^{-3/2} t). \quad (2.36)$$

Planète

En particulier, pour tout mouvement périodique d'une planète autour du soleil, il existe un mouvement semblable, de trajectoire homothétique et de période  $T'$  où

$$\left(\frac{T'}{T}\right)^2 = \left(\frac{L'}{L}\right)^3. \quad (2.37)$$

C'est la **troisième loi de Kepler** (§ 6.5.1).

### 2.7.3 Similitude et invariance

Si l'unité de temps n'est pas modifiée ( $t' = t$ ), on dira qu'une transformation de la forme (2.27) est une similitude si elle commute avec l'évolution temporelle. En effet, soient  $T$  et  $T_t$  les transformations sur l'espace des états définies respectivement par le changement d'unités et l'évolution temporelle ; la discussion du paragraphe 2.7.2 montre que si  $T$  est une similitude, alors le diagramme de la figure 2.6 est commutatif, c'est-à-dire  $T(T_t \rho) = T_t(T \rho)$ .

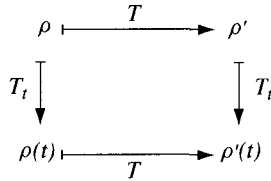


Fig. 2.6 Le diagramme est commutatif :  $T_t(T \rho) = T(T_t \rho)$ .

De façon générale, le système est dit **invariant** par rapport à une transformation linéaire  $T$  définie sur l'espace des états si  $T$  commute avec l'évolution temporelle. On dit alors que  $T$  est une **invariance** du système considéré.

## 2.8 CONCLUSION

Le choix d'un système d'unités permet d'exprimer les résultats expérimentaux au moyen de nombres et l'étude théorique peut s'effectuer par l'analyse mathématique des données numériques sans se soucier des unités. Seul le résultat final s'exprimera par un nombre auquel il faudra attacher l'unité choisie.

Cependant, l'analyse des données numériques n'est pas la seule méthode possible. Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les questions liées aux unités, soit l'analyse dimensionnelle, l'homogénéité, la similitude, fournissent d'autres méthodes d'investigation qui sont d'autant plus efficaces que le phénomène étudié est complexe. Dans certains domaines, tels que l'étude de la turbulence ou les transitions de phases, c'est un outil dont on ne saurait se passer.

Pour aborder l'étude d'un phénomène, on commence par mettre en évidence les paramètres dont dépend ce phénomène ; l'analyse dimensionnelle permet ensuite de trouver des relations entre ces paramètres et sert de guide dans l'élaboration de la théorie.

Les transformations qui sont des similitudes sont très importantes. Du point de vue théorique, elles sont souvent associées à des propriétés fondamentales et elles permettent de trouver de nouvelles lois. Du point de vue technique, elles sont indispensables parce qu'elles permettent l'étude de constructions complexes telles que barrages, avions, fusées, au moyen de modèles réduits [13].

Modèles réduits

## 2.9 SYSTÈMES D'UNITÉS

### 2.9.1 Système International (SI)

Le système d'unités généralement adopté en physique est le *Système International*, aussi appelé *MKSA*, dont les unités fondamentales sont le mètre (m), le kilogramme (kg), la seconde (s), l'ampère (A), le Kelvin (K), la mole (mol) et le candela (Cd) :

- La Conférence générale des poids et mesures tenue à Paris en 1889 a défini l'*unité de masse* ; c'est le **kilogramme**, masse d'un cylindre en platine iridié, appelé kilogramme étalon, déposé au Bureau International des Poids et Mesures à Sèvres, près de Paris. La précision maximale pour la mesure est de  $10^{-9}$ . La masse d'un décimètre cube d'eau pure à  $4^{\circ}\text{C}$  (étalon de masse avant 1889) est égale à 0,999972 kg.

- La 13<sup>e</sup> Conférence (Paris, 1967) a défini l'*unité de temps*, c'est la **seconde**, durée associée à 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins ( $F = 4, M = 0$ ) et ( $F = 3, M = 0$ ) de l'état fondamental  $2S_{1/2}$  de l'atome de Césium 133 non perturbé par des champs extérieurs. La mesure d'une durée peut s'effectuer avec une précision de  $10^{-13}$ .

- La Conférence générale de 1971 a défini l'*unité de quantité de matière* ; c'est la **mole**, quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 12 g de carbone 12. Les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des ions, des molécules, des électrons...

- La Conférence générale de 1983 a défini l'*unité de longueur* ; c'est le **mètre**, distance parcourue par la lumière dans le vide en un temps égal à  $1/c$  seconde, où  $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ .

### 2.9.2 Relations entre différents systèmes d'unités

Nous avons donné sur le tableau 2.7 quelques systèmes d'unités utilisés en mécanique.

**Tableau 2.7** (ft = foot ; lb = pound.)

	Grandeurs fondamentales de la mécanique			
Système d'unités	Longueur	Masse	Temps	Force
International (SI)	m	kg	s	–
CGS	cm	g	s	–
Pratique	m	–	s	kgf
FSS	ft	Slug	s	–
Anglo-Saxon	ft	–	s	lb

Certaines grandeurs dérivées ont reçu un nom particulier ; quelques exemples sont donnés dans le tableau 2.8

Tableau 2.8

	SI		CGS
Force	1 newton = 1 kg m s <sup>-2</sup>	N	1 dyne = 1 g cm s <sup>-2</sup> = 10 <sup>-5</sup> N
Travail	1 joule = 1 N m	J	1 erg = 1 dyne cm = 10 <sup>-7</sup> J
Puissance	1 watt = 1 J s <sup>-1</sup>	W	1 erg s <sup>-1</sup> = 1 g cm <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> = 10 <sup>-7</sup> W
Pression	1 pascal = 1 kg m <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	Pa	1 barye = 1 dyne cm <sup>-2</sup> = 10 <sup>-1</sup> Pa

2.9.3 Relation entre diverses unités [14]  
(≡ signifie que c'est une définition)

Longueur	
1 fermi	= 1 fm ≡ 10 <sup>-15</sup> m
1 angström	= 1 Å ≡ 10 <sup>-10</sup> m
1 micron	= 1 μ ≡ 10 <sup>-6</sup> m
1 unité astronomique	= 1 UA ≅ 1,496 · 10 <sup>11</sup> m
1 année lumière	= 1 al ≅ 0,946 · 10 <sup>16</sup> m
1 parsec	= 1 pc ≅ 3,086 · 10 <sup>16</sup> m ≅ 3,26 al
1 inch	≡ 2,54 cm
1 foot	≡ 30,48 cm
1 yard	≡ 3 ft
1 mile	≡ 1760 yard

Temps	
1 jour	≡ 86400 s (= 1 jour solaire moyen)
1 jour sidéral	≅ 86164 s
1 année	≅ 365,26 j ≅ 3,156 · 10 <sup>7</sup> s

Masse	
1 Mev	= 10 <sup>6</sup> eV = 1,782 · 10 <sup>-30</sup> kg
1 Gev	= 10 <sup>9</sup> eV = 1,782 · 10 <sup>-27</sup> kg
1 unité de masse atomique	= 1 u = 1,66054 · 10 <sup>-27</sup> kg
1 pound-mass	≡ 0,45359237 kg
1 grave	= 9,81 kg
1 slug	= 14,59 kg

Force	
1 kgf	≡ 9,80665 N
1 lb	= 1 pound = 1 slug ft s <sup>-2</sup> = 4,448 N
1 pdl	= 1 poundal = 1 lb ft s <sup>-2</sup> = 0,138 N

Pression	
1 atm	$\equiv 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
1 bar	$\equiv 10^5 \text{ Pa}$
1 torr	$\equiv \frac{1}{760} \text{ atm} = 1 \text{ mm Hg}$

Energie	
1 eV	$= 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
1 cal	$\equiv 4,184 \text{ J}$
1 kWh	$\equiv 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

Puissance	
1 CV	$= 736 \text{ W}$
1 HP	$= 746 \text{ W}$

**Remarque.** Nous avons donné ces relations pour illustrer l’arbitraire du choix des unités et l’intérêt pratique qu’il y a à adopter le Système International.

Les préfixes pour les puissances de dix sont donnés sur le tableau 2.9.

Tableau 2.9 Préfixes pour les puissances de dix.

Préfixe	Symbole	Grandeur	Préfixe	Symbole	Grandeur
yotta	Y	$10^{24}$	déci	d	$10^{-1}$
zetta	Z	$10^{21}$	centi	c	$10^{-2}$
exa	E	$10^{18}$	milli	m	$10^{-3}$
peta	P	$10^{15}$	micro	$\mu$	$10^{-6}$
téra	T	$10^{12}$	nano	n	$10^{-9}$
giga	G	$10^9$	pico	p	$10^{-12}$
méga	M	$10^6$	femto	f	$10^{-15}$
kilo	k	$10^3$	atto	a	$10^{-18}$
hecto	h	$10^2$	zepto	z	$10^{-21}$
déca	da	$10^1$	yocto	y	$10^{-24}$

2.10 PROBLÈMES

Transformations  
passives et actives

**2.10.1** Considérer l’exemple du paragraphe 2.4.2. On désigne par  $(t, x_i, v_i, a_i, f_i, g)$  les valeurs numériques des grandeurs temps,  $X_i, V_i, A_i, F_i, G$  (où  $X_i$  est la composante  $i$  du vecteur position  $\mathbf{X}$ , etc.) dans le système d’unités SI.

1. Quelles sont les valeurs numériques  $(t', x'_i, v'_i, a'_i, f'_i, g')$  de ces grandeurs relativement au système d’unités défini par

$[L]' = \text{cm}, \quad [T]' = \text{ms}, \quad [M]' = \text{kg}.$

- On effectue le changement d'état défini par la transformation  $(t, x_i, v_i) \mapsto (\tilde{t} = 10^3 t, \tilde{x}_i = 10^2 x_i, \tilde{v}_i = 10^{-1} v_i)$ . Trouver les valeurs numériques  $(\tilde{a}_i, \tilde{f}_i, \tilde{g})$  de ces grandeurs dans le nouvel état.
- Comparer les résultats obtenus lors de la transformation passive (1) et active (2). Peut-on arriver à la même conclusion pour les transformations définies par

$$[L]'' = \text{cm}, \quad [T]'' = \mu \text{s}, \quad [M]'' = \text{kg}.$$

### 2.10.2 Le mouvement d'une particule $P$ obéit aux lois suivantes

Similitude

$$\mathbf{F} = M\mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = K \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^{n+1}}$$

où  $K$  et  $n$  sont des constantes, et  $\mathbf{X} = \mathbf{OP}$  avec  $O$  un point fixé (si  $n = 0$ , le point  $O$  peut se trouver à distance finie ou infinie de  $P$ ; dans le second cas, cela signifie que  $\mathbf{F} = K\mathbf{e}$  avec  $\mathbf{e}$  un vecteur fixé). On désigne à nouveau par  $(t, x_i, v_i, a_i, f_i, k)$  les valeurs numériques des grandeurs dans le système d'unités SI.

- Trouver les valeurs numériques de ces grandeurs relativement au système d'unités défini par

$$1[L] = \lambda [L]', \quad 1[T] = \tau [T]', \quad 1[M] = 1[M]'$$

Comment choisir  $\lambda$  et  $\tau$  pour que  $k' = k$  ?

- Effectuer le changement d'état défini par la transformation  $(t, x_i, v_i) \mapsto (\tilde{t} = \tau t, \tilde{x}_i = \lambda x_i, \tilde{v}_i = \lambda \tau^{-1} v_i)$ . Quelles sont les valeurs numériques des grandeurs ci-dessus dans ce nouvel état ? Quelle conclusion peut-on tirer si l'on a choisi  $\lambda$  et  $\tau$  de manière telle que  $k' = k$  dans 1 ?

On remarquera que  $n = 2$  est la loi de la gravitation,  $n = 1$  est la loi de Hooke, et  $n = 0$  est la loi de la pesanteur (en prenant  $O$  à l'infini).

**2.10.3** Connaissant la loi de Coulomb (2.6), où  $\bar{k} = 8,99 \cdot 10^9$  dans le système d'unités SI, trouver la relation entre le Coulomb et l'unité de charge du système CGS-électrostatique (c'est-à-dire que l'on posera  $1 \text{ C} = q [Q]', 1 \text{ N} = 10^5 [F]', 1 \text{ m} = 10^2 [L]'$  et l'on cherchera  $q$  de sorte que  $k' = 1$ ).

Changement d'unités

**2.10.4** Les expériences journalières montrent que la fréquence de vibration  $\nu$  d'une corde tendue dépend de la longueur  $\ell$ , de la force  $F$  appliquée aux extrémités, de la masse par unité de longueur  $\rho_\ell$ , et du nombre sans dimension  $n$  (= harmonique). Etablir la relation suivante entre ces grandeurs

Vibration d'une corde tendue

$$\nu = f(n) \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{F}{\rho_\ell}}.$$

( $f(n)$  est une fonction qu'il faudra trouver par l'expérience ou la théorie.)

Vitesse des vagues    **2.10.5**    On observe que la vitesse  $v$  des vagues au large de l'océan dépend de leur longueur d'onde  $\ell$ , mais pas de leur amplitude. En admettant que les grandeurs dont dépend  $v$  sont  $\ell$ , l'accélération terrestre  $g$ , et la masse spécifique de l'eau, établir le résultat suivant

$$v = C \sqrt{g\ell}$$

(où  $C$  est une constante).

Loi de Stokes    **2.10.6**    L'expérience montre que la force qui s'exerce sur un solide se déplaçant à très faible vitesse dans un fluide (§ 2.5.2) est indépendante de la densité du fluide. Vérifier que cette force est de la forme

$$f = \eta d \varphi(\theta) v.$$

$C$  est la *loi de Stokes*.



## CHAPITRE 3

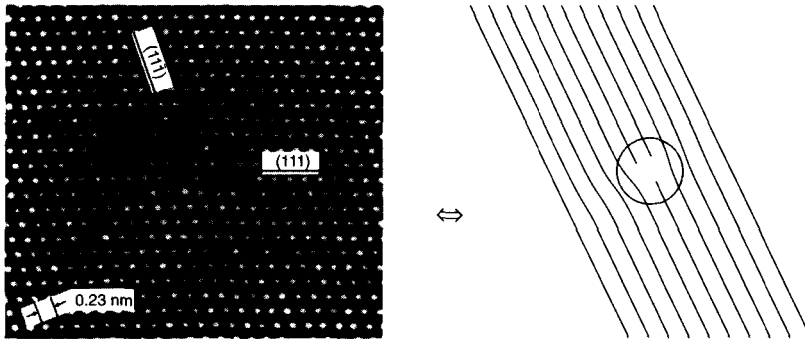
# IMAGE DE L'UNIVERS ET ORDRES DE GRANDEUR

### 3.1 DES ATOMES AUX QUARKS

#### 3.1.1 Structure des atomes

La matière, en particulier les êtres vivants, est constituée d'*atomes* que l'on peut considérer, dans l'explication de beaucoup de phénomènes, comme de petits « grains » (fig. 3.1), dont le rayon est de l'ordre de l'angström ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), et la masse entre 1 et 260 unités de masse atomique. Les masses des particules sont généralement exprimées en unités d'énergie en remplaçant  $m$  par  $mc^2$  (où  $c$  est la vitesse de la lumière) et en prenant l'électron-volt comme unité d'énergie.

Atomes  
 $10^{-10} \text{ m}$



**Fig. 3.1** Vue au microscope électronique d'une dislocation dans un cristal d'aluminium. La distance entre atomes (points blancs) est  $2,3 \text{ \AA}$  (cliché fourni par M. Mills, EPFL).

Dans la matière, solide, liquide ou gazeuse, ces atomes sont séparés par des distances de l'ordre de l'angström, et interagissent au moyen de forces, attractives à « longue » distance, et répulsives à « courte » distance ; la force change de signe pour une séparation des atomes de l'ordre de quelques angströms et s'annule pour une séparation supérieure à une certaine valeur, appelée *portée de la force*.

Les observations de J.J. Thomson (1897 : découverte de l'électron dans les rayons cathodiques) et de Rutherford (1911 : mise en évidence du noyau par



J.J. THOMPSON  
Physicien anglais  
(1856-1940)  
Prix Nobel 1906

Électrons  
Noyau  
 $10^{-15}$  m

diffraction de rayons  $\alpha$  par de fines feuilles d'or) montrèrent que les atomes sont formés d'un *noyau* de charge électrique positive autour duquel se trouvent les *électrons* chargés négativement, de sorte que l'atome est électriquement neutre. La force entre le noyau et les électrons – on dit aussi l'*interaction* – est *électromagnétique*. Tous les noyaux ont approximativement la même masse par unité de volume qui est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{17}$  kg/m<sup>3</sup>, c'est-à-dire environ  $3 \cdot 10^{14}$  fois la masse spécifique de l'eau !



E. RUTHERFORD  
Physicien anglais  
(1871-1937)  
Prix Nobel 1908

Tableau 3.2 Structure de l'atome.

Atome	Noyau :	Diamètre $\cong 10^{-15}$ m = 1 fm
	Électron :	« Rayon », inférieur à $10^{-3}$ fm Masse, $m_e \cong 0,911 \cdot 10^{-30}$ kg $\cong 0,511$ MeV Charge, $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C Rayon de l'orbite autour du noyau $\cong 0,5 \text{ \AA}$

3.1.2 Particules élémentaires [25]

Neutrino

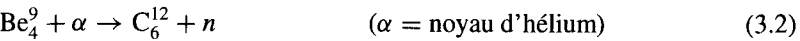
En 1930, W. Pauli postule l'existence d'une nouvelle particule [15], appelée aujourd'hui *neutrino*  $\nu$ , pour expliquer la violation apparente de la conservation de l'énergie, dans les expériences de désintégration  $\beta$  – c'est-à-dire l'émission d'un électron  $e^-$ , ou d'un positron  $e^+$ , à partir du noyau – telles que



Ce neutrino, observé en 1956 par Reines et Cowan, est une particule de masse « pratiquement » nulle (inférieure à  $10^{-5}$  fois la masse de l'électron), qui interagit très faiblement avec toutes les autres particules. Le neutrino est très difficile à observer; la section efficace (§ 18.4.1) pour le détecter est environ  $10^{-43}$  cm<sup>2</sup>. (Par exemple, un neutrino émis par le Soleil n'a qu'une chance sur  $10^{12}$  d'interagir lorsqu'il traverse la Terre selon l'un des diamètres). En 1962, on a observé l'existence de deux sortes de neutrinos, notés  $\nu_e$  et  $\nu_\mu$ ; aujourd'hui, on admet qu'il existe un troisième neutrino  $\nu_\tau$  [16].

Neutron

En 1920, Rutherford avait introduit l'idée d'une particule neutre, le *neutron*  $n$  [17]. Cette particule fut découverte en 1932 par Chadwick [18], qui en invoqua l'existence pour maintenir le principe de conservation de l'énergie dans des réactions telles que



Proton

Quelques mois après la découverte du neutron, W. Heisenberg [19] et, indépendamment, Iwanenko, arrivent à la conclusion que le noyau est constitué de *protons* et de *neutrons* qui interagissent au moyen de forces *très* intenses appelées *forces nucléaires* ou *interaction forte* dont la portée est très petite.

Tableau 3.3 Structure du noyau.

Noyau	Proton :	Masse, $m_p \cong 1,672 \cdot 10^{-27}$ kg $\cong$ 938 MeV
		Diamètre $\cong$ 1 fm
		Charge, $e$
	Neutron :	Masse, $m_n \cong 1,675 \cdot 10^{-27}$ kg $\cong$ 940 MeV
		Diamètre $\cong$ 1 fm
		Charge, 0



W. PAULI  
Physicien suisse  
d'origine autrichienne  
(1900-1958)  
Prix Nobel 1945

Pour expliquer l'origine des forces nucléaires, Yukawa introduit en 1935 l'hypothèse de l'existence du *méson*, particule qui serait aux forces nucléaires l'analogue du photon pour les forces électriques ; c'est une particule dont la masse serait de l'ordre de 200 à 300 fois celle de l'électron.

En 1936, on découvre une particule, le *muon*  $\mu^-$ , qui aurait la masse nécessaire, mais ne sera pas la particule proposée par Yukawa. Le muon est une particule qui a les mêmes propriétés que l'électron, mais qui a une masse 200 fois plus élevée ( $m_\mu \cong 106$  MeV). En 1975, on découvre une troisième particule, le  $\tau^-$ , ayant également les mêmes propriétés que l'électron, mais une masse 3500 fois plus élevée ( $m_\tau \cong 1777$  MeV).

Ces trois particules ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$ ) constituent avec les trois neutrinos ( $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$ ) et les six antiparticules associées ( $e^+$ ,  $\mu^+$ ,  $\tau^+$ ,  $\bar{\nu}_e$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\tau$ ), la famille des **leptons** : ce sont les *particules qui ne ressentent pas les forces nucléaires* (de même que les particules neutres ne ressentent pas les forces électriques).

Leptons

Tableau 3.4 Famille des leptons.

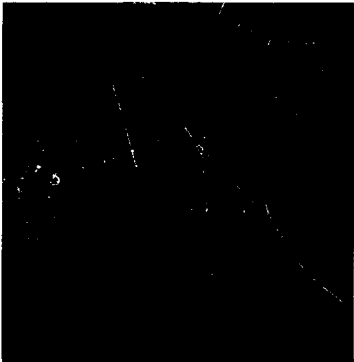
LEPTONS			Charge
$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	0
$e^-$	$\mu^-$	$\tau^-$	$-e$

C'est en 1947 que les particules postulées par Yukawa seront observées expérimentalement : ce sont les mésons  $\pi^+$  et  $\pi^-$ , appelés *pions* ( $m_\pi \cong 140$  MeV) ; en 1950, on découvrira un pion neutre  $\pi^0$  de masse légèrement inférieure ( $m_{\pi^0} \cong 135$  MeV).

Depuis 1950, les *antiparticules* (l'antiparticule associée à la particule  $p$  est notée  $\bar{p}$  ; elle possède les mêmes propriétés que la particule, mais une charge opposée), ainsi que des particules de plus en plus lourdes, seront observées expérimentalement : 3 fois la masse du proton pour le Psi ( $\psi$ ), découvert en 1974, 10 fois pour l'Upsilon ( $\Upsilon$ ), découvert en 1977, 100 fois pour les  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$ , découverts en 1983. Aujourd'hui, on a identifié des centaines

Antiparticule

de particules « élémentaires » et, dans certaines théories, on postule l'existence de particules encore beaucoup plus lourdes.



**Fig. 3.5** Traces laissées dans une chambre à bulles par des particules élémentaires (photo CERN).

### 3.1.3 Stabilité des particules

Contrairement aux électrons, protons, neutrons (dans certains noyaux) et neutrinos, les autres particules sont instables et se désintègrent en d'autres particules. Elles ont une *durée de vie* comprise entre  $10^{-6}$  et  $10^{-24}$  s. La durée de vie est l'intervalle de temps  $\tau$  défini par la relation

Durée de vie      
$$N(t) = N(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

qui relie le nombre de particules aux instants 0 et  $t$ .

La stabilité des électrons s'explique par la conservation de la charge électrique et de l'énergie. Pour le proton, au contraire, il n'y a pas de loi fondamentale permettant d'expliquer sa stabilité ; expérimentalement, la durée de vie du proton apparaît supérieure à  $10^{31}$  ans [20] (il faut se souvenir que l'âge de l'Univers est estimé à  $10^{10}$  ans). Le neutron, dans le noyau, a la même durée de vie que le proton ; libre, au contraire, sa durée de vie est de 900 s environ.

### 3.1.4 Quarks

Quark  
 $10^{-18}$  m

Hadron

Tandis que les leptons sont toujours considérés comme des particules « ponctuelles » (à l'échelle de  $10^{-18}$  m), on sait depuis quelques années que toutes les autres particules, c'est-à-dire celles qui ressentent l'interaction nucléaire et que l'on regroupe sous le nom de **hadrons** ( $\pi$ ,  $p$ ,  $n$ , ...), ne sont pas des particules fondamentales, mais des objets complexes. En 1963 déjà, Gell-Mann, Ne'eman et Zweig introduisent l'idée que le proton est formé de 3 particules plus petites, les *quarks*. Dans le modèle original, 3 sortes de quarks et leurs antiquarks sont nécessaires. De charge  $\frac{2}{3} e$  et  $-\frac{1}{3} e$ , où  $e$  est la charge du proton, ils sont appelés up ( $u$ ), down ( $d$ ) et strange ( $s$ ). La découverte du méson  $\psi$  en 1974 confirme l'existence d'un 4<sup>e</sup> quark, charm ( $c$ ), postulé en 1964 par Bjorken ; la découverte du méson  $\Upsilon$  (1977), puis en 1983 celle du méson

*B* [21] (de masse égale à 5 fois la masse du proton), met en évidence l'existence d'un 5<sup>e</sup> quark, bottom (*b*) ; finalement, il est apparu nécessaire de postuler l'existence d'un 6<sup>e</sup> quark, appelé top (*t*), qui a été mis en évidence à Fermilab en 1994 [22], puis confirmé en 1995.

En conclusion, on admet aujourd'hui qu'il existe six quarks, caractérisés par une saveur : « up », « down », « charm », « strange », « bottom », « top ».

Tableau 3.6 Famille des quarks.

QUARKS			Charge
<i>u</i> (up)	<i>c</i> (charme)	<i>t</i> (top)	$+\frac{2}{3} e$
<i>d</i> (down)	<i>s</i> (étrangeté)	<i>b</i> (bottom)	$-\frac{1}{3} e$

Pour ne pas être en contradiction avec l'une des super-lois de la physique — le *principe d'exclusion de Pauli* introduit par Pauli en 1925 — on a dû supposer que les six quarks avaient une nouvelle propriété appelée *couleur* ; chaque quark se trouve dans l'un de trois états possibles, désignés par une couleur, soit bleu, vert ou rouge pour les quarks, et les trois couleurs complémentaires pour les antiquarks.

La force entre les quarks est très surprenante. A très faibles distances, ils n'interagissent pas et se comportent comme des particules libres ; cependant, si l'on essaie de séparer deux quarks, la force devient importante et il se crée deux paires quark-antiquark : au lieu d'obtenir deux quarks séparés, on obtient deux paires de quark-antiquark (fig. 3.7) et il est impossible d'obtenir un quark isolé. Ce phénomène, appelé *confinement*, ressemble à celui, bien connu, que l'on observe lorsque l'on essaie de briser un aimant en deux morceaux, dans l'intention de séparer les pôles Nord et Sud ; au lieu de séparer les pôles, on obtient deux aimants.

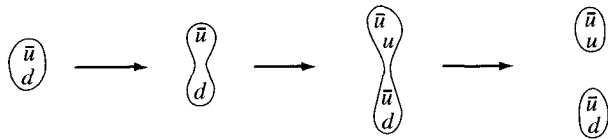


Fig. 3.7 Essai de séparation de deux quarks.

Les quarks ont des dimensions inférieures à  $10^{-18}$  m et on leur attribue des « masses » (tab. 3.8), mais ce sont des paramètres dont la valeur dépend d'un certain nombre de conventions.

Tableau 3.8 Masse attribuée aux quarks en GeV ( $m_p \cong 1 \text{ GeV}$ ).

$u$	$d$	$c$	$s$	$t$	$b$
$4 \cdot 10^{-3}$	0,01	1,5	0,2	174	4,5

Hadrons      Aujourd'hui, on admet que tous les hadrons sont formés soit d'une paire quark-antiquark ( $q_1, \bar{q}_2$ ), soit de trois quarks et que, de plus, ils sont de « couleur neutre » (c'est-à-dire « blancs »). Les hadrons formés d'une paire ( $q_1, \bar{q}_2$ ) sont les **mésons** ( $\pi^0 = u\bar{u}, \pi^- = d\bar{u}, K = \bar{s}u, \psi = c\bar{c}, \Upsilon = b\bar{b}, B = u\bar{b}, \dots$ ), ceux formés de trois quarks sont les **baryons** ( $p = uud, n = udd, \dots$ ).

Nous voyons que, de même qu'il existe six particules fondamentales qui ne subissent pas l'interaction forte (les leptons), il existe six particules qui subissent de telles interactions (les quarks). De plus, comme on le voit sur les tableaux 3.4 et 3.6, les leptons et les quarks apparaissent en trois familles contenant quatre éléments chacune; la famille ( $e, \nu_e; u, d$ ) est celle qui est associée à la matière stable constituant l'Univers. Dans cette analogie, on remarque également que les leptons et les quarks ont tous un « spin 1/2 ».

Tableau 3.9 Quelques particules élémentaires [26].

	Particule	Masse (MeV)	Durée de vie (s)	Exemple de désintégration
Photon	$\gamma$	0		
Leptons	$\nu_e$	$< 7 \cdot 10^{-6}$	stable ?	
	$\nu_\mu$	$< 0,25$	stable ?	
	$\nu_\tau$	$< 24$	stable ?	
	$e$	0,51	stable	
	$\mu$	105,66	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$\mu^- \rightarrow e^- \nu \bar{\nu}$
	$\tau$	1777	$2,90 \cdot 10^{-12}$	$\tau^- \rightarrow \pi^- \nu$
Hadrons				
Méson	$\pi^\pm$	139,57	$2,60 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$
	$\pi^0$	134,97	$0,87 \cdot 10^{-16}$	$\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$
	$K^\pm$	493,6	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$
	$K^0$	497,67		
	$K_S^0$	-	$0,89 \cdot 10^{-10}$	$K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$
	$K_L^0$	-	$5,18 \cdot 10^{-18}$	$K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$
Baryons	$p$	938,27	stable	
	$n$	939,57		$n \rightarrow pe^- \bar{\nu}$
	$\Lambda$	1115,68	$2,63 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \rightarrow p \pi^-$
	$\Sigma^+$	1189,37	$0,80 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow p \pi^0$
	$\Sigma^0$	1192,55	$5,8 \cdot 10^{-20}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$
	$\Sigma^-$	1197,44	$1,48 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
	$\Omega^-$	1672,45	$0,82 \cdot 10^{-10}$	$\Omega^- \rightarrow \Lambda K^-$

3.1.5 Interactions fondamentales

Actuellement, on connaît quatre types de forces fondamentales – ou interactions – entre les particules élémentaires. Ce sont les interactions fortes, électromagnétiques, faibles, et gravitationnelles.

Les forces électromagnétiques sont décrites par un champ (le champ électromagnétique), auquel est associé une particule, le *photon*.

Interaction électromagnétique

De la même manière on admet que toute force fondamentale est due à un champ auquel est associée une « particule » responsable de l'interaction ; il n'existerait pas de force à distance. (On appelle champ une grandeur définie en chaque point de l'espace-temps.)

Le *gluon* est la « particule » associée aux interactions fortes entre les quarks ; c'est elle qui maintient les quarks ensemble dans les hadrons. Cette « particule » a été mise en évidence en 1979 ; elle possède la propriété de « couleur ».

Interaction forte

Les *bosons intermédiaires*  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z^0$  sont les « particules » associées aux interactions faibles ; l'existence de telles « particules » fut postulée en 1934 déjà (Fermi, Yukawa) pour tenter d'unifier dans une même théorie les forces faibles et les forces électromagnétiques (de même que Maxwell avait pu unifier les forces électriques et magnétiques dans une même théorie). Cette unification fut réalisée par Glashow, Salam et Weinberg (ce qui leur valut le prix Nobel en 1979), et ces « particules » mises en évidence en 1983 [23].

Interaction faible

Le *graviton*, ou « particule » associée aux forces gravifiques, n'a pas encore été observé. Cependant, les observations sur les quasars doubles découverts en 1974 confirment indirectement l'existence d'ondes gravitationnelles.

Interaction gravifique

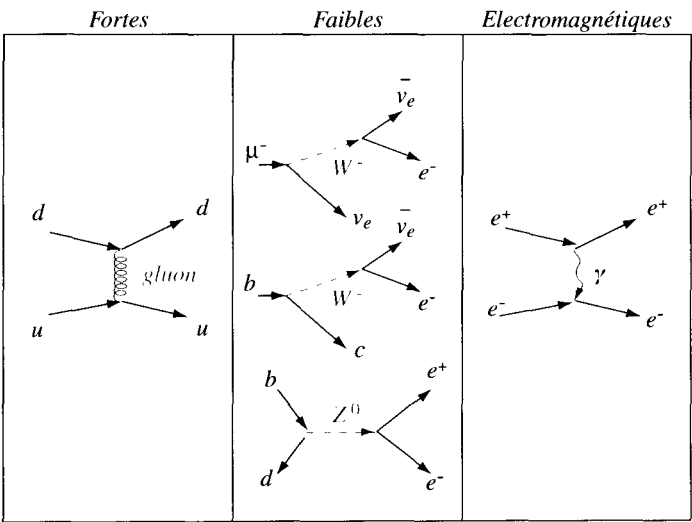
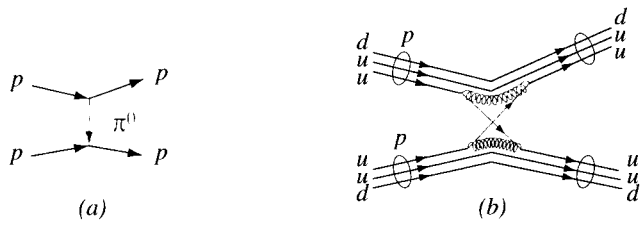


Fig. 3.10 Interactions fondamentales et « particules » associées.

Du point de vue phénoménologique, on considère que les forces nucléaires discutées plus haut sont associées à l'échange d'un *pion*, particule formée de deux quarks (fig. 3.11).



**Fig. 3.11** Représentation phénoménologique de la force nucléaire (a) et de l'interaction forte (b).

Remarquons que les forces électromagnétiques peuvent être soit attractives, soit répulsives. Les systèmes rencontrés dans la nature sont neutres, et l'interaction électromagnétique entre de tels systèmes a une portée pratiquement finie.

**Tableau 3.12** Propriétés des interactions fondamentales et nucléaires.

FORCES			« PARTICULE » associée				
Type	Intensité	Portée	« Particule »	Spin	Charge	Masses	Couleur
Gravitationnelles	$10^{-36}$	infinie ( $\sim r^{-2}$ )	graviton (?)	2	non	non	non
Faibles	$10^{-5}$	$10^{-2}$ fm	$W^{\pm}, Z^0$	1	oui	$100 m_p$	non
Électromagnétiques	$\frac{1}{137}$	infinie ( $\sim r^{-2}$ )	photon	1	non	non	non
Fortes	1	infinie ( $\sim ar^{-2} + b$ )	gluons	1	non	non	oui
Forces nucléaires	1	10 fm	pion	1	oui	$\frac{1}{6} m_p$	non

Aujourd'hui, les physiciens pensent que quatre types d'interactions c'est encore trop. La *théorie des supercordes* (ou *supersymétrie*) se propose de trouver une seule théorie permettant d'unifier l'ensemble des phénomènes connus.



3.2 DES ATOMES AUX GALAXIES

3.2.1 Des atomes aux étoiles

Ayant terminé cette excursion au centre des noyaux, revenons à notre point de départ : « toute matière est constituée d'atomes ».

On connaît actuellement 109 éléments chimiques différents dont le noyau a une charge  $Z$  comprise entre 1 et 109. Seuls les éléments avec  $Z \leq 92$  apparaissent naturellement sur la Terre et l'on a pu identifier plus de 1700 « variétés » différentes d'atomes, appelés *isotopes*.

Les atomes interagissent pour former des *molécules*. Typiquement, les molécules avec lesquelles travaillent les physiciens sont constituées de quelques atomes. La chimie, en particulier la chimie organique, va s'occuper de molécules beaucoup plus complexes. Finalement, en biologie, on est conduit à considérer des molécules telles que l'ADN qui compte  $10^8$  à  $10^{10}$  atomes.

Avec ces ordres de grandeurs, on arrive au niveau de la *cellule* qui contient  $10^{12}$  à  $10^{14}$  atomes et dont les dimensions sont de l'ordre du *micron*, soit  $10^{-6}$  m ; puis nous voilà aux dimensions de l'*homme* avec environ  $10^{14}$  cellules – soit  $10^{28}$  atomes – et la dimension du *mètre*.

En continuant cette exploration dans les échelles plus grandes que l'homme, nous arrivons aux *planètes*, dont les dimensions sont de l'ordre de  $10^6$  m et qui sont formées, pour une planète comme la Terre, de quelque  $10^{51}$  atomes. Nous avons donné dans les tableaux 3.13 et 3.14 quelques dimensions typiques.

Tableau 3.13 Grandeurs caractéristiques de la Terre et de la Lune.

Rayon de la Terre	$R_{\oplus} = 6,370 \cdot 10^6 \text{ m}$
Masse de la terre	$M_{\oplus} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Période de révolution propre	0,997 jour
Période de révolution autour du Soleil	365,26 jours
Rayon de la Lune	$R_L = 1,738 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 0,27 R_{\oplus}$
Masse de la Lune	$M_L = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg} \approx \frac{1}{81} M_{\oplus}$
Période de révolution propre	27,32 jours
Période de révolution autour de la Terre	27,32 jours
Distance Terre-Lune	$D = 384 \cdot 10^6 \text{ m} = 60,3 R_{\oplus}$

Nous arrivons ensuite à l'échelle du *système solaire*, dont les dimensions sont de l'ordre de  $10^9$  à  $10^{12}$  m. On introduit alors une nouvelle unité, l'*unité astronomique*, définie au moyen de l'orbite terrestre, soit environ  $1,5 \cdot 10^{11}$  m (tab. 3.14).

Tableau 3.14 Le système solaire [59].

$\oplus = \text{Terre}$

	Masse	Rayon	Distance au soleil	Période de rotation propre	Période de révolution autour du soleil	Excentricité
	$M_{\oplus} = 1$ ( $\approx 6 \cdot 10^{24}$ kg)	$R_{\oplus} = 1$ ( $\approx 6,4 \cdot 10^6$ m)	$D_{\oplus} = 1$ ( $\approx 1,5 \cdot 10^{11}$ m)	jour (= 86400 s)	année ( $\approx 365$ j)	
Soleil	$322 \cdot 10^3$	109,20	—	25,37		
Mercure	0,056	0,38	0,39	59	0,241	0,206
Vénus	0,815	0,95	0,72	243,01 (rétrograde)	0,615	0,007
Terre	1	1	1	0,997	1,00004	0,017
Mars	0,107	0,53	1,52	1,03	1,88	0,093
Jupiter	317,9	11,27	5,20	0,41	11,86	0,048
Saturne	95,1	9,44	9,54	0,43	29,46	0,056
Uranus	14,5	4,10	19,18	0,65	84,01	0,047
Neptune	17,2	3,88	30,06	0,66	164,79	0,009
Pluton	0,0017 ?	0,2 ?	39,44	6,39	248	0,250

3.2.2 Des étoiles aux galaxies [27]

La prochaine étape se situe à l'échelle des galaxies (fig. 3.15). On arrive à des dimensions de l'ordre de  $10^{16}$  m, ce qui conduit à introduire de nouvelles unités, le *parsec* ( $\cong 3,1 \cdot 10^{16}$  m) et l'*année-lumière* (1 al  $\cong 0,95 \cdot 10^{16}$  m). On remarquera que jusqu'au début de ce siècle, galaxie était synonyme d'Univers. Aujourd'hui, les galaxies sont pour les astronomes l'analogie des atomes pour les physiciens : ce sont les « blocs » qui constituent l'Univers.

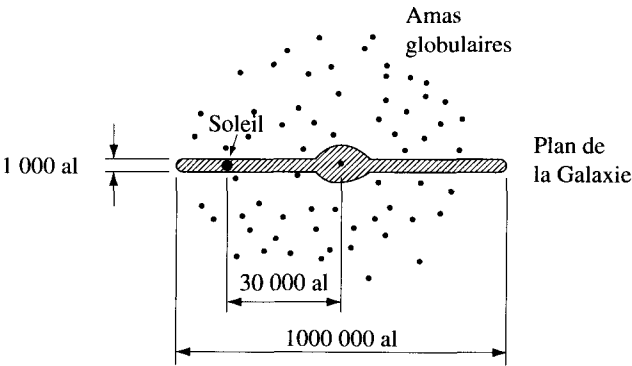
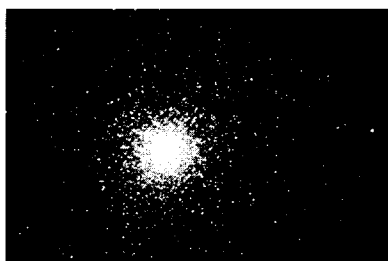


Fig. 3.15 Schéma de notre Galaxie vue en coupe.

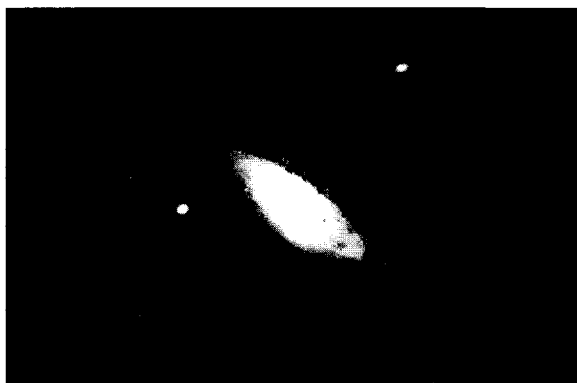
Les galaxies sont constituées d'environ  $10^{11}$  étoiles (rappelons qu'une cellule contient  $10^{12}$  atomes, un animal  $10^{12}$  cellules, et l'Univers environ  $10^{11}$  galaxies !) ; ces étoiles ont une masse comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^2$  masse solaire

et sont séparées par des distances de l'ordre de 10 al. C'est la force de gravitation qui lie les étoiles à l'intérieur de la galaxie. Le rayon d'une galaxie est de l'ordre de  $10^4$  al et la densité de matière à l'intérieur d'une galaxie se situe autour de  $10^{-20}$  kg/m<sup>3</sup>. 10<sup>20</sup> m

Notre Galaxie, la *Voie Lactée* (fig. 3.15), fait partie des galaxies géantes avec un diamètre de  $10^5$  al. L'étoile la plus proche du Soleil,  $\alpha$  du Centaure, est à 4,3 al. A l'intérieur de la Galaxie, certaines étoiles vont s'associer en amas. On distingue d'une part, les *amas ouverts* formés de 10 à 100 étoiles, il y en a environ 1000 connus, situés dans le plan de la Galaxie (fig. 3.15), d'autre part, les *amas globulaires* formés de centaines de milliers d'étoiles (fig. 3.16) ; on en connaît environ 300 situés dans le halo et la région centrale. L'ensemble de la Galaxie est animé d'un mouvement de rotation autour de son centre ; la vitesse du Soleil est de 250 km/s et il lui faut 250 millions d'années pour effectuer une révolution.



**Fig. 3.16** Amas globulaire.



**Fig. 3.17** Galaxie d'Andromède.

Les galaxies ne sont pas distribuées au hasard dans l'espace, mais la plupart d'entre elles (85%) s'associent en amas de 10 à 1000 galaxies. Le diamètre d'un *amas de galaxies* est de l'ordre du million d'année-lumière, soit 10 à 100 fois le diamètre d'une galaxie. La vitesse relative d'une galaxie d'un amas par rapport à une autre est en moyenne de 1000 km/s.

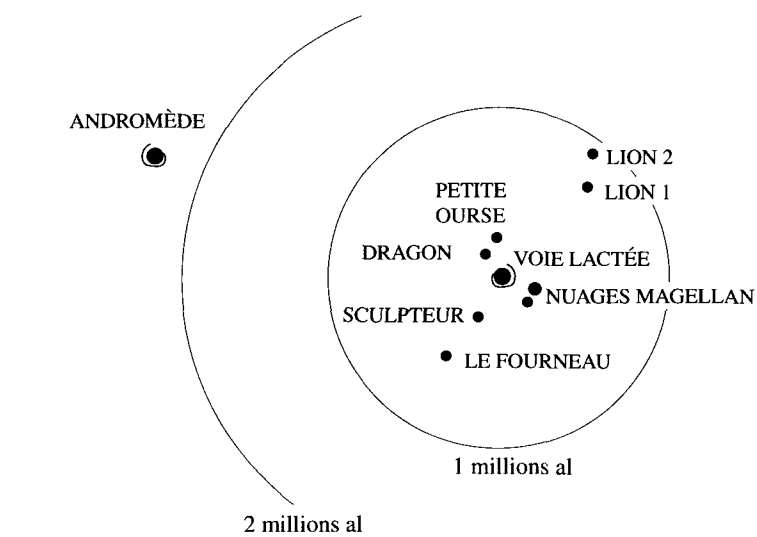
Notre Galaxie appartient à un amas appelé *Groupe Local*, ayant  $6 \cdot 10^6$  al de diamètre, et qui est formé d'une trentaine de galaxies (fig. 3.18); les plus importantes, la nôtre et Andromède (fig. 3.17), sont éloignées de 2 millions d'année-lumière l'une de l'autre.

La distance entre amas de galaxies est de l'ordre de 50 à 100 millions al. Par exemple, l'amas de la Vierge, amas le plus proche du Groupe Local, se trouve à 45 millions al; c'est un amas formé de 3000 galaxies.

10<sup>24</sup> m Les amas de galaxies vont, à leur tour, s'associer en *super-amas*, comprenant des dizaines d'amas, et dont le diamètre est de l'ordre de 200 millions al. Le Groupe Local, l'amas de la Vierge et celui de la Grande Ourse font probablement partie d'un même super-amas, en forme d'ellipsoïde, dont le grand axe mesure entre 160 et 180 millions al.

A des échelles encore plus grandes (les galaxies les plus lointaines observées se trouvent à  $4 \cdot 10^9$  al), la concentration des galaxies dans l'Univers est uniforme et l'Univers apparaît homogène. Les galaxies semblent s'éloigner de nous avec une vitesse proportionnelle à leur distance, vitesse qui serait égale à la vitesse de la lumière à une distance de  $10^{10}$  al.

10<sup>26</sup> m Finalement, notre Univers aurait un rayon de  $10^{10}$  al, et serait formé d'environ  $10^{11}$  galaxies, soit  $10^{80}$  nucléons. La densité de l'Univers serait ainsi de  $10^{-26}$  kg/m<sup>3</sup>. L'âge de l'Univers est évalué aujourd'hui à 11 milliards d'années [28].



**Fig. 3.18** Le Groupe Local. Le centre de l'amas se trouve à mi-distance entre la Voie Lactée et Andromède.

3.3 CONSTANTES PHYSIQUES (VALEURS ADMISES EN 1986 [26])

Dans le tableau ci-dessous, la notation  $\equiv$  signifie que l'on parle d'une valeur exacte.

Tableau 3.19 Constantes physiques (valeurs admises en 1986 [26]).

Vitesse de la lumière dans le vide	$c \equiv 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Constante de Planck	$\hbar = 1,05457266 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $= 0,51099906 \text{ MeV}$
Masse du proton	$m_p = 1,6726231 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $= 938,27231 \text{ MeV}$
Charge du proton	$e = 1,60217730 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Masse du neutron	$m_n = 1,6749286 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $= 939,56563 \text{ MeV}$
Masse de l'atome d'hydrogène	$m(^1\text{H}) = 1,67356 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Accélération terrestre standard	$g \equiv 9,80665 \text{ m s}^{-2}$
Constante diélectrique du vide	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 10^{-7} \text{ C}^2 = 8,9875517 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$

3.4 PROBLÈMES

3.4.1 Évaluer le nombre de molécules d'hydrogène  $\text{H}_2$  contenues dans  $1 \text{ m}^3$  Hydrogène aux conditions standard, et la distance moyenne entre deux molécules. Même question pour l'eau  $\text{H}_2\text{O}$ , et le fer  $\text{Fe}$ .

Masse atomique	H	O	Fe
( $u$ )	1,00797	15,994	55,847
Masse spécifique	$\text{H}_2$	$\text{H}_2\text{O}$	Fe
( $\text{kg/m}^3$ )	$9 \cdot 10^{-2}$	$10^3$	$7,9 \cdot 10^3$

Indication : la quantité de matière, exprimée en grammes et numériquement égale à la masse atomique, contient un nombre de molécules égal au nombre d'Avogadro (tableau 3.19).

3.4.2 La parallaxe  $\theta$  d'une étoile est la moitié de l'angle sous-tendu par le Parallaxe diamètre  $T_1 T_2$  de la trajectoire de la Terre autour du Soleil perpendiculaire à la droite étoile-Soleil (fig. 3.20).

- 1. Sachant que la parallaxe de l'étoile  $\alpha$  du Centaure est  $0,745''$ , évaluer la distance en mètres de cette étoile au Soleil.
- 2. Par définition, le parsec est la distance correspondant à une parallaxe de  $1''$ . Établir la relation entre parsec et mètre.  
(On remarquera que  $\theta = \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta)$ ).

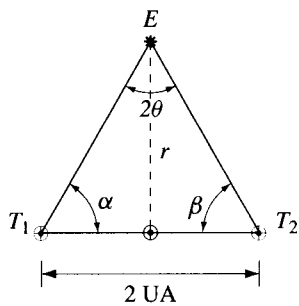


Fig. 3.20

Amas globulaire **3.4.3** Un amas globulaire typique contient 30 000 étoiles à l'intérieur d'une sphère de rayon égal à 5 années-lumière.

- 1. Estimer la distance moyenne entre deux étoiles par rapport au diamètre du Soleil.
- 2. A quelle pression (en atmosphère) doit être soumis un gaz à la température ordinaire pour que la distance entre molécules par rapport au diamètre de la molécule ( $\cong 10^{-10}$  m) soit la même que sous 1 ?

Idée : utiliser la loi de Boyle,  $pV = nRT$  reliant la pression  $p$ , le volume  $V$ , la température  $T$ , et le nombre de mole  $n$  du gaz ( $R = 8,31 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$ ).

## CHAPITRE 4

# POSITION INSTANTANÉE D'UN SYSTÈME ET ANALYSE VECTORIELLE

La mécanique classique est l'étude du mouvement de systèmes définis par un ensemble de points que l'on peut distinguer et qui conservent leur individualité au cours du temps.

Avant d'aborder une telle étude, il faut pouvoir repérer la position d'un *point  $P$  du système* à un instant donné. Pour cela il faut choisir un référentiel  $\mathcal{R}$  et marquer le *point du référentiel* avec lequel  $P$  coïncide à cet instant. Il suffit alors d'une paramétrisation des points du référentiel pour repérer la position de  $P$ . En procédant de même pour chaque point du système nous pouvons ainsi repérer la position instantanée du système.

Nous introduisons ensuite le concept de *déplacement*, ce qui amène naturellement les notions de *vecteur* et de *torseur*.

Les idées que nous allons développer sont celles de la *géométrie* et l'appareil de mesure dont nous avons besoin est la *règle*.

Mentionnons pour terminer qu'en mécanique quantique et en mécanique statistique on sera amené à étudier des systèmes formés de particules indiscernables.

## 4.1 RÉFÉRENTIEL

### 4.1.1 Mouvement et référentiel

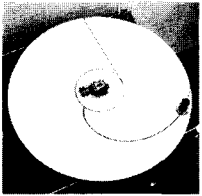
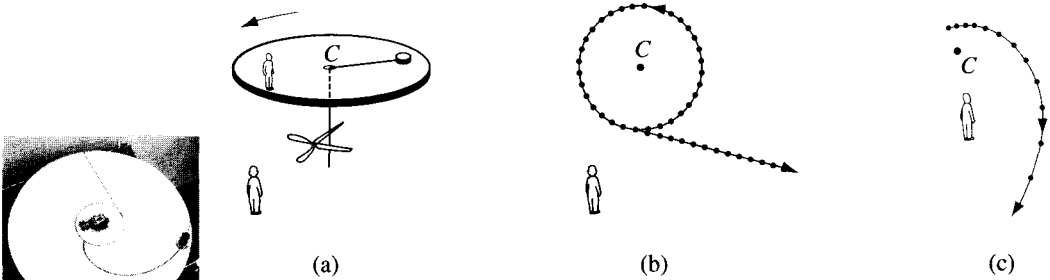
La notion de mouvement est intrinsèquement liée à celle de référentiel. Un objet, immobile pour un passager assis dans un avion, apparaît en mouvement pour un observateur sur la Terre ; de même, pour un observateur sur la Terre, les étoiles effectuent un mouvement circulaire, alors qu'elles apparaîtraient immobiles pour un autre observateur ; l'avion, la Terre, les étoiles définissent trois référentiels différents.

Choix du référentiel

### Expérience 1. Disque sur plateau tournant

Un petit disque, fixé sur un plateau tournant autour d'un axe vertical, est observé par deux observateurs, l'un dans le laboratoire et l'autre sur le plateau. A un instant  $t_0$  un dispositif libère le disque (fig. 4.1).

Pour le premier observateur, le mouvement du disque, initialement circulaire, devient rectiligne ; pour le second observateur, le disque, initialement immobile, évolue par la suite en suivant une trajectoire en spirale ; ainsi *le même mouvement est décrit de façon différente par les deux observateurs*.

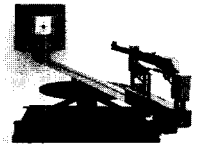


Plateau tournant

Fig. 4.1 Description du même mouvement (a) par un observateur dans le laboratoire (b) et sur le plateau tournant (c).

### Expérience 2. Fusil tournant

Un fusil est lié à une cible par un support rigide. Le tireur sur le support est *immobile par rapport au fusil* et observe l'impact de la balle (fig. 4.2).



Fusil tournant

Fig. 4.2 La même expérience effectuée dans le laboratoire (a) et sur le support tournant (b).

Si le support est immobile par rapport au laboratoire, l'impact est au centre de la cible et le tireur conclut que le mouvement de la balle est rectiligne. Si le support est en rotation par rapport au laboratoire, l'impact est soit à gauche, soit à droite du centre de la cible et le tireur conclut que le mouvement de la balle de fusil est curviligne. Ainsi *la même expérience effectuée par des observateurs différents conduit à des conclusions différentes*.

Ces deux expériences illustrent le fait que la description du mouvement, et les conclusions que l'on en déduit, dépendent de l'observateur ; on dira que la description du mouvement, et les lois que l'on peut en déduire, dépendent du choix du référentiel.

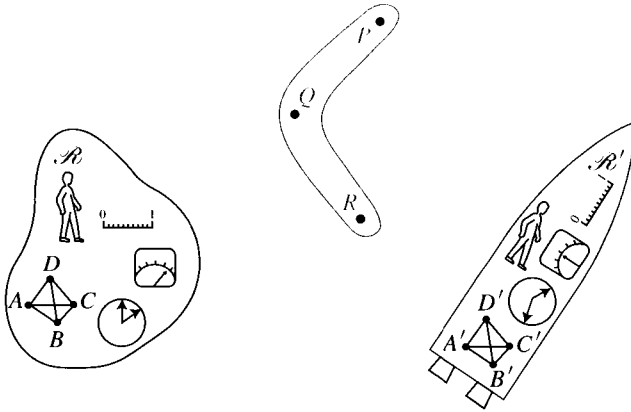


### 4.1.2 Référentiel et point coïncident

On appelle **référentiel**  $\mathcal{R}$  un ensemble de  $N$  points ( $N \geq 4$ ), non coplanaires, dont les distances mutuelles restent constantes.

C'est aussi la définition d'un solide indéformable (sect. 8.1). Par extension tous les points de l'espace dont les distances mutuelles aux  $N$  points restent constantes font partie du même référentiel. L'observateur et ses appareils de mesure sont toujours supposés immobiles par rapport à  $\mathcal{R}$  (fig. 4.3).

En mécanique classique, un référentiel est un solide indéformable



**Fig. 4.3** Observation d'un système (= boomerang) à partir des référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

Boomerang

Ayant choisi un référentiel  $\mathcal{R}$ , on peut alors étudier le mouvement du système en étudiant le mouvement de chacun de ses points.

Soit  $P$  un point du système ; à tout instant  $t$  il existe un point  $P_t$  fixé dans  $\mathcal{R}$  qui coïncide avec le point  $P$  du système à cet instant ; par définition,  $P_t$  est le **point coïncident** (avec  $P$  à l'instant  $t$ ).

Point coïncident

Dans l'expérience 1, si l'on choisit comme référentiel  $\mathcal{R}$  le laboratoire, le point coïncident  $P_t$  est le point du « laboratoire » qui coïncide avec le disque à l'instant  $t$  indiqué à l'horloge du sol (fig. 4.1 b). Au contraire, si l'on choisit le référentiel  $\mathcal{R}'$  du plateau tournant, le point coïncident  $P'_t$  sera le point du « plateau tournant » qui coïncide avec le disque à l'instant  $t$  indiqué à l'horloge située sur le plateau tournant.

Pour terminer, remarquons qu'à un instant  $t$  donné il est possible d'identifier les points  $P$  du système avec les points coïncidents  $P_t$  dans  $\mathcal{R}$  ; mais, tandis que les points  $P$  sont en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , les points  $P_t$  sont immobiles dans  $\mathcal{R}$ .

### 4.1.3 Choix du référentiel

Le choix du référentiel est entièrement arbitraire. Dans la pratique, on choisira le référentiel par rapport auquel la description du mouvement et les lois de



PTOLÉMÉE Claude  
Astronome Grec  
II<sup>e</sup> s après JC  
Stalle de la cathédrale  
d'Ulm sculptée par  
J. SYRLIN

la physique sont les plus simples. Les référentiels le plus souvent utilisés sont les suivants :

- Référentiel défini par le *laboratoire*, appelé aussi *référentiel terrestre*.
- *Référentiel géocentrique*, ou de *Ptolémée*, défini par le centre de la Terre et trois étoiles très éloignées, dites « fixes ».
- *Référentiel de Kepler*, défini par le centre du Soleil et trois étoiles fixes.
- *Référentiel de Copernic*, défini par le centre de masse du système solaire (§ 4.8.2) et trois étoiles fixes.
- *Référentiel du centre de masse* (§ 11.5.2) et *référentiel de repos* (chap. 21) d'un système matériel.
- *Référentiel inertiel local* (§ 15.3.7) ; c'est par exemple, le référentiel défini par un ascenseur en chute libre, ou un satellite tournant autour de la Terre.

## 4.2 SYSTÈME DE COORDONNÉES

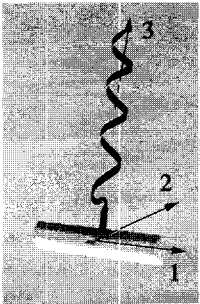
Ayant choisi un référentiel  $\mathcal{R}$ , on appelle *système de coordonnées* à l'instant  $t$  une paramétrisation des points du référentiel au moyen de trois nombres réels  $(q_1, q_2, q_3)$ , à cet instant.

Système de  
coordonnées  $\neq$   
Référentiel

Attention ! Il ne faut pas confondre les notions de référentiel et de système de coordonnées : pour un référentiel donné il existe une infinité de systèmes de coordonnées.

### 4.2.1 Coordonnées cartésiennes

Considérons un *système d'axes cartésiens direct*  $O123$  lié au référentiel, défini par un point  $O$  – appelé origine – et trois axes orthogonaux, orientés de façon *directe* (fig. 4.4 a), c'est-à-dire satisfaisant à la *règle du tire-bouchon* suivante : la rotation de  $\pi/2$  amenant l'axe 1 sur l'axe 2 fait avancer le tire-bouchon dans la direction 3.



Règle du  
tire-bouchon

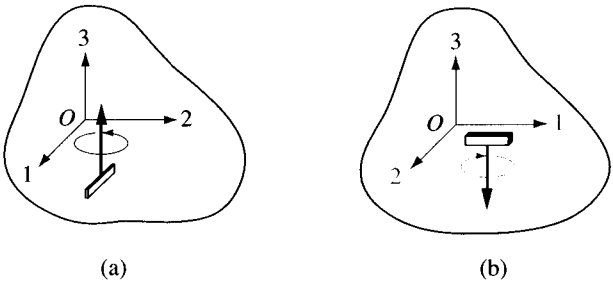
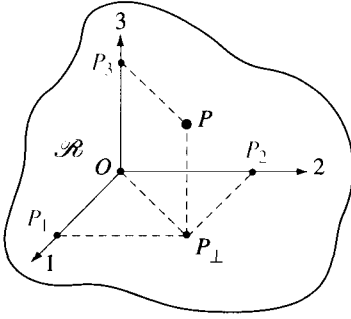


Fig. 4.4 Système d'axes orthogonaux dans  $\mathcal{R}$  : (a) direct ; (b) inverse.

Nous pouvons repérer un point  $P$  de  $\mathcal{R}$  par ses **coordonnées cartésiennes**  $P = (x_1, x_2, x_3)$  ( $x_1, x_2, x_3$ ), où  $x_i$  est la longueur avec le signe approprié du segment  $OP_i$ , projection orthogonale de  $OP$  sur l'axe  $i$ , mesurée avec la même règle étalon  $[L]$ . La longueur du segment  $OP$  est notée  $|OP| [L]$ .



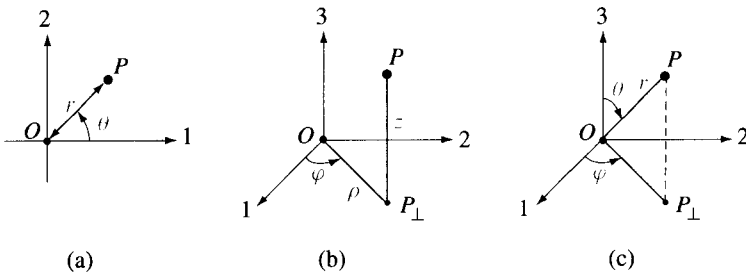
**Fig. 4.5** Coordonnées cartésiennes de  $P$  dans  $\mathcal{R}$ .

On remarquera que le choix du système d'axes  $O123$  n'est pas unique et dans certains cas, on choisira différents systèmes d'axes à différents instants (sans changer de référentiel).

#### 4.2.2 Coordonnées curvilignes

Suivant la nature du problème, en particulier quand il y a des symétries, il sera possible de simplifier les calculs en introduisant d'autres systèmes de coordonnées, dites coordonnées curvilignes.

Les coordonnées curvilignes les plus souvent utilisées sont les **coordonnées polaires** ( $r, \theta$ ) dans le plan, **cylindriques** ( $\rho, \varphi, z$ ) et **sphériques** ( $r, \theta, \varphi$ ) dans l'espace, définies sur la figure 4.6.



Coordonnées  
polaires,  
cylindriques,  
sphériques

$r =  OP  \in [0, \infty[$	$\rho =  OP_{\perp}  \in [0, \infty[$	$r =  OP  \in [0, \infty[$
$\theta \in [0, 2\pi]$	$\varphi \in [0, 2\pi]$	$\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$
$P = (r, \theta)$	$P = (\rho, \varphi, z)$	$P = (r, \theta, \varphi)$

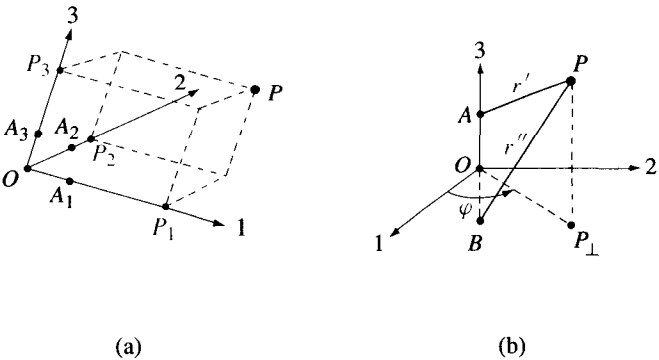
**Fig. 4.6** Coordonnées curvilignes de  $P$  : (a) polaires ; (b) cylindriques ; (c) sphériques.

Les formules de transformation entre les coordonnées cartésiennes et respectivement les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques sont :

Formules  
de changement  
de coordonnées

a)  $\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = 0 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x_1 = \rho \cos \varphi \\ x_2 = \rho \sin \varphi \\ x_3 = z \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases} \quad (4.1)$

A titre d'illustration, et pour insister sur l'arbitraire du choix des coordonnées, nous avons défini sur la figure 4.7 les *coordonnées contravariantes* et les *coordonnées elliptiques*. On utilise ces dernières, par exemple, dans l'étude de la molécule  $\text{H}_2^+$  : les points  $A$  et  $B$  sont les positions des protons supposés immobiles et  $P$  représente la position de l'électron.



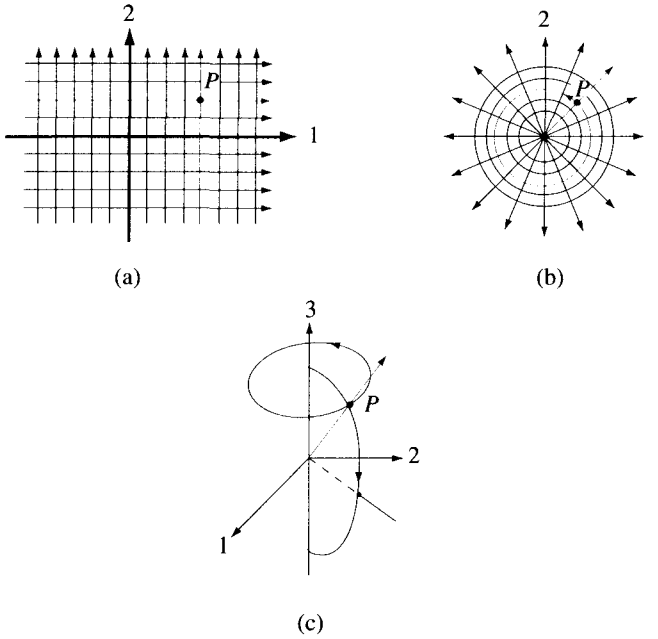
$OA_1A_2A_3$  sont quatre points fixes (par exemple quatre atomes d'un cristal).  
 $P = (x^1, x^2, x^3)$  où  $|x^i| = \frac{|OP_i|}{|OA_i|}$

$P = (\lambda, \mu, \varphi)$   
 $\lambda = \frac{1}{d}(r'' + r') \in [1, \infty[$   
 $\mu = \frac{1}{d}(r'' - r') \in [-1, +1]$   
 $\varphi \in [0, 2\pi]$   
 $d = |AB|, r' = |AP|, r'' = |BP|$

Fig. 4.7 (a) Coordonnées contravariantes ; (b) coordonnées elliptiques.

Lignes de  
coordonnées

On appelle *ligne de coordonnée*  $q_i$  une courbe orientée, définie en faisant varier la coordonnée  $q_i$ , les autres coordonnées étant maintenues constantes (fig. 4.8).



**Fig. 4.8** Lignes de coordonnées : (a) cartésiennes ; (b) polaires ; (c) sphériques.

### 4.2.3 Coordonnées généralisées

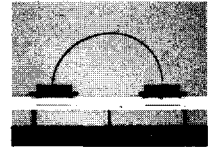
Ayant paramétrisé les points de  $\mathcal{R}$ , nous pouvons repérer la position instantanée de n'importe quel système. En particulier, pour un système de  $N$  points, il faudra en principe  $3N$  nombres et le temps, par exemple  $\{t, x_i^\alpha\}_{i=1,2,3}^{\alpha=1,\dots,N}$ . Dans la pratique, il sera possible de procéder de façon plus simple et plus utile.

#### Observations

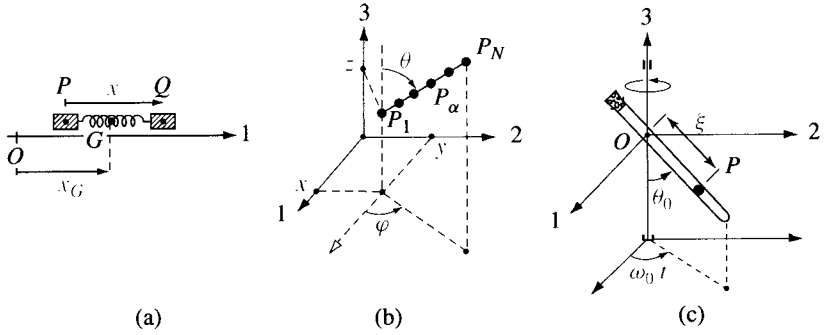
En observant le modèle de la **molécule diatomique**, formée de deux atomes identiques, sur le rail à air (fig. 4.9), nous remarquons que le mouvement des « atomes »  $P$  et  $Q$  est *compliqué*. Cependant, le mouvement du point  $G$ , milieu de  $PQ$ , est *très simple* et le mouvement relatif (distance entre  $P$  et  $Q$ ) est *simple*. Il y aura donc intérêt à introduire les deux grandeurs  $x_G$  et  $x$ , où  $x_G$  est la coordonnée du milieu de  $PQ$  et  $x$  la distance, variable, entre  $P$  et  $Q$ . Ces deux grandeurs définissent univoquement les coordonnées cartésiennes de  $P$  et  $Q$  par les relations

$$P : \quad x_1^{(P)} = x_G - \frac{1}{2}x ; \quad x_2^{(P)} = 0 ; \quad x_3^{(P)} = 0$$

$$Q : \quad x_1^{(Q)} = x_G + \frac{1}{2}x ; \quad x_2^{(Q)} = 0 ; \quad x_3^{(Q)} = 0.$$



Modèle d'une molécule diatomique sur rail à air



**Fig. 4.9** (a) Molécule diatomique ; (b) rotateur ; (c) centrifugeuse.

Rotateur

Considérons ensuite le **rotateur**, molécule linéaire rigide formée de  $N$  atomes  $P_1, \dots, P_N$  (fig. 4.9). Les cinq grandeurs  $(x, y, z, \theta, \varphi)$  définissent univoquement les coordonnées cartésiennes des  $N$  atomes :

$$P_\alpha : \begin{pmatrix} x_1^{(\alpha)} = x + d_\alpha \sin \theta \cos \varphi \\ x_2^{(\alpha)} = y + d_\alpha \sin \theta \sin \varphi \\ x_3^{(\alpha)} = z + d_\alpha \cos \theta \end{pmatrix}$$

où  $d_\alpha = |P_1 P_\alpha|$  est constant.

Centrifugeuse

Finalement, considérons un point  $P$  se déplaçant à l'intérieur d'un tube tournant à vitesse  $\omega_0$  constante autour d'un axe vertical (centrifugeuse, fig. 4.9). Dans ce cas, la position de  $P$  est univoquement définie au moyen d'une seule grandeur  $\xi = |OP|$  et du temps ( $\theta_0$  étant supposé constant) et l'on a

$$P : \begin{pmatrix} x_1 = \xi \sin \theta_0 \cos(\omega_0 t) \\ x_2 = \xi \sin \theta_0 \sin(\omega_0 t) \\ x_3 = -\xi \cos \theta_0. \end{pmatrix}$$

Coordonnées  
généralisées d'un  
système

On appelle **coordonnées généralisées** tout ensemble de  $k$  grandeurs  $(q_1, \dots, q_k)$  tel que la donnée de  $(q_1, \dots, q_k, t)$  détermine univoquement la position du système à l'instant  $t$

Cela signifie que pour tout point  $P_\alpha$  du système il existe trois fonctions

$$\begin{cases} x_1^{(\alpha)} = x_1^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t) \\ x_2^{(\alpha)} = x_2^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t) \\ x_3^{(\alpha)} = x_3^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t) \end{cases} \quad (4.2)$$

exprimant les coordonnées cartésiennes de  $P_\alpha$  en fonction des coordonnées généralisées et du temps.

Le sous-espace de  $\mathbb{R}^{3N}$  défini par les positions possibles du système est appelé **espace de configuration**. Les équations (4.2) constituent une paramétrisation de l'espace de configuration, ou tout au moins d'une partie de cet espace. Le choix des coordonnées généralisées est totalement arbitraire, cependant on choisira toujours les coordonnées généralisées de manière telle que des valeurs voisines des  $\{q_i\}$  correspondent à des positions voisines du système dans l'espace.

Espace de configuration

Si les  $k$  coordonnées généralisées sont des variables indépendantes, et s'il est possible de les faire varier de façon indépendante, on dit que le système est **holonôme à  $k$  degrés de liberté**.

Système holonôme

Si ces deux conditions ne sont pas remplies, on dit que le système est soumis à des **liaisons**, concept sur lequel nous reviendrons à la section 12.6. Dans les exemples de la figure 4.9, la molécule diatomique est un système holonôme à 2 degrés de liberté, le rotateur un système holonôme à 5 degrés de liberté, la particule dans la centrifugeuse un système holonôme à 1 degré de liberté.

## 4.3 CALCUL VECTORIEL : ASPECT GÉOMÉTRIQUE

### 4.3.1 Scalaire

Par définition un **scalaire** est une grandeur  $S$  entièrement définie par un nombre réel  $s$  et une unité  $[S]$ .

Scalaire

En particulier, la valeur numérique ne dépend ni du choix d'un système de coordonnées, ni de la direction ; elle peut dépendre cependant du référentiel. Par exemple la longueur d'une courbe, l'intervalle de temps entre deux événements, la température, la masse et l'énergie cinétique sont des scalaires.

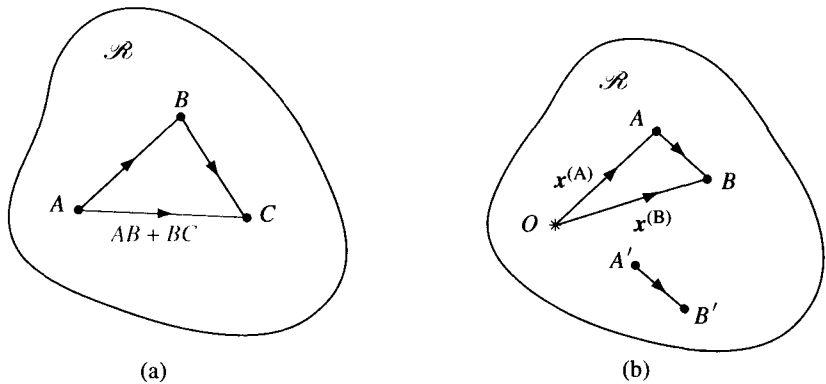
### 4.3.2 Déplacement

Il existe des grandeurs qui ne sont pas complètement déterminées par la donnée d'un nombre. Le cas le plus simple est le « déplacement ».

On appelle **déplacement  $AB$**  une paire ordonnée de points du référentiel  $\mathcal{R}$  :  $A$  est l'**origine** et  $B$  l'**extrémité**. Le déplacement  $AB$  sera représenté par une flèche de  $A$  à  $B$ .

Déplacement

Un déplacement est ainsi défini par une *origine*  $A$ , un nombre positif ou nul  $|AB|$  appelé *norme* (la longueur du déplacement est égale à  $|AB|$  [L]), une *direction* (droite  $AB$ ) et un *sens* (celui de  $A$  vers  $B$ ). Remarquons que la norme est un scalaire.



**Fig. 4.10** Déplacement  $AB$  et vecteur-lieu de  $A$  et  $B$  : (a) somme ; (b)  $A'B' \sim AB$ .

Étant donné les déplacements  $AB$  et  $BC$ , on définit la somme (fig. 4.10 a)

Somme de deux déplacements  $AB + BC = AC$  (4.3)

et l'opposé  $-AB = BA$ . (4.4)

Rayon-vecteur Soit  $O$  un point arbitrairement choisi dans le référentiel  $\mathcal{R}$  ; on associe à tout point  $P$  de  $\mathcal{R}$  le déplacement  $OP$ , aussi noté  $\vec{x}^{(P)}$ , appelé **rayon-vecteur** ou **vecteur-lieu** de  $P$ . Nous avons ainsi (fig. 4.10 b)

$AB = AO + OB = -\vec{x}^{(A)} + \vec{x}^{(B)}$ . (4.5)

Deux déplacements  $AB$  et  $A'B'$  sont dits **équipollents** si la translation amenant  $A$  sur  $B$  transforme  $A'$  en  $B'$ , et l'on écrit  $AB \sim A'B'$  (fig. 4.10 b). Cette notion d'équipollence est une relation d'équivalence ; la classe d'équivalence  **$\vec{AB}$**  du déplacement  $AB$  est appelée **déplacement libre**. Un déplacement libre est ainsi défini par une *direction*, un *sens* et un *nombre positif ou nul*. Le déplacement libre associé à  $AA$  est le **déplacement nul**, noté  $\vec{0}$  ou simplement  $0$ .

Ayant choisi un point  $O$  dans  $\mathcal{R}$ , il y a un déplacement et un seul d'origine  $O$  équipollent au déplacement  $AB$ , et il est possible de représenter l'ensemble des déplacements libres par l'ensemble des déplacements de même origine  $O$ .

On introduit sur l'ensemble des *déplacements libres* – ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble des déplacements de même origine  $O$  – la structure mathématique suivante :

Structure mathématique sur les déplacements

- **Multiplication par un scalaire**  
 Le déplacement  $\lambda \vec{OA}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est le déplacement de norme  $|\lambda| |\vec{OA}|$ , de même direction que  $\vec{OA}$ , et de même sens ou de sens opposé suivant que  $\lambda$  est positif ou négatif. En particulier  $-\vec{OA} = \vec{AO}$ .

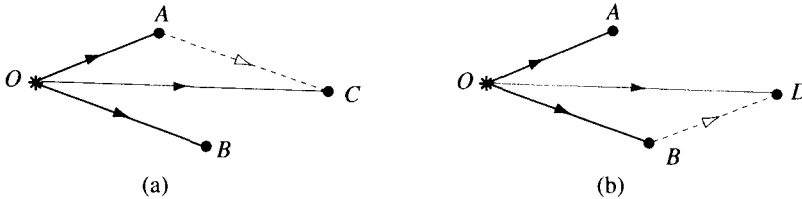
- **Addition**  
 La somme  $\vec{OA} + \vec{OB}$  est le déplacement  $\vec{OC}$  défini par la règle du parallélogramme (fig. 4.11). Comme nous supposons que l'espace est euclidien, nous avons la propriété de commutativité :

Commutativité  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OA}$ . (4.6)



De plus  $OA + (-OA) = 0$ . En particulier pour tout déplacement libre,

$$AB = x^{(B)} - x^{(A)}. \quad (4.7)$$

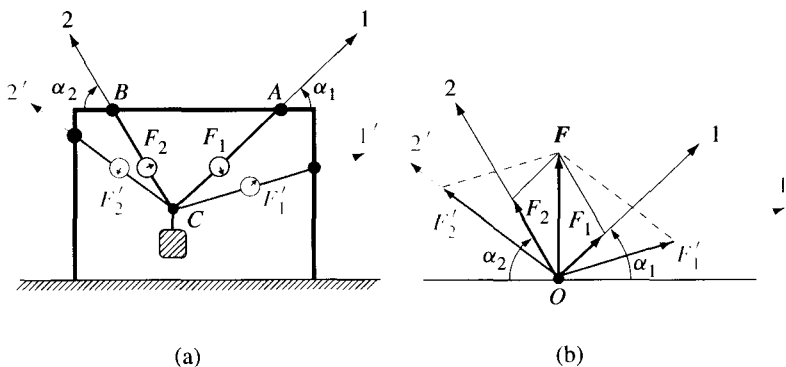


**Fig. 4.11** (a)  $OA + OB = OC$  où  $AC \sim OB$ ; (b)  $OB + OA = OD$  où  $BD \sim OA$ . Si l'espace est euclidien,  $C = D$ .

### 4.3.3 Expérience de Stevin

Considérons l'expérience de Stevin représentée sur la figure 4.12. Un objet est suspendu à un support au moyen de deux tiges sur lesquelles on a fixé des dynamomètres identiques (pour cette discussion, il n'est pas nécessaire de préciser la grandeur *force* que cet appareil mesure). On peut déplacer les points  $A$  et  $B$  sur le cadre et ainsi modifier les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . On observe que les grandeurs  $(F_1, F_2)$  dépendent des angles  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , mais elles possèdent une *propriété remarquable* : en reportant à partir d'un point  $O$  des segments parallèles aux tiges, de longueurs proportionnelles à  $F_1$  et  $F_2$ , on constate que la diagonale du parallélogramme ainsi construit est indépendante des angles  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . Il est donc possible de représenter la paire  $(F_1, F_2)$  au moyen d'une seule « flèche »  $F$  – ou *déplacement libre* – qui est indépendante des angles  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . De plus cette représentation permet de prédire quelles seront les valeurs  $(F'_1, F'_2)$  pour n'importe quels angles  $(\alpha'_1, \alpha'_2)$  par la loi d'addition des déplacements libres.

En conclusion l'expérience de Stevin montre qu'il existe des grandeurs physiques qui peuvent être représentées par des déplacements libres et qui possèdent la même loi d'addition.



**Fig. 4.12** Expérience de Stevin, ... mais le calcul vectoriel ne sera introduit qu'au XIX<sup>e</sup> siècle, par J.W. Gibbs et O. Heaviside.



**STEVIN Simon**  
Physicien et mathématicien flamand  
1548-1620  
Publication en 1586 du théorème du triangle des forces et de l'impossibilité du mouvement perpétuel



4.3.4 Vecteurs

Un vecteur a les mêmes propriétés qu'un déplacement libre

Par définition, toute grandeur physique ayant les « mêmes propriétés » que les déplacements libres est un **vecteur**.

Ayant choisi une échelle, une telle grandeur peut être représentée par une flèche d'origine  $O$  et, réciproquement, toute flèche d'origine  $O$  représente une valeur de cette grandeur ; de plus, *cette représentation est indépendante de tout système d'axes*. Cette grandeur, notée  $\mathbf{v}$ , est ainsi définie par une *direction*, un *sens*, un *nombre positif ou nul*  $|\mathbf{v}|$  appelé **norme**, une unité  $[\mathbf{v}]$  et *satisfait la règle d'addition du parallélogramme* (fig. 4.13) : la grandeur physique  $\mathbf{v}$  est égale à la somme des grandeurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  si  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  selon la règle du parallélogramme.

Addition de 2 vecteurs

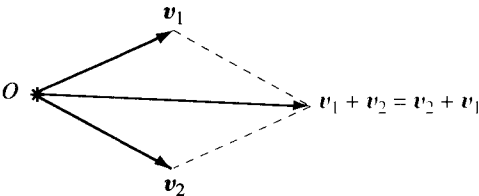
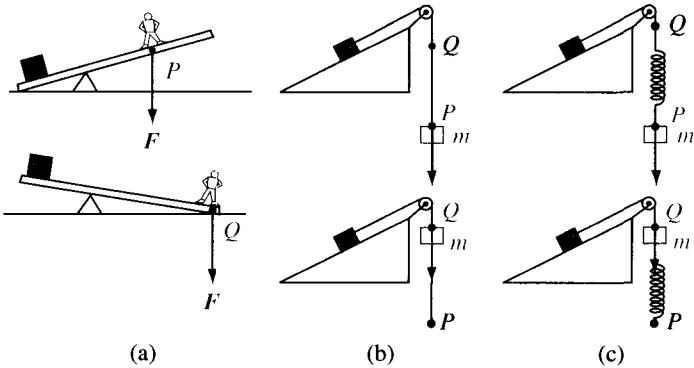


Fig. 4.13 Règle du parallélogramme.

Vecteur nul

Remarquons que la norme d'un vecteur est un scalaire ; le vecteur de norme zéro est appelé **vecteur nul**, noté  $0$  ; deux vecteurs ayant même unité sont dits de **même nature**.



**Fig. 4.14** (a) L'action de la force dépend du point d'application  $P$  ou  $Q$  ; (b) le mouvement du bloc sur le plan incliné ne dépend pas du point de suspension de la masse  $m$  sur la portion verticale du fil : la force exercée par  $m$  sur le fil est un vecteur glissant ; (c) le mouvement du bloc dépend du point de suspension : la force exercée sur le ressort est un vecteur lié.

L'expérience de la figure 4.14 (a) montre que l'action d'un vecteur peut dépendre du point d'application : la force nécessaire pour soulever le bloc dépend du point d'application  $P$  ou  $Q$ . Au contraire, si la corde de la figure 4.14 (b) n'est pas élastique, le mouvement du bloc sera le même lorsque la force est appliquée au point  $P$  ou au point  $Q$  : l'action de la force n'est pas modifiée si le

point d'application est déplacé sur la droite support de la force. Mais attention ! Cela est faux si la corde est élastique (fig. 4.14 c).

Par définition un **vecteur lié** est un vecteur associé à un point  $P$ , appelé **point d'application** ; il est désigné par  $(P, \mathbf{v})$  quand cela est nécessaire. Un vecteur lié est une grandeur ayant les mêmes propriétés que les déplacements. Par exemple la force est en général un vecteur lié.

Vecteur lié

Un vecteur qui n'est pas associé à un point est appelé **vecteur libre**. Par exemple la quantité de mouvement d'un système est un vecteur libre (sect. 11.1).

Vecteur libre

Finalement il existe des vecteurs liés dont l'action n'est pas modifiée si on déplace le point d'application sur la droite support du vecteur ; un vecteur ainsi associé à une droite de l'espace est appelé **vecteur glissant**.

Vecteur glissant

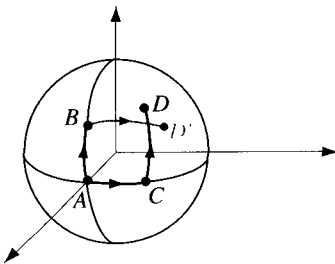
### 4.3.5 Remarques

- La notion de vecteur introduite au paragraphe 4.3.4 est *intrinsèque*, elle ne fait appel ni à une origine, ni à un système d'axes. Cependant nous n'avons pas donné une définition mathématique puisque nous n'avons pas précisé l'expression « les mêmes propriétés que les déplacements libres ». Suivant les propriétés que l'on considère, on sera conduit soit à la définition mathématique d'*espace vectoriel* (ou  $\mathbb{R}$ -module), soit à celle de *tenseur* (Appendice B).

Tenseur

- Il existe des grandeurs que nous pouvons représenter par une flèche mais qui ne sont pas des vecteurs parce qu'elles ne satisfont pas à la règle du parallélogramme. Par exemple on peut représenter par une flèche  $\mathbf{n}$  la rotation  $\mathbf{R}_n$  d'axe  $\mathbf{n}$ , d'angle  $|\mathbf{n}|$ , dans le sens défini par la règle du tire-bouchon ; on vérifie aisément que  $\mathbf{R}_{n_1} \cdot \mathbf{R}_{n_2} \neq \mathbf{R}_{n_1+n_2}$  et la règle du parallélogramme n'est pas satisfaite.

- Finalement mentionnons que, sous-jacente à la propriété de commutativité de l'addition, il y a l'hypothèse que l'espace est *euclidien*. Sur la Terre, un déplacement à partir de l'équateur de 1000 m au Nord suivi d'un déplacement de 1000 m à l'Est diffère d'un déplacement de 1000 m à l'Est suivi d'un déplacement de 1000 m au Nord d'environ  $10^{-5}$  m ; pour de telles distances, nous pouvons considérer que la Terre est un espace euclidien. Si nous effectuons maintenant des déplacements de 1000 km, le déplacement Nord puis Est diffère du déplacement Est puis Nord de 20 km ! Pour de tels déplacements, il n'est plus possible de considérer la Terre comme un espace euclidien.



**Fig. 4.15** La surface de la Terre ne peut pas être considérée comme un espace euclidien pour des distances supérieures à quelques dizaines de km :  $AB + AC \neq AC + AB$ .

## 4.4 STRUCTURE MATHÉMATIQUE SUR LES VECTEURS

Cette section est un résumé sans démonstration des notions de calcul vectoriel dont nous aurons besoin. Nous ne mentionnerons pas explicitement les unités, celles-ci s'introduisant de façon naturelle.

### 4.4.1 Multiplication d'un vecteur $\mathbf{v}$ par un scalaire $S$

Le produit  $S \mathbf{v}$  est le vecteur de norme  $|S| |\mathbf{v}|$ , de même sens que  $\mathbf{v}$  si  $S$  est positif et de sens opposé si  $S$  est négatif. Si  $\mathbf{v}$  est non nul, le **vecteur unité**  $\hat{\mathbf{v}}$  dans le sens de  $\mathbf{v}$  est le vecteur sans dimension défini par

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad \text{d'où} \quad |\hat{\mathbf{v}}| = 1. \quad (4.8)$$

Par conséquent on peut toujours écrire

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \hat{\mathbf{v}}. \quad (4.9)$$

### 4.4.2 Somme de deux vecteurs de même nature

**Somme** La somme  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  est le vecteur  $\mathbf{v}$  défini par la règle du parallélogramme (fig. 4.13).

**Opposé** L'**opposé**  $-\mathbf{v}$  du vecteur  $\mathbf{v}$  est le vecteur tel que  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ .

#### Propriétés

1.  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$
2.  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$
3.  $S(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = S\mathbf{v}_1 + S\mathbf{v}_2$

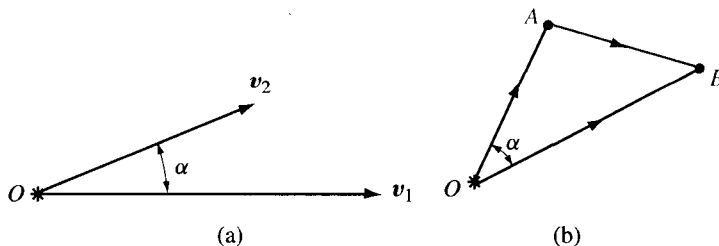
### 4.4.3 Produit scalaire de deux vecteurs

**Produit scalaire**  
 $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$

Le produit scalaire  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$  est le scalaire défini par

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| \cos \alpha \quad (4.10)$$

où  $\alpha \in [0, \pi]$  est l'angle entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  (fig. 4.16 a).



**Fig. 4.16** (a) Produit scalaire de deux vecteurs ; (b) théorème de Pythagore généralisé.

### Propriétés

1.  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 \geq 0$ ;  $|\mathbf{v}|^2 = 0$  si et seulement si  $\mathbf{v} = 0$
2.  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$
3.  $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$
4.  $\mathbf{v}_1 \cdot (S \mathbf{v}_2) = S (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)$

### Corollaires

1. 
$$\left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{u}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^M \mu_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_i \mu_j \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_j \quad (4.11)$$
2. Si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont non nuls, alors  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$  si et seulement si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont perpendiculaires.
3. *Théorème de Pythagore généralisé* (fig. 4.16 b) :

$$|\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{OA}|^2 + |\mathbf{OB}|^2 - 2 |\mathbf{OA}| |\mathbf{OB}| \cos \alpha \quad (4.12)$$

En effet,  $|\mathbf{AB}|^2 = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{AB} = (\mathbf{OB} - \mathbf{OA}) \cdot (\mathbf{OB} - \mathbf{OA})$ .

4. La **projection orthogonale** du vecteur  $\mathbf{v}$  sur la droite  $OA$  (fig. 4.17) est le vecteur  $\mathbf{v}'$  défini par

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{OA}}{|\mathbf{OA}|}. \quad (4.13)$$

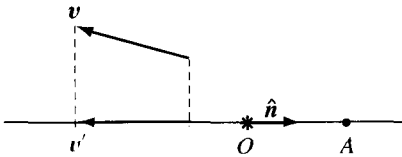


Fig. 4.17 Projection d'un vecteur sur un axe.

#### 4.4.4 Produit vectoriel de deux vecteurs

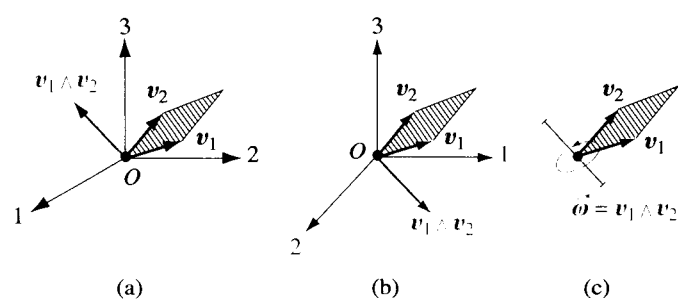
La structure mathématique introduite jusqu'ici est indépendante du choix d'un système d'axes. *Au contraire, pour définir le produit vectoriel, il faut commencer par choisir un système d'axes cartésien  $O123$ .*

Le **produit vectoriel**  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$  est la grandeur définie par :

Produit vectoriel

- une *direction*, perpendiculaire aux vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  ;
- un *sens*  $\hat{\mathbf{n}}$ , tel que  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \hat{\mathbf{n}})$  ait même orientation que  $O123$  ;
- un *nombre* positif ou nul,  $|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_1| |\mathbf{v}_2| |\sin \alpha|$  où  $\alpha$  est l'angle entre  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ .

La grandeur  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$  peut ainsi être représentée par une « flèche » qui ne dépend du système d'axes que par l'orientation (fig. 4.18). Si l'on ne considère que des systèmes d'axes orientés de façon directe, cette grandeur possède les mêmes propriétés que les déplacements libres ; cependant la flèche change de sens si l'on inverse l'orientation du système d'axes. De telles grandeurs sont appelées *pseudo-vecteurs* ou *vecteurs axiaux* ; au contraire, les grandeurs ayant les mêmes propriétés que les déplacements sont dites *vecteurs polaires*. Les vecteurs axiaux, notés dans certain cas  $\vec{\omega}$ , sont parfois représentés par un segment auquel est associé un sens de rotation (fig. 4.18 c) ; cette représentation est indépendante du système d'axes choisi. Par la suite nous ne ferons pas de distinction entre vecteur polaire et axial en choisissant uniquement des systèmes d'axes directs.



**Fig. 4.18** Produit vectoriel : (a) système d'axes direct ; (b) système d'axes inverse ; (c) représentation indépendante du système d'axes. L'aire de la surface hachurée est égale à  $|\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2|$ .

**Propriétés**

Le produit vectoriel n'est pas commutatif

- 1.  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1$
- 2.  $\mathbf{v}_1 \wedge (S \mathbf{v}_2) = S (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2)$
- 3.  $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3$

**Corollaires**

$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = 0$   
⇔  
 $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$   
sont parallèles

- 1.  $\left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbf{u}_i \right) \wedge \left( \sum_{j=1}^M \mu_j \mathbf{v}_j \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \lambda_i \mu_j \mathbf{u}_i \wedge \mathbf{v}_j$  (4.14)
- 2. Si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont non nuls, alors  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 = 0$  si et seulement si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  ont même direction (c'est-à-dire sont parallèles).

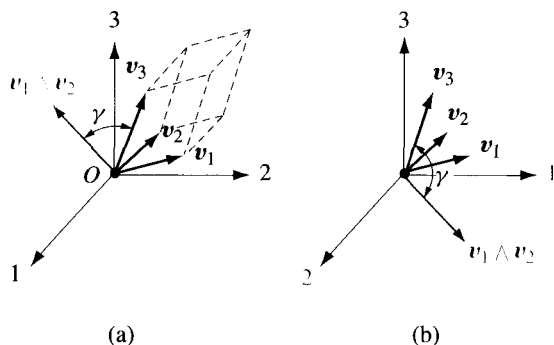
**4.4.5 Produit mixte de trois vecteurs**

Le produit mixte de trois vecteurs (polaires) est le nombre défini par

Produit mixte  $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = |\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2| |\mathbf{v}_3| \cos \gamma$  (4.15)

où  $\gamma$  est l'angle entre  $\mathbf{v}_3$  et  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$  (fig. 4.19).

Si l'on ne considère que des systèmes d'axes orientés de façon directe, ce nombre est un scalaire ; cependant, ce nombre change de signe si l'on inverse l'orientation du système d'axes : c'est donc un *pseudo-scalaire*.



**Fig. 4.19** Le volume du parallélépipède construit sur  $(v_1, v_2, v_3)$  est égal à  $|(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3|$ . (a) Système d'axes direct ; (b) système d'axes inverse.

### Propriétés

$$1. (v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = (v_2 \wedge v_3) \cdot v_1 = (v_3 \wedge v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot (v_2 \wedge v_3) \quad (4.16)$$

2. Si  $v_1, v_2$  et  $v_3$  sont non nuls, alors  $(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = 0$  si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires.

$$(v_1 \wedge v_2) \cdot v_3 = 0 \\ \Downarrow \\ v_1, v_2 \text{ et } v_3 \\ \text{coplanaires}$$

### 4.4.6 Produit triple de trois vecteurs

Le produit triple de trois vecteurs (polaires) est le vecteur (polaire) défini par

$$v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3).$$

Produit triple

### Propriétés

$$1. v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = (v_1 \cdot v_3) v_2 - (v_1 \cdot v_2) v_3 \quad (4.17)$$

$$2. v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) + v_2 \wedge (v_3 \wedge v_1) + v_3 \wedge (v_1 \wedge v_2) = 0 \quad (4.18)$$

$$\text{d'où} \quad (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3 = v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) + v_2 \wedge (v_3 \wedge v_1)$$

Cette dernière relation montre que le produit triple n'est pas associatif.

### Corollaires

$$1. (v_1 \wedge v_2) \cdot (v_3 \wedge v_4) = (v_1 \cdot v_3)(v_2 \cdot v_4) - (v_1 \cdot v_4)(v_2 \cdot v_3) \quad (4.19)$$

$$2. (v_1 \wedge v_2)^2 = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2$$

Ce corollaire est une conséquence immédiate des propriétés 1 du produit mixte et du produit triple.

4.5 CALCUL VECTORIEL : ASPECT ALGÈBRIQUE

4.5.1 Composantes d'un vecteur

Système d'axes orthogonaux      Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur libre ou lié au point  $A$ . En introduisant un *système d'axes orthogonaux*  $A123$ , les résultats de la section 4.4 permettent d'écrire (fig. 4.20)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i \tag{4.20}$$

où  $\mathbf{e}_i$  est le vecteur unité (sans dimension) dans la direction  $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$$

est appelé *composante de  $\mathbf{v}$  dans la direction  $i$*  (ainsi  $[v_i] = [\mathbf{v}]$ ).

$$(4.21)$$

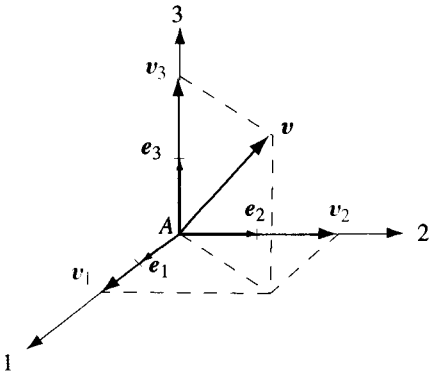


Fig. 4.20 Décomposition de  $\mathbf{v}$  dans la base  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ .

Base, repère      Les 3 vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  forment une *base* et  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  constitue un *repère orthonormé* lié au point  $A$ , c'est-à-dire :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \tag{4.22}$$

Symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$       où  $\delta_{ij}$  est le *symbole de Kronecker* défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

et

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2. \tag{4.23}$$

Dans le cas des *rayons-vecteurs* nous avons de même (fig. 4.5)

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_1 + \mathbf{OP}_2 + \mathbf{OP}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i^{(P)} \mathbf{e}_i.$$



$x_i^{(P)} = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_i$ , composante de  $\mathbf{OP}$  dans la direction  $i$ , s'identifie avec la coordonnée cartésienne du point  $P$ .

Finalement, pour tout déplacement  $\mathbf{AB}$ , on a

$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \sum_{i=1}^3 (x_i^{(B)} - x_i^{(A)}) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} x_1^B - x_1^A \\ x_2^B - x_2^A \\ x_3^B - x_3^A \end{pmatrix}$$

et les composantes  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  du déplacement  $\mathbf{AB}$  sont égales à la différence entre les coordonnées cartésiennes de  $B$  et celles de  $A$ .

### Propriétés

Ayant choisi un système d'axes orthogonaux, alors :

1. Un vecteur  $\mathbf{v}$  est univoquement défini par ses composantes  $(v_1, v_2, v_3)$  ;
2. Un déplacement libre est univoquement défini par ses composantes  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ;
3. Deux déplacements sont équipollents si et seulement si ils ont les mêmes composantes.

### 4.5.2 Formules du calcul vectoriel

Soit  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , trois vecteurs définis par leurs composantes relativement à un repère orthonormé :  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

La structure mathématique introduite à la section 4.4 s'exprime au moyen de relations algébriques simples entre les composantes :

multiplication par un scalaire :  $s \mathbf{v} = (s v_1, s v_2, s v_3)$

somme de deux vecteurs :  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

produit scalaire :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$

norme d'un vecteur :  $|\mathbf{v}| = [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2]^{1/2} = \left[ \sum_{i=1}^3 v_i^2 \right]^{1/2}$

produit vectoriel :  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

produit mixte :  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

où  $|\mathbf{A}|$  est le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ .

### 4.5.3 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur

Si l'on introduit un repère  $A e_1 e_2 e_3$  qui **n'est pas orthonormé** (fig. 4.7 a, où  $e_i = OA_i$ ), il faut distinguer les **composantes contravariantes**  $v^i$  du vecteur  $v$ , définies par la décomposition

Composantes contravariantes 
$$v = \sum_{i=1}^3 v^i e_i \quad (4.24)$$

des **composantes covariantes**  $v_i$  de  $v$ , définies par le produit scalaire

Composantes covariantes 
$$v_i = v \cdot e_i = \sum_{j=1}^3 v^j e_j \cdot e_i \quad (4.25)$$

Dans ce cas le produit scalaire s'exprime par

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^3 u^i e_i \cdot v = \sum_{i=1}^3 u^i v_i \equiv \sum_{i,j} u^i v^j (e_i \cdot e_j) \quad (4.26)$$

### 4.5.4 Convention d'Einstein

Pour simplifier les formules, on introduit souvent la **convention d'Einstein** : un indice répété deux fois, une fois en haut, l'autre en bas, indique automatiquement une sommation. Ainsi on écrira (4.26)

$$u \cdot v = u^i v_i \equiv u^i v^j (e_i \cdot e_j)$$

Dans la suite nous considérerons uniquement des **repères orthonormés** et il n'y aura pas lieu de distinguer entre composantes co- et contravariantes, car dans ce cas  $v^i = v_i$ .

## 4.6 TORSEURS

### 4.6.1 Introduction

De même que les expériences de Stevin sur les forces concourantes ont conduit à la notion de **vecteur**, les expériences sur les forces parallèles conduisent à la notion de **moment**. Rappelons que l'étude de l'équilibre des leviers avait amené Archimède à la conclusion que des poids commensurables sont en équilibre lorsqu'ils sont en raison inverse de leur distance au point d'appui. Pour généraliser ce concept on introduit la notion de moment d'un vecteur lié. Il semblerait que Léonard de Vinci ait été le premier à avoir reconnu l'importance de cette notion en statique.



ARCHIMÈDE  
Mathématicien et  
physicien grec  
~ 287 – 212 av. J.-C.

Moment  
(dépend de  $O$ )

On appelle **moment par rapport au point  $O$  du vecteur lié  $(P, v)$**  le vecteur lié au point  $O$  défini par

$$M_O = OP \wedge v. \quad (4.27)$$

Le moment par rapport à  $O$  du vecteur lié  $\mathbf{v}$  n'est pas modifié si l'on déplace  $\mathbf{v}$  sur son support : on peut ainsi définir le moment d'un vecteur glissant par rapport à  $O$ .

### Ensembles de forces équivalents

L'expérience de Stevin (§ 4.3.3) nous a montré que deux forces  $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$  appliquées au même point  $C$  pouvaient être remplacées par deux autres forces  $\{\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2\}$ , appliquées au même point  $C$ , pour autant que

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}'_1 + \mathbf{F}'_2.$$

De plus elles pouvaient être remplacées par une seule force  $\mathbf{F}$  ou par  $n$  forces  $\{\mathbf{F}''_1, \dots, \mathbf{F}''_n\}$  appliquées en  $C$  pour autant que

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F} = \mathbf{F}''_1 + \dots + \mathbf{F}''_n.$$

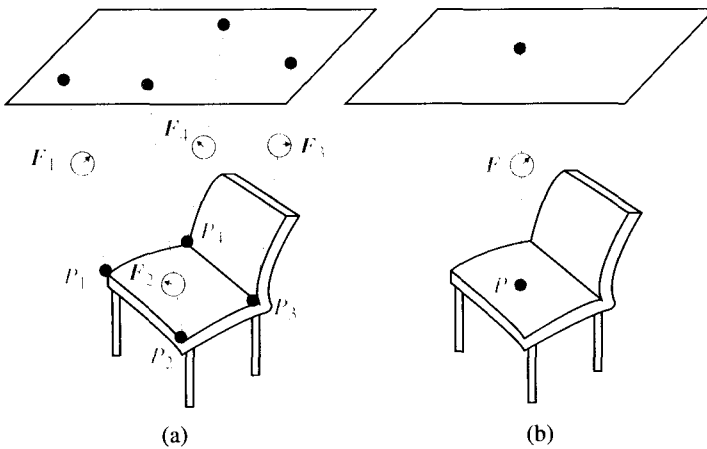
Les ensembles de forces  $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}$ ,  $\{\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2\}$ ,  $\{\mathbf{F}\}$ ,  $\{\mathbf{F}''_1, \dots, \mathbf{F}''_n\}$  appliquées en  $C$  sont donc « équivalents » en ce sens qu'ils ont même effet sur le système considéré (la masse suspendue au point  $C$ ).

L'expérience décrite à la figure 4.21 est une généralisation à plusieurs forces non coplanaires et non concourantes de l'expérience de Stevin.



LEONARD DE VINCI  
(1452-1519)  
peintre, sculpteur,  
ingénieur, architecte  
savant italien

Généralisation de  
l'expérience de  
Stevin



**Fig. 4.21** La force  $\mathbf{F}$  agissant sur  $P$  est « équivalente » aux forces  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ , agissant sur  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

La figure 4.21 (a) montre le solide maintenu en équilibre sous l'action de 4 forces  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$ . La figure 4.21 (b) montre le même solide maintenu dans la même position d'équilibre sous l'action d'une seule force  $\mathbf{F}$ .

Ces deux ensembles de forces  $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$  et  $\{\mathbf{F}\}$  qui maintiennent le solide dans le même état sont dits **équivalents**

Équivalence entre  
deux ensembles de  
forces

Expérimentalement on observe que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles de forces  $\{(P_i, F_i)\}$  et  $\{(P'_j, F'_j)\}$  maintiennent le solide dans le même état s'exprime par les équations

$$\sum_{i=1}^N F_i = \sum_{j=1}^M F'_j \quad (4.28)$$

$$\sum_{i=1}^N OP_i \wedge F_i = \sum_{j=1}^M OP'_j \wedge F'_j \quad (4.29)$$

où  $O$  est un point arbitrairement choisi.

On exprime ces conditions en disant que deux ensembles de forces sont équivalents s'ils ont la même **résultante** (4.28) et le même **moment résultant par rapport au point  $O$**  (4.29).

Cette notion d'équivalence entre deux ensembles de forces est généralisable à un ensemble de vecteurs de même nature par l'introduction du concept de torseur.

#### 4.6.2 Définitions

Torseur  $\{(P_\alpha, v_\alpha)\}$

On appelle **torseur** un ensemble fini ou infini de vecteurs liés (ou glissants) de même nature, noté  $\mathcal{T} = \{(P_\alpha, v_\alpha)\}$ .

Éléments de réduction

Les **éléments de réduction du torseur par rapport à un point  $O$**  sont la **résultante  $R$**  et le **moment résultant  $M_O$  par rapport à  $O$** , définis par

$$R = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \quad (4.30)$$

$$M_O = \sum_{\alpha} OP_{\alpha} \wedge v_{\alpha} \quad (4.31)$$

La résultante est un vecteur libre ; le moment résultant est un vecteur lié au point  $O$ .

#### 4.6.3 Théorème du transfert

Théorème du transfert

Les moments résultants par rapport à deux points  $O$  et  $A$  sont liés par la formule

$$M_A = M_O + AO \wedge R. \quad (4.32)$$

## DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_A &= \sum_{\alpha} \mathbf{A}P_{\alpha} \wedge \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{A}O + \mathbf{O}P_{\alpha}) \wedge \mathbf{v}_{\alpha} = \\
 &= \mathbf{A}O \wedge \left( \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} \mathbf{O}P_{\alpha} \wedge \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{A}O \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_O.
 \end{aligned}$$

## 4.6.4 Invariants d'un torseur

Les grandeurs  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R}$  sont deux *invariants* du torseur, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du choix du point de réduction  $O$ . Invariants

En effet le théorème du transfert implique

$$\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{M}_O + \mathbf{A}O \wedge \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \quad \text{pour tout } A.$$

Le moment résultant  $\mathbf{M}_O$  est un invariant si et seulement si la résultante  $\mathbf{R}$  est nulle, et, dans ce cas,  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}$  est un vecteur libre.

On appelle *couple* un torseur dont la résultante est nulle. En particulier, deux vecteurs liés et opposés  $\{(P_1, \mathbf{v}), (P_2, -\mathbf{v})\}$  constituent un couple de moment Couple

$$\mathbf{M} = P_2 P_1 \wedge \mathbf{v}. \quad (4.33)$$

## 4.6.5 Axe central

Pour un torseur de résultante  $\mathbf{R}$  non nulle, *l'axe central* est le lieu géométrique des points  $A$  où  $\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A = 0$ , c'est-à-dire où  $\mathbf{M}_A$  est soit parallèle à  $\mathbf{R}$ , soit égal à zéro.

Axe central

## Théorème de l'axe central

L'axe central est la droite parallèle à  $\mathbf{R}$  d'équation

$$\mathbf{O}A = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2} + \lambda \hat{\mathbf{R}} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

DÉMONSTRATION. La condition  $\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A = 0$ , associée au théorème du transfert, implique

$$\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_A = \mathbf{R} \wedge [\mathbf{M}_O + \mathbf{A}O \wedge \mathbf{R}] = \mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O + |\mathbf{R}|^2 \mathbf{A}O - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}O) \mathbf{R} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \mathbf{O}A = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2} + (\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{O}A) \hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2} + \lambda \hat{\mathbf{R}}$$

ce qui est bien l'équation d'une droite parallèle à  $\mathbf{R}$ .

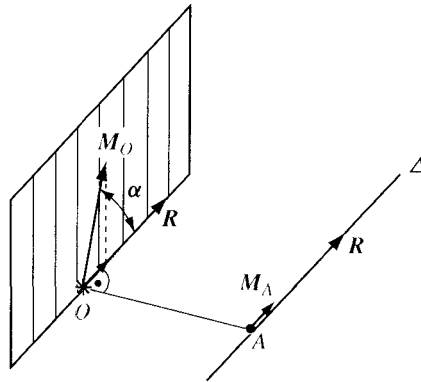


Fig. 4.22 Construction géométrique de l'axe central  $\Delta : |OA| = |R|^{-1} |M_O| \sin \alpha$ .

**Corollaire.** Si  $R \cdot M_O = 0$  avec  $R \neq 0$ , alors l'axe central est le lieu des points par rapport auxquels le moment résultant est nul.

En effet  $M_O \cdot R = M_A \cdot R = 0$  et  $R \wedge M_A = 0$  impliquent  $M_A = 0$  si  $R \neq 0$ .

Remarquons pour terminer que l'axe central est le lieu des points par rapport auxquels le moment résultant est de norme minimale.

4.6.6 Relation d'équivalence

Torseurs équivalents

Deux torseurs sont dits *équivalents* s'ils ont les mêmes éléments de réduction par rapport à un point  $O$ . Dans ce cas, ils ont les mêmes éléments de réduction par rapport à n'importe quel point.

En effet, les relations  $R^{(1)} = R^{(2)}$  et  $M_O^{(1)} = M_O^{(2)}$  impliquent

$$M_A^{(2)} = M_O^{(2)} + AO \wedge R^{(2)} = M_O^{(1)} + AO \wedge R^{(1)} = M_A^{(1)}.$$

Il résulte de cette définition que tout torseur est équivalent à un vecteur  $R$  lié au point  $A$  et un couple de moment  $M = M_A$ , où  $R$  et  $M_A$  sont les éléments de réduction du torseur par rapport à  $A$ . En particulier tout couple  $M$  est équivalent à deux vecteurs liés et opposés  $\{(P_1, v), (P_2, -v)\}$  tels que  $P_2 P_1 \wedge v = M$ .

Par définition, un torseur est équivalent à zéro si la résultante et le moment résultant sont nuls.

**Théorème.** Tout torseur est équivalent soit à zéro, soit à un vecteur lié, soit à deux vecteurs liés opposés, soit à un vecteur lié et un couple de moment parallèle au vecteur (c'est-à-dire trois vecteurs).

### DÉMONSTRATION

- Si  $\mathbf{R} = 0$  et  $\mathbf{M}_O = 0$ ,  $\mathcal{T}$  est équivalent à zéro.
- Si  $\mathbf{R} \neq 0$  et  $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} = 0$ ,  $\mathcal{T}$  est équivalent au vecteur lié  $(P, \mathbf{R})$  où  $P$  est sur l'axe central.
- Si  $\mathbf{R} = 0$  et  $\mathbf{M}_O \neq 0$ ,  $\mathcal{T}$  est un couple, donc équivalent à un ensemble de deux vecteurs liés opposés.
- Si  $\mathbf{R} \neq 0$  et  $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \neq 0$ ,  $\mathcal{T}$  est équivalent au torseur défini par le vecteur lié  $(P, \mathbf{R})$  où  $P$  est sur l'axe central et un couple de moment  $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_O \cdot \hat{\mathbf{R}}) \hat{\mathbf{R}}$ .

### Remarques

- Du point de vue des torseurs il sera possible de remplacer un nombre fini ou infini de vecteurs liés par un ensemble formé au maximum de trois vecteurs liés.
- Si le torseur  $\mathcal{T}$  est l'union de deux torseurs  $\mathcal{T}'$  et  $\mathcal{T}''$  alors les éléments de réduction de  $\mathcal{T}$  par rapport à  $O$  sont égaux à la somme des éléments de réduction des deux torseurs par rapport à ce même point  $O$  :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \cup \mathcal{T}'' \Rightarrow \mathbf{R} = \mathbf{R}' + \mathbf{R}'' \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{M}'_O + \mathbf{M}''_O.$$

- Si les torseurs  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont respectivement équivalents aux torseurs  $\overline{\mathcal{T}}$  et  $\overline{\mathcal{T}'}$  alors le torseur  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$  est équivalent au torseur  $\overline{\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'}$ .

Par exemple soit  $\mathcal{T}$  le torseur des forces gravifiques agissant sur le système  $S$  et  $\mathcal{T}'$  le torseur des forces gravifiques sur le système  $S'$ . Si  $\mathcal{T}$  est équivalent à un vecteur  $\mathbf{F}$  lié en  $G$  et si  $\mathcal{T}'$  est équivalent au vecteur  $\mathbf{F}'$  en  $G'$ , alors le torseur des forces gravifiques agissant sur le système total formé des sous-systèmes  $S$  et  $S'$  est équivalent au torseur  $\{(G, \mathbf{F}), (G', \mathbf{F}')\}$ .

- Les définitions introduites entraînent les simplifications suivantes

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{T}' \sim 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}' \sim -\mathcal{T} = \{(P_\alpha, -\mathbf{v}_\alpha)\}$$

qui seront utiles pour exprimer, par exemple, le principe d'action et de réaction (sect. 10.3).

#### 4.6.7 Torseur abstrait

De même que l'on a introduit la notion de vecteur comme classe d'équivalence de déplacements (§ 4.3.4), on peut introduire le concept de *torseur abstrait* comme classe d'équivalence de torseurs [30]; dans ce cas un torseur est défini en associant à chaque point  $A$  du référentiel une paire de vecteurs liés  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_A)$  où  $\mathbf{R}$  est indépendant de  $A$  et, pour tous points  $A$  et  $B$ ,  $\mathbf{M}_A$  et  $\mathbf{M}_B$  sont reliés par  $\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}$ .

Torseur abstrait  
( $\mathbf{R}, \mathbf{M}_A$ )

4.6.8 Torseurs fondamentaux de la mécanique newtonienne

Considérons un système formé de  $N$  points matériels  $P_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ . A chaque point  $P_\alpha$  est associé un vecteur  $\mathbf{p}_\alpha = m \mathbf{v}_\alpha$ , la *quantité de mouvement*, produit de la masse par la vitesse du point. De plus chaque point  $P_\alpha$  est soumis à l'action d'une force  $\mathbf{F}_\alpha$ . Ces concepts physiques seront définis de façon précise dans les chapitres suivants. Pour l'instant il suffit de savoir que la masse  $m_\alpha$  est un scalaire strictement positif qui caractérise une propriété du point matériel, et que la vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$  et la force  $\mathbf{F}_\alpha$  sont des vecteurs liés au point  $P_\alpha$ .

Torseur des forces L'ensemble des vecteurs liés  $\{\mathbf{F}_\alpha\}$  constitue le *torseur des forces* agissant sur les points du système. Les éléments de réduction, notés  $\mathbf{F} = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha$  et  $\mathbf{M}_O = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha$ , sont appelés respectivement *résultante des forces* et *moment résultant des forces par rapport à O*. L'ensemble des vecteurs liés  $\{\mathbf{p}_\alpha\}$  constitue le *torseur des quantités de mouvement* du système. Les éléments de réduction, notés  $\mathbf{p} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$  et  $\mathbf{L}_O = \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha$ , sont appelés respectivement *quantité de mouvement* et *moment cinétique par rapport à O*.

Torseur des quantités de mouvement

4.7 TORSEURS PARTICULIERS

4.7.1 Torseurs équivalents à zéro

Équilibre statique Ce cas particulier est très important puisque c'est celui qui correspond à l'équilibre statique, où  $\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = 0$  et  $\sum_\alpha \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = 0$  (sect. 11.1).

Deux vecteurs Deux vecteurs liés constituent un torseur équivalent à zéro si et seulement si ils sont opposés et de même support. Ainsi sur la figure 4.23, la force  $\mathbf{F}_1$  doit être opposée et de même support que la force  $\mathbf{F}_2$ .

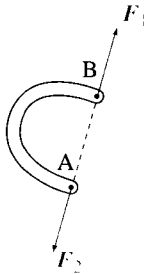


Fig. 4.23 Torseur de deux forces équivalent à zéro (système en équilibre).

Trois vecteurs Pour que trois vecteurs liés  $(P_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , constituent un torseur équivalent à zéro, il faut que les trois vecteurs soient *coplanaires* et que leurs *supports soient concourants* (ou parallèles; dans ce cas le point d'intersection est à l'infini) (fig. 4.24).



DÉMONSTRATION. Si le torseur est équivalent à zéro, alors  $M_{P_1} = 0$  et

$$0 = M_{P_1} \cdot P_1 P_2 = (P_1 P_2 \wedge v_2 + P_1 P_3 \wedge v_3) \cdot P_1 P_2 = (P_1 P_3 \wedge v_3) \cdot P_1 P_2.$$

Les trois vecteurs  $P_1 P_2$ ,  $P_1 P_3$  et  $v_3$  sont donc coplanaires ; par conséquent  $v_3$  est dans le plan défini par  $(P_1, P_2, P_3)$  et il en est de même de  $v_1$  et  $v_2$ .

Soit  $I$  l'intersection des supports de  $v_1$  et  $v_2$  ; comme  $M_I = 0 = IP_3 \wedge v_3$ , le support de  $v_3$  passe aussi par  $I$ .

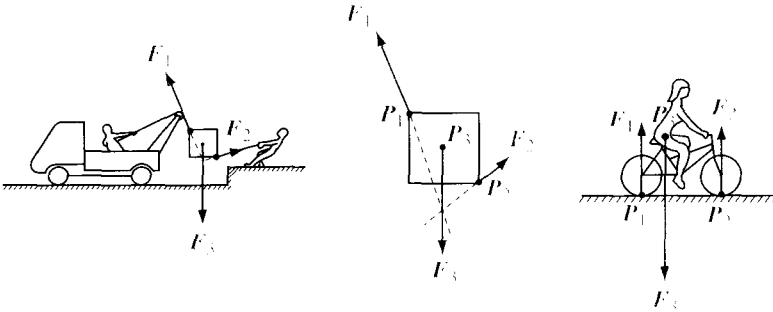


Fig. 4.24 Torseur de trois forces équivalent à zéro (système en équilibre).

#### 4.7.2 Ensemble de vecteurs coplanaires

Remarquons pour commencer que tout torseur ayant un plan de symétrie est équivalent à un torseur formé de vecteurs situés dans le plan de symétrie (fig. 4.25).

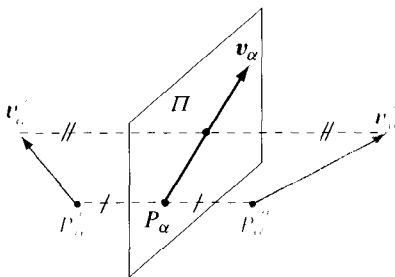
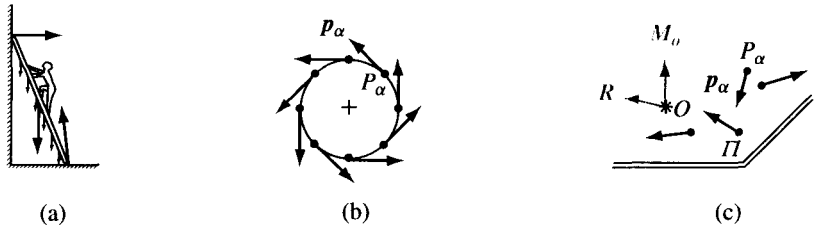


Fig. 4.25 Les vecteurs  $v'_\alpha$  et  $v''_\alpha$  sont symétriques par rapport au plan  $\Pi$ . Le torseur  $\{(P'_\alpha, v'_\alpha), (P''_\alpha, v''_\alpha)\}$  est équivalent au torseur  $\{(P_\alpha, v_\alpha = v'_\alpha + v''_\alpha)\}$ .

Considérons alors un torseur formé de vecteurs  $(P_\alpha, v_\alpha)$  situés dans un même plan  $\Pi$  (fig. 4.26).

Vecteurs  
coplanaires : si  
 $R \neq 0$  le torseur est  
équivalent à sa  
résultante appliquée  
en un point de l'axe  
central



**Fig. 4.26** Torseur formé de vecteurs coplanaires : (a) torseur des forces agissant sur l'échelle ; (b) torseur des quantités de mouvement des points situés sur une roue ; (c) cas général.

Pour tout point  $O$  du plan  $\Pi$ , et quel que soit  $\alpha$ ,  $OP_\alpha \wedge v_\alpha$  est perpendiculaire à  $\Pi$ . Par conséquent  $R$  est un vecteur dans le plan  $\Pi$  et  $M_O$  est un vecteur perpendiculaire à ce plan, d'où  $R \cdot M_O = 0$ . Si le torseur n'est pas équivalent à zéro, il n'y a alors que deux cas possibles :

- si  $R = \sum_\alpha v_\alpha = 0$ , le torseur est un couple de moment perpendiculaire au plan  $\Pi$  ;
- si  $R = \sum_\alpha v_\alpha \neq 0$ , le torseur est équivalent à un vecteur  $R$  lié à un point  $A$  de l'axe central, situé dans le plan  $\Pi$ ,

$$OA = \frac{1}{|R|^2} R \wedge M_O + \lambda \hat{R}. \quad (4.35)$$

**Conséquence.** Le torseur  $\mathcal{T} = \{(P_1, v_1), (P_2, v_2)\}$  formé de deux vecteurs liés est équivalent à un seul vecteur lié si et seulement si les deux vecteurs sont coplanaires avec  $v_1 + v_2 \neq 0$

En effet pour que  $\{(P, v)\} \sim \mathcal{T}$ , il faut que  $\mathcal{T} \cup \{(P, -v)\}$  soit équivalent à zéro et par conséquent il faut que  $v_1, v_2$  et  $v$  soient coplanaires. Mais si  $v_1$  et  $v_2$  sont coplanaires avec  $v_1 + v_2 \neq 0$ , le torseur  $\mathcal{T}$  est équivalent à un vecteur lié.

#### 4.7.3 Ensemble de vecteurs parallèles

Soit  $\mathcal{T} = \{(P_\alpha, v_\alpha)\}$  où  $v_\alpha = v_\alpha u$  ( $v_\alpha \in \mathbb{R}$ ). La résultante  $R = (\sum_\alpha v_\alpha) u$  est parallèle à  $u$  ; le moment résultant par rapport à  $O$ ,  $M_O = (\sum_\alpha v_\alpha OP_\alpha) \wedge u$ , est perpendiculaire à  $u$ , d'où  $R \cdot M_O = 0$ . De nouveau, si le torseur n'est pas équivalent à zéro, il n'y a que deux possibilités :

- si  $R = 0$ , le torseur est équivalent à un couple de moment perpendiculaire à  $u$ .
- si  $R \neq 0$ , le torseur est équivalent à un seul vecteur  $R = Ru$  où  $R = \sum_\alpha v_\alpha$ , lié au point  $A$  défini soit par (4.35), soit par

$$OA = \frac{\sum_\alpha v_\alpha OP_\alpha}{\sum_\alpha v_\alpha}. \quad (4.36)$$

En effet, de (4.36) on obtient

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R} = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{u} - \frac{\sum_{\alpha} v_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} v_{\alpha}} \wedge (\sum_{\alpha} v_{\alpha}) \mathbf{u} = 0.$$

Ce sera par exemple le cas du torseur des forces de pesanteur que nous discuterons dans la section suivante.

**Propriété.** Si la résultante d'un torseur de vecteurs parallèles à un vecteur  $\mathbf{u}$  est non nulle, le torseur est équivalent à un vecteur lié au point  $A$  (4.36). Ce point est indépendant de  $\mathbf{u}$  et de l'origine  $O$  choisie.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A'$  le point défini par (4.36) en choisissant une autre origine  $O'$ ; nous avons

$$\mathbf{O'A'} = \frac{\sum_{\alpha} v_{\alpha} \mathbf{O'P}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} v_{\alpha}} = \frac{1}{\sum_{\alpha} v_{\alpha}} \left[ \sum_{\alpha} v_{\alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} - \mathbf{OO'}) \right] = \mathbf{OA} - \mathbf{OO'} = \mathbf{O'A}$$

d'où  $A' = A$ .

## 4.8 CENTRE DE MASSE

### 4.8.1 Torseur des forces de pesanteur

Considérons un ensemble de points matériels  $P_{\alpha}$  de masse  $m_{\alpha}$ , soumis à l'action d'un champ de gravitation  $\mathbf{g}$  constant. Cela signifie que chaque point matériel  $P_{\alpha}$  est soumis à une force de gravitation  $\mathbf{F}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{g}$ , où  $\mathbf{g}$  est un vecteur fixé, indépendant de la position du point. Avec une très bonne approximation, c'est la situation que l'on observe en un lieu de la surface de la Terre.

Dans ce cas le torseur des forces de gravitation est un ensemble de vecteurs parallèles et nous sommes ramenés au cas particulier décrit au paragraphe 4.7.3. Par conséquent, si le champ de gravitation  $\mathbf{g}$  est *constant*, le torseur des forces de gravitation est équivalent à un seul vecteur  $\mathbf{R} = \mathbf{Mg}$ , où  $\mathbf{M} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ , lié au point  $G$  défini par (4.36)

$$\mathbf{OG} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} \quad (4.37)$$

### 4.8.2 Définition du centre de masse

On appelle *centre de masse*, ou *centre de gravité*, ou *centre d'inertie*, le point  $G$  défini par l'équation (4.37).

Centre de masse  
Centre de gravité

Comme le montre l'expression (4.37), le centre de masse est un point associé uniquement à la position des masses dans l'espace (distribution spatiale des masses), et il n'est pas lié à l'existence d'un champ de gravitation ; c'est la raison pour laquelle la terminologie usuelle « centre de gravité » a été remplacée par « centre de masse ».

### Propriétés

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} = 0$$

- Le centre de masse  $G$  est le seul point solution de l'équation

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} = 0. \quad (4.38)$$

En effet, soit  $G$  le point défini par (4.37), alors

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} - \mathbf{OG}) = M \mathbf{OG} - M \mathbf{OG} = 0.$$

Inversement, si  $G'$  est solution de (4.38), alors

$$0 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{G'P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} - \mathbf{OG'}) = M \mathbf{OG} - M \mathbf{OG'} = M \mathbf{G'G}$$

d'où  $G' = G$  (car  $M$  est strictement positif).

- La position de  $G$  relativement à la distribution de masse n'est pas modifiée sous l'action d'une translation ou d'une rotation du système matériel. En particulier pour un solide indéformable (sect.8.1),  $G$  est un point fixé du solide.

En effet, sous l'action d'une translation  $\mathbf{OP}_{\alpha}$  devient  $\mathbf{OP}'_{\alpha} = \mathbf{OP}_{\alpha} + \mathbf{s}$ , où  $\mathbf{s}$  est le vecteur de translation, et  $\mathbf{OG}$  devient

$$\mathbf{OG'} = M^{-1} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{OP}_{\alpha} + \mathbf{s}) = \mathbf{OG} + \mathbf{s}.$$

Sous l'effet d'une rotation  $\mathbf{OP}_{\alpha}$  devient  $\mathbf{OP}'_{\alpha} = \mathbf{R}(\mathbf{OP}_{\alpha})$ , où  $\mathbf{R}$  est une application linéaire (§ 8.2.2) et  $\mathbf{OG}$  devient

$$\mathbf{OG'} = M^{-1} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{R}(\mathbf{OP}_{\alpha}) = \mathbf{R}(M^{-1} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha}) = \mathbf{R}(\mathbf{OG}).$$

En conséquence, pour tout déplacement du système, le point  $G$  subit le même déplacement ; c'est-à-dire que le point  $G$  est un point fixé du système.

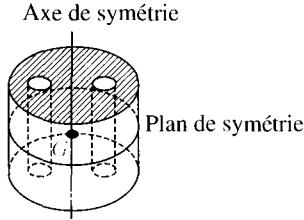
## 4.9 TECHNIQUE POUR LA RECHERCHE DU CENTRE DE MASSE

### 4.9.1 Symétries

Si le système possède des éléments de symétrie (centre, axe, plan), le centre de masse se trouve sur ces éléments de symétrie (fig. 4.27).

En effet, une symétrie est une transformation qui applique le système sur lui-même. Le centre de masse, univoquement défini par la distribution des masses, est invariant par cette transformation et se trouve ainsi sur l'élément de symétrie.

Le centre de gravité se trouve sur les éléments de symétrie



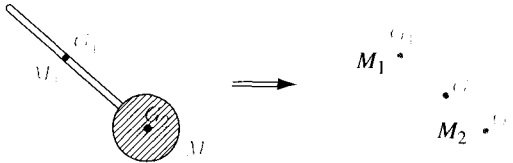
**Fig. 4.27** Détermination du centre de masse  $G$  d'un système matériel possédant un axe de symétrie et un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe.

#### 4.9.2 Système formé de deux ou plusieurs parties

Le centre de masse d'un système formé de  $k$  parties  $S_1, \dots, S_k$ , de masses  $M_1, \dots, M_k$ , ayant leurs centres de masse respectifs en  $G_1, \dots, G_k$ , s'identifie avec le centre de masse de  $k$  points matériels de masse  $M_i$ , situés en  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

En effet

$$OG = \left( \sum_{i=1}^k M_i \right)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^k \left( \sum_{\alpha \in S_i} m_{\alpha} OP_{\alpha} \right) \right] = \left( \sum_{i=1}^k M_i \right)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^k M_i OG_i \right].$$



**Fig. 4.28** Détermination du centre de gravité  $G$  d'une palette composée de deux éléments de masse  $M_1$  et  $M_2$ .

En particulier le centre de masse d'un système formé de deux parties de masses  $M_1$  et  $M_2$ , ayant leurs centres de masse en  $G_1$  et  $G_2$  (fig. 4.28), est défini par (4.37)

$$G_1 G = \frac{M_2}{M_1 + M_2} G_1 G_2. \quad (4.39)$$

4.9.3 Système continu

Considérons un système matériel occupant un domaine  $D$  de l'espace (fig. 4.29).

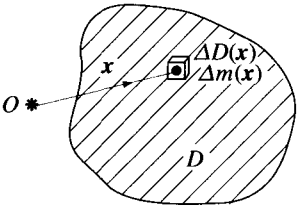


Fig. 4.29 Définition du centre de masse d'un système continu.

Divisons  $D$  en petits domaines disjoints  $\Delta D_\alpha$ , centrés en  $\mathbf{x}_\alpha$ , de volume  $\Delta V_\alpha$ . En introduisant  $\Delta m_\alpha$ , la masse contenue dans  $\Delta D_\alpha$ , et  $\mathbf{OG}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha + \boldsymbol{\xi}_\alpha$  son centre de masse, on a (§ 4.9.2)

$$\mathbf{OG} = M^{-1} \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha} (\mathbf{x}_{\alpha} + \boldsymbol{\xi}_{\alpha}) \qquad M = \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha}.$$

Dans la limite où les  $\Delta V_\alpha$  tendent vers zéro (mais  $\Delta V_\alpha$  suffisamment grand par rapport aux distances interatomiques), on a

$$\mathbf{OG} = M^{-1} \lim_{\Delta V_{\alpha} \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \quad \text{et} \quad M = \lim_{\Delta V_{\alpha} \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha},$$

car

$$\left| \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha} \boldsymbol{\xi}_{\alpha} \right| \leq M (\Delta V_{\alpha})^{1/3}.$$

On introduit alors la notation intégrale pour exprimer ce processus de limite et l'on écrit

Centre de gravité  
d'un système continu

$$\mathbf{OG} = M^{-1} \int_D d\mathbf{m} \, \mathbf{x} \quad \text{et} \quad M = \int_D d\mathbf{m}. \tag{4.40}$$

Le système est dit *continu* à trois dimensions si, dans la limite où les volumes  $\Delta V(\mathbf{x})$  tendent vers zéro, la grandeur  $\frac{\Delta m(\mathbf{x})}{\Delta V(\mathbf{x})}$  possède, pour tout  $\mathbf{x}$ , une limite  $\rho(\mathbf{x})$  qui est une fonction continue par morceau.

La grandeur

Masse spécifique

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\mathbf{x})}{\Delta V(\mathbf{x})} \tag{4.41}$$

est appelée *masse spécifique* au point  $\mathbf{x}$  ; c'est une grandeur de dimension  $[\rho] = [M] [L]^{-3}$ .

Dans ce cas nous pouvons écrire  $\Delta m_\alpha \cong \rho(\mathbf{x}_\alpha) \Delta V_\alpha$  et

$$M = \lim_{\Delta V_\alpha \rightarrow 0} \sum_\alpha \Delta V_\alpha \rho(\mathbf{x}_\alpha)$$

$$\mathbf{OG} = M^{-1} \lim_{\Delta V_\alpha \rightarrow 0} \sum_\alpha \Delta V_\alpha \rho(\mathbf{x}_\alpha) \mathbf{x}_\alpha$$

expressions que l'on écrit sous la forme

$$\mathbf{OG} = M^{-1} \int_D dV \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad M = \int_D dV \rho(\mathbf{x}). \quad (4.42)$$

Dans le cas où la masse est distribuée sur une surface régulière  $\Sigma$  – ou sur une courbe régulière  $C$  – on définit de façon analogue une **masse surfacique**  $\rho^{(s)}(\mathbf{x})$  et une **masse linéique**  $\rho^{(\ell)}(\mathbf{x})$ , en décomposant la surface  $\Sigma$  en éléments de superficie  $\Delta\sigma(\mathbf{x})$  (respectivement en décomposant la courbe  $C$  en segments de longueur  $\Delta\ell(\mathbf{x})$ ) :

$$\rho^{(s)}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\sigma(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\mathbf{x})}{\Delta\sigma(\mathbf{x})} \quad \text{et} \quad [\rho^{(s)}] = [M][L]^{-2}$$

$$\rho^{(\ell)}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta\ell(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{\Delta m(\mathbf{x})}{\Delta\ell(\mathbf{x})} \quad \text{et} \quad [\rho^{(\ell)}] = [M][L]^{-1}$$

En procédant comme ci-dessus, on a

$$M = \int_\Sigma d\sigma \rho^{(s)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{OG} = M^{-1} \int_\Sigma d\sigma \rho^{(s)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (4.43)$$

$$M = \int_C d\ell \rho^{(\ell)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{OG} = M^{-1} \int_C d\ell \rho^{(\ell)}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (4.44)$$

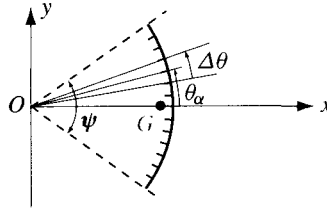
#### 4.9.4 Système homogène

Par définition un système **homogène** est un système continu de masse spécifique constante, c'est-à-dire :

- soit  $\rho(\mathbf{x}) = \frac{M}{V}$  pour tout  $\mathbf{x} \in D$ , où  $V$  est le volume de  $D$  ; Masse spécifique
- soit  $\rho^{(s)}(\mathbf{x}) = \frac{M}{A}$  pour tout  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , où  $A$  est l'aire de  $\Sigma$  ; Masse surfacique
- soit  $\rho^{(\ell)}(\mathbf{x}) = \frac{M}{L}$  pour tout  $\mathbf{x} \in C$ , où  $L$  est la longueur de  $C$ . Masse linéique

#### Exemple. Segment circulaire

Cherchons le centre de masse d'un segment circulaire homogène de rayon  $R$  et d'angle au sommet  $\psi$  (fig. 4.30).



**Fig. 4.30** Centre de masse d'un segment circulaire de rayon  $R$ .

Par symétrie,  $G$  se trouve sur l'axe  $Ox$ . Pour trouver  $(\mathbf{OG})_x$  on décompose le segment circulaire en petits segments de longueur  $\Delta \ell = R \Delta \theta$ , centrés en  $\theta_\alpha$ , de masse  $\Delta m_\alpha = \Delta \ell \frac{M}{L} = \Delta \theta \frac{M}{\psi}$  :

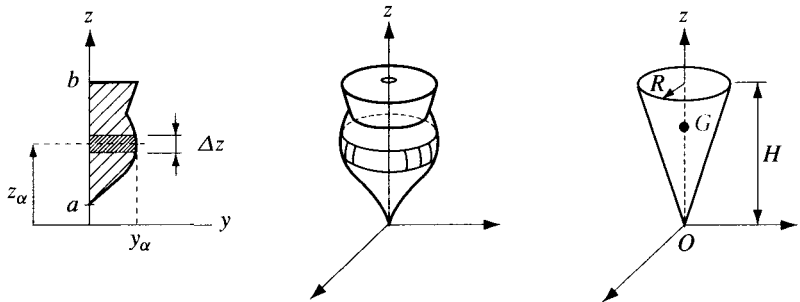
$$\begin{aligned} (\mathbf{OG})_x &= \frac{1}{M} \lim_{\Delta \ell \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha} x_{\alpha} = \frac{1}{\psi} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \Delta \theta R \cos \theta_{\alpha} = \\ &= \frac{R}{\psi} \int_{-\psi/2}^{\psi/2} d\theta \cos \theta \end{aligned}$$

d'où

Segment circulaire  $(\mathbf{OG})_x = \frac{R}{\psi/2} \sin(\psi/2).$  (4.45)

#### 4.9.5 Système homogène de révolution

Considérons un système homogène de révolution, d'axe  $Oz$  et de génératrice  $y = y(z)$  (fig. 4.31). Par symétrie  $G$  est sur l'axe  $Oz$ .



**Fig. 4.31** Centre de masse de systèmes homogènes de révolution.

Pour trouver  $(\mathbf{OG})_z$  on décompose le système en « tranches » horizontales centrées en  $z_\alpha$ , d'épaisseur  $\Delta z$  et de masse  $\Delta m_\alpha = \Delta z \pi y_\alpha^2 \frac{M}{V}$ . On obtient ainsi :

$$(\mathbf{OG})_z = M^{-1} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \Delta m_{\alpha} z_{\alpha} = \frac{\pi}{V} \int_a^b dz y(z)^2 z \quad (4.46)$$



avec

$$V = \pi \int_a^b dz y(z)^2. \quad (4.47)$$

### Exemple. Cône homogène

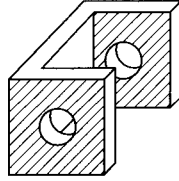
Cherchons le centre de masse d'un cône homogène (fig. 4.31).

De l'équation de la génératrice  $y = \frac{R}{H} z$  et (4.46) on a

$$(OG)_z = \frac{\pi}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} \int_0^H dz \left( \frac{R}{H} z \right)^2 z = \frac{3}{4} H. \quad (4.48) \quad \text{Cône}$$

### 4.9.6 Système homogène avec trous

Soit  $S$  un système homogène avec  $k$  trous  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  (fig. 4.32).



**Fig. 4.32** Centre de masse d'une pièce homogène avec deux trous.

Considérons le système homogène auxiliaire  $S_0$ , de masse  $M_0$  et de centre de masse  $G_0$ , obtenu en remplissant les  $k$  trous. Désignons par  $M_i$  la masse remplissant le trou  $S_i$  et par  $G_i$  le centre de masse correspondant. On a

$$M = M_0 - \sum_{i=1}^k M_i$$

et

$$OG = M^{-1} \left[ \int_D dm x \right] = \left[ M_0 - \sum_{i=1}^k M_i \right]^{-1} \cdot \left[ \int_{D_0} dm x - \sum_{i=1}^k \int_{D_i} dm x \right]$$

où  $dm = \frac{M}{V} dV$ .

Ainsi

$$OG = \left[ M_0 + \sum_{i=1}^k (-M_i) \right]^{-1} \cdot \left[ M_0 OG_0 + \sum_{i=1}^k (-M_i) OG_i \right].$$

Le centre de masse d'un système homogène avec  $k$  trous s'identifie avec celui de  $(k + 1)$  points de « masse »  $(M_0, -M_1, \dots, -M_k)$ , situés en  $(G_0, G_1, \dots, G_k)$ .

#### 4.9.7 Théorème de Pappus et Guldin

• L'aire  $A$  de la surface de révolution engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la coupant pas est égale au produit de la longueur  $L$  de la courbe par la distance parcourue par le centre de masse de la courbe, supposée homogène, lors de la rotation de  $2\pi$ , c'est-à-dire

$$\text{PAPPUS} \quad A = L 2\pi d \quad (4.49)$$

Mathématicien grec de  
la fin du III<sup>e</sup> siècle

où  $d$  est la distance de  $G$  à l'axe de rotation.

• Le volume  $V$  du système de révolution engendré par une surface plane tournant autour d'un axe situé dans son plan et ne la coupant pas est égal au produit de l'aire  $A$  de la surface par la distance parcourue par le centre de masse de la surface, supposée homogène, lors de la rotation de  $2\pi$  :

$$\text{GULDIN} \quad V = A 2\pi d \quad (4.50)$$

Mathématicien suisse  
1577-1649

DÉMONSTRATION. L'aire de la surface engendrée par le segment  $\Delta\ell_\alpha$  est  $2\pi x_\alpha \Delta\ell_\alpha$  (fig. 4.33 a) et l'aire totale est

$$A = \lim_{\Delta\ell_\alpha \rightarrow 0} \sum_\alpha 2\pi x_\alpha \Delta\ell_\alpha = 2\pi \int_C d\ell x = 2\pi L (\mathbf{OG})_x.$$

Le volume engendré par l'élément de surface  $\Delta\sigma_\alpha$  (fig. 4.33 b) est  $2\pi x_\alpha \Delta\sigma_\alpha$  et le volume total est

$$V = \lim_{\Delta\sigma_\alpha \rightarrow 0} \sum_\alpha 2\pi x_\alpha \Delta\sigma_\alpha = 2\pi \int_\Sigma d\sigma x = 2\pi A (\mathbf{OG})_x.$$

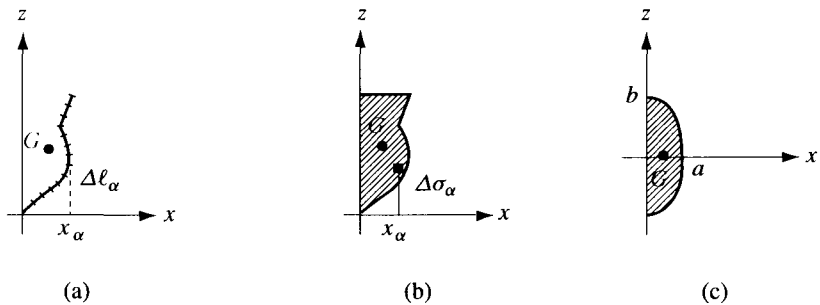


Fig. 4.33 Centre de masse : (a) d'une courbe ; (b) et (c) d'une surface plane.

**Exemple.** Cherchons le centre de masse d'une plaque homogène ayant la forme d'une demi-ellipse (fig. 4.33 c). Par symétrie on peut considérer la plaque comme ayant une épaisseur nulle et l'équation (4.50) implique

$$|\mathbf{OG}| = \frac{\frac{4}{3}\pi a^2 b}{2\pi \cdot \frac{1}{2}\pi ab} = \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}.$$

### 4.9.8 Détermination expérimentale de $G$

Pour déterminer la position du centre de masse d'un solide il suffit de le suspendre successivement en deux points  $P$  et  $Q$  (fig. 4.34). L'intersection des verticales passant par  $P$  et  $Q$  définit  $G$ . En effet, en suspendant le solide au point  $P$  la condition d'équilibre  $\mathbf{PG} \wedge \mathbf{Mg} = 0$  (§ 16.1.1) implique  $\mathbf{PG}$  parallèle à  $\mathbf{g}$ . Le point  $G$  est ainsi l'intersection entre l'axe central  $\Delta_1$  passant par  $P$  et  $\Delta_2$  passant par  $Q$ .

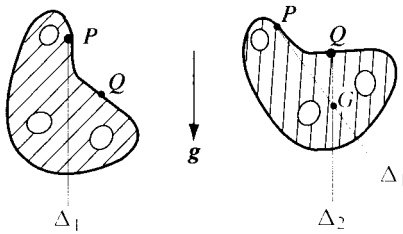


Fig. 4.34 Détermination expérimentale du centre de masse d'un solide.

## 4.10 PROBLÈMES

### 4.10.1 Préliminaires

Pour illustrer les méthodes de l'analyse vectorielle, nous proposerons des problèmes de statique. Pour les résoudre il suffira de connaître les propriétés suivantes :

1. La force est un vecteur lié (§ 4.3.4).
2. Le torseur des forces de pesanteur est équivalent à un seul vecteur, lié au centre de masse, d'intensité égale au poids. Les forces exercées par un câble sur un corps sont équivalentes à une force tangente au câble (§ 16.4.1). En l'absence de frottement, les forces exercées par une surface sur un solide sont perpendiculaires à la surface (§ 12.4.1).
3. Pour qu'un système (point, solide, ...) soit à l'équilibre, il faut que le torseur des forces appliquées sur le système soit équivalent à zéro (§ 16.1.1), c'est-à-dire

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} = 0$$

où  $P_{\alpha}$  est le point d'application de la force  $\mathbf{F}_{\alpha}$  et  $O$  un point arbitraire... qu'il faudra choisir de façon intelligente !

4. Avant de résoudre un problème de statique, dessiner aussi correctement que possible (sect. 4.7) les forces appliquées sur le système – ou sous-système – considéré.

Intersection des axes centraux  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$



Détermination expérimentale de  $\mathbf{g}$

**Calcul vectoriel 4.10.2** Ayant choisi un étalon de longueur  $[L]$  et un repère orthonormé  $Oe_1e_2e_3$ , les points  $A$  et  $B$  sont représentés par  $A = (7, 4, 1)$ ,  $B = (-2, 5, 3)$ . On demande :

1. La norme des vecteurs  $OA$ ,  $OB$ ,  $AB$ ,  $OA + OB$ .
2. Les angles  $AOB$  et  $OAB$ .
3. La projection orthogonale de  $AB$  sur  $OA$ .
4. L'aire du triangle  $OAB$ .
5. Les coordonnées du point  $D$  défini par  $OD = OA \wedge AB$ .
6. Les coordonnées des points  $A$  et  $B$  relativement au repère  $Oe'_1e'_2e'_3$ , où  $e'_1 = e_2$ ,  $e'_2 = e_1$ ,  $e'_3 = e_3$ . Trouver les coordonnées du point  $D'$  défini par  $OD' = OA \wedge AB$ . Est-ce que  $D'$  coïncide avec  $D$  ?

**4.10.3** Vérifier que les quatre points, de coordonnées cartésiennes  $A = (4, 5, 1)$ ,  $B = (-3, 0, 1)$ ,  $C = (3, 9, 4)$  et  $D = (-4, 4, 4)$ , sont coplanaires.

**Coordonnées sphériques 4.10.4** Soit deux points de coordonnées sphériques  $P_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ ,  $P_2 = (r_2, \theta_2, \varphi_2)$ . Vérifier que l'angle  $P_1OP_2$  est donné par  $\theta$ , où  $\cos \theta = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$ .  
(Rappel :  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$ .)

**4.10.5** Soit  $(x^1, y^1)$  et  $(x^2, y^2)$  les coordonnées cartésiennes des points  $P_1$  et  $P_2$ . Calculer les composantes  $D_r$  et  $D_\theta$  du déplacement  $D = P_1P_2$ , relativement au repère orthonormé  $P_1e_re_\theta$ , où  $e_r$  est parallèle à  $OP_1$  (fig. 4.35).

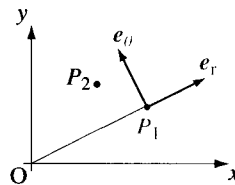


Fig. 4.35

**Équation vectorielle 4.10.6** Étant donné trois vecteurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , trouver le vecteur  $x$  solution de l'équation

$$x + (x \cdot b) a = c.$$

(Il faudra distinguer les deux cas,  $1 + a \cdot b \neq 0$  et  $1 + a \cdot b = 0$ .)

**4.10.7** Étant donnés deux vecteurs  $a$ ,  $b$  et un nombre réel  $\alpha$ , trouver le vecteur  $x$  solution de l'équation

$$\alpha x + x \wedge a = b. \quad (4.51)$$

Idée : multiplier (4.51) vectoriellement par  $\mathbf{a}$  ; ceci montre que  $\mathbf{x}$  sera connu dès que l'on connaît  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ . Pour trouver  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ , multiplier (4.51) scalairement par le vecteur  $\mathbf{a}$ .

**4.10.8** Trouver les forces  $F_B$  et  $F_C$  exercées par le mur (fig. 4.36) ; le câble est de poids négligeable et les poids de la poutre et du corps suspendu sont 15 et 300 kg. (Au point  $B$  il y a un pivot, c'est-à-dire que le moment des forces agissant sur  $B$  est nul.)

Équilibre statique

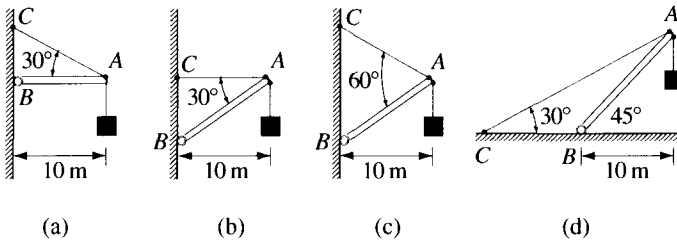


Fig. 4.36

**4.10.9** Trouver la force minimale nécessaire pour élever un cylindre de 150 kg et 2 m de diamètre au-dessus d'une marche de 40 cm de hauteur au moyen d'un câble enroulé autour du cylindre sur lequel on tire horizontalement (fig. 4.37). (On considère qu'à tout instant le cylindre est en équilibre.)

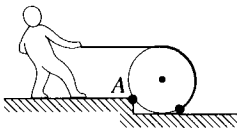


Fig. 4.37

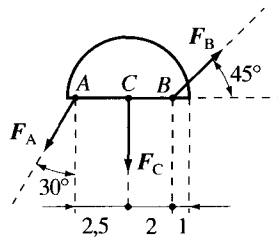


Fig. 4.38

**4.10.10** Un demi-disque de centre  $C$  est soumis à trois forces dans le plan du disque (fig. 4.38). En quel point de la circonférence faut-il appliquer une force pour maintenir le demi-disque en équilibre ?  $|F_A| = 3,5 \text{ N}$ ,  $|F_B| = 4,3 \text{ N}$ ,  $|F_C| = 5,1 \text{ N}$ . (Idée : trouver l'axe central du torseur des trois forces.)

Axe central

**4.10.11** On retient une caisse (homogène) sur un plan incliné au moyen d'une corde parallèle au plan (fig. 4.39). Le torseur des forces exercées par le plan sur la caisse est équivalent à un seul vecteur lié à un point  $P$  de la surface de contact (pourquoi ?). Trouver la distance  $\delta = |AP|$  ; entre quelles hauteurs  $h$  peut-on placer la corde ? On admettra qu'il n'y a pas de frottement.

Caisse sur un plan incliné

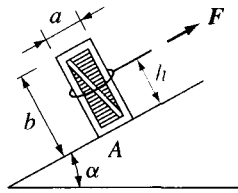


Fig. 4.39

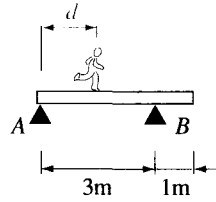


Fig. 4.40

Poutre sur deux supports

**4.10.12** Une poutre horizontale de 50 kg est posée sur deux supports. Un homme de 75 kg marche sur la poutre en partant de A (fig. 4.40). Calculer les forces de réaction en A et B en fonction de la distance  $d$ . Quelle est la distance maximale sans que la poutre bascule ?

Vanne automatique

**4.10.13** Une vanne automatique constituée d'une porte mobile autour d'un axe horizontal doit s'ouvrir lorsque la hauteur de l'eau atteint 300 mm. A quelle distance du bas de la porte doit se trouver l'axe horizontal, sachant que la porte est carrée, de côté 225 mm (fig. 4.41) ?

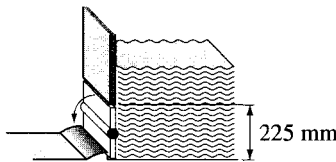


Fig. 4.41

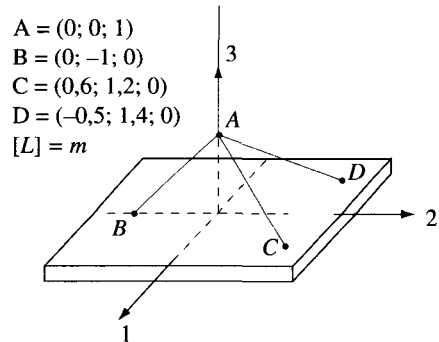


Fig. 4.42

Remarque : la pression (= force par unité de surface) exercée par l'eau en un point est perpendiculaire à la surface, égale à  $\rho gh$  où  $\rho$  est la masse spécifique de l'eau,  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ , et  $h$  la hauteur de l'eau au-dessus du point.

Dalle suspendue par des câbles

**4.10.14** Un hélicoptère doit soulever une dalle de 900 kg. Les câbles sont attachés selon le schéma de la figure 4.42. Déterminer la tension dans chaque câble.

Porte de four

**4.10.15** Une porte de four (homogène) pesant 75 kg, appuyée sur les charnières A et B, est soutenue par la chaîne CD (fig. 4.43). On admet que la force exercée par la charnière A est dans le plan ADC. Calculer les forces exercées sur la porte par la chaîne et par les charnières :  $|AB| = 1 \text{ m}$ ,  $|AC| = |AD| = 1,2 \text{ m}$  et  $|CD| = 0,6 \text{ m}$ .

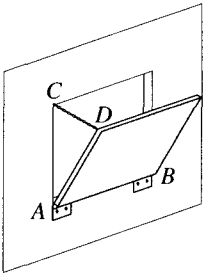


Fig. 4.43

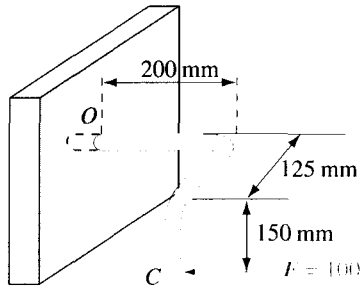


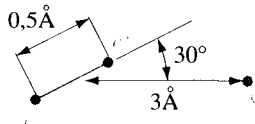
Fig. 4.44

**4.10.16** Une force de 100 N est appliquée au point C du levier (fig. 4.44). Calculer les éléments de réduction par rapport au point O des forces exercées par la paroi sur le levier.

Levier encastré

**4.10.17** On considère un système rigide formé de deux particules de charge électrique opposée (= dipôle) en présence d'une charge électrique (fig. 4.45).

Dipôle électrique



$$e^+ = -e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Fig. 4.45

Est-ce que le torseur des forces électriques (§ 12.2.1), exercées par la charge sur le dipôle, est équivalent à un seul vecteur ? Calculer les éléments de réduction de ce torseur par rapport au centre du dipôle.

**4.10.18** Une boîte à vitesse est soumise à 2 couples opposés, de moment  $M_C = 200 \text{ Nm}$  et  $M_D = 100 \text{ Nm}$  (fig. 4.46). Calculer les forces verticales aux points A et B pour résister aux couples en question.

Boîte à vitesse

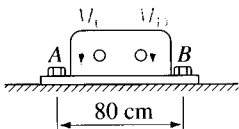


Fig. 4.46

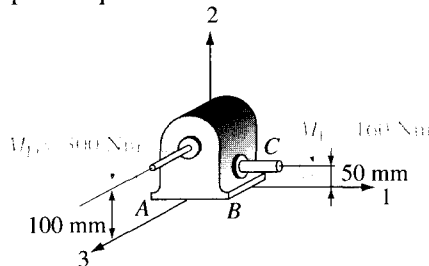


Fig. 4.47

**4.10.19** Deux couples, l'un de 300 Nm et l'autre de 160 Nm, sont appliqués sur les axes d'un réducteur (fig. 4.47). Calculer les réactions sur les trois points de fixation du réducteur dont les coordonnées sont, en mm :  $A = (-50, 0, 30)$  ;  $B = (50, 0, 30)$  ;  $C = (0, 0, -30)$ .

Réducteur

**4.10.20** Une particule  $P$  est soumise de la part de  $n$  points  $A_1, \dots, A_n$  à  $n$  forces attirantes, proportionnelles à la distance respective  $|PA_i|$ , avec un facteur de proportionnalité  $k_i$  (fig. 4.48). Montrer que la résultante de ces forces passe par le centre de masse des points  $A_i$  affectés des masses  $k_i$ .

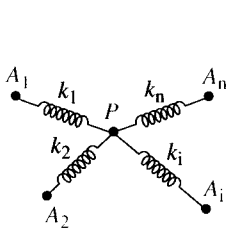


Fig. 4.48

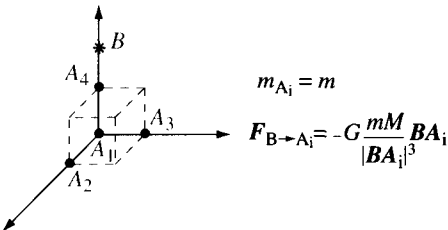


Fig. 4.49

Centre de gravité  
et  
centre de masse

**4.10.21** Un système rigide est constitué de quatre masses ponctuelles identiques situées sur les sommets d'un cube. Ces masses sont soumises aux forces de gravitation dues à une masse extérieure  $M$  située au point  $B$ , à une distance de  $A_4$  égale à l'arête du cube (fig. 4.49). Trouver les éléments de réduction du torseur de ces forces par rapport au point  $A_1$ ; trouver l'axe central. Est-ce que ce torseur est équivalent à un vecteur? Si oui, est-il lié au centre de masse  $G$  du système? Trouver les éléments de réduction du torseur par rapport à  $G$ .

Centre de masse

**4.10.22** Trouver le centre de masse du système Terre-Soleil; d'une molécule d'eau; d'une molécule de  $NH_3$  (fig. 4.50).

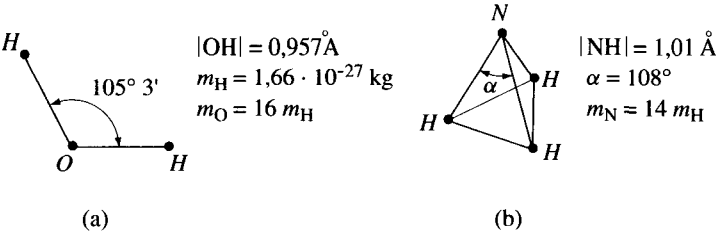


Fig. 4.50

Poutre encastrée

**4.10.23** Déterminer le centre de masse de la poutre homogène de section rectangulaire, et d'épaisseur  $e$  constante, de la figure 4.51. Calculer les éléments de réduction des forces exercées par le mur (par rapport au point  $O$ ).

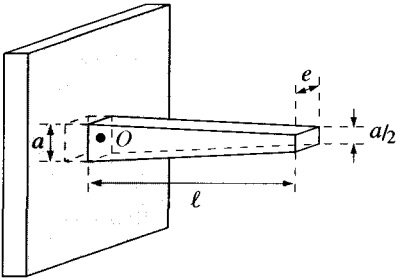
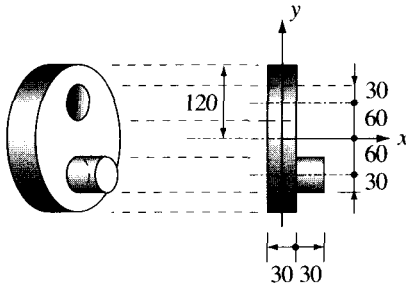


Fig. 4.51

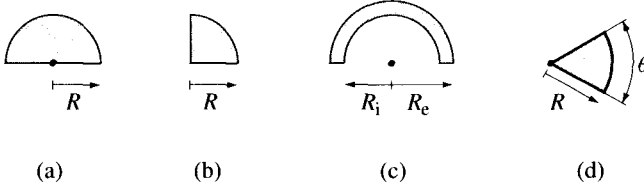


**4.10.24** Trouver le centre de masse de la pièce homogène de la figure 4.52. Solide avec trous



**Fig. 4.52**

**4.10.25** Trouver le centre de masse des solides homogènes d'épaisseur constante de la figure 4.53. Solides homogènes



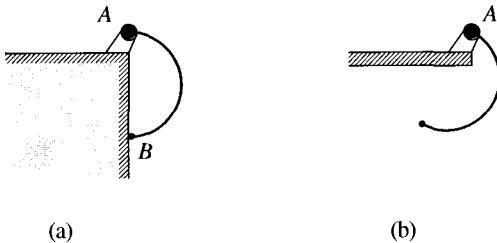
**Fig. 4.53**

(On peut soit commencer par le secteur circulaire puis résoudre les cas précédents, soit utiliser le théorème de Pappus pour résoudre le demi-disque et le quart de disque.)

**4.10.26** Trouver le centre de masse d'une demi-sphère creuse ; d'une demi-sphère pleine.

**4.10.27** Un fil homogène rigide en forme de demi-cercle de rayon  $R$ , et de masse linéique  $\rho^{(\ell)}$ , est supporté par la rotule  $A$  (fig. 4.54). Ayant trouvé le centre de masse du fil, on demande :

- cas (a) les forces exercées sur le fil en  $A$  et  $B$  (pas de frottement) ;
- cas (b) la position d'équilibre.



**Fig. 4.54**

Cône tronqué **4.10.28** Un cône tronqué homogène de 450 kg est suspendu à un mât horizontal de masse linéique  $\rho^{(\ell)} = 12 \text{ kg/m}$  (fig. 4.55). Ayant trouvé le centre de masse du cône tronqué, on demande :

1. la tension dans les câbles qui supportent le cône ;
2. les éléments de réduction par rapport à A des forces exercées au point A sur le mât horizontal.

Cône : hauteur = 90 cm ; rayons des bases  $R_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 60 \text{ cm}$ . o désigne un pivot.

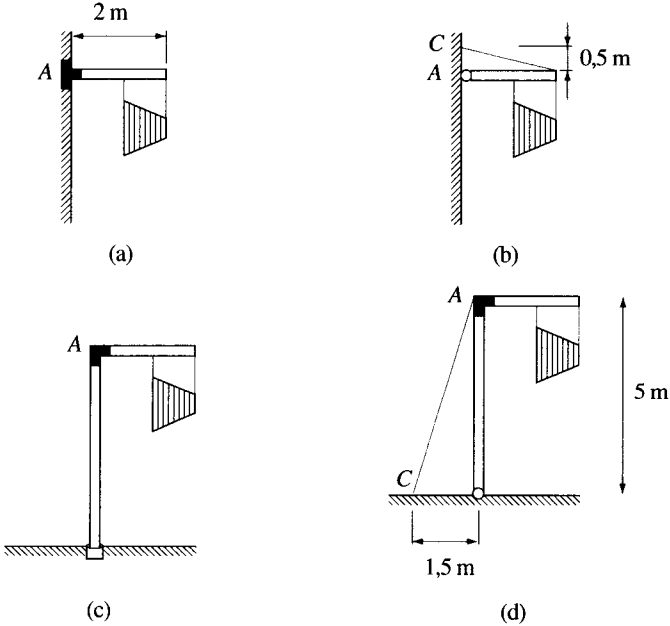


Fig. 4.55

## CHAPITRE 5

# CINÉMATIQUE DU POINT

La cinématique est l'*étude des mouvements observés* indépendamment des causes qui les produisent ; c'est en grande partie l'objet de la mécanique jusqu'au XVII<sup>e</sup> siècle. Cette étude nous permettra de trouver les lois et les forces fondamentales responsables du mouvement lorsque nous aborderons la dynamique aux chapitres 10 et suivants. De plus, elle permettra de calculer les forces – ou tensions internes – dans les systèmes construits par l'ingénieur. En cinématique, les appareils de mesure sont la règle et l'horloge.

Ce chapitre est consacré à l'analyse du mouvement d'un point, c'est-à-dire la description de sa trajectoire, et l'expression de sa vitesse et de son accélération dans divers systèmes de coordonnées. Au chapitre 6 on décrira quelques mouvements naturels importants, en particulier les problèmes de *balistique* et les *mouvements centraux* (lois de Kepler). Cette analyse mettra en évidence l'existence de *constantes du mouvement* qui, en dynamique, seront interprétées comme la quantité de mouvement, l'énergie et le moment cinétique du point matériel. Les systèmes matériels étant constitués d'un ensemble de points, nous pourrons finalement décrire le mouvement de n'importe quel système et en particulier le *mouvement des solides* (chap. 8).

Considérons un point  $P$  du système étudié (fig. 5.1). Ayant choisi un référentiel  $\mathcal{R}$ , un système d'axes  $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  (orthonormés, lié au référentiel) et des appareils de mesure, nous repérons à tout instant  $t$  la position du point coïncidant  $P_t$ , soit par son vecteur-lieu  $\mathbf{OP}_t$ , noté  $\mathbf{x}^{(P)}(t)$ , soit par ses coordonnées cartésiennes  $\{x_i^{(P)}(t)\}$ . Comme dans ce chapitre nous étudions l'évolution du seul point  $P$ , nous écrirons simplement

$$\mathbf{OP}_t = \mathbf{x}(t) = \sum_i x_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (5.1)$$

$O\,e_1e_2e_3$  lié à  $\mathcal{R}$

$P_t$  = Point de  $\mathcal{R}$  qui  
coïncide avec le  
point  $P$  du solide à  
l'instant  $t$

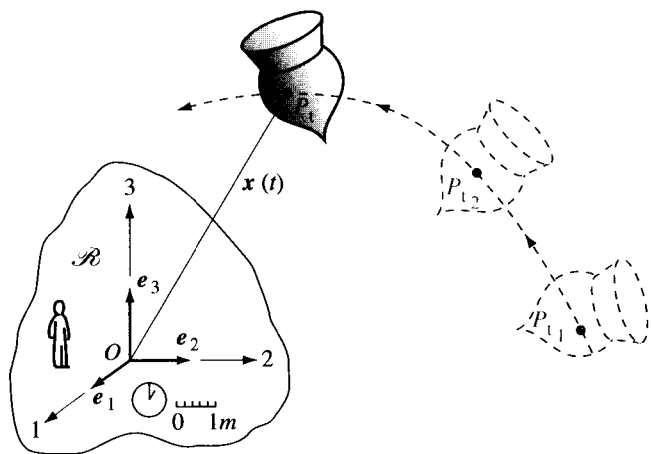


Fig. 5.1 Évolution du point  $P$  observé depuis  $\mathcal{R}$ .

5.1 VITESSE (DU POINT  $P$  PAR RAPPORT À  $\mathcal{R}$ )

5.1.1 Trajectoire

La trace laissée par un avion dans le ciel, ou par une particule dans une chambre à bulles, est ce qu'on appelle la trajectoire. De même le grand huit à la foire et l'autoroute Lausanne-Genève constituent les trajectoires du wagonnet et de la voiture.

Trajectoire :  
lieu des points  
coïncidants dans  $\mathcal{R}$

On appelle **trajectoire** la courbe fixée dans le référentiel  $\mathcal{R}$  définie par l'ensemble des points coïncidants, soit  $\{P_t ; t \in [t_1, t_f]\}$ .

On remarquera que dans le concept de trajectoire il n'y a pas de notion d'évolution, mais par contre les notions de référentiel et de points coïncidants sont essentielles.

Ayant introduit un système d'axes cartésiens, il y a plusieurs manières de décrire la trajectoire. On peut exprimer deux coordonnées en fonction de la troisième, soit

Équation intrinsèque 
$$x_1 = x_1(x_3) \quad , \quad x_2 = x_2(x_3). \tag{5.2}$$

C'est l'équation intrinsèque de la trajectoire.

Par exemple pour une trajectoire circulaire de rayon  $R$  et un choix approprié d'un système d'axes (fig. 5.8), l'équation intrinsèque de la trajectoire est

$$\begin{cases} x(y) = \pm\sqrt{R^2 - y^2} \\ z(y) = 0. \end{cases}$$

On peut aussi exprimer les trois coordonnées en fonction d'un paramètre, soit

$$x_1 = x_1(\lambda) \quad , \quad x_2 = x_2(\lambda) \quad , \quad x_3 = x_3(\lambda). \quad (5.3)$$

On parle alors d'*équation paramétrique* de la trajectoire et l'on écrit

Équation  
paramétrique

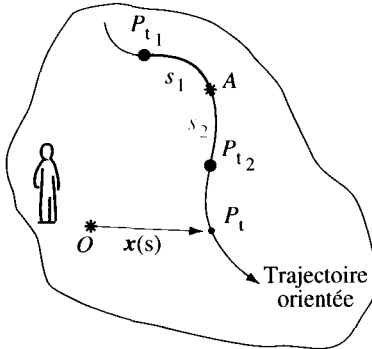
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda). \quad (5.4)$$

Comme paramètre on utilise souvent l'abscisse curviligne, définie de la façon suivante (fig. 5.2).

Soit  $A$  un point quelconque sur la trajectoire, orientée en choisissant arbitrairement un sens positif; l'**abscisse curviligne**  $s$  du point  $P$  sur la trajectoire est la longueur de l'arc  $\widehat{AP}$  comptée positivement ou négativement selon que  $\widehat{AP}$  est dirigé suivant l'orientation choisie ou non.

Abscisse curviligne

Comme dans l'équation (5.4), nous avons  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ .



**Fig. 5.2** Trajectoire du point  $P$  et abscisse curviligne :  $s_1 < 0$  ;  $s_2 > 0$ .

Dans l'exemple ci-dessus d'une trajectoire circulaire, l'équation paramétrique de la trajectoire orientée dans le sens trigonométrique est

$$\begin{cases} x(s) = R \cos(s/R) \\ y(s) = R \sin(s/R) \\ z(s) = 0. \end{cases}$$

La trajectoire du point  $P$  peut également être paramétrisée par le temps, soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  : c'est l'équation décrivant l'**évolution temporelle** du point  $P$ . En introduisant une base (orthonormée) fixe dans  $\mathcal{R}$  on a alors

Évolution temporelle

$$\mathbf{OP}_t = \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \mathbf{e}_i. \quad (5.5)$$

Dans l'exemple discuté ci-dessus, une évolution temporelle sera par exemple

Mouvement  
oscillatoire sur un  
arc de cercle

$$\begin{cases} x(t) = R \cos [\theta_m \cos(\omega t + \alpha)] \\ y(t) = R \sin [\theta_m \sin(\omega t + \alpha)] \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

où  $\theta_m, \omega, \alpha$  sont des constantes.

5.1.2 Ligne d'univers

Pour étudier le mouvement d'un point on introduit l'espace à 4 dimensions  $\mathbb{R}^4$  associé au référentiel  $\mathcal{R}$  et au temps (fig. 5.3).

Ligne d'univers

Le mouvement est décrit par la **ligne d'univers**, courbe orientée dans  $\mathbb{R}^4$  définie par l'ensemble des points  $(\mathbf{x}, t)$  avec lesquels  $P$  coïncide au cours de l'évolution, soit  $\{(\mathbf{x}(t), t); t \in [t_i, t_f]\}$ .

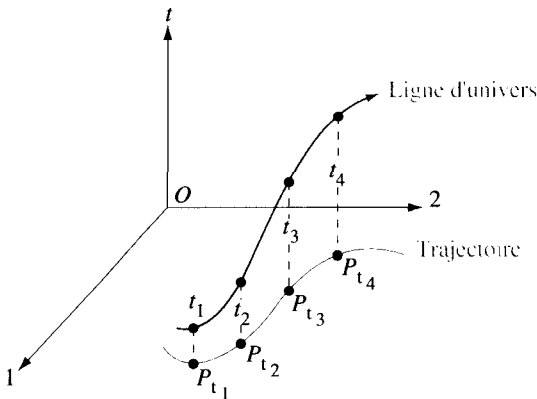


Fig. 5.3 Ligne d'univers – la trajectoire est représentée en deux dimensions.

On remarque que dans le concept de ligne d'univers il n'y a pas de notion d'évolution le long de la courbe en question.

De nouveau il y a plusieurs manières de décrire la ligne d'univers. On peut exprimer trois coordonnées en fonction de la quatrième ; par exemple

$$x_1 = x_1(t) \quad , \quad x_2 = x_2(t) \quad , \quad x_3 = x_3(t)$$

(5.6)

c'est l'équation décrivant l'évolution,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ .

On peut aussi décrire la ligne d'univers au moyen d'une équation paramétrique. En prenant par exemple l'abscisse curviligne, on aura

$$x_1 = x_1(s) \quad , \quad x_2 = x_2(s) \quad , \quad x_3 = x_3(s) \quad , \quad t = t(s).$$

Équation horaire

L'équation  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  est l'équation paramétrique de la trajectoire ; l'équation  $t = t(s)$  – ou son inverse  $s = s(t)$  – est l'**équation horaire**.

### 5.1.3 Vecteur vitesse

Soit  $P_t$  et  $P_{t+\Delta t}$  les points coïncidants dans  $\mathcal{R}$  aux instants  $t$  et  $t + \Delta t$ . On définit pour commencer le vecteur **vitesse moyenne** de  $P$  pendant l'intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ ,

$$\mathbf{v}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\mathbf{P}_t \mathbf{P}_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}. \quad (5.7)$$

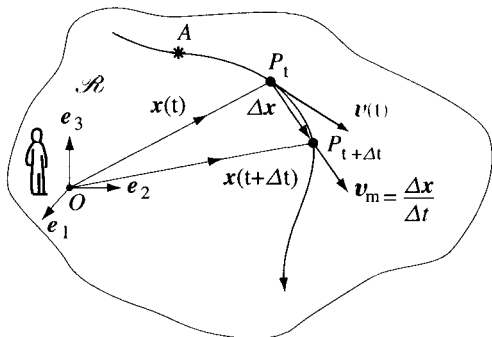


Fig. 5.4 Définition du vecteur vitesse.

Pour définir la vitesse à l'instant  $t$  nous considérons des intervalles de temps  $\Delta t$  de plus en plus petits. L'observation montre que la suite des vecteurs  $\mathbf{v}_m(t, t + \Delta t)$  possède généralement une limite lorsque  $\Delta t$  tend vers zéro.

Le **vecteur vitesse** à l'instant  $t$  (de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) est le vecteur défini par la limite :

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_t \mathbf{P}_{t+\Delta t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta t}. \quad (5.8)$$

Vitesse de  $P$  à l'instant  $t$

C'est un vecteur lié à  $P_t$ , tangent à la trajectoire (par définition de la tangente), de dimension  $[L][T]^{-1}$ .

Ayant choisi un point  $O$  fixé dans  $\mathcal{R}$ , nous avons

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)] \quad (5.9)$$

ce que l'on exprime en disant que le **vecteur vitesse** est la **dérivée par rapport au temps** du vecteur-lieu  $\mathbf{x}(t)$  et l'on écrit

La notation  $\dot{\mathbf{x}}$  signifie dérivée de  $\mathbf{x}$  par rapport au temps

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \text{ou encore} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (5.10)$$

Si l'on veut préciser le référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport auquel la vitesse est définie, on écrira

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)_{\mathcal{R}}. \quad (5.11)$$

### 5.1.4 Propriétés de la dérivée

Soit  $A = A(t)$  une fonction (scalaire, vectorielle) de la variable  $t$ . La dérivée de  $A$  par rapport à  $t$  est la fonction de  $t$  définie par

$$\frac{d}{dt} A(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [A(t + \Delta t) - A(t)]. \quad (5.12)$$

Lorsque la variable  $t$  est le temps, on utilise indifféremment la notation  $dA/dt$  ou  $\dot{A}$  pour représenter la dérivée de la fonction  $A(t)$  par rapport à  $t$ .

Nous avons les propriétés suivantes :

- Dérivée d'une *somme* de deux fonctions

$$\frac{d}{dt} (A + B) = \frac{d}{dt} A + \frac{d}{dt} B. \quad (5.13)$$

- Dérivée d'un *produit* de deux fonctions

Quel que soit le produit  $*$  (multiplication, produit scalaire, produit vectoriel), la dérivée du produit est donnée par la **formule de Leibniz** :

$$\frac{d}{dt} (A * B) = \frac{dA}{dt} * B + A * \frac{dB}{dt} \quad (5.14)$$

(et il faudra faire attention à l'ordre !)

- Dérivée d'une *fonction composée*

Soit  $A = A(s)$  et  $s = s(t)$  ; alors  $A(s(t)) = A(t)$  et

$$\frac{d}{dt} A = \frac{dA}{ds} \frac{ds}{dt}. \quad (5.15)$$

### 5.1.5 Composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

Soit  $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  un repère fixé dans  $\mathcal{R}$ . Les propriétés de la dérivée permettent d'écrire

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i x_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_i \dot{x}_i \mathbf{e}_i + \sum_i x_i \dot{\mathbf{e}}_i. \quad (5.16)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$$

Comme les  $\mathbf{e}_i$  sont fixés dans  $\mathcal{R}$ , les dérivées  $\dot{\mathbf{e}}_i$  sont nulles, et nous obtenons

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i \quad \text{avec} \quad v_i = \frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i \quad \text{et} \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2}. \quad (5.17)$$

Les composantes du vecteur vitesse sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées cartésiennes du point  $P$ .



LEIBNIZ Gottfried  
Wilhelm  
Philosophe et  
mathématicien  
allemand  
1646-1716



### 5.1.6 Vitesse scalaire

La notion d'abscisse curviligne conduit à introduire la **vitesse scalaire**  $v$  Vitesse scalaire définie par

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}. \quad (5.18)$$

C'est un scalaire qui représente la distance parcourue par unité de temps, comptée positivement ou négativement selon que le mouvement instantané du point a lieu dans le sens de l'orientation choisie sur la trajectoire ou dans le sens opposé. La valeur absolue de  $v$  correspond au concept de vitesse utilisé dans la vie courante (mesurée par exemple par le tachymètre d'une voiture).

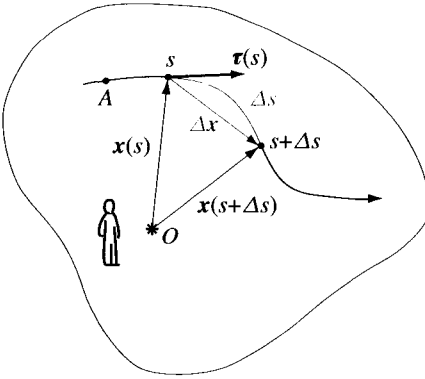
La relation entre  $v$  et  $\mathbf{v}$  s'obtient immédiatement de (5.15). Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  l'équation de la trajectoire et  $s = s(t)$  l'équation horaire ; on a

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\mathbf{x}}{ds}. \quad (5.19)$$

Introduisons le **vecteur**  $\boldsymbol{\tau}$ , lié au point d'abscisse curviligne  $s$ , défini par

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} [\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)]. \quad (5.20)$$

$\boldsymbol{\tau}$ , vecteur unité, tangent à la trajectoire



**Fig. 5.5**  $\boldsymbol{\tau}(s)$  vecteur unité tangent à la courbe au point  $\mathbf{x}(s)$ .

C'est un *vecteur unité* car, dans la limite où  $\Delta s$  tend vers zéro, la longueur  $|\Delta s|$  de l'arc tend vers la longueur  $|\Delta \mathbf{x}|$  de la corde ; de plus  $\boldsymbol{\tau}$  est un vecteur *sans dimension, tangent à la trajectoire* dans le sens de l'orientation choisie. Nous avons ainsi :

$$\mathbf{v} = v \boldsymbol{\tau} \quad \text{et} \quad |\mathbf{v}| = |v| = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2}. \quad (5.21)$$

Remarquons pour terminer que  $\boldsymbol{\tau}$  ne dépend que de la trajectoire orientée et non de l'évolution : c'est une notion purement géométrique.

5.1.7 Hodographe et orbite

Soit  $O'$  un point arbitrairement fixé dans  $\mathcal{R}$ . Par définition on appelle **hodographe** (fig. 5.6 b) la courbe définie par l'extrémité des vecteurs liés d'origine  $O'$  équipollents à  $\mathbf{v}(t)$ . L'espace des vecteurs vitesse de même origine  $O'$  est appelé espace des vitesses.

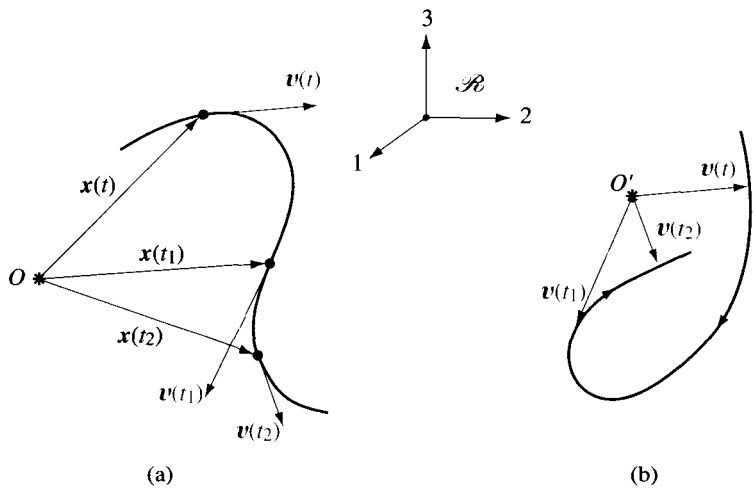


Fig. 5.6 Trajectoire (a) et hodographe (b).

Espace de phase

En cinématique, l'**espace de phase** (associé à un point) est l'espace de dimension 6 défini à partir de  $\mathcal{R}$  et de l'espace des vitesses ; les points de cet espace sont  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Comme nous le montrerons en dynamique, l'espace de phase est l'espace des états (instantanés) du point matériel.

Orbite

On appelle **orbite** la courbe dans l'espace de phase définie par la position et la vitesse du point  $P$  au cours de l'évolution, orientée selon le sens de l'évolution, soit  $\{(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)); t \in [t_i, t_f]\}$ .

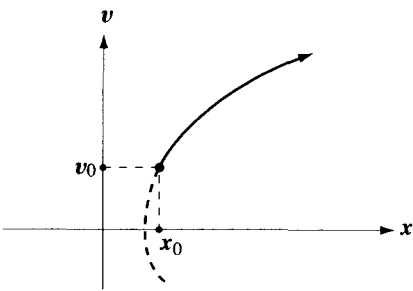


Fig. 5.7 Orbite de conditions initiales  $(x_0, v_0)$  à l'instant  $t_0$ .

### 5.1.8 Remarques historiques

• En mécanique newtonienne, on admet qu'il est possible de mesurer la position d'un point sans modifier le mouvement qu'aurait le point en l'absence de cette mesure. Par conséquent, avec cette hypothèse, la position et la vitesse d'un point sont des observables simultanément mesurables. Il faut cependant remarquer que cela n'a pas toujours été le point de vue adopté dans la philosophie antique (paradoxe de Zénon d'Elée) ; aujourd'hui, cette hypothèse doit être abandonnée en mécanique quantique.

• Durant l'étape quantitative du développement de la mécanique, soit de Newton à Poincaré, on cherchait à trouver l'évolution à partir des équations de la dynamique et des conditions initiales  $(\mathbf{x}_0^{(P)}, \mathbf{v}_0^{(P)})$  à l'instant  $t_0$ . Cependant, depuis les travaux de Birkhoff et de Poincaré, on s'est rendu compte qu'il est généralement impossible de résoudre les équations de la dynamique, sauf pour quelques systèmes intégrables particuliers (§ 10.5.4). Notamment, Poincaré a démontré que *le problème apparemment simple de 3 corps en interaction (Soleil-Terre-Lune, par exemple) est non intégrable* et que les développements en série de perturbations ne sont pas convergents. On s'est alors attaché à l'étude des propriétés géométriques de l'ensemble des orbites dans l'espace de phase. Dans cette approche de la mécanique on cherche à obtenir une *description qualitative* des évolutions possibles : états d'équilibre et stabilité, stabilité du mouvement par rapport aux conditions initiales, existence et stabilité d'orbites périodiques, stabilité du mouvement par rapport aux paramètres du système, évolution régulière ou chaotique.

ZÉNON d'Elée  
Philosophe grec  
 $\cong 460$  av. J.C.



BIRKHOFF George  
David  
Mathématicien  
américain  
1884-1944

Chaos

## 5.2 ACCÉLÉRATION (DU POINT $P$ PAR RAPPORT À $\mathcal{R}$ )

### 5.2.1 Vecteur accélération

Le vecteur **accélération** (du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ) est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, soit

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)]. \quad (5.22)$$

C'est un vecteur lié au point  $P_t$ , de dimension  $[L][T]^{-2}$ . Nous disons aussi que  $\mathbf{a}$  est la dérivée seconde du vecteur-lieu  $\mathbf{x}(t)$  par rapport au temps, et l'on écrit

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}}. \quad (5.23) \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}$$

Accélération du  
point  $P$  par rapport à  
 $\mathcal{R}$

### 5.2.2 Composantes du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Ayant introduit un repère  $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  fixé dans  $\mathcal{R}$ , nous avons

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i v_i \mathbf{e}_i \right) = \sum_i \dot{v}_i \mathbf{e}_i = \sum_i a_i \mathbf{e}_i$$

d'où

$$a_i = \frac{d}{dt} v_i = \dot{v}_i. \quad (5.24)$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}$$

Les composantes du vecteur accélération sont les dérivées par rapport au temps des composantes du vecteur vitesse ; ce sont les dérivées secondes par rapport au temps des coordonnées cartésiennes du point  $P$ ,

$$a_i = \frac{d^2}{dt^2} x_i = \ddot{x}_i. \quad (5.25)$$

### 5.2.3 Accélération tangentielle et normale

Étudions plus en détail le vecteur accélération. De  $\mathbf{v} = v \boldsymbol{\tau}$ , où  $v = \dot{s}$ , nous tirons

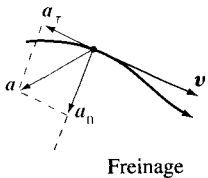
$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} (v \boldsymbol{\tau}) = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \quad (5.26)$$

D'autre part, le vecteur  $\boldsymbol{\tau}$  étant de norme 1, on a  $\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s) = 1$  et

$$\frac{d}{ds} (\boldsymbol{\tau}(s) \cdot \boldsymbol{\tau}(s)) = 0 = 2 \boldsymbol{\tau}(s) \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Par conséquent, le vecteur  $d\boldsymbol{\tau}/ds$  est perpendiculaire à  $\boldsymbol{\tau}(s)$ . Le vecteur accélération (5.26) s'exprime ainsi comme la somme de deux vecteurs orthogonaux,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n. \quad (5.27)$$



L'**accélération tangentielle**  $\mathbf{a}_\tau$  est la composante de l'accélération parallèle à la vitesse (donc tangente à la trajectoire)

$$\mathbf{a}_\tau = \dot{v} \boldsymbol{\tau} = \ddot{s} \boldsymbol{\tau}. \quad (5.28)$$

Cette composante décrit la variation de la norme du vecteur vitesse ; elle correspond à la notion d'accélération dans le langage de l'automobiliste : si  $\dot{v} < 0$  on freine, alors qu'on accélère si  $\dot{v} > 0$  (pour autant que  $v > 0$ ).

L'**accélération normale**  $a_n$  est la composante de l'accélération perpendiculaire à la vitesse

$$a_n = v^2 \frac{d\tau}{ds}. \quad (5.29)$$

Cette composante est liée à la variation de la direction du vecteur vitesse. Pour comprendre la signification géométrique du vecteur  $d\tau/ds$  nous allons regarder pour commencer le cas simple du mouvement circulaire.

#### 5.2.4 Mouvement circulaire

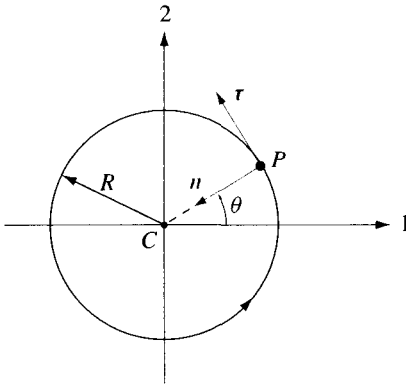
Si la trajectoire est un cercle de rayon  $R$  et de centre  $C$ , nous avons (fig. 5.8)

$$\mathbf{x} = R (\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{s}{R} \quad (5.30)$$

d'où

$$\tau(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = (-\sin \theta, \cos \theta) \quad (5.31)$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R} (\cos \theta, \sin \theta). \quad (5.32)$$



**Fig. 5.8** Mouvement circulaire. Définition de  $\mathbf{n}$  et  $\tau$ .

Par conséquent, si la trajectoire est circulaire,  $d\tau/ds$  est le vecteur perpendiculaire à  $\tau$  dirigé vers le centre du cercle, de norme égale à  $R^{-1}$  :

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R} \quad \text{où} \quad R \equiv \text{rayon} \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \widehat{PC}. \quad (5.33)$$

#### 5.2.5 Trajectoire gauche

Dans le cas général, en chaque point  $P$  de la trajectoire on définit le **plan osculateur**, limite des plans définis par  $P$ ,  $\tau$  et  $PP'$  (fig. 5.9) lorsque  $P'$  tend vers  $P$ .

Plan osculateur

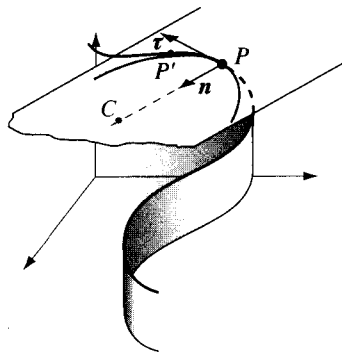


Fig. 5.9 Définition de  $\tau$ ,  $n$ , rayon de courbure, cercle tangent en  $P$ .

Nous savons déjà que  $d\tau/ds$  est perpendiculaire à  $\tau$ . Par analogie avec le mouvement circulaire, on pose

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{n}{\rho} \quad (5.34)$$

où  $n$  est le vecteur unité, perpendiculaire à la trajectoire, dans le plan osculateur, dirigé vers le centre de courbure  $C$ .

Rayon de courbure  
 $\rho = |CP|$

On appelle  $\rho = \left| \frac{d}{ds} \tau \right|^{-1}$  le **rayon de courbure de la trajectoire en  $P$** .

**Remarque.** Le cercle de centre  $C$  et de rayon  $\rho$  dans le plan osculateur est le cercle tangent à la trajectoire en  $P$ .

En résumé

Repère de Frenet :  $\tau, n, b = \tau \wedge n$

$$a = a_\tau + a_n = \dot{v} \tau + \frac{v^2}{\rho} n. \quad (5.35)$$

## 5.3 MOUVEMENTS SIMPLES

### 5.3.1 Mouvement uniforme

Le mouvement d'un point est **uniforme** si sa vitesse scalaire est constante, soit  $v(t) = v_0$ .

C'est par exemple le mouvement d'une voiture roulant à « vitesse constante » sur une route de montagne.

Comme une fonction  $f(t)$  est constante si et seulement si  $df/dt = 0$ , la définition  $a_\tau = \dot{v} \tau$  implique que le mouvement d'un point est uniforme pendant  $[t_1, t_2]$  si et seulement si  $a_\tau(t) = 0$  pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ .

$$a_\tau(t) = 0$$

De plus, de  $ds/dt = v_0$  on obtient l'équation horaire

$$s(t) = s_0 + v_0(t - t_0) \quad \text{où} \quad s_0 = s(t_0). \quad (5.36)$$

Attention ! Pour un mouvement uniforme, l'accélération normale n'est en général pas nulle car

$$a_n = \frac{v_0^2}{\rho} n.$$

### 5.3.2 Mouvement rectiligne

Le mouvement d'un point est **rectiligne** si sa trajectoire est un segment de droite.

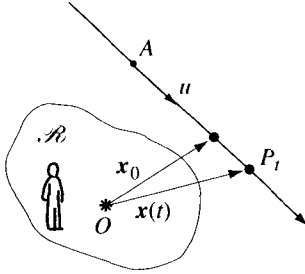


Fig. 5.10 Mouvement rectiligne.

De  $v = v \tau$ , nous avons  $a = \dot{v} \tau + v \dot{\tau}$ . Or, si la trajectoire est un segment de droite le vecteur  $\tau$  est un vecteur constant (= vecteur unité sur la trajectoire),  $\dot{\tau} = 0$  et par conséquent  $a_n = 0$ . Inversement  $\dot{\tau} = 0$  entraîne  $\tau(t) = \tau_0$  et  $\tau = dx/ds = \tau_0$  implique  $x(s) = x_0 + s \tau_0$ , qui est l'équation de la droite passant par  $x_0$ , parallèle à  $\tau_0$ .

Ainsi, le mouvement d'un point est rectiligne pendant  $[t_1, t_2]$  si et seulement si  $a_n(t) = 0$  pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ , c'est-à-dire si  $a(t)$  est parallèle à  $v(t)$ .  $a_n(t) = 0$

De plus, l'évolution est de la forme

$$x(t) = x_0 + (s(t) - s_0) u \quad (5.37)$$

où  $x_0 = x(t_0)$ ,  $s_0 = s(t_0)$  et  $|u| = 1$ .

### 5.3.3 Mouvement rectiligne et uniforme

Il découle des définitions précédentes que le mouvement d'un point est **rectiligne et uniforme** si le vecteur vitesse est constant, soit  $v(t) = v_0$ .

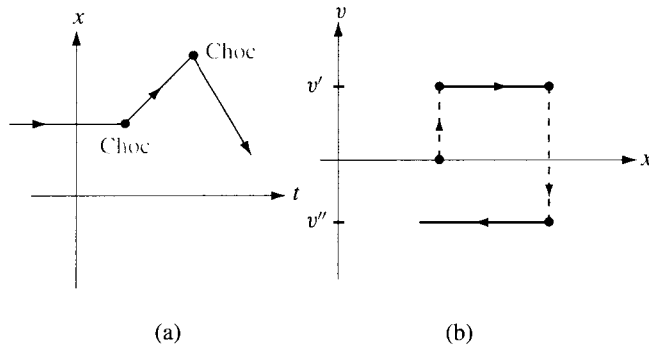
Nous avons les propriétés suivantes :

- Le mouvement d'un point est rectiligne et uniforme pendant  $[t_1, t_2]$  si et seulement si  $\mathbf{a}(t) = 0$  pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ .
- L'évolution est donnée par la formule

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \quad (5.38)$$

#### 5.3.4 Remarques

- Quel que soit le mouvement, la ligne d'univers est une courbe continue de  $\mathbb{R}^4$  qui est de classe  $C^1$  par morceau ; l'orbite est une courbe continue par morceau dans  $\mathbb{R}^6$ .



**Fig. 5.11** Choc : (a) ligne d'univers ; (b) orbite dans l'espace de phase.

- Choc
- Une discontinuité de la vitesse représente un choc et la notion d'accélération n'a pas de sens à l'instant d'un tel choc (fig. 5.11). Il faut cependant remarquer que lors d'un choc réel, la vitesse  $\mathbf{v}$  (du centre de masse du corps) varie de façon continue ; cette variation de  $\mathbf{v}$  est compliquée et fait intervenir des phénomènes complexes associés aux déformations. Heureusement cette variation s'effectue sur une échelle de temps très inférieure à celle utilisée pour analyser le mouvement, ce qui justifie la *modélisation du choc* par une discontinuité de la vitesse (§ 19.1.2).
  - L'observation du mouvement, soit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , permet de calculer la vitesse et l'accélération par dérivation. Ceci sera nécessaire pour trouver par exemple les forces à l'intérieur d'un solide en mouvement.

Inversément, connaissant l'accélération en fonction du temps, soit  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ , et les conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$  à l'instant  $t_0$ , on trouvera le mouvement par intégration :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}(t) \quad \text{implique} \quad \mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{a}(t)$$

puis

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t) \quad \text{implique} \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{v}(t).$$



- On remarquera que la propriété du mouvement rectiligne, «  $\mathbf{a}(t)$  parallèle à  $\mathbf{v}(t)$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  implique  $\mathbf{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}_0$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  », est un cas particulier de la propriété générale suivante.

Soit  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda)$  un vecteur fonction d'un paramètre  $\lambda$  ; la condition  $\frac{d}{d\lambda}\mathbf{u}(\lambda)$  parallèle à  $\mathbf{u}(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$  implique  $\mathbf{u}(\lambda)$  parallèle à  $\mathbf{u}(\lambda_0)$  pour tout  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$ .

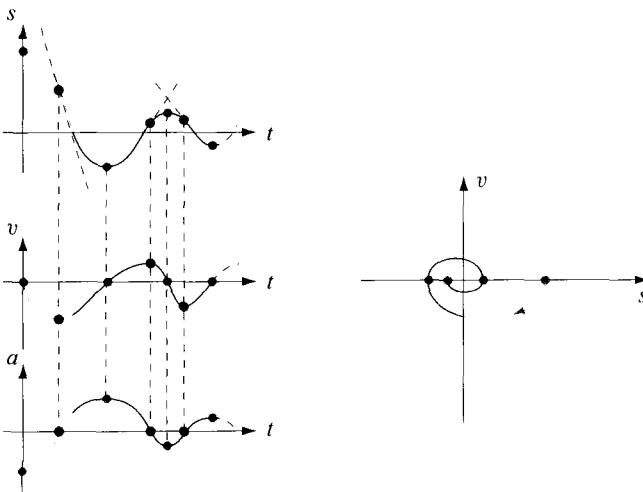
En effet,

$$\frac{d}{d\lambda}\mathbf{u} = \frac{d}{d\lambda}(u\hat{\mathbf{u}}) = \frac{du}{d\lambda}\hat{\mathbf{u}} + u\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\lambda}.$$

Comme  $d\hat{\mathbf{u}}/d\lambda$  est perpendiculaire à  $\hat{\mathbf{u}}$ , la condition  $d\mathbf{u}/d\lambda$  parallèle à  $\mathbf{u}$  implique  $d\hat{\mathbf{u}}/d\lambda = 0$ , c'est-à-dire  $\hat{\mathbf{u}}(\lambda) = \hat{\mathbf{u}}(\lambda_0)$ .

Cette propriété sera utilisée dans l'étude du billard (§ 12.5.6).

- La figure 5.12 (a) met en évidence la relation entre les grandeurs scalaires  $s(t)$ ,  $v(t)$  et  $a(t) = \dot{v}(t)$ . Ainsi la vitesse scalaire  $v(t)$  est positive (négative) à l'instant  $t$  si  $s(t)$  est croissant (décroissant) ; l'accélération scalaire  $a(t)$  est positive (négative) à l'instant  $t$  si  $s(t)$  est convexe (concave). La figure 5.12 (b) représente la relation entre  $s$  et  $v$  : c'est l'orbite dans l'espace de phase  $v = v(s)$ .



**Fig. 5.12** (a) Relation entre  $s(t)$ ,  $v(t)$ , et  $a(t)$  ; (b) orbite dans l'espace de phase  $v = v(s)$ .

## 5.4 ILLUSTRATIONS

### 5.4.1 Mouvement cycloïdal

Cherchons la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  sur la circonférence d'une roue de rayon  $R$  roulant à vitesse  $v_0$  constante (fig. 5.13). On admet que la roue roule sans glisser.

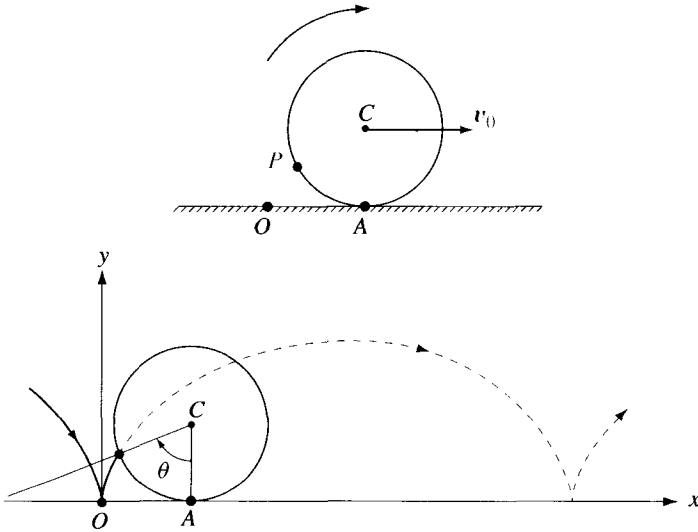


Fig. 5.13 Mouvement cycloïdal.

Prenons comme temps initial l'instant où  $P$  quitte le sol et soit  $\theta(t)$  l'angle dont a tourné le rayon  $CP$  à l'instant  $t$ . Nous avons

$$\overrightarrow{OC}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = v_0 t + R \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad |\overrightarrow{OA}| = v_0 t = |\widehat{AP}| = R \theta(t)$$

car la roue roule sans glisser (§ 8.4.1).

En projetant sur les axes  $x$  et  $y$  la relation

$$\mathbf{x}(t) = \overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OC}(t) + \overrightarrow{CP}(t), \quad \text{avec } v_0 t = R \theta(t),$$

on trouve l'équation paramétrique de la trajectoire ; c'est la **cycloïde** :

$$\text{Cycloïde} \quad \begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin \omega t) & \text{où } \omega = v_0/R, \quad \theta(t) = \omega t \\ y(t) = R(1 - \cos \omega t). \end{cases} \quad (5.39)$$

Par dérivation on obtient les vecteurs vitesse et accélération :

$$\begin{cases} v_x(t) = R\omega(1 - \cos \omega t) \\ v_y(t) = R\omega \sin \omega t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad |\mathbf{v}| = 2R\omega \left| \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right) \right| \quad (5.40)$$

$$\begin{cases} a_x(t) = R\omega^2 \sin \omega t \\ a_y(t) = R\omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad \text{d'où} \quad |\mathbf{a}| = R\omega^2. \quad (5.41)$$

On remarquera que l'accélération est constante en norme ; la relation

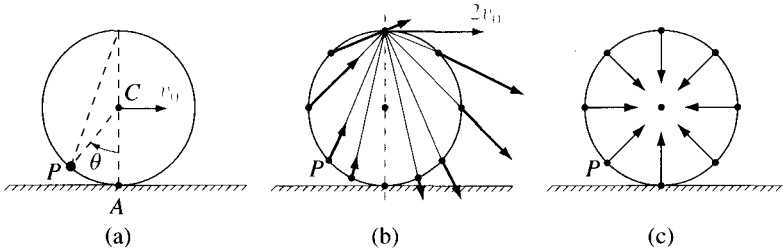
$$\frac{a_x(t)}{a_y(t)} = \tan \theta(t)$$

montre que le vecteur  $\mathbf{a}$  est dirigé vers le centre de la roue (fig. 5.14 c).

De plus, de

$$\frac{v_x(t)}{v_y(t)} = \frac{1 - \cos \theta(t)}{\sin \theta(t)} = \tan \left[ \frac{1}{2} \theta(t) \right]$$

on voit que le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est dirigé vers le sommet de la roue, d'intensité  $|\mathbf{v}| = \omega |\mathbf{AP}|$  (fig. 5.14 b).



**Fig. 5.14** Distribution des vitesses (b), et des accélérations (c), en divers points de la roue.

Pour terminer, on remarquera que le mouvement du point  $P$  sur la circonférence est toujours dirigé dans le sens du mouvement de la roue et que sa vitesse varie entre 0 et  $2v_0$ .

#### 5.4.2 Accélération d'une voiture dans un virage

Cherchons l'accélération (en fonction de la position) d'une voiture roulant à vitesse  $v_0$  constante sur une route horizontale d'équation  $y = y(x)$ , où

$$\begin{cases} y = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ y = Cx^{3/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{où } C = \text{cste.}$$

On trouvera ensuite l'évolution  $x(t)$  sachant que la voiture se trouve à  $t = 0$  au point A d'abscisse  $x_0$  négatif.

Aussi longtemps que  $x$  est négatif,  $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_1$  implique

$$x(t) = x_0 + v_0 t \quad \text{pour} \quad 0 \leq t \leq t_0 = -\frac{x_0}{v_0}.$$

Pour  $x$  positif nous aurons

$$y = Cx^{\frac{3}{2}} \quad \text{d'où} \quad \dot{y} = \frac{3}{2} Cx^{\frac{1}{2}} \dot{x}$$

et

$$v = v_0 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \dot{x} \sqrt{1 + \frac{9}{4} C^2 x}. \quad (5.42)$$

Nous obtenons ainsi le vecteur vitesse

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = (1 + \frac{9}{4} C^2 x)^{-\frac{1}{2}} v_0 \\ v_y = \dot{y} = \frac{3}{2} Cx^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{9}{4} C^2 x)^{-\frac{1}{2}} v_0 \end{cases}$$

puis le vecteur accélération

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -\frac{9}{8} C^2 v_0^2 (1 + \frac{9}{4} C^2 x)^{-2} \\ a_y = \ddot{y} = \frac{3}{4} C v_0^2 (1 + \frac{9}{4} C^2 x)^{-2} x^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Nous voyons que  $a_x$  est discontinu et  $a_y$  est infini en  $x = 0$  !

En intégrant de  $t_0$  à  $t$  l'équation (5.42)

$$v_0 = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \frac{9}{4} C^2 x} \quad \text{avec} \quad x(t_0) = 0$$

on obtient :

$$\int_{t_0}^t v_0 dt = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4} C^2 x} dx$$

et on trouve l'évolution pour  $t \geq t_0$

$$v_0 (t - t_0) = \frac{8}{27} \frac{1}{C^2} \left[ \left( 1 + \frac{9}{4} C^2 x \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

c'est-à-dire

$$x(t) = \frac{4}{9} \frac{1}{C^2} \left[ \left( 1 + \frac{27}{8} C^2 (v_0 t + x_0) \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad \text{pour} \quad t \geq t_0.$$

### 5.4.3 Distance de freinage dans un virage circulaire

Une voiture roulant à vitesse  $v_0$  constante aborde un virage circulaire de 40 m de rayon. Cherchons la vitesse maximale permise si l'on admet que l'accélération  $|a|$  ne doit pas dépasser la valeur  $a_0 = 8 \text{ ms}^{-2}$  pour ne pas risquer un dérapage. Quel est, de plus, le freinage maximal possible si la voiture roule à 60 km/h et quelle sera la distance de freinage si l'on maintient cette accélération de freinage constante ?

Pour une vitesse scalaire  $v_0$  constante, l'accélération tangentielle est nulle et nous avons

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}_n| = \frac{v_0^2}{R}.$$

La condition  $|\mathbf{a}| \leq a_0$  implique  $v_0 \leq \sqrt{a_0 R}$  : la vitesse maximale est donc 64,4 km/h.

Si la voiture roule à 60 km/h, le freinage maximal  $a_\tau$  est donné par

$$|\ddot{s}| = |a_\tau| = \sqrt{a^2 - a_n^2} = \sqrt{a_0^2 - \frac{v_0^4}{R^2}} \cong 4 \text{ ms}^{-2}.$$

La distance de freinage  $D$  est la longueur  $(s(t_1) - s_0)$  à l'instant  $t_1$  où la vitesse est nulle. De  $dv/dt = a_\tau$  avec  $a_\tau = -4 \text{ ms}^{-2}$  il vient par intégration

$$v(t) = v_0 + \int_0^t dt' a_\tau = v_0 + a_\tau t \quad \text{car } a_\tau = \text{cste}$$

et de  $ds/dt = v(t)$  on obtient

$$s(t) = s_0 + \int_0^t dt' v(t') = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2$$

d'où

$$s(t) - s_0 = \frac{1}{2a_\tau} [v(t)^2 - v_0^2]$$

et

$$D = \frac{v_0^2}{2|a_\tau|} \cong 35 \text{ m}.$$

**Remarque.** Il est possible de diminuer cette distance de freinage  $D$  en augmentant  $|a_\tau|$  à mesure que la vitesse diminue, tout en respectant la condition

$$|a_\tau(t)| \leq \sqrt{a_0^2 - \frac{v^4(t)}{R^2}}$$

pour ne pas dérapier.

#### 5.4.4 Calcul de la vitesse à partir du graphe de l'accélération

Une voiture subit un choc 42 secondes après son départ. L'accéléromètre a enregistré le graphe représenté sur la figure 5.15. Quelle est la vitesse de la voiture au moment du choc ?

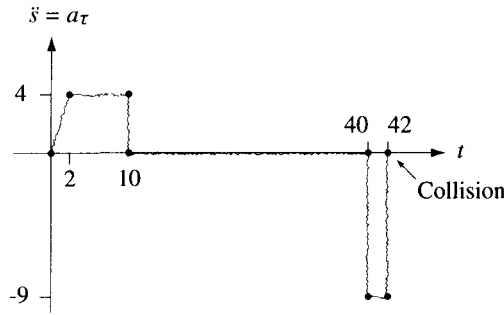


Fig. 5.15 Graphe de l'accélération.

Pour trouver la vitesse (scalaire) à l'instant  $t$ , il suffit d'intégrer  $a_\tau$  de  $t = 0$  à  $t$ . Nous obtenons ainsi :

$$0 \leq t \leq 2 \quad \begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2t \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad v(t) = t^2$$

$$2 \leq t \leq 10 \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = 4 \quad \text{d'où} \quad v(t) = v(2) + 4(t - 2)$$

$$10 \leq t \leq 40 \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad v(t) = v(10)$$

$$40 \leq t \leq 42 \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = -9 \quad \text{d'où} \quad v(t) = v(40) - 9(t - 40)$$

et la vitesse à l'instant du choc est

$$v(t = 42) = 18 \text{ m/s} = 65 \text{ km/h.}$$

## 5.5 VITESSE ET ACCÉLÉRATION EN COORDONNÉES CURVILIGNES

Nous avons introduit les coordonnées curvilignes comme un ensemble de  $k$  variables  $(q_1, \dots, q_k)$  tel que la donnée des  $q_i$  détermine univoquement la position du point  $P$  :  $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}(q_1, \dots, q_k)$ . L'évolution temporelle des  $q_i$ , soit  $q_i = q_i(t)$ , détermine alors l'évolution temporelle du point  $P$

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{OP}(q_1(t), \dots, q_k(t)). \quad (5.43)$$

### Exemples

#### 1. Coordonnées cartésiennes (fig. 5.16 a)

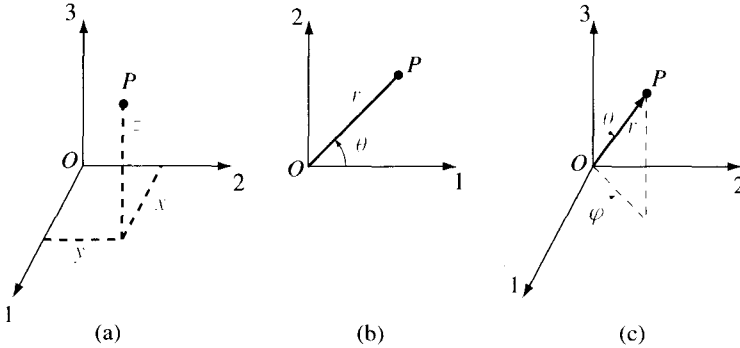
$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \mathbf{OP} = \mathbf{OP}(x_1, x_2, x_3). \quad (5.44)$$

## 2. Coordonnées polaires (fig. 5.16 b)

$$r = r(t), \theta = \theta(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{OP} = \mathbf{OP}(r, \theta). \quad (5.45)$$

## 3. Coordonnées sphériques (fig. 5.16 c)

$$r = r(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{OP} = \mathbf{OP}(r, \theta, \varphi). \quad (5.46)$$



**Fig. 5.16** (a) Coordonnées cartésiennes ; (b) coordonnées polaires ; (c) coordonnées sphériques.

### 5.5.1 Vitesse en coordonnées curvilignes

Ayant choisi les coordonnées curvilignes  $\{q_i\}$ , il nous faut exprimer la vitesse de  $P$  en fonction des variables  $q_i$  et de leur dérivée temporelle  $\dot{q}_i$ .

En mathématique on montre que pour toute fonction  $f = f(q_1, \dots, q_k)$ , où  $q_i = q_i(t)$ , nous avons

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial f(q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \lim_{\delta q_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\delta q_1} [f(q_1 + \delta q_1, q_2, \dots, q_k) - f(q_1, q_2, \dots, q_k)]$$

est la **dérivée partielle** de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $q_1$  : c'est la dérivée par rapport à  $q_1$  en considérant  $q_2, \dots, q_k$  comme des constantes. Les dérivées partielles  $\partial f / \partial q_i$  sont définies de façon analogue.

Pour préciser les variables qui sont fixes dans l'opération de dérivée partielle on écrit souvent

$$\left. \frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1} \right)_{q_2, \dots, q_k}.$$

Les propriétés de la dérivée (§ 5.1.4) restent valables pour les dérivées partielles. Nous avons par conséquent

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{OP} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{OP}(q_1, \dots, q_k)}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (5.48)$$

**Exemple 1. Coordonnées cartésiennes :**  $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}(x_1, x_2, x_3)$

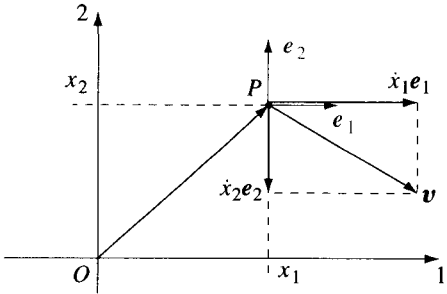
De  $\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$  où les  $\mathbf{e}_i$  sont des vecteurs constants, nous avons

$$\frac{\partial \mathbf{OP}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \quad (\text{fig. 5.17 a}). \quad (5.49)$$

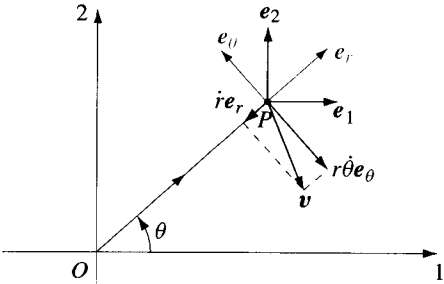
La formule (5.48) entraîne

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \mathbf{e}_i \quad (5.50)$$

et nous retrouvons l'expression (5.17).



(a)



(b)

**Fig. 5.17** (a) Coordonnées cartésiennes ; (b) coordonnées polaires.



**Exemple 2. Coordonnées polaires :  $OP = OP(r, \theta)$** 

De  $OP = x_1 e_1 + x_2 e_2 = r \cos \theta e_1 + r \sin \theta e_2$ , on obtient (fig. 5.17 b) :

$$\left. \frac{\partial OP}{\partial r} \right|_{\theta} = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 = e_r \quad \frac{\partial}{\partial r} OP = e_r \quad (5.51)$$

où  $e_r = e_r(\theta)$  est le vecteur unité, lié au point  $P$ , parallèle à  $OP$  ; et

$$\left. \frac{\partial OP}{\partial \theta} \right|_r = -r \sin \theta e_1 + r \cos \theta e_2 = r e_{\theta} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} OP = r e_{\theta} \quad (5.52)$$

où  $e_{\theta} = e_{\theta}(\theta)$  est le vecteur unité, lié au point  $P$ , perpendiculaire à  $e_r$ , dans la direction des  $\theta$  croissants.

Il faut remarquer que  $\frac{\partial}{\partial \theta} OP = r e_{\theta}$  : ce n'est donc pas un vecteur unité (contrairement à  $\frac{\partial}{\partial x_i} OP$  et  $\frac{\partial}{\partial r} OP$ ).

En appliquant la formule (5.48) on trouve l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$v = \dot{r} e_r + r \dot{\theta} e_{\theta} = v_r e_r + v_{\theta} e_{\theta}. \quad (5.53)$$

Les composantes de  $v$  selon  $e_r$  et  $e_{\theta}$ , soit  $v_r = \dot{r}$  et  $v_{\theta} = r \dot{\theta}$ , sont appelées respectivement **vitesse radiale** et **vitesse transverse**.

Dans les exemples précédents, les vecteurs  $\{e_1, e_2, e_3\}$  et les vecteurs  $\{e_r, e_{\theta}\}$  sont les vecteurs unités tangents aux lignes de coordonnées des systèmes de coordonnées respectifs. Ce résultat est parfaitement général ; en effet, par définition

$$\frac{\partial OP}{\partial q_i} = \lim_{\delta q_i \rightarrow 0} \frac{1}{\delta q_i} [OP(..., q_i + \delta q_i, ...) - OP(..., q_i, ...)].$$

Par conséquent, en considérant la courbe définie par la ligne de coordonnée  $q_i$ , paramétrisée par la variable  $q_i$ , et en suivant la discussion du paragraphe 5.1.6, on conclut que le vecteur  $\frac{\partial}{\partial q_i} OP$  est tangent à la ligne de coordonnée  $q_i$ , dans le sens des  $q_i$  croissants. Ainsi,

$$\frac{\partial OP}{\partial q_i} = h_i(q_1, ..., q_k) e_{q_i}(q_1, ..., q_k) \quad \frac{\partial}{\partial q_i} OP = h_i e_{q_i} \quad (5.54)$$

où  $h_i(q_1, ..., q_k)$  est la norme de  $\frac{\partial}{\partial q_i} OP$  et les  $e_{q_i}(q_1, ..., q_k)$ ,  $i = 1, ..., k$ , sont les vecteurs unités, liés au point  $P(q_1, ..., q_k)$ , tangents aux lignes de coordonnées  $q_i$  dans le sens des  $q_i$  croissants : c'est le **repère naturel tangent au point  $P$** . La formule (5.48) implique alors

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k h_i(q_1, \dots, q_k) \dot{q}_i \mathbf{e}_{q_i}(q_1, \dots, q_k). \quad (5.55)$$

### 5.5.2 Accélération en coordonnées curvilignes

De l'équation (5.55) on obtient la forme générale de l'accélération en coordonnées curvilignes :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{i=1}^k \left[ \frac{dh_i}{dt} \dot{q}_i \mathbf{e}_{q_i} + h_i \ddot{q}_i \mathbf{e}_{q_i} + h_i \dot{q}_i \frac{d\mathbf{e}_{q_i}}{dt} \right] \quad (5.56)$$

$$\text{où } \frac{dh_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{e}_{q_i}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathbf{e}_{q_i}}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

### 5.5.3 Coordonnées polaires

En coordonnées cartésiennes, nous avons de (5.51) et (5.52),  $h_r = 1$ ,  $h_\theta = r$  et

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \dot{\theta} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \dot{\theta} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (5.57)$$

ce qui donne pour l'accélération

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \\ &= a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu les relations suivantes :

### Vitesse et accélération en coordonnées polaires

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} & \text{vitesse radiale} \\ v_\theta = r\dot{\theta} & \text{vitesse transverse} \end{cases} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

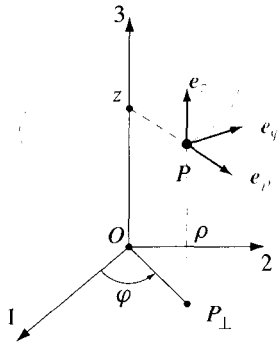
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & \text{accélération radiale} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & \text{accélération transverse} \end{cases} \quad (5.59)$$

**Remarque.** En utilisant (5.57) on obtient directement l'expression (5.53) de la vitesse en coordonnées polaires. En effet,

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{OP} = \frac{d}{dt} (r \mathbf{e}_r) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta.$$

### 5.5.4 Coordonnées cylindriques

Soit  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  le repère orthonormé lié au point  $P$  de coordonnées  $(\rho, \varphi, z)$ , défini par les vecteurs unités tangents aux lignes de coordonnées (fig. 5.18).



**Fig. 5.18** Repère naturel tangent en coordonnées cylindriques.

En posant  $\mathbf{OP} = \mathbf{OP}_\perp + \mathbf{P}_\perp \mathbf{P} = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z$  nous avons

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\mathbf{e}}_\rho + \dot{z} \mathbf{e}_z + z \dot{\mathbf{e}}_z.$$

Mais (5.57) implique  $\dot{\mathbf{e}}_\rho = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_\rho$ , tandis que  $\dot{\mathbf{e}}_z = 0$ . Nous obtenons ainsi les expressions suivantes.

### Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

$$\mathbf{v} = v_\rho \mathbf{e}_\rho + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_z \mathbf{e}_z$$

$$\begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad (5.60)$$

$$\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z$$

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases} \quad (5.61)$$

#### 5.5.5 Coordonnées sphériques

Soit  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  le repère orthonormé lié au point  $P$  de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ , défini par les vecteurs unités tangents aux lignes de coordonnées (fig. 5.19).

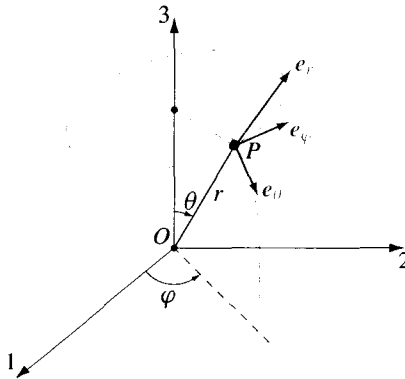


Fig. 5.19 Repère naturel tangent en coordonnées sphériques.

Nous pourrions procéder comme nous l'avons fait pour les coordonnées polaires, en écrivant  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  en coordonnées cartésiennes, puis en calculant  $(\dot{\mathbf{e}}_r, \dot{\mathbf{e}}_\theta, \dot{\mathbf{e}}_\varphi)$ .

Comme les calculs sont peu intéressants, nous donnons directement le résultat que nous démontrerons par une autre méthode au chapitre 9, (sect. 9.6).

### Vitesse et accélération en coordonnées sphériques

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} & \text{vitesse radiale} \\ v_\theta = r\dot{\theta} & \text{vitesse méridienne} \\ v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} & \text{vitesse transverse} \end{cases} \quad (5.62)$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 & \text{accélération radiale} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 & \text{accélération méridienne} \\ a_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta}\dot{\varphi} & \text{accélération transverse} \end{cases} \quad (5.63)$$

#### 5.5.6 Illustration 1. Came

Un point  $G$  se déplace sur une came immobile, d'équation  $r = b - c \cos(N\theta)$  où  $b, c, N$  sont des constantes avec  $b > c$  et  $N$  entier (fig. 5.20). Cherchons l'accélération de  $G$  lorsque le bras tourne à vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0$  constante.

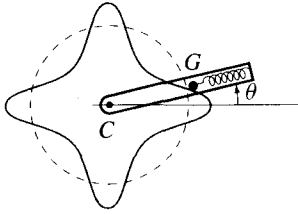


Fig. 5.20 Came.

$$\text{De } \dot{\theta} = \omega_0 \text{ et } r = b - c \cos(N\theta)$$

$$\text{nous tirons } \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t \text{ où } \theta_0 = \theta(0)$$

$$\text{et } \dot{r} = cN\omega_0 \sin(N\theta), \quad \ddot{r} = cN^2\omega_0^2 \cos(N\theta).$$

Ainsi

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$

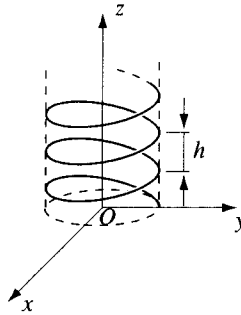
avec

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = c(N^2 + 1)\omega_0^2 \cos[N(\theta_0 + \omega_0 t)] - b\omega_0^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2cN\omega_0^2 \sin[N(\theta_0 + \omega_0 t)]. \end{cases}$$

Connaissant l'accélération, nous verrons par la suite qu'il est possible d'en déduire la force s'exerçant sur le point  $G$  et de calculer la constante du ressort pour que  $G$  reste sur la came.

### 5.5.7 Illustration 2. Mouvement hélicoïdal

Cherchons l'évolution, la vitesse et l'accélération d'un point se déplaçant à vitesse  $v_0$  constante sur une hélice de rayon  $R$  et de pas  $h$  (fig. 5.21).



**Fig. 5.21** Hélice de rayon  $R$  et de pas  $h$ .

Soit  $Oz$  l'axe de l'hélice ; la trajectoire est la courbe d'équation

$$\rho = R \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi \quad (5.64)$$

où  $(\rho, \varphi, z)$  sont les coordonnées cylindriques du point.

La vitesse scalaire étant constante, nous avons de (5.60), (5.61) et (5.64),

$$v_0 = \sqrt{v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} = \dot{\varphi} \sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}$$

d'où

$$\dot{\varphi} = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (h/2\pi)^2}} = \omega_0 = \text{cste}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t$$

et

$$\mathbf{v} = R\omega_0 \mathbf{e}_\varphi + \frac{h}{2\pi} \omega_0 \mathbf{e}_z \quad (5.65)$$

$$\mathbf{a} = -R\omega_0^2 \mathbf{e}_\rho.$$

Comme le mouvement est uniforme,  $\mathbf{a}_\tau$  est nulle et  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$ . Nous pouvons ainsi calculer le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire (§ 5.2.5) à partir de

$$a_n = \frac{v_0^2}{R_C} = R\omega_0^2$$

c'est-à-dire

$$R_C = R \left[ 1 + \left( \frac{h}{2\pi R} \right)^2 \right].$$

Rayon de courbure

**Remarque.** Le rayon de courbure  $R_C$  est plus grand que le rayon de l'hélice.

## 5.6 VITESSE ET ACCÉLÉRATION EN COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

Nous avons introduit les coordonnées généralisées (§ 4.2.3) comme un ensemble de  $k$  variables  $(q_1, q_2, \dots, q_k)$  telles que la donnée des  $q_j$  et du temps déterminent univoquement la position du système. L'évolution temporelle des  $q_j$ , soit  $q_j = q_j(t)$ , détermine ainsi l'évolution temporelle du point  $P$

$$OP(t) = OP(q_1(t), q_2(t), \dots, q_k(t), t). \quad (5.66)$$

On appelle **orbite** la courbe orientée dans l'*espace de phase* de dimension  $2k$  définie par l'évolution  $(q_1(t), \dots, q_k(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_k(t))$ . Orbite

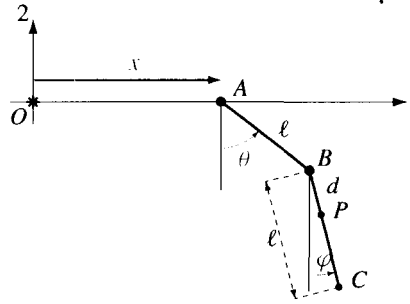
Nous montrerons par la suite que l'espace de phase est l'espace des états (instantanés) du système. Par abus de langage on appellera également « orbite dans l'espace de phase  $(q_j, \dot{q}_j)$  », la courbe orientée définie par  $(q_j(t), \dot{q}_j(t))$ .

Comme précédemment

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} OP = \sum_{j=1}^k \frac{\partial OP(q_1, \dots, q_k, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial OP(q_1, \dots, q_k, t)}{\partial t} \quad (5.67) \quad \text{Vitesse}$$

et l'accélération s'obtient en dérivant (5.67) par rapport au temps.

A titre d'illustration considérons un système plan formé de deux tiges  $AB$  et  $BC$ , de longueur  $\ell$ , mobiles autour des points d'articulation  $A$  et  $B$ , dont le point  $A$  est astreint à se déplacer sur une droite (fig. 5.22). Notre but est de trouver l'accélération d'un point  $P$  de la tige  $BC$ , situé à une distance  $d$  de  $B$ .

Fig. 5.22 Coordonnées généralisées :  $x, \theta, \varphi$ .

Le système étudié est un système holonôme à trois degrés de liberté et nous pouvons prendre comme coordonnées généralisées  $(q_1, q_2, q_3)$  les variables  $(x, \theta, \varphi)$  définies sur la figure 5.22. Dans ce cas nous avons

$$\overrightarrow{OP}(x, \theta, \varphi) = [x + \ell \sin \theta + d \sin \varphi] \mathbf{e}_1 - [\ell \cos \theta + d \cos \varphi] \mathbf{e}_2 \quad (5.68)$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}) &= [\dot{x} + \ell \cos \theta \dot{\theta} + d \cos \varphi \dot{\varphi}] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + [\ell \sin \theta \dot{\theta} + d \sin \varphi \dot{\varphi}] \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (5.69)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, \{\ddot{q}_i\}) &= [\ddot{x} - \ell \sin \theta \dot{\theta}^2 + \ell \cos \theta \ddot{\theta} - d \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + d \cos \varphi \ddot{\varphi}] \mathbf{e}_1 \\ &\quad + [\ell \cos \theta \dot{\theta}^2 + \ell \sin \theta \ddot{\theta} + d \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + d \sin \varphi \ddot{\varphi}] \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Si maintenant nous imposons au point A le mouvement défini par la fonction  $x = x(t)$ , le système devient un système holonôme à deux degrés de liberté avec liaisons dépendantes du temps. Dans ce cas la donnée de  $(\theta, \varphi)$  et du temps déterminent univoquement la position du système, et il suffit de remplacer  $x, \dot{x}$  et  $\ddot{x}$  par les fonctions connues  $x(t), \dot{x}(t)$  et  $\ddot{x}(t)$ , pour exprimer position, vitesse et accélération du point P, en fonction des  $\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}$  et  $\{\ddot{q}_i\}$  où  $q_1 = \theta, q_2 = \varphi$ .

## 5.7 PROBLÈMES

### Mouvements rectilignes

**5.7.1** Pour chacun des mouvements rectilignes ci-dessous, esquisser la ligne d'univers dans l'espace  $(x, t)$  et l'orbite dans l'espace de phase  $(x, v)$ .

- Mouvement de vitesse constante sur l'intervalle  $[0, L]$ ; aux extrémités O et L il y a un choc et la vitesse  $\mathbf{v}$  devient  $\mathbf{v}' = -e \mathbf{v}$  avec  $0 < e < 1$ .
- $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$  où  $\omega$  est une constante.
- $x(t) = x_0 e^{-\lambda t}$  où  $\lambda$  est une constante positive.



**5.7.2** Pour chacun des mouvements rectilignes ci-dessous, esquisser quelques orbites typiques dans l'espace de phase  $(x, v)$  pour différentes valeurs des conditions initiales  $(x_0, v_0)$  à  $t = 0$ . Constante du mouvement

- Mouvement d'accélération  $a(t) = 0$  pour tout  $t$ .
- Mouvement oscillatoire harmonique :  $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (v_0/\omega) \sin(\omega t)$ , où  $\omega$  est une constante. On vérifiera que  $a(t) = -\omega^2 x(t)$  et que la fonction  $G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$  est une *constante du mouvement*, c'est-à-dire :

$$G(x(t), v(t)) = G(x_0, v_0) \quad \text{pour tout } t.$$

Trouver l'amplitude du mouvement  $A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min})$  et la vitesse maximale en fonction de  $(x_0, v_0)$ .

- Mouvement uniformément accéléré :  $a(t) = a_0$ , où  $a_0 = \text{cste}$ . On vérifiera que la fonction

$$G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - a_0 x$$

est une constante du mouvement.

**5.7.3** Un barreau de longueur  $\ell$  se déplace dans un plan. L'une des extrémités est astreinte à se déplacer sur une droite (fig. 5.23). Exprimer la position, la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  du barreau en fonction des coordonnées généralisées  $(x, \theta)$  et de leurs dérivées temporelles. Coordonnées généralisées

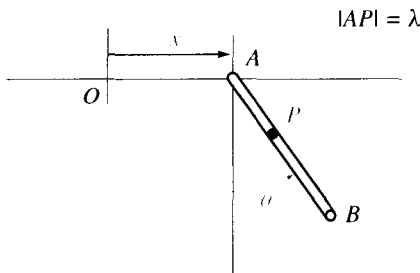


Fig. 5.23

On impose au point A le mouvement d'équation  $x_A(t) = C \cos(\omega t)$ . Exprimer la position, la vitesse et l'accélération de P en fonction de  $(t, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ .

**5.7.4** L'accéléromètre d'un véhicule parti d'un point A a enregistré l'évolution suivante :  $a(t) = 0, 2t(10 - t) \text{ ms}^{-2}$  pour  $0 \leq t \leq 10$ ;  $a(t) = 0$  pour  $10 \leq t \leq 70$ ;  $a(t) = -7,5 \text{ ms}^{-2}$  pour  $70 \leq t \leq 72$ . Trouver l'abscisse curviligne et la vitesse en fonction du temps. Équation horaire

**5.7.5** Un train peut accélérer avec une accélération égale à  $a_1 = 2 \text{ ms}^{-2}$  et freiner avec une décélération  $a_2 = -0,9 \text{ ms}^{-2}$ ; sa vitesse maximale est de 180 km/h. Quel est le temps minimal pour relier deux gares distantes de 1,5 km ? De 4,5 km ?

Où la réflexion précède le courage

**5.7.6** Un promeneur aperçoit une jeune fille en train de se noyer dans le lac. Il peut courir avec la vitesse  $v_1$  et nager avec la vitesse  $v_2$ . Vérifier que la trajectoire correspondant au temps minimal pour atteindre la jeune fille est telle que  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = v_1 / v_2$  (fig. 5.24).

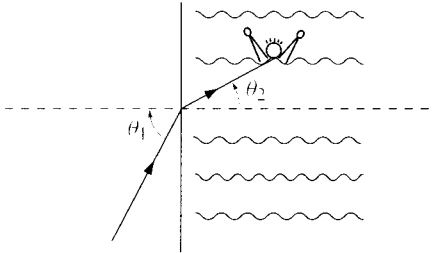


Fig. 5.24

Où une 2 CV peut avoir une accélération supérieure à celle d'une Porsche

**5.7.7** Une Porsche atteint les 100 km/h en 5,4 s. Quelle est l'accélération moyenne ? A quelle vitesse  $v_0$  constante doit rouler une 2 CV dans un virage de 40 m de rayon pour que son accélération soit égale à celle obtenue pour la Porsche ? Les freins de la 2 CV sont mis en action, provoquant un freinage de décélération constante. Après un intervalle de temps  $\Delta t$  la vitesse est  $\frac{1}{2}v_0$ . Trouver l'accélération de freinage, le vecteur accélération  $\mathbf{a}$  et son intensité  $|\mathbf{a}|$ .

Pendule double

**5.7.8** Un système articulé (= *pendule double*) est formé de deux tiges de longueur  $\ell_1$  et  $\ell_2$  se déplaçant dans un plan (fig. 5.25). Le point  $O$  est fixe. Exprimer la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  du point  $B$  en fonction de  $\theta_1, \theta_2$  et de leurs dérivées temporelles.

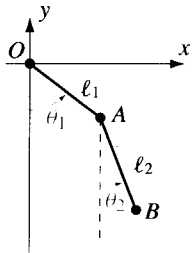


Fig. 5.25

Mouvement des planètes

**5.7.9** On impose au système du problème précédent l'évolution définie par  $\dot{\theta}_1 = \omega_1, \dot{\theta}_2 = \omega_2$ , où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont des constantes positives. En calculant la projection de  $\mathbf{v}$  sur la direction perpendiculaire à  $\mathbf{OB}$ , montrer que si  $(\ell_1 \omega_1 - \ell_2 \omega_2)(\ell_1 - \ell_2)$  est positif, le mouvement de  $B$  s'effectue toujours dans le même sens autour de  $O$  ( $\dot{\theta} > 0$ ). Dans le cas contraire, le mouvement est alternativement direct ( $\dot{\theta} > 0$ ) et rétrograde ( $\dot{\theta} < 0$ ). En prenant pour  $O, A$  et  $B$  les centres de la Terre, du Soleil et d'une planète, le mouvement de  $B$  est analogue à celui de la planète dans le modèle de

Tycho Brahé (§ 6.5.1 et 8.6.4). Est-ce que les mouvements de Vénus et Mars présentent une partie rétrograde ?

**5.7.10** Estimer la vitesse  $|\mathbf{v}|$  et l'accélération  $|\mathbf{a}|$  d'un point immobile à l'équateur, (1) par rapport au référentiel géocentrique, et (2) par rapport au référentiel de Kepler. (Pour cette estimation prendre l'axe des pôles perpendiculaire au plan de la trajectoire de la Terre autour du Soleil ; on admettra également que cette trajectoire est un cercle.)

Vitesse et accélération d'un point fixe sur la terre

**5.7.11** Un corps se déplace sur le diamètre d'un disque tournant à vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0$  constante autour de son axe (perpendiculaire au plan du disque). Trouver la trajectoire, la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  du corps, sachant qu'il s'éloigne du centre du disque à vitesse  $\dot{r} = v_0$  constante et  $r = 0$  à  $t = 0$ . Calculer les accélérations tangentielle et normale. Quel est le rayon de courbure de la trajectoire ?

Déplacement d'un point sur un disque tournant

**5.7.12** Une particule se déplace sur la cardioïde

Coordonnées polaires

$$r = C(1 - \cos \theta) \quad C > 0$$

avec une vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0$  constante. On demande la vitesse scalaire, l'accélération  $\mathbf{a}$  (en coordonnées polaires) et l'orbite dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$ .

**5.7.13** Un mobile se déplace à vitesse (scalaire) constante sur la courbe d'équation (en coordonnées cylindriques)

Coordonnées cylindriques

$$z = k\rho \quad \rho = \rho_0 e^{C\varphi}$$

où  $k, \rho_0, C$  sont des constantes positives. Trouver l'évolution temporelle de condition initiale  $\varphi = 0$  à  $t = 0$ . Calculer le vecteur accélération et le rayon de courbure de la trajectoire.

**5.7.14** Une antenne parabolique tourne autour de l'axe vertical avec une vitesse  $\dot{\varphi} = \omega_0$  constante (fig. 5.26). Exprimer la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  du point  $P$  en fonction de  $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ .

Coordonnées sphériques

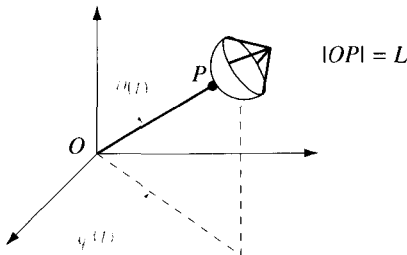


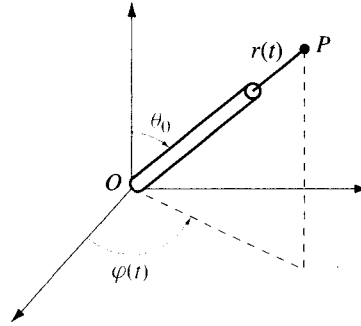
Fig. 5.26

**5.7.15** Un bras télescopique (fig. 5.27) s'allonge en même temps qu'il pivote à vitesse constante, c'est-à-dire  $r = r(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t) = \omega_0$ ,  $\theta(t) = \theta_0$ . Exprimer

Bras télescopique

la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'accélération  $\mathbf{a}$  du point  $P$  en fonction de  $(r, \dot{r}, \ddot{r})$ . Trouver l'évolution  $r(t)$  pour que la vitesse scalaire de  $P$  soit constante.

$$\left( \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \right)$$



**Fig. 5.27**

**Arrêt d'une turbine 5.7.16** Lorsque l'on coupe le courant, le rotor d'une turbine ralentit avec une décélération  $\dot{\omega} = -(A + B\omega^2)$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes positives et  $\omega$  la vitesse de rotation du rotor. La vitesse initiale du rotor étant  $\omega_0$ , calculer le temps nécessaire pour que le rotor s'arrête.

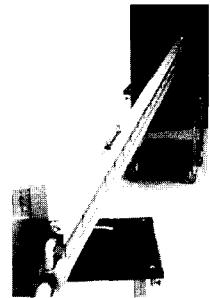
$$\left( \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right)$$

## CHAPITRE 6

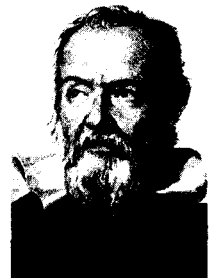
# BASES CINÉMATIQUES DE LA DYNAMIQUE

Plusieurs mouvements naturels ont joué un rôle important dans l'histoire de la mécanique. Dans le chapitre précédent nous avons étudié le mouvement rectiligne uniforme et nous avons montré qu'il correspondait au cas  $a(t) = 0$ . Ce mouvement, bien qu'extrêmement simple, est fondamental puisqu'il est à la base de la mécanique newtonienne (1<sup>re</sup> loi de Newton ou Principe d'inertie) et qu'il permettra de définir le zéro des forces agissant sur un point matériel. De plus l'observation expérimentale du mouvement rectiligne et uniforme du centre de masse (sous certaines conditions) conduira au principe fondamental de "conservation de la quantité de mouvement". Nous pouvons également mentionner que ce mouvement est à la base de la théorie de la relativité restreinte et générale d'Einstein (étude des corps en chute libre et géodésiques).

Dans ce chapitre nous allons décrire puis analyser d'autres mouvements observés dans la nature : le mouvement d'un corps en chute libre à la surface de la Terre (balistique), le mouvement d'un corps suspendu à un ressort, le mouvement des planètes et la diffusion d'une particule chargée. Par l'étude de ces mouvements (cinématique) nous découvrirons que l'accélération s'exprime de manière simple et qu'elle permet une classification des mouvements qui laisse deviner l'équation de Newton (dynamique). En outre nous verrons que certaines grandeurs physiques restent constantes au cours de l'évolution temporelle (constantes du mouvement). Le lemme fondamental nous fournira une méthode pour déduire l'une de ces constantes du mouvement, plus précisément celle qui fait pressentir la conservation de l'énergie en dynamique.



Rail à air incliné



GALILEO Galilei  
dit Galilée  
Physicien et astronome  
italien  
1564-1642

### 6.1 CHUTE DES CORPS ET MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

Suivant la démarche expérimentale décrite par Galilée (fig. 6.3 a), observons le mouvement d'un corps, lâché sans vitesse initiale, qui tombe soit en chute libre, soit en glissant sur un rail à air incliné (faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale). L'expérience montre que le mouvement est rectiligne, d'équation

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \quad (6.1)$$

où la trajectoire rectiligne a été choisie comme axe des  $x$  ;  $a_0$  est une constante qui dépend de l'inclinaison du rail à air ( $a_0 = g \sin \theta$  où  $g \cong 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ), mais pas du corps ;  $x_0$  est la position du corps à l'instant initial  $t_0$  où il est lâché.

On remarquera que (6.1) est une bonne description du mouvement pour autant que  $(t - t_0)$  ne soit pas trop grand. On observe également qu'en diminuant les "frottements" on améliore la correspondance entre (6.1) et le résultat expérimental. On peut ainsi admettre que (6.1) correspond au mouvement du corps dans la limite où il n'y a plus de frottement et pour des distances de chute pas trop grandes (de l'ordre du mètre par exemple).

De (6.1) il suit que la vitesse et l'accélération sont données par

$$v(t) = \dot{x}(t) = a_0(t - t_0) \quad (6.2)$$

et

$$a(t) = a_0 = \text{cste.} \quad (6.3)$$

En conclusion l'observation montre que le mouvement du corps est rectiligne, d'accélération constante.

Mouvement  
rectiligne uniforme

Inversement pour tout mouvement rectiligne d'accélération  $a_0$  constante, nous avons

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \quad \text{d'où} \quad v(t) = v_0 + a_0(t - t_0) \quad (6.4)$$

et

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \quad \text{d'où} \quad x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \quad (6.5)$$

où  $x_0$  et  $v_0$  sont la position et la vitesse à l'instant  $t_0$  (= conditions initiales). Nous voyons que (6.1) correspond au cas particulier  $v_0 = 0$ .

A partir de (6.4) et (6.5) on vérifie facilement la relation

$$\frac{1}{2}v(t)^2 - a_0x(t) = \frac{1}{2}v_0^2 - a_0x_0 = \text{cste.} \quad (6.6)$$

Par conséquent pour tout mouvement rectiligne d'accélération  $a_0$  constante, la fonction

$$G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 - a_0x \quad (6.7)$$

Constante du  
mouvement

définit une grandeur dont la valeur est fixée par les conditions initiales, mais qui reste constante au cours de l'évolution temporelle. Ce résultat suggère d'introduire la définition suivante.

Soit un point  $P$  d'évolution  $\mathbf{x}(t)$  ; on appelle **constante du mouvement** toute fonction  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  telle que

$$G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0). \quad (6.8)$$

Par la suite on écrira plus simplement

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = K \quad \text{avec} \quad K = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = \text{cste.}$$

Attention ! La grandeur  $G$  n'est pas une « constante » car la valeur de  $G$  peut être arbitrairement fixée par un choix adéquat des conditions initiales. Toutefois, ayant fixé les conditions initiales, la valeur de  $G$  restera constante au cours du temps.

Attention : une constante du mouvement n'est pas une constante !

De façon générale, pour vérifier qu'une fonction  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  est une constante du mouvement, il suffira de montrer que  $\frac{d}{dt}G = 0$ , où  $G(t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ .

Dans le cas particulier du mouvement rectiligne d'accélération  $a_0$  constante, nous avons pour  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  défini par (6.7)

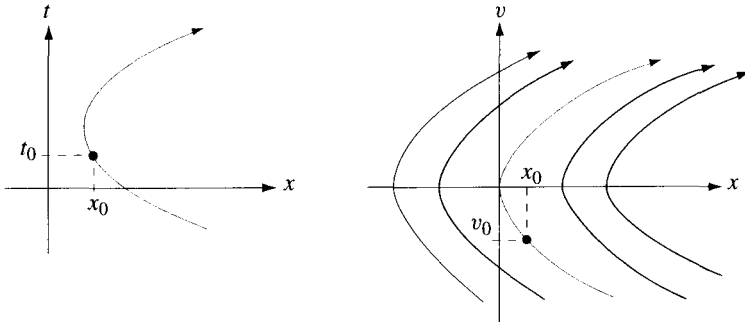
$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}v^2 - a_0x \right) = v \frac{dv}{dt} - a_0 \frac{dx}{dt} = v \left( \frac{dv}{dt} - a_0 \right) = 0$$

et l'on obtient directement  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \text{cste}$ , c'est à dire (6.6).

Nous verrons en dynamique que cette constante du mouvement est, à un facteur près (la masse), l'énergie mécanique du système. Sous-jacente à cette propriété apparaît déjà une super-loi : **la conservation de l'énergie mécanique**.

Conservation de l'énergie mécanique

L'équation (6.5) montre que la ligne d'univers est une parabole dans le plan  $(x, t)$ . De même, de (6.6), les orbites sont des paraboles dans le plan  $(x, v)$ . Pour  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = 0$  l'orbite est la parabole  $v^2 = 2a_0x$  ; les orbites associées à d'autres conditions initiales sont les paraboles obtenues par translation de la parabole  $v^2 = 2a_0x$  parallèlement à  $x$ , propriété associée à l'homogénéité de l'espace (fig. 6.1).



Ligne d'univers et orbite

Fig. 6.1 Ligne d'univers et orbite dans le cas  $a_0 > 0$ .

## 6.2 BALISTIQUE ET MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ

### 6.2.1 Propriétés générales

L'observation de la chute d'un corps sur une table à air inclinée, d'inclinaison  $\theta$ , montre que le mouvement du corps est tel que le vecteur accélération reste constant :

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0 = \text{cste} \quad \text{où } |\mathbf{a}_0| = g \sin \theta.$$

Mouvement  
uniformément  
accélééré

Le mouvement d'un point est dit **mouvement uniformément accéléré** si le vecteur accélération est constant, soit

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0. \quad (6.9)$$

Nous pouvons alors supposer que le mouvement de n'importe quel projectile lancé à la surface de la Terre est un mouvement uniformément accéléré. L'étude des conséquences de (6.9), puis la confrontation de ces conséquences théoriques avec l'observation expérimentale, permettra de vérifier si l'hypothèse (6.9) est acceptable en balistique.

De la condition  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$ , on obtient l'évolution temporelle par intégration :

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{a}_0 \quad \text{implique} \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0(t - t_0) \quad (6.10)$$

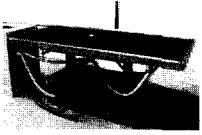


Table à air puis

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(t) \quad \text{implique} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_0(t - t_0)^2 \quad (6.11)$$

où  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  et  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$  sont les *conditions initiales*.

De l'équation (6.11), on déduit la première propriété suivante.

Mouvement plan

Tout mouvement uniformément accéléré est plan, dans le plan défini par le point  $P(t_0)$ , le vecteur vitesse  $\mathbf{v}(t_0)$ , et le vecteur accélération  $\mathbf{a}_0$  (fig. 6.2 a). De plus la trajectoire est une parabole d'axe parallèle à l'accélération.

Pour établir la deuxième partie de cette propriété, introduisons un système d'axes  $Oxy$  dans le plan du mouvement, d'origine  $O = P(t_0)$  et d'axe  $Oy$  parallèle à  $\mathbf{a}_0$  :  $\mathbf{a}_0 = -a_0\mathbf{e}_2$  (c'est la convention introduite en balistique). En projetant (6.11) sur ces axes, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)(t - t_0) \\ y(t) = (v_0 \sin \alpha)(t - t_0) - \frac{1}{2}a_0(t - t_0)^2 \end{cases} \quad (6.12)$$

avec  $\alpha$  l'angle entre  $\mathbf{v}_0$  et l'axe  $Ox$ .



Par conséquent, en éliminant le temps, on arrive à

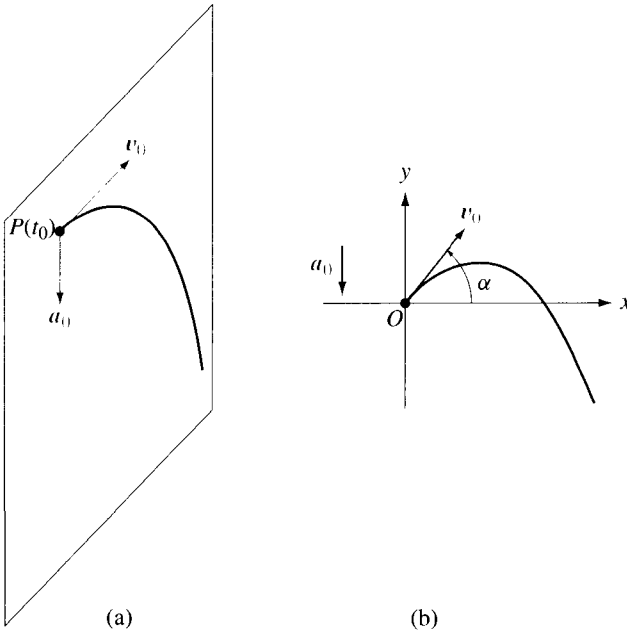
$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{a_0}{\cos^2 \alpha} \frac{x^2}{v_0^2} \quad (6.13)$$

ou encore

Trajectoire

$$y(x) = x \tan \alpha - \frac{1}{2} a_0 (1 + \tan^2 \alpha) \frac{x^2}{v_0^2} \quad (6.14)$$

c'est l'équation intrinsèque d'une parabole d'axe parallèle à  $Oy$  (fig. 6.2 b).



**Fig. 6.2** Trajectoire du mouvement uniformément accéléré : (a) le plan est défini par  $P(t_0)$ ,  $v_0$  et  $a_0$  ; (b) la trajectoire est une parabole.

La confrontation de ce résultat avec l'observation expérimentale montre qu'en première approximation le mouvement d'un corps en chute libre à la surface de la Terre est uniformément accéléré, d'accélération notée  $g$ , dirigée vers le centre de la Terre. Cette approximation est valable pour autant que l'altitude  $h$  soit suffisamment petite par rapport au rayon  $R_T$  de la Terre et que les vitesses soient suffisamment faibles pour que l'on puisse négliger les frottements. De plus, ces observations montrent que l'accélération  $g$  ne dépend pas du corps. L'expérience dite du *tube de Newton* (fig. 6.3 b), suggérée par Galilée et réalisée par Newton, consiste à lâcher une plume et un morceau de plomb dans un tube où l'on a fait le vide ; on observe que les deux corps ont des mouvements identiques.

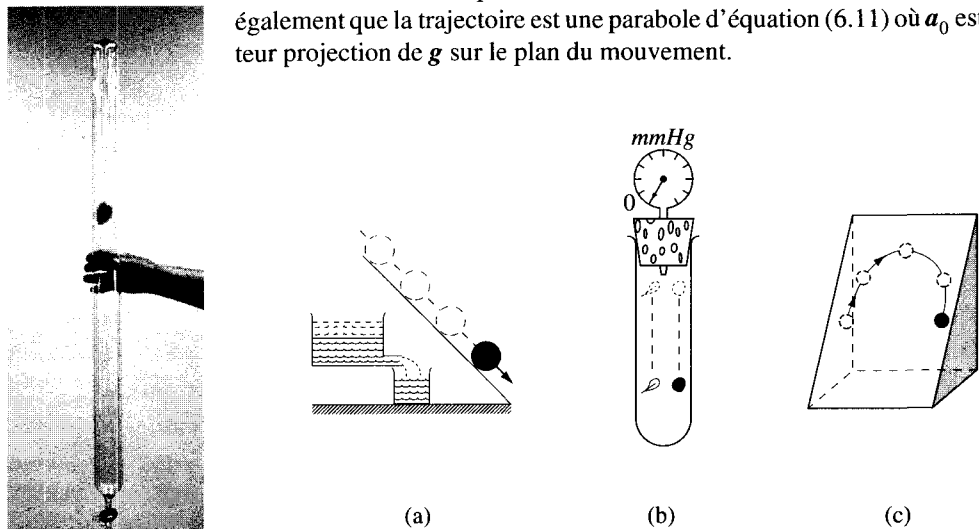
En 1673, pour expliquer le retard pris par une horloge à balancier entre Paris et Cayenne, Huygens arrive à la conclusion que  $g = |g|$  dépend de l'endroit à



**HUYGENS** Christiaan  
Physicien et astronome  
hollandais  
1629-1695

la surface de la Terre. Il en déduit que le poids d'un corps est non seulement lié à la masse de la Terre, mais aussi à la force *centrifuge* associée au mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

Dans le cas d'un corps en chute libre sur une table à air inclinée, on observe également que la trajectoire est une parabole d'équation (6.11) où  $\mathbf{a}_0$  est le vecteur projection de  $\mathbf{g}$  sur le plan du mouvement.



**Fig. 6.3** (a) Expérience de Galilée : le temps est mesuré par le volume de l'eau écoulée ; (b) tube de Newton ; (c) table à air inclinée.

Comme dans le cas du mouvement rectiligne uniformément accéléré, on a la propriété suivante.

La grandeur

Constante du mouvement

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x} \tag{6.15}$$

est une *constante du mouvement*, c'est-à-dire que pour tout  $t$

$$G(t) = G(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = G(t_0)$$

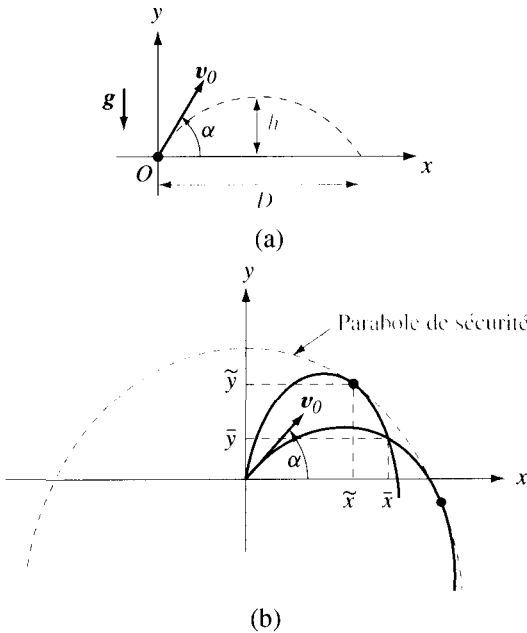
En effet

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}(t)^2 - \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{x}(t) \right) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{a}_0 \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{a}_0 \right) = 0.$$

### 6.2.2 Portée et hauteur maximale, parabole de sécurité

Un projectile est lancé d'un point  $O$  avec une vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  fixée, mais dans une direction arbitraire (fig. 6.4). Nous voulons tout d'abord trouver la portée maximale et la hauteur maximale que l'on peut atteindre avec le projectile. Nous chercherons ensuite la parabole de sécurité, courbe limite entre

les points susceptibles d'être atteints par le projectile (pour un choix approprié de l'angle de tir) et ceux qu'il est impossible d'atteindre.



**Fig. 6.4** (a) Portée  $D$  et hauteur maximale  $h$  ; (b) parabole de sécurité.

Par définition, la **portée**  $D$  (fig. 6.4 a) est la distance horizontale franchie. Soit  $Oxy$  un système d'axes centré à la source ; en utilisant (6.13) avec  $y = 0$  et  $x = D$  on obtient

$$0 = \sin \alpha - \frac{g}{2 \cos \alpha} \frac{D}{v_0^2}$$

c'est-à-dire

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (6.16)$$

En conséquence, la **portée maximale** correspond à un angle  $\alpha$  de  $45^\circ$  et

$$D_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

La **hauteur maximale** s'obtient à partir de la constante du mouvement. Au sommet de la trajectoire la vitesse est horizontale ( $\dot{y} = 0$ ) et (6.15) implique

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + g h = \frac{1}{2} v_0^2 \quad \text{où de (6.12)} \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha.$$

Par conséquent

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad \text{et} \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2} D_{\max}. \quad (6.17)$$

Pour déterminer la parabole de sécurité, cherchons les points  $\bar{P}$  que l'on peut atteindre avec un projectile de vitesse initiale  $v_0$ . L'équation de la trajectoire (6.14) montre que pour atteindre le point  $\bar{P}$  de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$  il faut un angle de tir  $\alpha$  solution de

$$\frac{1}{2} g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \tan^2 \alpha - \bar{x} \tan \alpha + \left( \bar{y} + \frac{1}{2} g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \right) = 0$$

soit

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g \bar{x}} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{g}{v_0^2} \left( 2\bar{y} + g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \right)} \right] \quad (6.18)$$

En conséquence :

- si  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \right) > \bar{y}$  il y a 2 angles de tir ;
- si  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \right) = \bar{y}$  il y a 1 angle de tir ;
- si  $\frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - g \frac{\bar{x}^2}{v_0^2} \right) < \bar{y}$  il n'y a pas de solution.

Ainsi tout point situé au-dessous de la courbe

$$y(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0^2}{g} - g \frac{x^2}{v_0^2} \right) \quad (6.19)$$

Parabole de sécurité

peut être atteint par un projectile de vitesse initiale  $v_0$  selon deux angles de tir. La parabole (6.19) est appelée **parabole de sécurité** (fig. 6.4 b) ; tout point sur la parabole de sécurité peut également être atteint, mais il n'y a qu'un seul angle de tir possible. Finalement il est impossible d'atteindre les points situés au-dessus de la parabole de sécurité.

Remarquons que pour atteindre le point  $(\bar{x}, \bar{y})$  sur la parabole de sécurité, l'angle de tir est donné par

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g \bar{x}}. \quad (6.20)$$

En conclusion pour une vitesse initiale donnée il est impossible de lancer un projectile de manière à ce qu'il passe au-dessus d'un obstacle qui ne se trouve pas au dessous de la parabole de sécurité.

### 6.2.3 Note historique

Le fait que la portée maximale corresponde à un angle de  $45^\circ$  était connu avant Galilée, mais c'est Galilée qui, le premier, en donna une démonstration. C'est aussi Galilée qui découvrit la loi de la chute des corps (6.1).

Huygens est l'un des premiers à avoir remarqué et utilisé la conservation de l'énergie (6.6) ; c'est lui qui a vérifié en particulier la relation  $v = \sqrt{2gh}$  pour un corps en chute libre avec  $v_0 = 0$ .

C'est Jean Bernoulli, l'un des fondateurs de la mécanique analytique, qui introduisit le symbole  $g$  pour l'accélération due à la pesanteur.

La notion d'accélération telle qu'elle apparaît bien simplement dans ce qui précède a nécessité beaucoup d'efforts pour être précisée. C'est finalement Newton qui, en inventant le calcul différentiel et intégral, a permis de passer de (6.1) à (6.3) ou de (6.11) à (6.9) et ainsi d'affirmer que toutes les trajectoires des corps en chute libre sur Terre étaient solution de la seule équation

$$a = g.$$



BERNOULLI Jean  
Mathématicien et  
physicien suisse  
1667-1748

## 6.3 CORPS SUSPENDU À UN RESSORT ET MOUVEMENT OSCILLATOIRE HARMONIQUE

### 6.3.1 Définitions et propriétés

L'observation du mouvement d'une masse suspendue à un ressort (fig. 6.5) montre qu'en l'absence de frottement, et pour de petits déplacements, l'évolution est décrite par l'équation

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta). \quad (6.21)$$

De même l'observation du mouvement d'une tige homogène suspendue en son milieu par deux fils métalliques (pendule de torsion, fig. 6.5) montre que cette évolution est aussi décrite par (6.21) en remplaçant  $x$  par  $\theta$ .

Pendule de torsion

Masse suspendue à un ressort

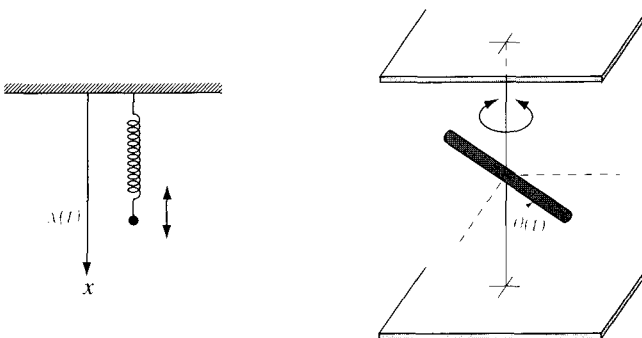


Fig. 6.5 Ressort et pendule de torsion.

On appelle **mouvement oscillatoire harmonique**, tout mouvement dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta),$$

où  $A$ ,  $\omega$  et  $\delta$  sont des constantes ;  $A$  est l'**amplitude**,  $\omega$  la **pulsation** et  $\delta$  le **déphasage** du mouvement.

Remarquons que la variable  $x$  peut être une coordonnée généralisée quelconque, par exemple l'abscisse curviligne ou un angle.

Le mouvement oscillatoire harmonique est ainsi un mouvement périodique, de période  $T$  et de fréquence  $\nu$ , où

Période et fréquence  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$  (6.22)

c'est-à-dire que  $x(t + T) = x(t)$ .

Pour un tel mouvement, on a de (6.21)

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \delta) \quad (6.23)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 x(t) \quad (6.24)$$

En conclusion tout mouvement oscillatoire harmonique est solution de l'équation différentielle

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (6.25)$$

Inversement, au chapitre 7, on montrera que toute solution de (6.25) est de la forme (6.21) avec  $A$  et  $\delta$  définis par les conditions initiales  $(x_0, \dot{x}_0)$ . On peut donc remplacer la définition ci-dessus par la définition équivalente suivante.

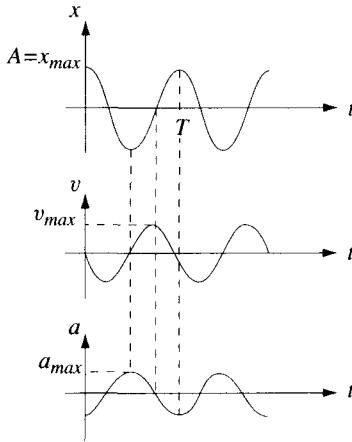
Mouvement oscillatoire harmonique

Un **mouvement oscillatoire harmonique** est un mouvement dont l'évolution est décrite par l'équation différentielle

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

De nouveau c'est l'expression de l'accélération qui définit le type de mouvement.

La figure 6.6 présente les fonctions  $x(t)$ ,  $v(t)$  et  $a(t)$ . On constate en particulier que l'accélération et la position sont extrémales lorsque la vitesse est nulle.



**Fig. 6.6** Évolution du mouvement oscillatoire harmonique.

### 6.3.2 Remarques

En physique on exprime généralement l'évolution temporelle, sous une forme qui fasse apparaître explicitement les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \quad \text{et} \quad v(t=0) = v_0 \quad (6.26)$$

c'est en fait l'expression du déterminisme ("l'état à l'instant  $t = 0$  détermine l'état à tout autre instant").

Des équations (6.21) et (6.23) nous avons

$$x_0 = A \cos \delta, \quad v_0 = -\omega A \sin \delta$$

d'où

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{et} \quad \tan \delta = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (6.27)$$

D'autre part  $\cos(\omega t + \delta) = \cos \omega t \cos \delta - \sin \omega t \sin \delta$  entraîne

$$x(t) = A \cos \delta \cos \omega t - A \sin \delta \sin \omega t$$

d'où

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (6.28)$$

et

$$v(t) = -\omega x_0 \sin \omega t + v_0 \cos \omega t. \quad (6.29)$$

Ce dernier résultat peut s'écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \quad (6.30) \quad \text{Déterminisme}$$

On notera que le déterminant de la matrice est 1.

6.3.3 Loi de conservation

Comme pour le mouvement uniformément accéléré, on a la propriété suivante.

Constante du mouvement

La grandeur

$$G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2 \quad \text{où} \quad v = \dot{x}$$

(6.31)

est une constante du mouvement.

En effet, de (6.25) on a

$$\frac{dG(x, v)}{dt} = v \frac{dv}{dt} + \omega^2 x \frac{dx}{dt} = v(\ddot{x} + \omega^2 x) = 0.$$

Finalement de (6.31), on déduit que les orbites sont des ellipses de demi-axes (fig. 6.7)

$$x_{\max} = \left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad v_{\max} = (v_0^2 + \omega^2 x_0^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.32}$$

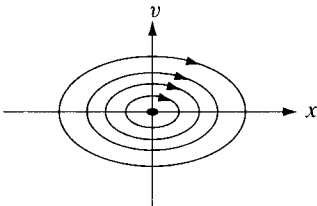


Fig. 6.7 Orbites du mouvement oscillatoire harmonique.

6.3.4 Lemme fondamental

La démarche qui permet de passer d’une équation différentielle telle que (6.3), (6.9) ou (6.25) à une constante du mouvement (6.7), (6.15) ou (6.31) peut être généralisée. Considérons en effet l’équation différentielle

$$\ddot{x} = f(x) \tag{6.33}$$

où  $f$  est une fonction connue de  $x$ .



**Lemme fondamental**

La grandeur

$$G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + U(x) \quad \text{où} \quad v = \dot{x} \quad (6.34) \quad \text{Constante du mouvement}$$

et

$$U(x) = - \int_{\rho}^x d\xi f(\xi) \quad , \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{dU}{dx} = -f, \quad (6.35)$$

est une **constante du mouvement** de l'équation différentielle (6.33).  
(Dans la définition de  $U(x)$ , le nombre  $\rho$  est un nombre arbitrairement choisi, c'est-à-dire que  $U(x)$  est une primitive de  $-f(x)$ ).

Ce lemme signifie que pour toute solution  $x = x(t)$  de (6.33) nous avons  $G(x(t), v(t)) = G(x(0), v(0))$ .

DÉMONSTRATION.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}v^2 + U(x) \right) = v \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = v(\ddot{x} - f(x)).$$

Par conséquent, si  $x(t)$  est solution de (6.33), on a  $\frac{d}{dt}G(t) = 0$ , c'est-à-dire  $G(t) = G(0)$ .

Rappelons les exemples précédents :

$$(6.3) \quad \ddot{x} = a_0 \quad \text{implique} \quad \frac{1}{2}v^2 - a_0x = \text{cste} \quad (6.6)$$

$$(6.25) \quad \ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{implique} \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \text{cste}. \quad (6.31)$$

De même

$$\ddot{x} = \Omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 x^2 = \text{cste} \quad (6.36)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 + \frac{d}{(n-1) \cdot x^{n-1}} = \text{cste} \quad (n \text{ entier} \geq 2) \quad (6.37)$$

$$\ddot{x} = \frac{d}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 - d \ln x = \text{cste}. \quad (6.38)$$

**6.3.5 Illustration : oscillateur électrique**

L'équation de l'oscillateur harmonique (6.25) se rencontre souvent en physique. Par exemple l'évolution de la charge  $q$  sur un condensateur de capacité  $C$ , dans un circuit  $L-C$  formé d'un condensateur  $C$  et d'une self  $L$ , est décrite par une équation identique à (6.25),

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Nous avons ainsi de (6.21)

$$q(t) = A \cos \left( \frac{1}{\sqrt{LC}} t + \delta \right)$$

et la grandeur

$$G(q, i) = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2,$$

avec  $i = dq/dt$ , est constante au cours de l'évolution.

6.4 MOUVEMENT CIRCULAIRE. VITESSE ET ACCÉLÉRATION ANGULAIRES

Le mouvement d'un point est *circulaire* si la trajectoire est un arc de cercle. Prenons des coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire avec pour origine le centre du cercle (fig. 5.8). En posant  $r(t) = R$  dans (5.58) et (5.59), nous obtenons :

$$v = R \dot{\theta} e_{\theta} \tag{6.39}$$

$$a = R \ddot{\theta} e_{\theta} - R \dot{\theta}^2 e_r. \tag{6.40}$$

Vitesse angulaire

On introduit la *vitesse angulaire* (scalaire)  $\omega$  définie par

$$\omega = \dot{\theta} \tag{6.41}$$

et le *vecteur vitesse angulaire*  $\omega$  défini par

$$\omega = \dot{\theta} e_r \wedge e_{\theta}. \tag{6.42}$$

La grandeur  $\omega$  est un pseudo-vecteur, de norme  $|\dot{\theta}|$ , de direction perpendiculaire au plan du mouvement, et de sens défini par la règle du tire-bouchon, associé au mouvement (fig. 6.8). Nous avons ainsi

$$v = \omega \wedge x \quad \text{où} \quad x = OP, \quad \text{et} \quad \omega \cdot x = 0. \tag{6.43}$$

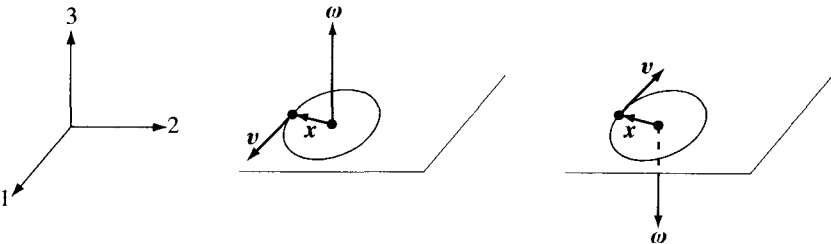
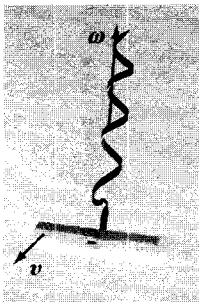


Fig. 6.8 Définition de la vitesse angulaire (système d'axes orienté de façon directe).

Remarquons que l'accélération (6.40) peut également se déduire par dérivation de (6.43) :

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x})$$

d'où

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{x} - \omega^2 \mathbf{x} = \dot{\omega} R \mathbf{e}_\theta - \omega^2 R \mathbf{e}_r. \quad (6.44)$$

Le vecteur  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  est appelé **vecteur accélération angulaire** et  $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$  est appelé **accélération angulaire**.

En résumé

$$\begin{aligned} v_r &= 0 & v_\theta &= \omega R \\ a_r &= -\omega^2 R & a_\theta &= \dot{\omega} R \end{aligned} \quad (6.45)$$

Pour un mouvement circulaire **et uniforme** on a

Mouvement  
circulaire uniforme

$$v(t) = v_0 = \omega R \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{R} = \omega_0$$

ce qui donne l'évolution

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \theta(t_0).$$

En introduisant un système d'axes cartésiens dont l'origine est le centre de la trajectoire, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = R \cos[\theta_0 + \omega_0(t - t_0)] \\ y(t) = R \sin[\theta_0 + \omega_0(t - t_0)] \end{cases}$$

En conclusion, la projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un axe situé dans son plan est un mouvement oscillatoire harmonique.

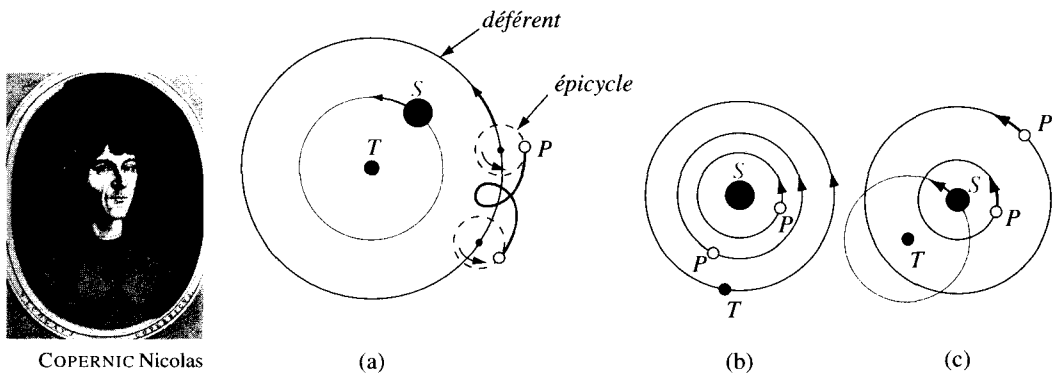
## 6.5 MOUVEMENT DES PLANÈTES AUTOUR DU SOLEIL ET MOUVEMENT CENTRAL

### 6.5.1 Aperçu historique et lois de Kepler

L'observation et l'étude du mouvement des corps célestes a passionné les hommes depuis l'Antiquité. En effet, ce problème est intimement lié à celui de la place de l'homme dans l'Univers.

La première théorie développée par les Grecs *Eudoxe* (405-335 av. J.-C.), puis *Aristote* (384-322 av. J.-C.), affirmait que le Soleil et les planètes évoluent sur des sphères concentriques par rapport à la Terre. *Aristarque* (310-230 av. J.-C.) proposa un modèle héliocentrique dans lequel la Terre et les autres planètes se déplacent sur des orbites circulaires dont le Soleil, immobile, serait le centre ; ses idées étaient toutefois en contradiction avec la tradition de son époque et il ne parvint pas à les imposer.

*Ptolémée* (~ 120 apr. J.-C.), à l'école d'Alexandrie, développa une théorie dans laquelle la Terre est immobile et le Soleil se déplace à vitesse constante sur un cercle dont le centre est légèrement déplacé par rapport à la Terre (fig. 6.9 a). Le mouvement des planètes s'effectue à vitesse constante sur des cercles (épicycles) dont le centre se déplace à vitesse constante sur un autre cercle (déférent) autour de la Terre. La trajectoire résultante est appelée *épicycloïde*. Cette théorie était basée sur les travaux d'*Hipparque* (~ 140 av. J.-C.), astronome grec à qui l'on doit la mise en évidence de la **précession des équinoxes** (c'est-à-dire le fait que la position du Soleil à l'équinoxe de printemps se déplace par rapport aux étoiles de  $1,5^\circ$  par siècle, (§ 14.9.4)).



**Fig. 6.9** Modèles du système solaire : (a) Ptolémée ; (b) Copernic ; (c) Tycho Brahé.

En Europe, pendant tout le Moyen Age et jusqu'au XVI<sup>e</sup> siècle, on s'appuyait sur la théorie géocentrique d'Aristote. C'est *Copernic* (fig. 6.9 b) qui remet en question cette description ; il réalisa que le modèle héliocentrique d'Aristarque était plus simple et permettait d'expliquer les mouvements observés. Il publia ses travaux dans un ouvrage important, *De Revolutionibus Orbitum Celestium* (1543), qui marquera le début de l'astronomie moderne et sera un tournant essentiel de la pensée humaine : désormais la Terre ne sera plus le centre de l'Univers, mais une planète ordinaire, comme les autres, gravitant autour du soleil.

Quelques années plus tard, pour réconcilier les vues de l'Église avec celles des savants, *Tycho Brahé* (fig. 6.9 c) introduit un modèle intermédiaire entre celui de Copernic et celui de Ptolémée. Dans ce système le Soleil tourne autour de la Terre immobile, tandis que les autres planètes tournent sur des cercles autour du Soleil.



COPERNIC Nicolas  
Astronome polonais  
1473-1543



BRAHÉ Tycho  
Astronome danois  
1546-1601

Il faudra attendre *Kepler* pour que les idées de Copernic puissent s'imposer. Mettant à profit les suggestions de Copernic, il poursuit l'analyse du mouvement de la planète Mars commencée par son maître et ami Tycho Brahé. En admettant que la trajectoire de Mars est un cercle, il remarque que le Soleil ne peut pas être au centre de ce cercle, et que même si on déplace le Soleil par rapport à ce centre il reste encore un écart de 8' entre les observations de Tycho Brahé et les prévisions théoriques. Ayant une grande confiance dans les observations de son maître, il devenait nécessaire de connaître exactement le mouvement de la Terre si l'on voulait justifier la théorie de Copernic.

En supposant que la trajectoire de la Terre est circulaire avec le Soleil près du centre, il découvre que le rayon Soleil-Terre balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux ; c'est la *loi des aires*, aujourd'hui appelée deuxième loi de Kepler. Introduisant ensuite l'hypothèse que le mouvement de Mars obéit à la même loi des aires il conclut que la trajectoire de Mars est une ellipse dont le Soleil occupe un foyer : c'est la première loi de Kepler qui, historiquement, fut découverte après la deuxième. Ces résultats, obtenus en 1604 furent publiés en 1609 dans *Astronomia Nova*. En 1618 il trouve la troisième loi qui porte son nom et qui fut publiée en 1621 dans l'*Epitome Astronomiae Copernicanae*. Pour apprécier la précision des travaux de Kepler, mentionnons que le rapport  $b/a$  des axes de l'ellipse est 0,99986 dans le cas de la Terre et 0,996 pour Mars.

Loi des aires

Quelle précision !

## Lois de Kepler

**Première loi.** Les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

**Deuxième loi.** Le rayon-vecteur du Soleil à la planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

**Troisième loi.** Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels au cube des grands axes, c'est-à-dire

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

Nous allons montrer comment, des deux premières lois, Kepler aurait pu conclure qu'à tout instant le vecteur accélération de chaque planète est dirigé vers le Soleil, de norme inversement proportionnelle au carré de la distance Soleil-Planète. De plus il aurait pu déduire de la 3<sup>e</sup> loi que la constante de proportionnalité ne dépend pas des planètes, c'est-à-dire que l'accélération de chaque planète est donnée par

$$\mathbf{a} = -\kappa_S \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (6.46)$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{SP}$  est le vecteur Soleil-Planète et  $\kappa_S$  est une constante dont la valeur numérique est  $\kappa_S = 1.327 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ .

Mais pour cette démonstration Kepler aurait eu besoin du calcul différentiel qui ne sera inventé qu'un demi siècle plus tard, par Newton, précisément pour expliquer le mouvement des planètes.



KEPLER Johannes  
Astronome allemand  
1571-1630

### 6.5.2 Des lois de Kepler au mouvement central

Partant de la 2<sup>e</sup> loi de Kepler nous voulons montrer pour commencer que le vecteur accélération de la planète  $P$  est parallèle au vecteur soleil-planète  $SP$ .

Remarquons pour commencer qu'il suit de la 1<sup>re</sup> loi que le mouvement est dans un plan contenant le Soleil. D'autre part, l'aire de la surface définie par les rayons-vecteurs  $SP(t_1)$ ,  $SP(t_2)$  et la trajectoire s'exprime par (la limite de) la somme des aires des triangles définis par la courbe polygonale approximant la trajectoire (fig. 6.10).

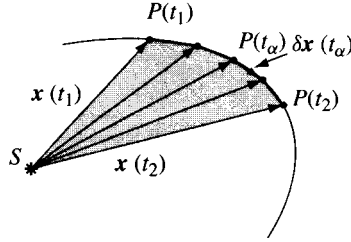


Fig. 6.10 Aire d'une surface plane.

Par conséquent, l'aire balayée par le rayon-vecteur  $SP(t) = x(t)$  pendant l'intervalle de temps  $(t_1, t_2)$  est donnée par

$$A_S(t_1, t_2) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} |x(t_{\alpha}) \wedge \delta x(t_{\alpha})|$$

où  $\delta x(t_{\alpha}) = x(t_{\alpha} + \delta t) - x(t_{\alpha}) = v_m(t_{\alpha})\delta t$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} A_S(t_1, t_2) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{1}{2} |x(t_{\alpha}) \wedge v_m(t_{\alpha})| \delta t \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt |x(t) \wedge v(t)|. \end{aligned} \quad (6.47)$$

De la 2<sup>e</sup> loi de Kepler on conclut que pour tout  $\Delta t$ ,  $A(t, t + \Delta t)$  ne dépend pas de  $t$ . Par conséquent il découle de (6.47) que la *vitesse aréolaire*, définie par

$$\dot{A}_S(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} A(t, t + \delta t) = \frac{1}{2} |x(t) \wedge v(t)|, \quad (6.48)$$

ne dépend pas de  $t$ . En conclusion, la 2<sup>e</sup> loi de Kepler conduit au résultat remarquable

$$|x(t) \wedge v(t)| = |C| \quad (6.49)$$

où  $|C|$  est une constante qui ne dépend que de la planète  $P$ . Comme le mouvement de  $P$  est plan et s'effectue toujours dans le même sens autour du Soleil, ce résultat remarquable peut s'exprimer sous forme vectorielle comme suit.

Pour n'importe quelle planète  $P$ ,

Loi des aires

$$\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{v}(t) = \mathbf{C}, \quad \text{où} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{SP}_t, \quad (6.50)$$

et  $\mathbf{C}$  est un vecteur constant (qui dépend de  $P$ ), perpendiculaire au plan de la trajectoire, égal à  $\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0$ .

Finalement en dérivant (6.50) par rapport au temps on obtient une autre propriété fondamentale :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0.$$

En conclusion, à tout instant le vecteur accélération de la planète  $P$  est parallèle au vecteur-lieu  $\mathbf{SP}_t$  (fig. 6.10).

Ce dernier résultat nous conduit à introduire la définition suivante.

Soit  $O$  un point fixé dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Le mouvement d'un point  $P$  est dit **central de centre  $O$**  si à tout instant le vecteur accélération  $\mathbf{a}(t)$  est parallèle au vecteur-lieu  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{OP}_t$  (fig. 6.11).

Mouvement central

En particulier le mouvement des planètes est un mouvement central dont le Soleil est le centre.

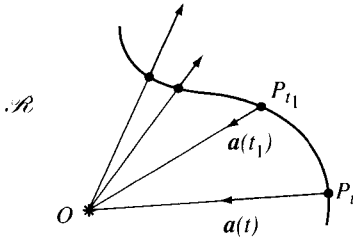


Fig. 6.11 Mouvement central de centre  $O$ .

### 6.5.3 Propriétés générales du mouvement central

#### Théorème

1. Le mouvement d'un point est central de centre  $O$  si et seulement si  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$  est une constante du mouvement.
2. Tout mouvement central de centre  $O$  est plan, dans le plan défini par  $O$  et les conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ .

En effet, par définition du mouvement central de centre  $O$  on a

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v})$$

d'où

$$\mathbf{x}(t) \wedge \mathbf{v}(t) = \mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0. \quad (6.51)$$

Inversement si (6.51) est vérifiée pour tout  $t$ , alors  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} = 0$  et le mouvement est central de centre  $O$ .

Finalement de (6.51),

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_0 \wedge \mathbf{v}_0) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \equiv 0$$

et les vecteurs  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  sont coplanaires.

Le mouvement central étant plan, on peut le décrire au moyen des coordonnées polaires  $(r(t), \theta(t))$ , d'origine  $O$ . De (6.51) et de  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ , on obtient  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = r^2\dot{\theta}\mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta$ . Par conséquent

$$r^2\dot{\theta} = C = \text{cste}. \quad (6.52)$$

### Propriétés

1. Pour tout mouvement central de centre  $O$ , la grandeur  $r^2\dot{\theta}$  est une constante  $C$  appelée *constante des aires* et, de (6.48), on a  $|C| = 2\dot{A}_0$ .

De plus, (6.52) et (6.55) impliquent

$$a_r = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \quad (6.53)$$

2. Le mouvement d'un point  $P$  est central de centre  $O$  si et seulement si il est plan avec  $r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ , où  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires d'origine  $O$  dans le plan du mouvement. (Cette dernière propriété est une conséquence immédiate des propriétés précédentes).
3. Un mouvement plan est central de centre  $O$  si et seulement si la *loi des aires* est vérifiée par rapport à  $O$ , c'est-à-dire si le rayon-vecteur  $\mathbf{OP}_t$  balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux et le signe de  $\dot{\theta}$  est constant. De plus, si le mouvement est périodique, de période  $T$ , on a

$$|C| = 2\dot{A}_0 = 2\frac{S}{T} \quad (6.54)$$

où  $S$  est l'aire de la surface limitée par la trajectoire. (C'est une conséquence de (6.48) et de la propriété 2).

### Remarques

- En dynamique newtonienne, après avoir défini la masse d'inertie  $m$ , nous introduisons le moment cinétique  $\mathbf{L}_O = \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v}$  qui est l'une des grandeurs fondamentales de la physique. Du théorème précédent découle la *loi de conservation du moment cinétique*, valable pour tout mouvement central.



- Les conditions nécessaires et suffisantes exprimées dans les propriétés ci-dessus doivent être considérées de deux manières :

- point de vue expérimental (inductif)* : on observe que le mouvement est plan et que la loi des aires est satisfaite ; on peut alors conclure que le mouvement est central ;
- point de vue théorique (déductif)* : on sait, par l'analyse des forces, que le mouvement est central ; on peut alors conclure que le mouvement sera plan et que  $r^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement (point de vue développé au chapitre 10).

#### 6.5.4 Équation de la trajectoire : formule de Binet

De l'expression de l'accélération en coordonnées polaires (d'origine  $O$ ), soit  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$ , avec (5.59)

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases} \quad (6.55)$$

on voit que la définition du mouvement central,  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r$ , implique

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Cette dernière équation possède une intégrale première (sect. 7.2) qui n'est rien d'autre que l'équation obtenue au paragraphe précédent,

$$r^2\dot{\theta} = C.$$

En effet  $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = r(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$ .

Afin de trouver l'équation intrinsèque de la trajectoire, on élimine le temps. De la relation  $r^2\dot{\theta} = C$ , on a

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (6.56)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right)$$

Finalement en introduisant  $\ddot{r}$  dans l'expression de  $a_r$  (6.53) on obtient

#### Formule de Binet

Pour tout mouvement central,

Formule de Binet

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]. \quad (6.57)$$

Connaissant la trajectoire  $r = r(\theta)$  et la constante des aires  $C$ , cette formule permet de calculer l'accélération radiale  $a_r = a_r(r, \theta)$  et le vecteur accélération  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r$ . On peut donc déduire de l'observation de la trajectoire et de la

constante des aires (1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> loi de Kepler) l'expression de l'accélération qu'il serait très difficile de mesurer directement. Inversement, connaissant l'accélération d'un mouvement central, la formule de Binet permet de calculer la trajectoire (§ 6.6.2 et sec. 6.9).

## 6.6 MOUVEMENT CENTRAL EN $r^{-2}$

### 6.6.1 Coniques et coordonnées polaires

Une conique est une courbe plane définie géométriquement par le lieu des points  $P$  tels que le rapport des distances à un point fixé  $O$  (= foyer) et à une droite fixée  $\Delta$  (= directrice) est constant ; la valeur de ce rapport est appelé l'**excentricité**, c'est-à-dire (fig. 6.12)

$$e = \text{excentricité} \quad \frac{PO}{PQ} = e. \quad (6.58)$$

$\Delta$  = directrice Cherchons pour commencer l'équation de la conique  $r = r(\theta)$  en coordonnées polaires, d'origine le foyer et d'axe perpendiculaire à la directrice.

Comme on le voit sur la figure 6.12, si la conique entoure le foyer on a

$$e = \frac{PO}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos \theta} \quad \text{soit} \quad r(1 + e \cos \theta) = ed$$

ce qui donne, en introduisant  $p = ed$ , l'équation de la conique

$$\text{Équation d'une conique en coordonnées polaires} \quad \frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta. \quad (6.59)$$

Pour la branche d'hyperbole qui n'entoure pas le foyer nous obtenons de la même manière

$$\frac{p}{r} = -1 + e \cos \theta. \quad (6.60)$$

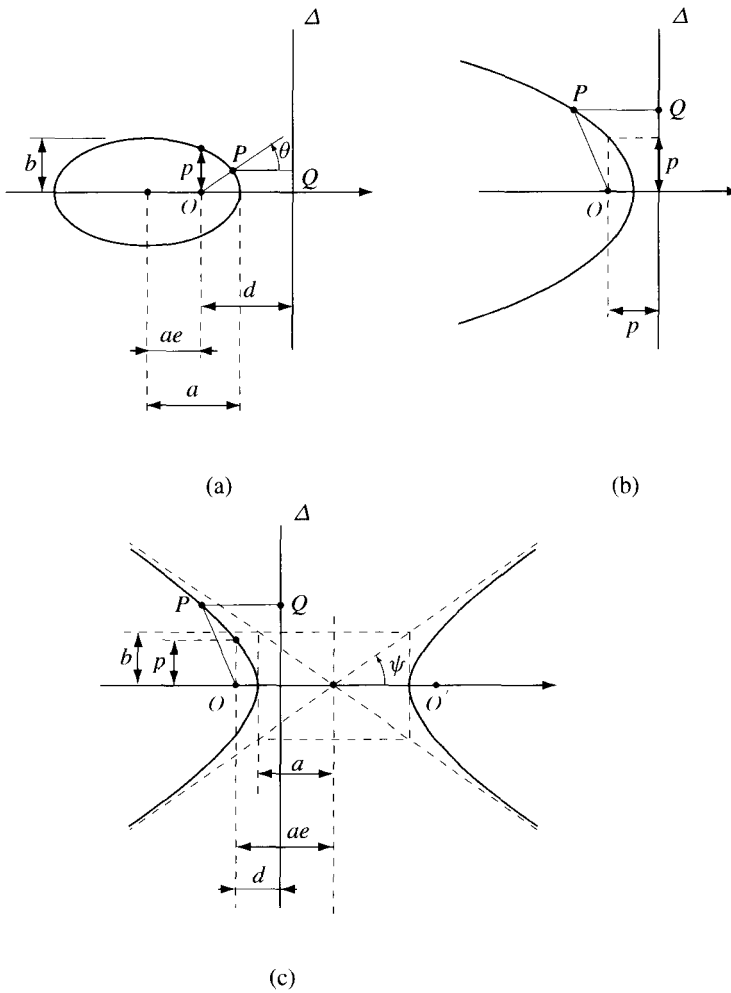
La conique est ainsi définie par deux paramètres : soit l'**excentricité**  $e$  et le **paramètre**  $p$ , soit le **demi-grand axe**  $a$  et le **demi-petit axe**  $b$  (fig. 6.12).

Les demi-axes sont reliés aux paramètres  $e$  et  $p$  par les formules

$$a = \frac{p}{|1 - e^2|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}; \quad (6.61)$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e^2 = 1 \mp \frac{b^2}{a^2}; \quad (6.62)$$

le signe supérieur (−) correspond au cas de l'ellipse et le signe inférieur (+) au cas de l'hyperbole.



**Fig. 6.12** Coniques dont  $O$  est le foyer : (a) ellipse ; (b) parabole ; (c) hyperbole.

Les valeurs extrémales de  $r$  sont ainsi

$$r_{\min} = a(1 - e) \quad \text{et} \quad r_{\max} = a(1 + e). \quad (6.63)$$

L'excentricité  $e$  définit le genre de la conique :

- $e = 0$       cercle ;
- $0 < e < 1$     ellipse ;
- $e = 1$       parabole ;
- $1 < e < \infty$    hyperbole ;
- $e = \infty$       droite.

Ellipse

Parabole

Hyperbole

Dans le cas de l'hyperbole, le demi axe  $b$  est égal à la distance de  $O$  à l'asymptote, et l'angle  $\psi$  entre l'asymptote et l'axe est donné par

$$\tan \psi = \frac{b}{a}. \quad (6.64)$$

### 6.6.2 Propriétés du mouvement en $r^{-2}$

#### Théorème 1. Trajectoire

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre  $O$  est une *conique* dont  $O$  est le *foyer*, alors l'accélération est en  $r^{-2}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (\mathbf{x}(t) = \mathbf{OP}_t) \quad (6.65)$$

où  $\kappa$  est une constante reliée à la constante des aires  $C$ , au demi-grand axe  $a$  et au demi-petit axe  $b$  de la conique, par la formule

$$|\kappa| = C^2 \frac{a}{b^2}. \quad (6.66)$$

De plus si la conique entoure le point  $O$ ,  $\kappa$  est positif : c'est le cas *attractif* ; si la conique, n'entoure pas  $O$ ,  $\kappa$  est négatif, c'est le cas *répulsif*.

DÉMONSTRATION. Prenons pour commencer le cas de l'ellipse. De la formule de Binet (6.57) et de l'équation de la trajectoire (6.59) on a

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left( -\frac{e}{p} \cos \theta + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) = -\frac{C^2}{p} \frac{1}{r^2},$$

d'où

$$a_r = -\frac{\kappa}{r^2} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{C^2}{p} = C^2 \frac{a}{b^2} > 0. \quad (6.67)$$

Dans le cas de l'hyperbole qui n'entoure pas le foyer, l'équation de la trajectoire (6.60) implique

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left( -\frac{e}{p} \cos \theta + \frac{-1 + e \cos \theta}{p} \right) = \frac{C^2}{p} \frac{1}{r^2},$$

d'où

$$a_r = -\frac{\kappa}{r^2} \quad \text{avec} \quad \kappa = -\frac{C^2}{p} = -C^2 \frac{a}{b^2} < 0. \quad (6.68)$$

**Théorème 2. Réciproque**

Si l'évolution d'un point est telle que

$$\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

où  $\kappa$  est une constante, alors le mouvement est central de centre  $O$ , et la trajectoire est une conique dont  $O$  est le foyer.

DÉMONSTRATION. Si  $\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ , alors par définition, nous savons que le mouvement est central, donc plan et  $r^2 \dot{\theta} = C$  (§ 6.5.3); en utilisant la formule de Binet (6.57) on a

$$\kappa = C^2 \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]. \quad (6.69)$$

Introduisons la variable  $u$  définie par

$$u = \frac{1}{r} - \frac{\kappa}{C^2},$$

l'équation (6.69) devient :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u,$$

d'où  $u(\theta) = A \cos(\theta + \delta)$ .

On peut toujours choisir l'axe polaire de façon telle que  $\delta = 0$ , ce qui donne

$$\frac{1}{r} = \frac{\kappa}{C^2} + A \cos \theta.$$

La trajectoire est ainsi une conique dont l'origine est l'un des foyers, de paramètres

$$p = \frac{C^2}{|\kappa|} \quad \text{et} \quad e = \frac{|A| C^2}{|\kappa|}.$$

**Théorème 3. Période**

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre  $O$  est une ellipse de demi-grand axe  $a$  dont  $O$  est le foyer, le mouvement est périodique, de période

$$T = 2\pi \sqrt{a^3 / \kappa}. \quad (6.70)$$

DÉMONSTRATION. Dans le cas où la trajectoire est une ellipse, (6.54) et (6.66) impliquent

$$|C|^2 = \left( \frac{2\pi ab}{T} \right)^2 = \kappa \frac{b^2}{a},$$

d'où

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{\kappa} a^3.$$

### 6.6.3 Mouvement central en $r^{-2}$ dans la nature

Conséquence de la  
3<sup>e</sup> loi de Kepler

Les hypothèses des théorèmes 1 et 3 sont les conditions exprimées par les deux premières lois de Kepler. On peut donc conclure que le mouvement de la planète  $P$  autour du Soleil est un mouvement central d'accélération  $a_r = -\kappa^{(P)} r^{-2}$ . D'autre part, de la 3<sup>e</sup> loi de Kepler et de (6.70) on conclut que le coefficient  $\kappa^{(P)}$  est le même pour toutes les planètes, égal à  $\kappa_S$  (6.46).

Plus généralement, nous verrons que l'accélération d'un point matériel  $P$  soumis à l'action d'un point matériel  $O$  de masse  $M$  immobile est donnée par

$$\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{avec} \quad \kappa = GM, \quad \mathbf{x} = \overrightarrow{OP}$$

où  $G$  est une constante universelle positive (sect. 3.3 et §12.1.2).

De même l'accélération d'une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$ , soumise à l'action d'une charge ponctuelle  $Q$  immobile est donnée par

$$\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{m}$$

où  $\epsilon_0$  est une constante universelle positive (sect. 3.3 et §12.2.1).

Ainsi deux des quatre forces fondamentales de la nature conduisent à des mouvements centraux en  $r^{-2}$ .

### 6.6.4 Constantes du mouvement

La vitesse aréolaire nous a déjà donné une première constante du mouvement

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{C} \quad \text{soit} \quad r^2 \dot{\theta} = C. \quad (6.71)$$

Le lemme fondamental (§ 6.3.4) nous en fournit une seconde.

**Théorème 4. Constante du mouvement**

Si  $\mathbf{a} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ , où  $\kappa$  est une constante, la grandeur

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{\kappa}{|\mathbf{x}|} \quad (6.72)$$

est une constante du mouvement :

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 - \frac{\kappa}{|\mathbf{x}|} = K. \quad (6.73)$$

La valeur absolue  $|K|$  est reliée au demi-grand axe et à la constante  $\kappa$  par

$$|K| = \frac{|\kappa|}{2a} \quad (6.74)$$

et le signe de  $K$  détermine le genre de la conique :

- si  $K$  est *positif*, la trajectoire est une *hyperbole* ;
- si  $K$  est *nul*, la trajectoire est une *parabole* ;
- si  $K$  est *négatif*, la trajectoire est une *ellipse*.

En particulier dans le cas répulsif ( $\kappa < 0$ ),  $K$  est non négatif et la trajectoire est soit une parabole, soit une hyperbole.

DÉMONSTRATION. De (6.53) et (6.65) on a

$$\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{\kappa}{r^2}$$

et le lemme fondamental (§ 6.3.4) implique

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r} = K. \quad (6.75)$$

Ainsi de  $r^2 \dot{\theta} = C$ , (6.75) et  $\mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$  on conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Finalement en introduisant (6.56), soit

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{Ce}{p} \sin \theta$$

dans (6.75), on a

$$K = \frac{1}{2} \left[ \frac{C^2 e^2}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{C^2}{p^2} (\pm 1 + e \cos \theta)^2 \mp 2 \frac{C^2}{p^2} (\pm 1 + e \cos \theta) \right]$$

d'où

$$K = \frac{C^2}{2p^2} (e^2 - 1).$$

Ainsi le signe de  $K$  détermine le genre de la conique ; de plus (6.62) et (6.66) impliquent

$$|K| = \frac{C^2}{2p^2} |e^2 - 1| = \frac{|\kappa|}{2a}.$$

En conclusion le mouvement central possède deux constantes du mouvement données par  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$  et  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Nous verrons qu'elles correspondent aux deux grandeurs fondamentales de la physique, le *moment cinétique*  $L_0 = \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v}$  et l'*énergie*  $E = mG(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  : il faudra s'en souvenir !

**Méthode** Connaissant la constante  $\kappa$  et les conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ , on trouve les constantes du mouvement  $C$  et  $K$  à partir de (6.71) et (6.73), puis les paramètres de la trajectoire au moyen de (6.66) et (6.74). Inversement, connaissant  $\kappa$  et les paramètres désirés pour la trajectoire (orbite d'un satellite par exemple), les mêmes formules permettent de calculer les conditions initiales.

### 6.6.5 Analyse qualitative du mouvement. Orbites dans l'espace de phase

On peut facilement étudier l'allure générale des solutions de l'équation du mouvement

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (\text{où } \kappa \text{ est une constante})$$

pour différentes conditions initiales  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ , en procédant de la façon suivante. L'équation (6.75) peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + U(r) = K \quad \text{avec} \quad U(r) = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r}. \quad (6.76)$$

Analyse qualitative  
du mouvement

On va choisir une valeur de  $C$  (nulle ou différente de zéro) et étudier l'allure qualitative des orbites dans l'espace  $(r, \dot{r})$  pour différentes valeurs de  $K$ . Pour cela on commence par dessiner la fonction  $U(r)$  (fig. 6.13 et 6.14). Comme  $K - U(r) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 \geq 0$  les valeurs de  $K$  possibles sont supérieures ou égales au minimum de  $U(r)$ . De plus pour une valeur de  $K$  donnée, les valeurs de  $r$  sont limitées par la condition  $K - U(r) \geq 0$  et nous voyons que  $\dot{r} = 0$  si et seulement si  $U(r) = K$ . Finalement  $|\dot{r}|$  augmente si  $K - U(r)$  augmente et  $|\dot{r}|$  diminue si  $K - U(r)$  diminue.

Ces remarques permettent d'esquisser l'allure des orbites dans le plan  $(r, v_r = \dot{r})$  à partir du graphe de la fonction  $U(r)$  (fig. 6.13 et fig. 6.14).

Les valeurs de  $r$  pour lesquelles  $\dot{r} = 0$  sont données par  $U(r) = K$  soit :

$$r_{\min}^{\max} = \frac{1}{2K} \left( -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 + 2KC^2} \right) \quad (6.77)$$

où l'on doit se souvenir qu'en coordonnées polaires  $r$  est positif !



Tout mouvement tel que  $r(t)$  reste borné pour tout  $t$  est appelé *état lié* ;  
dans le cas contraire c'est un *état de diffusion*.

État lié  
État de diffusion

L'allure exacte des orbites est donnée par

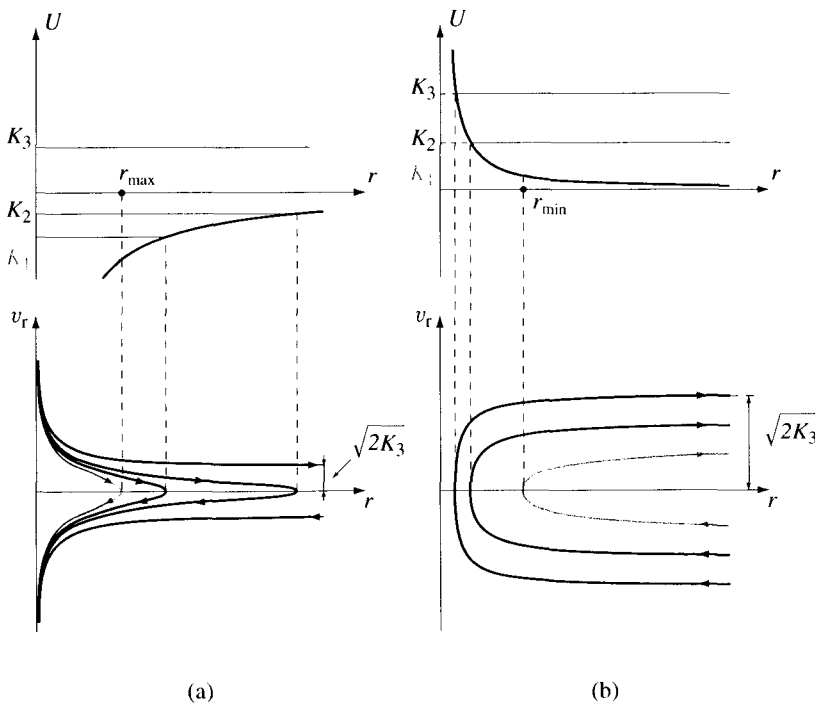
$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(K - U(r))} \quad \text{avec} \quad U(r) = \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\kappa}{r}. \quad (6.78)$$

Si  $C = 0$ , soit  $r^2\dot{\theta} = 0$ , on a  $\theta(t) = \theta_0$  et le mouvement est rectiligne  $C = 0$   
d'axe passant par l'origine. La figure 6.13 donne l'allure qualitative des orbites  
dédiées de l'allure du graphe  $U(r)$ , pour le cas attractif ( $\kappa > 0$ ) et pour le cas  
répulsif ( $\kappa < 0$ ). Des courbes  $U(r)$ , on déduit que  $\dot{r} = 0$  n'est possible que  
pour  $K < 0$  dans le cas attractif et pour  $K > 0$  dans le cas répulsif. De (6.77)  
avec  $C = 0$ , on obtient les valeurs de  $r$  correspondant à  $\dot{r} = 0$ , soit

$$r = -\frac{\kappa}{K} \quad \text{avec } r \text{ défini positif.}$$

L'orbite exacte est donnée par (6.78) :

$$\dot{r} = \pm \sqrt{2\left(K + \frac{\kappa}{r}\right)}.$$



**Fig. 6.13** Orbites dans le cas  $C = 0$  : (a) cas attractif ( $\kappa > 0$ ) ; (b) cas répulsif ( $\kappa < 0$ )  
( $r_{\max}$  et  $r_{\min}$  correspondent à la constante  $K_1$ ).

Si  $C \neq 0$  il découle des constantes du mouvement (6.71) et (6.73) que le point  $P$  tourne toujours dans le même sens autour de l'origine ( $\text{sign } \dot{\theta} = \text{sign } C$ ) et que les vitesses angulaire et scalaire augmentent lorsque  $r$  diminue. L'allure qualitative des orbites s'obtient à nouveau au moyen du graphe  $U(r)$  (fig. 6.14).

$C \neq 0$  Dans le cas attractif ( $\kappa > 0$ ) la fonction  $U$  possède un minimum (fig. 6.14 a)  
 $\kappa > 0$  en

$$r_0 = \frac{C^2}{\kappa}. \quad (6.79)$$

Pour la valeur minimale de  $K$ , soit

$$K \text{ minimum} \quad K_0 = U(r_0) = -\frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{C^2} \quad (6.80)$$

le mouvement est circulaire uniforme, de rayon  $r_0$ , de vitesse

$$v_0 = \frac{C}{r_0} = \sqrt{\frac{\kappa}{r_0}} \quad (6.81)$$

et de période

$$T = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{\kappa}}. \quad (6.82)$$

On remarquera que ces mêmes relations s'obtiennent plus simplement à partir de la condition  $r(t) = r_0$  qui implique

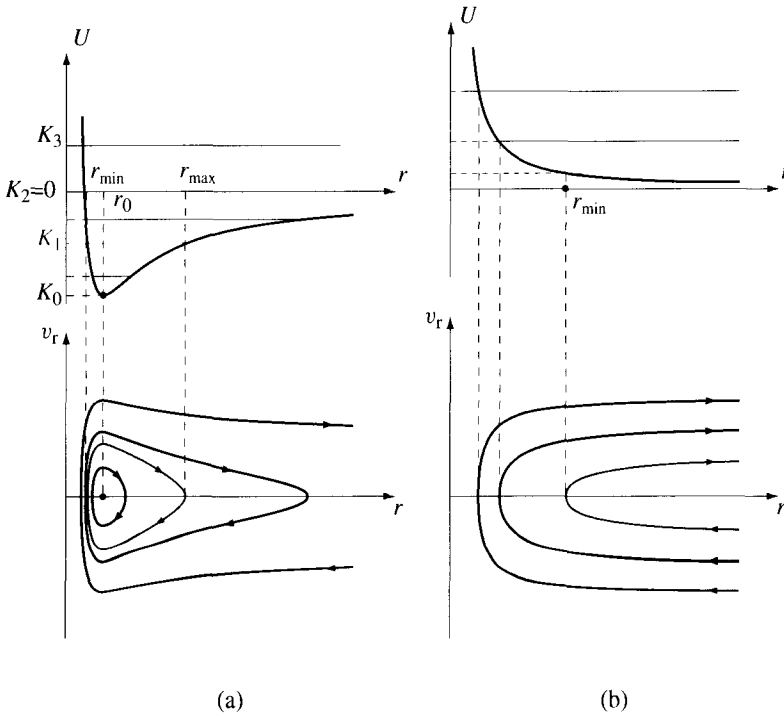
$$a_r = -\frac{v_0^2}{r_0} = -\kappa \frac{1}{r_0^2}.$$

$K_0 < K < 0$  Pour  $K_0 < K < 0$ ,  $r$  varie entre  $r_{\min}$  (= périégée) et  $r_{\max}$  (= apogée) donnés  
la trajectoire est par (6.77) : c'est un état lié. De (6.73) la vitesse scalaire est maximale en  $r_{\min}$ ,  
une ellipse minimale en  $r_{\max}$ , et (6.63) entraîne

$$\frac{v_{\min}}{v_{\max}} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{1-e}{1+e}. \quad (6.83)$$

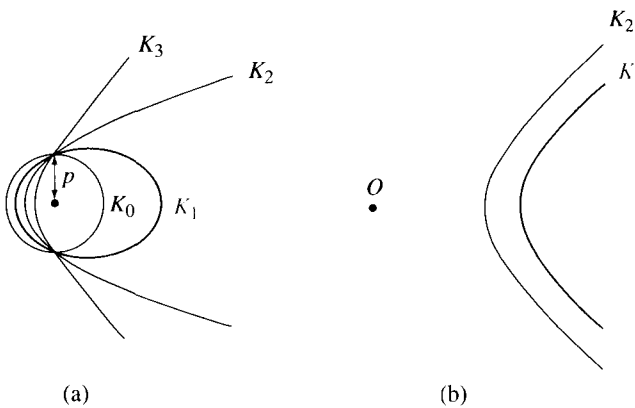
$K \geq 0$  : état de Pour  $K \geq 0$ , la trajectoire est à l'extérieur d'un cercle de rayon  $r_{\min}$  donné  
diffusion par (6.77) et va à l'infini : c'est un état de diffusion.

$C \neq 0$   $\kappa < 0$  Dans le cas répulsif ( $\kappa < 0$ ), la fonction  $U$  est monotone décroissante ; il  
état de diffusion n'y a que des états de diffusion et  $r \geq r_{\min} > 0$ .



**Fig. 6.14** Orbites dans le cas  $C \neq 0$  : (a) cas attractif,  $r_{\max}$  et  $r_{\min}$  correspondent à  $K_1$  ; (b) cas répulsif.

Les trajectoires (= coniques) correspondant aux orbites de la figure 6.14 sont représentées sur la figure 6.15.



**Fig. 6.15** Trajectoires associées aux orbites de la figure 6.14. ( $C$  étant constant, le paramètre  $p$  est le même pour toutes les coniques.)

Remarquons pour terminer que l'évolution temporelle  $r = r(t)$  s'obtient à partir de (6.78)

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{2(K - U(r'))}}. \quad (6.84)$$

L'intégration permet de trouver  $t = t(r)$  puis, en inversant,  $r = r(t)$ . En choisissant  $t = 0$  l'instant où le point se trouve au périhélie, on peut vérifier en calculant  $dt/dr$  que l'évolution temporelle sous forme paramétrique est donnée dans le cas où la trajectoire est une ellipse ( $K < 0$ ) par

$$r = a(1 - e \cos \xi) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{a^3}{\kappa}} (\xi - e \sin \xi)$$

(voir par exemple L. Landau et E. Lifchitz).

De (6.59) on trouve ensuite l'évolution de  $\theta$  :

$$\cos \theta = \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi}.$$

Si la trajectoire est une hyperbole ( $K > 0$ ), on obtient

$$r = a(\mp 1 + e \cosh \xi) \quad , \quad t = \sqrt{\frac{a^3}{|\kappa|}} (\mp \xi + e \sinh \xi),$$

où le signe supérieur (−) correspond au cas attractif ( $\kappa > 0$ ) et le signe inférieur (+) au cas répulsif ( $\kappa < 0$ ). De nouveau l'évolution temporelle de  $\theta$  est déduite de (6.71).

## 6.7 MOUVEMENT AUTOUR DE LA TERRE

### 6.7.1 Remarque historique

Ayant découvert que le mouvement des planètes autour du Soleil est décrit par

$$\mathbf{a} = -\kappa_S \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad \text{avec} \quad \kappa_S = 1,327 \cdot 10^{20} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}, \quad (6.85)$$

Newton fut conduit à postuler que tout corps évoluant sous l'effet de l'attraction du Soleil a un mouvement décrit par la même loi (6.85).

En supposant ensuite que la chute des corps sur la Terre et le mouvement de la Lune autour de la Terre ont même origine que celui des planètes autour du Soleil, Newton arrive à la conclusion que le mouvement des corps autour de la Terre devrait être décrit par

$$\mathbf{a} = -\kappa_T \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \quad (6.86)$$

où  $\kappa_T$  est une constante qui peut être calculée à partir du rayon de la Terre  $R_T$  et de l'accélération terrestre  $g$  à l'équateur, soit

$$\kappa_T = g R_T^2 = 9,78 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 = 3,98 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}. \quad (6.87)$$

Pour vérifier l'hypothèse (6.86), calculons la période du mouvement de la Lune autour de la Terre ; de (6.70) avec  $r = 3,84 \cdot 10^8$  la distance Terre-Lune nous obtenons

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(3,84)^3 \cdot 10^{24}}{\kappa_T}} \cong 2,35 \cdot 10^6 \text{ s}$$

résultat en accord avec la valeur observée ( $= 2,36 \cdot 10^6 \text{ s}$ ).

Ces calculs ont été effectués par Newton en 1666. Il trouva un écart de 15% entre la valeur observée et la valeur prédite par (6.86), écart dû à une erreur sur la longueur du méridien terrestre. Lorsque Picard, géodésien français, rectifia la valeur du méridien, Newton refit ses calculs et il n'y avait plus qu'une différence de 1% entre la prédiction et l'observation.

PICARD Jean  
(1620-1682)  
Astronome et  
géodésien français

Remarquons pour terminer que les observations du XIX<sup>e</sup> siècle ont montré une anomalie dans le mouvement de Mercure dont la trajectoire n'est pas exactement une ellipse : le périhélie de Mercure avance en effet de 574" par siècle. On est donc forcé de conclure que l'accélération n'est pas donnée par (6.85). Nous reviendrons sur le problème de l'avance du périhélie de Mercure au paragraphe 18.2.4.

Avance du périhélie  
de Mercure

### 6.7.2 Illustration 1. Évolution d'un satellite

Un satellite terrestre se trouve sur une orbite circulaire à l'altitude  $h$  lorsqu'un accident se produit qui modifie la norme de la vitesse sans changer la direction. Cherchons le mouvement ultérieur en fonction de la vitesse  $v'_0$  après l'accident.

Pour cette analyse, nous considérons uniquement le système Terre-satellite et nous prenons le référentiel géocentrique. En admettant que le mouvement est décrit par (6.86) et (6.87) on a immédiatement après l'accident

Référentiel  
géocentrique

$$\frac{1}{2} v_0'^2 - \frac{\kappa_T}{r_0} = K' \quad \text{avec} \quad r_0 = R_T + h, \quad r_0 v_0' = C', \quad (6.88)$$

et, de (6.74) et (6.66), les paramètres de la conique

$$a = \frac{\kappa_T}{2|K'|}, \quad b = \frac{C'}{\sqrt{2|K'|}}.$$

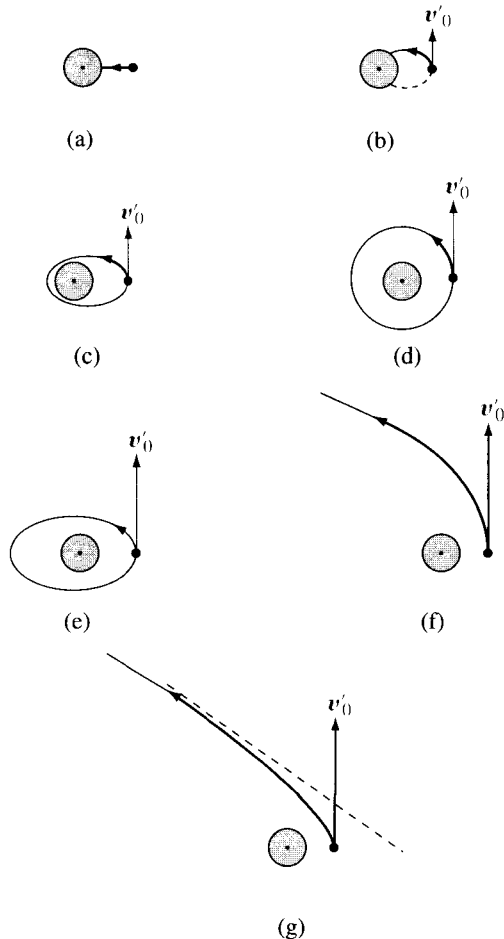
Les divers mouvements possibles sont représentés sur la figure 6.16.

- Pour  $v'_0 = 0$ , on a  $C' = 0$  et le mouvement est rectiligne (fig. 6.16 a).
- Pour  $0 < v'_0 < v_1$ , la trajectoire est une ellipse et le satellite s'écrase sur la Terre (fig. 6.16 b). La vitesse  $v_1$  est déterminée par la condition  $r_{\min} < R_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$  où  $r_{\min}$  est solution de

$$\frac{1}{2} \frac{C'^2}{r^2} - \frac{\kappa_T}{r} = K' \quad \text{avec} \quad C' = r_0 v_1.$$

- Pour  $v_1 \leq v'_0 < v_0 = \sqrt{x_T/r_0}$ , la trajectoire est une ellipse dont le centre de la Terre est le foyer le plus éloigné (fig. 6.16 c).
- Pour  $v'_0 = v_0$  la trajectoire est circulaire, c'est le mouvement initial (fig. 6.16 d).
- Pour  $v_0 < v'_0 < v_2 = \sqrt{2} v_0$ , la trajectoire est une ellipse dont le centre de la Terre est le foyer le plus proche (fig. 6.16 e).
- Pour  $v'_0 = v_2$ ,  $K' = 0$  et la trajectoire est une parabole (fig. 6.16 f).
- Pour  $v'_0 > v_2$ ,  $K' > 0$  et la trajectoire est une hyperbole (fig. 6.16 g).

On remarque ainsi que quel que soit le mouvement circulaire autour de la Terre, il suffit que la vitesse devienne  $\sqrt{2}$  fois plus élevée pour que le satellite "échappe" à l'attraction terrestre.



**Fig. 6.16** Trajectoires du satellite après l'accident représentées pour des valeurs croissantes de  $v'_0$ .

### 6.7.3 Vitesses cosmiques

La vitesse et la période d'un satellite effectuant un mouvement circulaire à l'altitude  $h$  autour de la Terre s'obtiennent immédiatement des équations (6.81) et (6.82), soit

$$v = \sqrt{\frac{\kappa_T}{R_T + h}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{\kappa_T}}. \quad (6.89)$$

On constate que plus l'altitude est élevée, plus la vitesse du satellite diminue. A basse altitude ( $h \ll R_T$ ), la vitesse est

$$v^{(1)} = \sqrt{\frac{\kappa_T}{R_T}} = 7,92 \text{ km/s}. \quad (6.90)$$

Cette vitesse est appelée **première vitesse cosmique**. De (6.89) la période du satellite à basse altitude est

Première vitesse cosmique

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{\kappa_T}} \cong 1 \text{ h } 24 \text{ min}. \quad (6.91)$$

La **vitesse de libération** de la Terre est la vitesse minimum nécessaire pour que le satellite s'échappe de l'attraction terrestre. Elle correspond à  $K = 0$  et de (6.73) on trouve

Vitesse de libération

$$v^{(2)} = \sqrt{2 \frac{\kappa_T}{R_T}} = \sqrt{2} v^{(1)} = 11,2 \text{ km/s}.$$

La vitesse de libération de la Terre est appelée **seconde vitesse cosmique**.

Seconde vitesse cosmique

Pour que le satellite puisse s'échapper du système solaire, il faudra que sa vitesse (par rapport au référentiel héliocentrique) soit supérieure à

$$v^{(3)} = \sqrt{2 \frac{\kappa_T}{|ST|}} \cong 42,1 \text{ km/s}.$$

Remarquons qu'en utilisant la vitesse de la Terre autour du soleil ( $\cong 30 \text{ km/s}$ ), il suffira d'une vitesse de  $12,1 \text{ km/s}$  par rapport à la Terre, et dans la bonne direction, pour que le satellite puisse s'échapper du système solaire.

L'**orbite géostationnaire** est l'orbite nécessaire pour qu'un satellite apparaisse immobile par rapport à la Terre. C'est une orbite circulaire, dans le plan de l'équateur, telle que la période du mouvement soit un jour sidéral. Par rapport au référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire (§ 9.7.3)

Orbite géostationnaire

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164} \cong 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

De (6.82) et (6.87) on déduit le rayon de l'orbite géostationnaire :

$$R_{\text{géostat}} = \left[ \frac{\kappa_T}{\Omega^2} \right]^{1/3} = 42\,140 \text{ km}$$

ce qui correspond à environ 36 000 km d'altitude, et la vitesse du satellite

$$v_{\text{géostat}} = \Omega R_{\text{géostat}} = 3,1 \text{ km/s.}$$

Orbite polaire Remarquons pour terminer qu'une autre orbite présente un grand intérêt : c'est l'**orbite polaire** qui passe au dessus des pôles. Comme la Terre tourne autour de l'axe des pôles, le satellite survole ainsi toutes les régions du globe.

6.7.4 Illustration 2. Mise sur orbite géostationnaire

Pour placer un satellite sur une orbite géostationnaire, on procède en quatre étapes (fig. 6.17).

- 1. On effectue un premier tir vertical de vitesse initiale  $v_0$  minimum pour atteindre une altitude  $h_1$ .
- 2. En allumant les fusées une deuxième fois la vitesse du satellite atteint la valeur  $v_1$  nécessaire pour le maintenir sur une orbite circulaire à cette altitude  $h_1$ .
- 3. On procède alors à un troisième allumage des fusées pour donner au satellite la vitesse  $v_2$  minimum tangente à l'orbite circulaire, nécessaire pour atteindre l'altitude correspondant à l'orbite géostationnaire.
- 4. Le satellite ayant atteint l'altitude correspondant à  $R_{\text{géostat}}$  avec une vitesse  $v_3$ , il faut allumer une dernière fois les fusées pour que le satellite ait la vitesse nécessaire pour rester sur l'orbite géostationnaire.

Nous voulons calculer les vitesses  $v_0, v_1, v_2, v_3$ , ainsi que le temps nécessaire pour effectuer le changement d'orbite, en prenant  $h_1 = 200 \text{ km}$ .

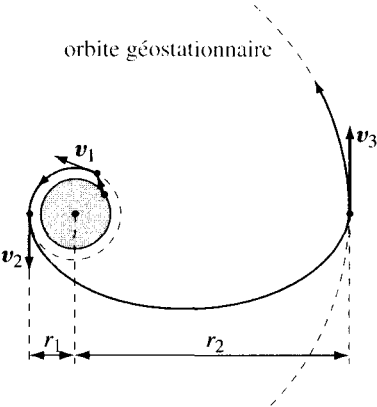


Fig. 6.17 Mise en orbite géostationnaire

1<sup>re</sup> étape. Lancement vertical depuis la Terre

Pour que la vitesse de lancement soit minimale, on impose  $\dot{r} = 0$  lorsque le satellite atteint l'altitude  $h_1 = r_1 - R_T$  demandée. En utilisant les constantes du mouvement

$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{\kappa_T}{R_T} = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\kappa_T}{r_1}, \quad R_T^2 \dot{\theta}_0 = r_1^2 \dot{\theta}_1 \quad \text{et} \quad \dot{r} = 0 \quad \text{en} \quad r_1$$



on a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{r}_0^2 + R_T^2 \dot{\theta}_0^2) - \frac{\mathcal{K}_T}{R_T} &= \frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{\mathcal{K}_T}{r_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{R_T^4}{r_1^2} \dot{\theta}_0^2 - \frac{\mathcal{K}_T}{r_1}\end{aligned}$$

où  $(R_T, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0)$  sont les conditions initiales (= lancement),  $r_1 = R_T + h = 6,58 \cdot 10^6$  m et, pour un tir vertical,  $\dot{\theta}_0 = \Omega \cong 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (§ 6.7.3). On trouve ainsi

$$v_0 = \dot{r}_0 = \left[ R_T^2 \Omega^2 \left( \frac{R_T^2}{r_1^2} - 1 \right) + 2\mathcal{K}_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_1} \right) \right]^{1/2} \cong 1,9 \text{ km/s.}$$

## 2<sup>e</sup> étape. Mise sur l'orbite circulaire d'altitude $h_1$

Lorsque le satellite atteint l'altitude  $h_1$  sa vitesse est

$$r_1 \dot{\theta}_1 = \frac{R_T^2 \dot{\theta}_0}{r_1} \cong 0,4 \text{ km/s} \quad (\text{car } \dot{r} = 0)$$

alors que la vitesse nécessaire pour rester sur l'orbite circulaire de rayon  $r_1$  est de (6.81)

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{K}_T}{r_1}} \cong 7,8 \text{ km/s.}$$

Il faut donc allumer les fusées pour augmenter la vitesse de 7,4 km/s.

## 3<sup>e</sup> étape. Changement d'orbite

Soit  $\dot{r} = 0$  et  $\dot{\theta}_2$  les vitesses initiales depuis l'orbite circulaire nécessaires pour atteindre l'altitude  $h_2$ . En utilisant à nouveau les constantes du mouvement (et la condition  $\dot{r} = 0$  lorsque le satellite atteint l'altitude  $h_2$ ) on a

$$\frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{\mathcal{K}_T}{r_1} = \frac{1}{2} \frac{r_1^4 \dot{\theta}_2^2}{r_2^2} - \frac{\mathcal{K}_T}{r_2}$$

d'où

$$r_1^2 \dot{\theta}_2^2 \left[ 1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right] = 2\mathcal{K}_T \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad \text{avec} \quad r_2 = R_{\text{gcostat}} \cong 4,214 \cdot 10^7 \text{ m}$$

et la vitesse nécessaire pour atteindre l'altitude  $h_2$  est

$$|r_1 \dot{\theta}_2| = |v_2| \cong 10,2 \text{ km/s.}$$

Il faut donc augmenter la vitesse du satellite de 2,4 km/s.

Le temps nécessaire pour effectuer le changement d'orbite s'obtient de (6.70) en remarquant (fig 6.17) que la trajectoire est une demi-ellipse de grand axe  $r_1 + r_2$  ; nous avons donc  $a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$  et

$$T = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\kappa_T}} \cong 1,9 \cdot 10^4 \text{ s} \cong 5 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

#### 4<sup>e</sup> étape. Dernier allumage des fusées

Lorsque le satellite atteint l'altitude  $h_2$ , sa vitesse est

$$r_2 \dot{\theta}_3 = \frac{r_1^2 \dot{\theta}_2}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} v_2 \cong 1,6 \text{ km/s.}$$

Pour atteindre les 3,1 km/s nécessaires pour rester sur l'orbite géostationnaire, il faut allumer les fusées pour augmenter la vitesse de 1,5 km/s.

En pratique, pour tirer avantage de la vitesse de rotation de la Terre, on construit les aires de lancement près de l'équateur et on lance le satellite vers l'Est.

## 6.8 DIFFUSION D'UNE PARTICULE CHARGÉE

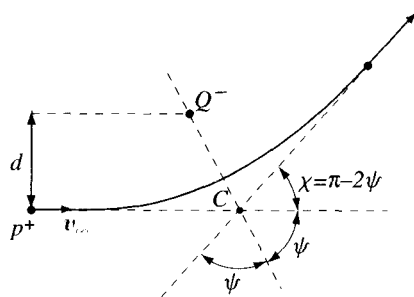
On observe qu'un proton – particule de masse  $m$  et de charge  $e$  – de vitesse  $\mathbf{v}_\infty$  à l'infini (c'est-à-dire très loin de la cible) est diffusé par un ion lourd de charge  $Q$  sous un angle  $\chi$  (fig 6.18). Cherchons la position du ion en admettant qu'il reste immobile et que l'accélération du proton est donnée par (6.65) avec  $O$  la position du ion (§ 6.6.3).

Nous savons que la trajectoire est une hyperbole dont le ion occupe le foyer intérieur si  $Q$  est négatif ( $\kappa > 0$ ), le foyer extérieur si  $Q$  est positif ( $\kappa < 0$ ). De (6.66)

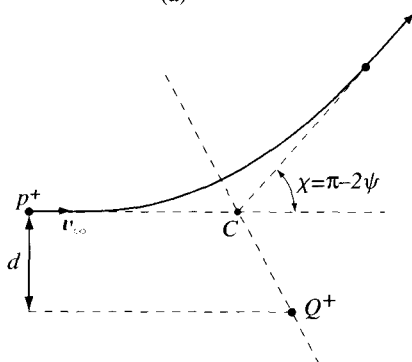
$$C^2 = d^2 \mathbf{v}_\infty^2 = |\kappa| \frac{b^2}{a} \quad \text{où} \quad \kappa = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{m}$$

et de (6.73), (6.74) on a

$$\mathbf{v}_\infty^2 = \frac{|\kappa|}{a}.$$



(a)



(b)

**Fig. 6.18** Diffusion d'un proton par : (a) un ion négatif ; (b) un ion positif.

Ainsi  $b = d$  et de (6.64)

$$\tan \psi = \frac{b}{a} = \frac{d}{a}$$

ce qui implique

$$d = a \tan \psi = \frac{|\kappa|}{v_\infty^2} \tan \psi \quad \text{avec} \quad 2\psi = \pi - \chi$$

En conclusion, le ion est sur la bissectrice de l'angle de diffusion, à une distance

$$d = \frac{|\kappa|}{v_\infty^2 \tan(\chi/2)}.$$

Paramètre d'impact

Par définition, la distance  $d$  est le **paramètre d'impact** de la diffusion.

## 6.9 MOUVEMENT CENTRAL EN $r$

### Théorème 1. Trajectoire

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre  $O$  est une conique dont  $O$  est le centre, alors l'accélération est proportionnelle à  $r$

$$a = -kx \quad (6.92)$$

où  $k$  est une constante reliée à la constante des aires  $C$  et aux demi-axes de la conique par la formule

$$|k| = \frac{C^2}{a^2 b^2}. \quad (6.93)$$

De plus, si la trajectoire est une ellipse,  $k$  est positif : c'est le cas attractif ; si la trajectoire est une hyperbole,  $k$  est négatif : c'est le cas répulsif.

DÉMONSTRATION. L'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes est

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.94)$$

où le signe supérieur (+) correspond au cas de l'ellipse et le signe inférieur (−) au cas de l'hyperbole. En introduisant les coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

on obtient l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires

$$\frac{b}{r} = \sqrt{\pm 1 + \varepsilon \cos^2 \theta} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{b^2}{a^2} \mp 1 = \mp e^2. \quad (6.95)$$

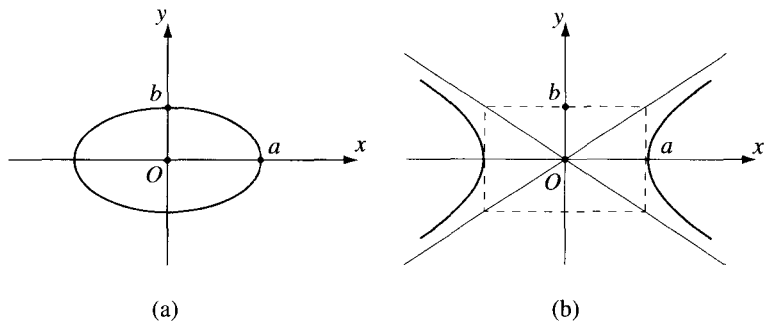


Fig. 6.19 Conique dont  $O$  est le centre.

De (6.95) on obtient

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{b} (1 \pm \varepsilon) \frac{r^3}{b^3}$$

et la formule de Binet (6.57) implique

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} (1 \pm \varepsilon) \frac{r^3}{b^4} = \mp C^2 \frac{b^2}{a^2 b^4} r$$

ce qui conclut la démonstration.

### **Théorème 2. Réciproque**

Si l'évolution d'un point est telle que

$$\mathbf{a} = -k\mathbf{x}$$

où  $k$  est une constante, alors la trajectoire est une conique dont  $O$  est le centre.

**DÉMONSTRATION.** Projétons l'équation  $\mathbf{a} = -k\mathbf{x}$  sur des axes cartésiens  $Oxy$  dans le plan du mouvement; on a

$$\ddot{x} = -kx \quad \ddot{y} = -ky. \quad (6.96)$$

Si  $k$  est positif, nous avons pour chaque composante un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation  $\omega = \sqrt{k}$ , d'où Cas attractif

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad \text{et} \quad y(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2).$$

En choisissant l'axe  $y$  tel que  $\delta_2 = \pi/2$  et en éliminant le temps au moyen de l'identité

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

on conclut que la trajectoire est une ellipse de centre  $O$ .

Si  $k$  est négatif, on vérifie aisément que la solution générale de (6.96) est Cas répulsif

$$x(t) = A_1 \cosh(\Omega t + \delta_1) \quad \text{et} \quad y(t) = A_2 \sinh(\Omega t + \delta_2) \quad (6.97)$$

où

$$\Omega = \sqrt{|k|} \quad (6.98)$$

et  $A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$  sont des constantes définies par les conditions initiales. Rappelons que les fonctions  $\cosh \xi$  et  $\sinh \xi$  sont définies par

$$\cosh \xi = \frac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi}), \quad \sinh \xi = \frac{1}{2}(e^\xi - e^{-\xi}) \quad (6.99)$$

et que l'on a l'identité

$$\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1. \quad (6.100)$$

En éliminant le temps de (6.97) au moyen de l'identité (6.100), on conclut que la trajectoire est une hyperbole de centre  $O$ .

Remarquons que l'on écrit généralement la solution de  $\ddot{x} = \Omega^2 x$  sous la forme

$$x(t) = x_0 \cosh(\Omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sinh(\Omega t) \quad (6.101)$$

ce qui fait apparaître explicitement les conditions initiales.

### **Théorème 3. Constante du mouvement**

Sous les hypothèses du théorème 1, la grandeur

$$G(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (6.102)$$

est une constante du mouvement :

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kx^2 = K.$$

La valeur  $K$  est reliée aux demi-axes de la conique par la formule

$$K = \frac{1}{2} |k| (b^2 \pm a^2) \quad (6.103)$$

où le signe supérieur correspond au cas de l'ellipse et le signe inférieur au cas de l'hyperbole.

DÉMONSTRATION. De (6.53)

$$a_r = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -kr$$

et du lemme fondamental (§ 6.3.4), on a

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2}kr^2 = K \quad (6.104)$$

ce qui, en vertu de (6.52), conclut la démonstration de la première partie du théorème 3.

De (6.56) et (6.95)

$$\dot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) = C \frac{\varepsilon \cos \theta \sin \theta}{b [\pm 1 + \varepsilon \cos^2 \theta]^{1/2}}$$

et de (6.104) on obtient, après un calcul fastidieux, l'expression de  $K$  :

$$K = \frac{1}{2} \frac{C^2}{b^2} \left( \frac{b^2}{a^2} \pm 1 \right) = \frac{1}{2} |k| (b^2 \pm a^2).$$

#### Théorème 4. Période

Si la trajectoire d'un mouvement central de centre  $O$  est une ellipse dont  $O$  est le centre, alors le mouvement est périodique de période

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Ce dernier résultat est une conséquence de (6.96).

#### Remarques

- Comme dans le cas du problème de Kepler, la grandeur conservée  $G(x, v)$  est, au coefficient près, l'énergie du point matériel.
- Le mouvement décrit par (6.92) est typique des petits mouvements au voisinage d'une trajectoire circulaire stable ( $k > 0$ ) ou instable ( $k < 0$ ).
- Un point matériel dont l'évolution est caractérisée par (6.92) où  $k$  est une constante positive (indépendante des conditions initiales) est appelé *oscillateur harmonique isotrope*.

### 6.10 PROBLÈMES

**6.10.1** Un village (altitude 1400 m) est ravitaillé par un avion volant à 250 km/h et 1700 m d'altitude. A quelle distance (horizontale) du village le pilote doit-il lâcher sa cargaison (négliger le frottement) ?

Secours en montagne

**6.10.2** Un skieur s'élance sur la piste de saut (fig. 6.20)

Saut à ski

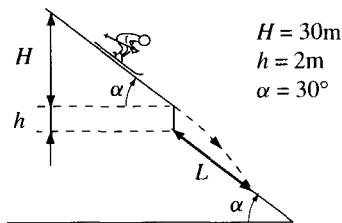


Fig. 6.20

En assimilant le skieur à un point, évaluer la longueur  $L$  du saut. Quelle longueur maximale est-il possible d'atteindre en modifiant uniquement l'angle d'envol ? (Idée : utiliser la parabole de sécurité.)

**6.10.3** Un archer vise une cible à 50 m. La vitesse initiale de la flèche étant 65 m/s, à quelle hauteur au-dessus de la cible faut-il viser ? (La position initiale de la flèche est à la hauteur du centre de la cible.)

Tir à l'arc

**6.10.4** Un archer vise un écureuil sur une branche à 10 m du sol et 75 m de distance. A l'instant où la flèche part, l'écureuil se laisse tomber. Montrer que

l'écureuil ne peut pas échapper à son tragique destin si la vitesse  $v_0$  de la flèche est supérieure à une vitesse minimale qu'il faudra calculer.

**Tir d'artillerie** **6.10.5** Ayant placé un obusier de 15.5 de diamètre, le commandant désire atteindre des cibles situées au-delà d'un village se trouvant à 10 km de l'obusier. L'exercice a lieu en plaine. Pour des raisons de sécurité, les obus doivent passer au moins 300 m au-dessus du village. Quelles charges peut-on utiliser ? Quelles distances peut-on atteindre avec ces charges ? Y a-t-il une ou deux trajectoires possibles ?

Charge 2 : vitesse initiale de l'obus = 242 m/s.

Charge 5 : vitesse initiale de l'obus = 386 m/s.

Charge 8 : vitesse initiale de l'obus = 684 m/s.

**Accident de voiture** **6.10.6** Une voiture ayant renversé un piéton, l'agent fait les constatations suivantes :

- deux traces de freinage parallèles d'une longueur de 60 m, commençant 13 m avant le passage pour piétons dont la largeur est de 4 m ;
- des débris de phares 13 m après le passage pour piétons ;
- les phares de la voiture se trouvent à 1 m de hauteur ;
- la voiture peut avoir une accélération de freinage de  $5,2 \text{ m/s}^2$ .

Attribuer les responsabilités sachant que la vitesse maximale autorisée est de 50 km/h.

**Mouvement de HCl** **6.10.7** La fréquence de vibration d'une molécule HCl est  $\nu = 8,5 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ . En admettant que le Cl est immobile et que le mouvement de H est oscillatoire harmonique d'amplitude  $0,1 \text{ \AA}$ , quelle est la vitesse maximale et quelle est l'accélération maximale ?

**État lié ou diffusion** **6.10.8** Un électron de vitesse  $v_0 = 4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$  se trouve à une distance de  $100 \text{ \AA}$  d'un proton. En admettant que le proton reste immobile et que le mouvement de l'électron est tel que

$$a = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e} \frac{x}{|x^3|}$$

où  $O$  est la position du proton, ( $m_e$  et  $-e$  sont la masse et la charge de l'électron), est-ce qu'il y aura formation d'un atome d'hydrogène (état lié) ?

**Vitesse d'un satellite** **6.10.9** Quelle est la vitesse et la période de révolution d'un satellite sur une orbite circulaire à 700 km d'altitude ? Évaluer la vitesse minimale pour atteindre cette altitude à partir d'un tir vertical, puis à partir d'un tir horizontal dans le sens de rotation de la Terre, depuis l'équateur. (Référentiel géocentrique.)

**6.10.10** L'apogée et le périégée de Gémini V (lancé en 1965) étaient 352 km et 107 km. Calculer les vitesses maximale et minimale, et la période du mouvement.

**6.10.11** Un satellite se trouve sur une orbite circulaire à 400 km de la Terre. Quelle est la vitesse de lancement (parallèle à la surface de la Terre) nécessaire



pour atteindre la planète Neptune et quelle sera la durée du voyage ? On admettra pour ce calcul que le mouvement du satellite par rapport au référentiel de Kepler est décrit par (6.85). Quelle sera la vitesse de lancement par rapport à la Terre si le satellite est lancé dans le sens de la rotation de la Terre autour du Soleil ?

**6.10.12** Un satellite se trouve sur une orbite circulaire autour de la Terre lorsqu'un accident se produit, modifiant la direction de la vitesse sans changer son intensité (fig. 6.21). On admet que le mouvement du satellite par rapport au référentiel géocentrique est décrit par (6.86). Montrer que la nouvelle trajectoire est une ellipse de demi-grand axe égal au rayon de la trajectoire circulaire, d'excentricité  $e = \sin \alpha$ . Calculer l'apogée et le périhélie. Le satellite se trouvant initialement à 700 km d'altitude, pour quelles valeurs de l'angle  $\alpha$  le satellite s'écrasera-t-il sur la Terre ?

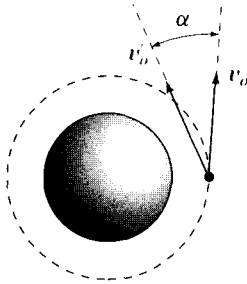


Fig. 6.21

**6.10.13** On admet que le mouvement des planètes autour du Soleil est décrit par (6.85). Montrer que les vitesses minimale (à l'aphélie) et maximale (au périhélie) d'une planète dont la trajectoire est une ellipse d'excentricité  $e$  et demi-grand axe  $a$ , sont donnés par

$$v_{\min}^2 = \frac{\kappa_S}{a} \left( \frac{1-e}{1+e} \right), \quad v_{\max}^2 = \frac{\kappa_S}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right).$$

Calculer ces valeurs pour Vénus, la Terre et Mars.

**6.10.14** En admettant que le mouvement de la Terre autour du Soleil est circulaire uniforme, évaluer la période de rotation  $T$  de la Terre autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel de Kepler. ( $T$  correspond à la durée du jour sidéral à  $8 \cdot 10^{-3}$  s près.)

Sachant que l'orbite de la Terre est une ellipse, évaluer la différence entre la durée du jour solaire au périhélie et à l'aphélie.

Pour ces estimations, on prendra l'axe des pôles perpendiculaire au plan de la trajectoire.

**6.10.15** Une comète est observée à 100 millions de km du Soleil avec une vitesse de 50 km/s. Sachant qu'à cet instant la vitesse de la comète fait un angle de  $45^\circ$  avec le vecteur Comète-Soleil, quelle sera la nature de la trajectoire ? Calculer le périhélie.

**6.10.16** Soit  $r_p$  et  $v_p$  le périhélie et la vitesse correspondante d'une comète dont l'orbite est une parabole. Établir les résultats suivants :

1. l'équation différentielle du mouvement est

$$\dot{\theta} = \frac{v_p}{r_p} \cos^4 \frac{\theta}{2};$$

2. l'intervalle de temps pendant lequel la distance de la comète au Soleil est inférieure à  $r_T = 1$  UA est

$$\frac{\sqrt{2}}{3\pi} \sqrt{1 - \frac{r_p}{r_T}} \cdot \left(1 + 2 \frac{r_p}{r_T}\right) \text{ années.}$$

$$\left( \int \frac{d\theta}{\cos^4 \frac{\theta}{2}} = 2 \left( \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et} \quad \left( \tan \frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)$$

**Satellite 6.10.17** Un satellite se trouve à une altitude  $h_0 = 600$  km. On lui imprime une vitesse  $v_0 = 36\,000$  km/h dans une direction parallèle à la surface de la Terre. Calculer :

1. l'altitude maximum  $h_1$  lorsque le satellite est à l'apogée ;
2. l'erreur maximum admise sur la direction de lancement (angle par rapport à l'horizontale) pour que le satellite ne se rapproche pas à moins d'une distance  $h_2 = 400$  km de la surface de la Terre. Quelle sera la hauteur  $h_3$  à l'apogée dans ce cas limite ?

**Diffusion d'un proton 6.10.18** Un proton de vitesse  $v_\infty = 4 \cdot 10^3$  m/s est diffusé par un ion lourd, immobile, de charge  $e$  ( $= 1,6 \cdot 10^{-19}$  C). On observe que l'angle de diffusion  $\chi$  est égal à  $30^\circ$ . Quelle est la valeur du paramètre d'impact sachant que l'accélération du proton est

$$\mathbf{a} = -(4\pi\epsilon_0 m_p)^{-1} e^2 |\mathbf{x}|^{-3} \mathbf{x}$$

avec  $m_p$  la masse du proton ? Quelle est la distance minimale entre le proton et le ion ?

**Mouvement central 6.10.19** Le mouvement d'une particule est tel que  $\mathbf{a} = -k\mathbf{x}$ , où  $k = 9 \text{ s}^{-2}$  (fig. 6.22). Trouver l'évolution temporelle  $\mathbf{x}(t)$ , les demi-axes de la trajectoire et la période du mouvement pour les conditions initiales :  $d = 5$  cm,  $|\mathbf{x}_0| = 17$  cm,  $|\mathbf{v}_0| = 60 \text{ cm s}^{-1}$ . Ayant fixé  $\mathbf{x}_0$ , trouver  $\mathbf{v}_0$  pour que le mouvement soit circulaire.

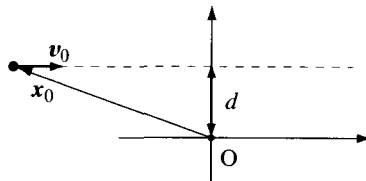


Fig. 6.22

**6.10.20** Le mouvement d'un corps est tel que  $\mathbf{a} = -k\rho\mathbf{e}_\rho$  où  $(\rho, \varphi, z)$  sont les coordonnées cylindriques et  $k$  une constante positive. Étudier le mouvement dans les deux cas suivants :

1.  $\dot{\varphi}_0 = 0$ ;
2.  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$  (il est plus simple d'utiliser les coordonnées cartésiennes).

**6.10.21** On observe que le mouvement d'un corps est central de centre  $O$  et que l'angle  $\alpha$  entre le vecteur lieu  $\mathbf{x} = \mathbf{OP}$  et le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est constant. Vérifier que l'accélération est donnée par

$$\mathbf{a} = -\left(\frac{C}{\sin \alpha}\right)^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{e}_r \quad (C = \text{constante des aires}).$$

Trouver une intégrale première. (Ce problème a été proposé et résolu par Newton dans les Principia : Proposition IX, Problème IV.)

**6.10.22** Le mouvement d'une particule est central et la trajectoire est la spirale logarithmique  $r = Ae^{k\theta}$ , où  $A$  et  $k$  sont des constantes positives. Trouver l'accélération  $\mathbf{a}$  ainsi que les accélérations tangentielle  $|\mathbf{a}_\tau|$ , normale  $|\mathbf{a}_n|$ , et le rayon de courbure.



## CHAPITRE 7

# INTERMÈDE MATHÉMATIQUE. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES ET ANALYSE QUALITATIVE

### 7.1 ÉVOLUTION TEMPORELLE ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

L'étude des mouvements naturels du chapitre 6 a montré que le mouvement d'un point est souvent caractérisé par le fait que son accélération est une fonction de sa position :

- particule « libre » (rail à air horizontal)  $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 0$  ;
- balistique  $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{g}$  (= constante) ;
- mouvement des planètes  $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\kappa \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$  ;
- oscillateur harmonique isotrope  $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -k\mathbf{x}$  ;

c'est-à-dire, en coordonnées généralisées,

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = f_i(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.1)$$

Remarquons pour commencer que les 3 équations différentielles du second ordre (7.1) peuvent être considérées comme un système de 6 *équations différentielles ordinaires* en écrivant

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = v_i \\ \frac{dv_i}{dt} = f_i(q_1, q_2, q_3, v_1, v_2, v_3) \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.2)$$

Comme nous l'avons déjà discuté au chapitre 1, il suit du déterminisme laplacien que l'évolution temporelle de n'importe quel système classique non

relativiste peut être définie par un *système d'équations différentielles ordinaires* (E.D.O)

$$\text{E.D.O} \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.3)$$

où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les variables décrivant l'état du système à un instant donné. Les  $n$  fonctions  $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$  sont des fonctions connues soit à partir de l'observation (en cinématique), soit à partir des lois (en dynamique). L'espace des variables  $(x_1, \dots, x_n)$  est ainsi l'espace des états instantanés, aussi appelé *espace de phase* du système.

Résoudre les E.D.O. (7.3) signifie trouver  $n$  fonctions  $x_i = x_i(t)$  telles que

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et satisfaisant les conditions initiales

$$x_i(t=0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{fixés.}$$

Les théorèmes concernant l'existence, l'unicité et les propriétés des solutions de l'E.D.O. (7.3) sont brièvement exposés dans l'appendice D. Le théorème d'existence permettra d'affirmer qu'il existe toujours une solution de (7.3). Ayant trouvé une solution, le théorème d'unicité permettra d'affirmer que c'est la seule solution (satisfaisant les conditions initiales fixées). Ainsi, connaissant l'état à l'instant initial, soit  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , l'E.D.O. (7.3) nous permet de trouver l'état à l'instant  $t$ , soit  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  : c'est l'expression mathématique du *déterminisme laplacien*. Dans ce même appendice, on aborde également les questions concernant les points d'équilibre, leur stabilité et la linéarisation des équations du mouvement au voisinage d'un point d'équilibre. Ces questions sont illustrées dans ce chapitre au moyen d'exemples simples.

En physique, si le système matériel est isolé, l'*homogénéité du temps* implique que les fonctions  $f_i$  ne dépendent pas explicitement du temps (sect. 1.6), soit

$$\text{E.D.O autonome} \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.4)$$

et dans ce cas l'E.D.O. (7.4) est dite *autonome*. Si le système n'est pas isolé, les  $f_i$  dépendent explicitement du temps et l'E.D.O. (7.3) est *non autonome*.

Remarquons qu'il est toujours possible de se ramener à l'étude générale des équations autonomes en considérant le temps comme l'une des variables d'état

(dans ce cas l'espace des variables  $(t, x_1, \dots, x_n)$  est l'espace de phase étendu) et en paramétrisant l'évolution par un paramètre  $\tau$  tel que

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx_i}{d\tau} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7.5) \quad \begin{array}{l} \text{E.D.O non} \\ \text{autonomes} \end{array}$$

c'est-à-dire  $(n + 1)$  équations pour  $(n + 1)$  variables.

## 7.2 INTÉGRALES PREMIÈRES ET CONSTANTES DU MOUVEMENT

En mathématique une fonction  $A(t, x_1, \dots, x_n)$  est une **intégrale première** de l'E.D.O. (7.3) si pour tout  $t$

$$A(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = A(0, x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (7.6)$$

où  $\{x_i(t)\}$  est la solution de (7.3) de conditions initiales  $\{x_i^0\}$ .

En physique, une fonction  $A(x_1, \dots, x_n)$  est une **constante du mouvement** pour l'évolution définie par (7.4) si pour tout  $t$

$$A(x_1(t), \dots, x_n(t)) = A(x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (7.7)$$

Ainsi les constantes du mouvement de la physique sont des intégrales premières (des équations du mouvement) qui ne dépendent pas explicitement du temps.

En d'autres termes, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 6, une constante du mouvement est une grandeur physique (= observable) dont la valeur peut être arbitrairement fixée par le choix des conditions initiales, mais qui reste constante au cours de l'évolution ultérieure.

Constante du  
mouvement

Dans les paragraphes suivants nous effectuons la résolution des E.D.O. dans quelques cas simples. Nous présentons ensuite l'analyse qualitative qui sera très utile pour faire ressortir les propriétés générales des solutions avant de résoudre explicitement l'équation différentielle.

## 7.3 EXEMPLES SIMPLES

**7.3.1 Étude de  $\frac{dx}{dt} = f(t)$** 

Considérons l'E.D.O.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (7.8)$$

où  $f(t)$  est une fonction connue de  $t$ .

$$\text{De (7.8)} \quad \int_{x_0}^x dx = \int_0^t dt f(t),$$

c'est-à-dire  $x(t) - x_0 = \int_0^t dt f(t)$  et finalement

$$x(t) = x_0 + \int_0^t dt f(t). \quad (7.9)$$

Par exemple, soit

$$\frac{dx}{dt} = \lambda t^n \quad \text{où } \lambda \text{ et } n \text{ sont des constantes;} \quad (7.10)$$

$$\text{alors} \quad x(t) = x_0 + \frac{\lambda}{n+1} t^{n+1} \quad \text{si } n \neq -1$$

$$\text{et} \quad x(t) = x(t_0) + \lambda \ln \frac{t}{t_0} \quad \text{si } n = -1.$$

**7.3.2 Étude de  $\frac{dx}{dt} = f(x)$** 

Considérons l'E.D.O. autonome

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases} \quad (7.11)$$

où  $f(x)$  est une fonction connue de  $x$ .

$$\text{De (7.11)} \quad \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt} = 1, \quad \text{d'où} \quad \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)} = \int_0^t dt, \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)}. \quad (7.12)$$

Par exemple, soit

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante,} \quad (7.13)$$

$$\text{alors} \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda x} = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{x}{x_0} \right), \quad \text{d'où}$$

$$x(t) = e^{\lambda t} x_0. \quad (7.14)$$



### 7.3.3 Équation linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (7.15)$$

où  $b$  et  $c$  sont des constantes.

(Si  $b = 0$  et  $c > 0$ , c'est l'équation de l'oscillateur harmonique ; si  $b > 0$  et  $c > 0$  c'est l'équation de l'oscillateur harmonique en présence de frottement qui sera analysée au chapitre 17 ; sous la forme générale (7.15) c'est l'équation du mouvement au voisinage d'un point d'équilibre).

Écrivons (7.15) sous la forme d'une E.D.O., soit

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -cx - bv \end{cases} \quad (7.16)$$

et posons  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, v)$ . L'équation (7.16) devient

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

c'est-à-dire que nous avons une équation analogue à (7.13)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (7.17)$$

mais  $\mathbf{A}$  est maintenant la matrice à coefficients constants

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -b \end{pmatrix}.$$

Cette matrice possède deux valeurs propres, solutions de

$$\lambda(\lambda + b) + c = 0, \quad (7.18)$$

d'où

$$\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \quad (7.19)$$

Si  $b^2 \neq 4c$ , les deux valeurs propres sont distinctes et la matrice  $\mathbf{A}$  est « diagonalisable ». Cela signifie qu'il existe une matrice  $\mathbf{D}$ , telle que

$$\mathbf{DAD}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Dans ce cas, en écrivant (7.17) sous la forme

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D})\mathbf{A}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D})\mathbf{x},$$

on obtient en multipliant par  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{DAD}^{-1}) \mathbf{D}\mathbf{x}. \quad (7.21)$$

Ainsi, en introduisant  $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ , nous avons

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (\text{car } \mathbf{D} \text{ ne dépend pas de } t)$$

et de (7.20) et (7.21)

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \mathbf{y},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \lambda_+ y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \lambda_- y_2 \end{cases} \quad (7.14) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1(t) = e^{\lambda_+ t} y_1(0) \\ y_2(t) = e^{\lambda_- t} y_2(0). \end{cases}$$

Finalement, comme  $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{y}$ , nous obtenons

$$x(t) = D_{11}^{-1} y_1(0) e^{\lambda_+ t} + D_{12}^{-1} y_2(0) e^{\lambda_- t}.$$

En conclusion, la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad \text{avec } b^2 \neq 4c$$

est donnée par

$$x(t) = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}, \quad (7.22)$$

où  $C_+$ ,  $C_-$  sont deux constantes définies par les conditions initiales  $(x_0, v_0)$  et  $\lambda_{\pm}$  sont les solutions (7.19) de l'équation (7.18),

$$\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \quad (7.23)$$

- Si  $b^2 > 4c$ , les deux valeurs propres  $\lambda_+$ ,  $\lambda_-$  sont réelles.

En particulier, pour  $b = 0$  et  $c < 0$  nous avons

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cosh \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sinh \Omega t \\ \Omega = \sqrt{|c|}. \end{cases} \quad (7.24)$$

Du lemme fondamental, les orbites associées à  $\frac{d^2x}{dt^2} = |c|x$  sont les hyperboles (fig. 7.1)

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}|c|x^2 = K \quad (7.25)$$

d'asymptotes  $v = \pm\Omega x$  (fig. 7.1).

Si  $v_0 = \pm\Omega x_0$ , la solution (7.24) devient

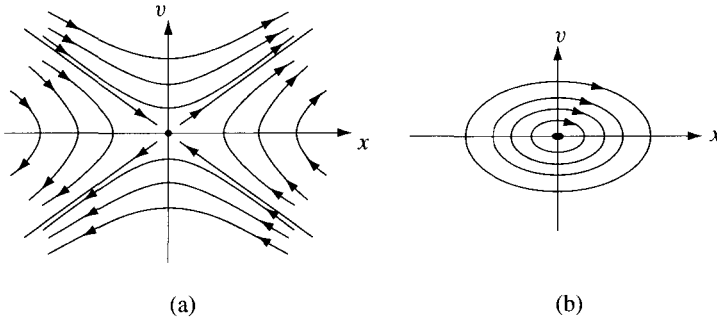
$$x(t) = e^{\pm\Omega t}x_0, \quad \text{d'où} \quad v(t) = \pm\Omega x(t) \quad \text{pour tout } t :$$

les orbites dans l'espace  $(x, v)$  sont alors les deux droites  $v = \pm\Omega x$ .

Pour  $(x_0 = 0, v_0 = 0)$ , nous avons  $x(t) = 0$  pour tout  $t$  : c'est un **point d'équilibre**. Ce point d'équilibre est **instable** car pour toute condition initiale au voisinage de ce point d'équilibre (sauf  $v_0 = -\Omega x_0$ ), la solution  $x(t)$  tend vers l'infini (fig. 7.1).

Point d'équilibre instable

De façon générale, le point  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  est un **point d'équilibre** de l'E.D.O. (7.4) si  $x(t) = \bar{x}$  est solution de (7.4), c'est-à-dire si  $f_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .



**Fig. 7.1** Orbites de  $\frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0$  : (a)  $c < 0$  ; (b)  $c > 0$ .

- Si  $b^2 < 4c$ ,  $\lambda_{\pm} = -\frac{b}{2} \pm i\sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$  et (7.22) implique

$$\begin{cases} x(t) = Ce^{-\frac{b}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega = \sqrt{c - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (7.26)$$

En particulier, pour  $b = 0$  et  $c > 0$ , nous avons le mouvement oscillatoire harmonique et

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ \omega = \sqrt{c}. \end{cases} \quad (7.27)$$

Du lemme fondamental, les orbites associées à  $\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$  sont les ellipses (fig. 7.1)

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}cx^2 = K. \quad (7.28)$$

Pour  $(x_0 = 0, v_0 = 0)$ , nous avons  $x(t) = 0$  pour tout  $t$  : c'est un **point d'équilibre stable** *d'équilibre*. Ce point d'équilibre est **stable** car pour toute condition initiale au voisinage de ce point, l'orbite reste au voisinage du point d'équilibre pour tout  $t$  (fig. 7.1).

- Si  $b^2 = 4c$ , on vérifie aisément que la solution est

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2}t} \left[ x_0 + t \left( \frac{b}{2}x_0 + v_0 \right) \right]. \quad (7.29)$$

Les propriétés générales des solutions de (7.15) seront étudiées au chapitre 17.

**Remarque.** Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g_0$$

où  $b, c, g_0$  sont des constantes.

En introduisant  $y = x - \frac{g_0}{c}$  nous avons

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

et l'on est ramené à (7.15).

### 7.3.4 Équation linéaire du second ordre inhomogène

Soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = g(t) \quad (7.30)$$

où  $b$  et  $c$  sont des constantes et  $g(t)$  une fonction connue de  $t$ .

Pour résoudre (7.30) on utilise la propriété suivante.

Soit  $x_p(t)$  une solution particulière de (7.30) et  $x_h(t)$  la solution générale de l'équation homogène ( $g \equiv 0$ ) donnée par (7.22), alors

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (7.31)$$

est aussi solution de (7.30). Les constantes  $C_+$ ,  $C_-$  sont définies par les conditions initiales  $(x_0, v_0)$ .

## 7.4 ANALYSE QUALITATIVE DE $m\ddot{x} = f(x)$

### 7.4.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle

$$m\ddot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (7.32)$$

où  $m$  est une constante positive (qui sera identifiée par la suite avec la masse).

Du lemme fondamental (§ 6.3.4), nous savons déjà que la grandeur

$$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 + U(x) \quad \text{où} \quad \frac{dU}{dx} = -f \quad \text{et} \quad v = \dot{x} \quad (7.33)$$

est une constante du mouvement, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \quad (= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)). \quad (7.34)$$

Nous avons ainsi

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \quad (7.35)$$

où le signe est celui de  $v_0$ , et ceci jusqu'au moment où  $v = 0$  (si  $v_0 = 0$ , ce sera le signe de  $f(x_0)$ ). Par conséquent, de (7.12)

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}}. \quad (7.36)$$

En conclusion, connaissant  $(x_0, v_0)$  à l'instant  $t_0$ , nous obtenons la constante  $E$  par (7.34), puis  $t = t(x)$  par intégration de (7.36), ce qui donne finalement, en inversant, l'évolution  $x = x(t)$ .

Dans bien des cas, il n'est pas possible d'intégrer explicitement (7.36) et il faut effectuer une intégration numérique. Par exemple, on peut discrétiser

Intégration  
numérique

ser (7.35) en remplaçant  $dx/dt$  par  $(x(t + \delta t) - x(t)) / \delta t$  avec  $\delta t$  suffisamment petit. Pour cela on pose

$$t_n = t_0 + n \delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x(t_n) = x_n$$

et (7.35) devient

$$x_{n+1} = x_n \pm \delta t \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x_n))}.$$

En commençant avec la condition initiale  $x_0$ , on trouve ainsi  $x_1$ , puis  $x_2$ ,  $x_3$ , ... par itération.

Si l'on ne sait pas intégrer  $f(x)$  pour trouver explicitement la primitive  $-U(x)$ , on revient à (7.32) écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(x). \end{cases}$$

En discrétisant ce système de deux équations on obtient

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \delta t v_n \\ v_{n+1} = v_n + \delta t \frac{f(x_n)}{m} \end{cases} \quad \text{où} \quad v_n = v(t_n).$$

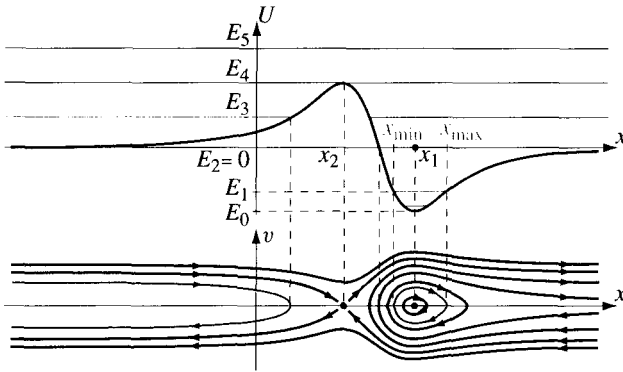
En commençant avec la condition initiale  $(x_0, v_0)$ , on trouve par itération  $(x_n, v_n)$  à l'instant  $t_n$ .

## 7.4.2 Analyse qualitative

Avant de se lancer dans l'intégration de (7.36) qui peut être laborieuse, il est important d'étudier l'allure qualitative des orbites dans l'espace  $(x, v)$  pour différentes valeurs typiques de  $E$ . Pour cette analyse, on part de (7.34) et on procède comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 6.6.4. On commence par dessiner la fonction  $U(x)$ , puis on esquisse les orbites en se basant sur les observations suivantes.

Comme  $E - U(x) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ , les valeurs de  $E$  possibles sont supérieures ou égales au minimum de  $U(x)$ . De plus, pour une valeur donnée de  $E$ , les valeurs de  $x$  sont limitées par la condition  $E - U(x) \geq 0$  et  $v = 0$  si et seulement si  $U(x) = E$ . Finalement,  $|v|$  augmente si  $E - U(x)$  augmente et  $|v|$  diminue si  $E - U(x)$  diminue. Ces remarques permettent d'esquisser l'allure qualitative des orbites au moyen du graphe de la fonction  $U(x)$ .

A titre d'illustration, considérons le cas où  $U(x)$  est la fonction représentée sur la figure 7.2.



**Fig. 7.2** Allure qualitative des orbites de  $m\ddot{x} = f(x)$ , où  $f = -\frac{dU}{dx}$ .

Les points  $x_i$  où  $U'(x_i) = 0$ , définissent les **points d'équilibre**. L'orbite passant par le point  $(x_i, v = 0)$  se réduit alors à ce seul point. Équilibre

En effet dans ce cas  $x(t) = x_i$  est la solution de  $m\ddot{x} = -U'(x)$ , de condition initiale  $x(0) = x_i, v(0) = 0$ .

Pour étudier les solutions  $x(t)$  au voisinage du point d'équilibre  $x_i$ , c'est-à-dire  $|x(t) - x_i| \ll 1$  et  $|v(t)| \ll 1$ , on linéarise (7.32) au point  $x_i$ . Cela signifie que l'on introduit le développement de Taylor de  $U(x)$  autour de  $x_i$  :

$$U(x) = U(x_i) + 0 + \frac{1}{2}U''(x_i)(x - x_i)^2 + \dots$$

d'où

$$f(x) = -U''(x_i)(x - x_i) + \dots$$

et l'on remplace (7.32) par l'**équation linéarisée**

Linéarisation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -U''(x_i)(x - x_i). \quad (7.37)$$

Au voisinage du point d'équilibre  $x_i$  le mouvement est décrit par l'équation linéarisée (7.37).

- Si le point  $x_1$  est un minimum local de  $U(x)$ , avec  $U'(x_1) = 0$  et  $U''(x_1) > 0$ , la solution de (7.37) est (par (7.27))

$$\begin{cases} x(t) = x_1 + (x_0 - x_1) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ \omega = \sqrt{\frac{U''(x_1)}{m}}. \end{cases} \quad (7.38)$$

Dans ce cas les orbites au voisinage de  $x_1$  sont des ellipses. Le mouvement est périodique, de période

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

- Si le point  $x_2$  est un maximum local de  $U(x)$ , avec  $U'(x_2) = 0$  et  $U''(x_2) < 0$ , la solution de (7.37) est (par (7.25))

$$\begin{cases} x(t) = x_2 + (x_0 - x_2) \cosh \Omega t + \frac{v_0}{\Omega} \sinh \Omega t \\ \Omega = \sqrt{\frac{|U''(x_2)|}{m}}. \end{cases} \quad (7.39)$$

Dans ce cas les orbites au voisinage de  $x_2$  sont des hyperboles d'asymptotes  $v = \pm \Omega(x - x_2)$ . En particulier si  $v_0 = \pm \Omega(x_0 - x_2)$ , l'évolution est décrite par

$$x(t) = x_2 + e^{\pm \Omega t} (x_0 - x_2). \quad (7.40)$$

On constate ainsi qu'il n'y a qu'une seule solution où  $x(t)$  tend vers  $x_2$ , *mais il faut un temps infini pour atteindre  $x_2$*  (en accord avec le théorème affirmant que par chaque point de l'espace de phase passe une seule orbite).

**En conclusion les minima (locaux) de  $U(x)$  définissent les *points d'équilibre stables*, les maxima (locaux) de  $U(x)$  définissent les *points d'équilibre instables*.**

Remarquons que les points stationnaires, qui ne sont pas des extrema locaux (points d'inflexion), définissent également des points d'équilibre instables.



## CHAPITRE 8

# CINÉMATIQUE DU SOLIDE

### 8.1 DÉFINITION DU SOLIDE INDÉFORMABLE

Un solide « réel » est un système composé d'atomes maintenus dans une certaine configuration (moyenne) grâce aux forces interatomiques. Sous l'action de forces extérieures le solide va en général se déplacer, mais il peut également se déformer. Toutefois, dans bien des cas, les déformations sont très petites par rapport aux dimensions du solide, ce qui conduit à introduire le modèle du solide indéformable.

**Un solide indéformable** – ou simplement **solide** – est un système idéal formé d'un ensemble de points dont les distances mutuelles restent constantes au cours de l'évolution.

Solide indéformable

Par extension, on peut considérer que tout point immobile par rapport au solide fait également partie du solide. Il découle de cette définition que pour tout point  $P, Q, R, \dots$  du solide, les distances  $|PQ|, |QR|, \dots$  sont constantes et, du théorème de Pythagore généralisé, les angles  $\widehat{PQR}, \dots$  sont constants. Nous discuterons brièvement le cas des solides réels aux sections 12.7 et 16.5 quand nous étudierons le problème des déformations.

### 8.2 DÉPLACEMENT D'UN SOLIDE

Dans cette section, nous considérons deux déplacements simples, la translation et la rotation. Nous montrerons ensuite que tout déplacement d'un solide est le produit d'une translation et d'une rotation.

Ayant choisi une origine  $O$  dans le référentiel, nous désignons par  $\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_Q, \dots$  la position des points  $P, Q, \dots$  du solide avant le déplacement, et par  $\mathbf{x}'_P, \mathbf{x}'_Q, \dots$  la position de ces points après le déplacement. Un déplacement du solide est ainsi défini par une application  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$ , du référentiel dans lui-même, qui conserve les distances et l'orientation des trièdres.

8.2.1 Translation

Une **translation** est un déplacement défini par

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{s} \tag{8.1}$$

où  $\mathbf{s}$  est appelé vecteur de translation (fig. 8.1).

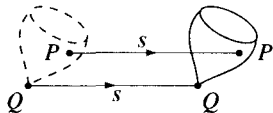


Fig. 8.1 Translation de vecteur  $\mathbf{s}$ .

8.2.2 Rotation autour d'un axe

Une **rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe** (dans le référentiel) est un déplacement qui laisse les points de  $\Delta$  invariants.

La rotation est définie par l'axe  $\Delta$ , un sens que l'on peut représenter par un vecteur unité  $\hat{\mathbf{n}}$  sur  $\Delta$ , et un angle  $\alpha$  (fig. 8.2).

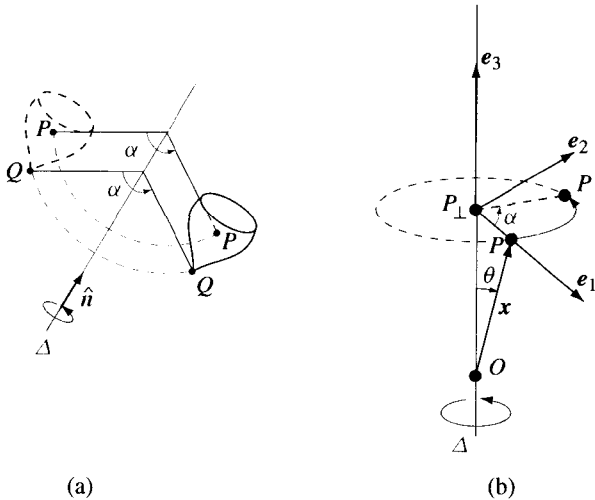


Fig. 8.2 Rotation autour d'un axe  $\Delta$ .

Comme on le voit sur la figure 8.2, en prenant  $O$  sur l'axe  $\Delta$ , et en introduisant les vecteurs orthonormés  $\mathbf{e}_1 = \widehat{P_\perp P}$ ,  $\mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{n}}$ , et  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$ , la rotation  $\mathbf{R}_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}}$  d'un angle  $\alpha$  autour de  $\hat{\mathbf{n}}$  est définie par

Rotation      
$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_{\alpha, \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{x} - \cos \alpha \hat{\mathbf{n}} \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{x}) \tag{8.2}$$

### 8.2.3 Remarques

• Toute rotation d'angle  $\alpha$  autour d'un axe  $\Delta$  peut s'exprimer comme le produit de deux rotations d'angle  $\pi$  autour d'axes  $\delta$  et  $\delta'$ , dans un plan perpendiculaire à  $\Delta$ , coupant l'axe  $\Delta$  en un point  $O$ , avec  $\delta$  quelconque et  $\delta'$  faisant un angle  $\alpha/2$  avec  $\delta$  (fig. 8.3).

En effet, le produit de ces deux rotations laisse l'axe  $\Delta$  invariant et, comme on le voit sur la figure 8.3, les points du plan perpendiculaire à  $\Delta$  effectuent une rotation d'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $\Delta$ .

Réciproquement, le produit de deux rotations d'angle  $\pi$  autour d'axes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  concourants est une rotation autour d'un axe  $\Delta$  perpendiculaire au plan défini par les axes  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , passant par l'intersection de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

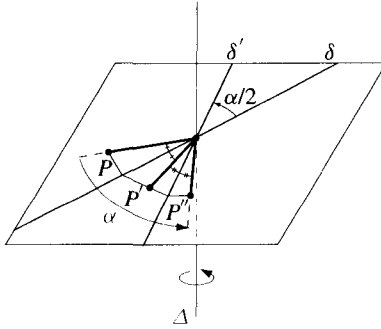


Fig. 8.3 Rotations d'angle  $\pi$  autour de  $\delta$  et  $\delta'$ .

**Propriété .** Le produit de deux rotations d'axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  concourants est une rotation d'axe  $\Delta_3$  passant par l'intersection de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

Rotations d'axes concourants

En effet, en prenant  $\delta'$  perpendiculaire au plan défini par  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , on peut écrire

$$\mathbf{R}_{\alpha_2, \hat{n}_2} = \mathbf{R}_{\pi, \delta_2} \circ \mathbf{R}_{\pi, \delta'}, \quad \mathbf{R}_{\alpha_1, \hat{n}_1} = \mathbf{R}_{\pi, \delta'} \circ \mathbf{R}_{\pi, \delta_1}$$

d'où

$$\mathbf{R}_{\alpha_2, \hat{n}_2} \circ \mathbf{R}_{\alpha_1, \hat{n}_1} = \mathbf{R}_{\pi, \delta_2} \circ \mathbf{R}_{\pi, \delta_1}$$

(car  $\mathbf{R}_{\pi, \delta'} \circ \mathbf{R}_{\pi, \delta'} = 1$ ).

Ainsi le produit des deux rotations peut s'exprimer comme le produit de deux rotations d'angle  $\pi$ , autour d'axes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  concourants ; c'est donc une rotation autour d'un axe  $\Delta_3$ , perpendiculaire au plan défini par  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , passant par l'intersection de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

Il faut insister sur le fait que le produit de deux rotations dépend de l'ordre dans lequel on effectue les rotations. En introduisant la notation

$$\mathbf{R}_{\alpha, \hat{n}} = \mathbf{R}_n \quad \text{où} \quad n = \alpha \hat{n} \quad (8.3)$$

on a en général

Le produit est non commutatif

$$\mathbf{R}_{n_1} \circ \mathbf{R}_{n_2} \neq \mathbf{R}_{n_2} \circ \mathbf{R}_{n_1}.$$

Rotation infinitésimale

- Dans le cas d'une rotation d'angle  $\delta\alpha$  infinitésimal, (8.2) montre qu'*au premier ordre en  $\delta\alpha$*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}_{\delta\alpha} \mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\alpha \wedge \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \delta\alpha = \delta\alpha \hat{n}. \quad (8.4)$$

Ainsi, en se limitant au premier ordre,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\delta\beta}(\mathbf{R}_{\delta\alpha} \mathbf{x}) &= (\mathbf{x} + \delta\alpha \wedge \mathbf{x}) + \delta\beta \wedge (\mathbf{x} + \delta\alpha \wedge \mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{x} + (\delta\alpha + \delta\beta) \wedge \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{R}_{(\delta\beta + \delta\alpha)} \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Le produit de deux rotations infinitésimales autour d'axes concourants est commutatif (au premier ordre), et  $\mathbf{R}_{\delta\beta} \circ \mathbf{R}_{\delta\alpha} = \mathbf{R}_{(\delta\beta + \delta\alpha)}$ .

En particulier, la rotation infinitésimale définie par  $\delta\alpha = \sum_i \delta\alpha_i \mathbf{e}_i$  est le produit des trois rotations d'angles  $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3$  autour des axes  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

- En introduisant un repère orthonormé d'origine  $O$  sur l'axe  $\Delta$ , la rotation (8.2) s'écrit en composantes

Forme matricielle

$$x'_i = \sum_j R_{ij} x_j \quad (8.5)$$

où  $\{R_{ij}\}$  est une matrice orthogonale de déterminant  $+1$  (§ B.1.2). Inversement, toute matrice orthogonale de déterminant  $+1$  définit une rotation autour d'un axe passant par  $O$ .

### 8.2.4 Déplacement général d'un solide

Le déplacement le plus général d'un solide est le produit d'une translation et d'une rotation autour d'un axe.

En effet, considérons un repère orthonormé  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié au solide et un repère orthonormé  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié au référentiel; on admet que les deux repères coïncident avant le déplacement. Quelle que soit la position finale du solide, définie par  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , celle-ci peut être obtenue par la translation de vecteur  $\mathbf{OA}$ , suivie du produit de deux rotations d'axes passant par  $A$ , la première autour de l'axe défini par  $\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3$ , la seconde autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$  (fig. 8.5). Le produit de deux rotations d'axes concourants étant une rotation (§ 8.2.3), la propriété est ainsi démontrée.

### 8.3 ÉVOLUTION D'UN SOLIDE

#### 8.3.1 Théorème préliminaire

De même que le déplacement le plus général d'un solide se compose d'une translation et d'une rotation, nous allons montrer dans cette section que le «mouvement instantané» le plus général se compose d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Avant de définir ces mouvements nous voulons établir un résultat utile pour la suite.

**Théorème.** Soit  $\boldsymbol{\varepsilon}$  un vecteur lié au solide, défini par deux points  $P$  et  $Q$  du solide. Alors

Vecteur lié au solide  
 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \perp \boldsymbol{\varepsilon}$

1. Le vecteur  $\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varepsilon}$  est perpendiculaire à  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .
2. Les projections des vitesses des points  $P$  et  $Q$  sur la droite qui les joint sont égales (fig. 8.4), soit

$$\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{PQ} = \mathbf{v}_Q \cdot \mathbf{PQ}. \quad (8.6)$$

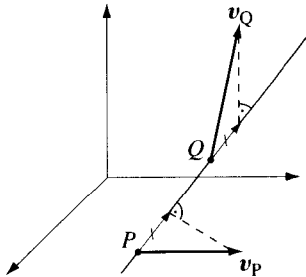
DÉMONSTRATION. Par définition du solide  $|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  est constant, d'où

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = 0 = 2\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}$$

et  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est perpendiculaire à  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Finalement, avec  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{PQ}$ , nous avons :

$$\mathbf{PQ} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{PQ}) = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{PQ} \cdot (\mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P) = 0.$$



**Fig. 8.4** Les projections des vitesses de  $P$  et  $Q$  sur la droite  $PQ$  sont égales.

Ce théorème implique en particulier

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \wedge \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon} \wedge \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{|\boldsymbol{\varepsilon}|^2} + \lambda \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8.7)$$

### 8.3.2 Mouvement de translation

Le mouvement du solide est une *translation pendant l'intervalle de temps*  $[t_0, t_1]$ , si pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ , le déplacement  $\mathbf{x}_P(t_0) \mapsto \mathbf{x}_P(t)$  est une translation, c'est-à-dire

$$\mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_P(t_0) + \mathbf{s}(t). \quad (8.8)$$

Remarquons que cette définition peut s'écrire sous la forme équivalente :

$$\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t = \mathbf{A}_{t_0} \mathbf{P}_{t_0} \quad \text{pour tous les points } A \text{ et } P \text{ du solide.} \quad (8.9)$$

Translation

**Propriété.** Le mouvement pendant  $[t_0, t_1]$  est une translation si et seulement si à tout instant  $t \in [t_0, t_1]$ , tous les points  $P$  du solide ont même vitesse.

**DÉMONSTRATION.** Si le mouvement est une translation pendant  $[t_0, t_1]$ , alors (8.8) entraîne  $\mathbf{v}_P(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}_P = \frac{d}{dt} \mathbf{s} = \mathbf{v}(t)$  pour tout point  $P$  du solide et  $t \in [t_0, t_1]$ . Inversement, la condition  $\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}_A(t)$  pour tous les points  $P$  et  $A$  du solide, et  $t \in [t_0, t_1]$ , implique  $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A = 0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_A)$ , d'où  $\mathbf{x}_P(t) - \mathbf{x}_A(t) = \mathbf{x}_P(t_0) - \mathbf{x}_A(t_0)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}_P(t_0) + \mathbf{s}(t)$  avec  $\mathbf{s}(t) = \mathbf{x}_A(t) - \mathbf{x}_A(t_0)$ .

Cette propriété conduit à introduire la définition suivante.

Translation instantanée

**Le mouvement instantané d'un solide à l'instant  $t$  est une *translation* si, à cet instant, tous les points du solide ont même vitesse :**

$$\mathbf{v}_P(t) = \mathbf{v}(t). \quad (8.10)$$

**Le vecteur  $\mathbf{v}(t)$  est appelé *vitesse (instantanée) de translation*.**

### 8.3.3 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit  $\Delta$  un axe fixe dans le référentiel ; le mouvement du solide est une *rotation d'axe  $\Delta$  pendant l'intervalle de temps*  $[t_0, t_1]$ , si pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  le déplacement  $\mathbf{x}_P(t_0) \mapsto \mathbf{x}_P(t)$  est une rotation d'axe  $\Delta$ .

Rotation d'axe  $\Delta$

**Propriété.** Le mouvement d'un solide pendant  $[t_0, t_1]$  est une rotation d'axe  $\Delta$  fixe si et seulement si à tout instant  $t \in [t_0, t_1]$ , la distribution des vitesses des points du solide est donnée par la relation

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \quad (8.11)$$

où  $\boldsymbol{\omega}$  est un vecteur parallèle à  $\Delta$  et  $A$  est un point quelconque de  $\Delta$ .

DÉMONSTRATION. Si le mouvement est une rotation d'axe  $\Delta$ , alors (8.4) implique

$$\mathbf{v}_P(t) = \dot{\alpha} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{AP}$$

où  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur unité sur  $\Delta$  et  $A \in \Delta$ .

Inversement, si la distribution des vitesses est donnée par (8.11), alors pour tout point  $B$  sur  $\Delta$ , on a  $\mathbf{v}_B(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$  et  $\Delta$  est immobile.

Cette propriété conduit à introduire la définition suivante.

Le mouvement instantané d'un solide à l'instant  $t$  est une **rotation d'axe**  $\Delta(t)$  si, à cet instant, la distribution des vitesses des points du solide est donnée par

Rotation instantanée

$$\mathbf{v}_P(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \mathbf{AP} \quad (8.12)$$

où  $A$  est un point du solide. L'axe  $\Delta(t)$  est la droite passant par  $A$ , parallèle à  $\boldsymbol{\omega}(t)$ .

### 8.3.4 Mouvement général : distribution des vitesses

Nous allons maintenant montrer que le mouvement le plus général d'un solide peut s'exprimer, en ce qui concerne la distribution des vitesses, comme la superposition d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

**Théorème.** A chaque instant  $t$  il existe un pseudo-vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t)$  tel que pour tout point  $P$  du solide

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \quad (8.13)$$

Distribution des vitesses

où  $A$  est un point quelconque du solide et  $\boldsymbol{\omega}(t)$  est indépendant du point  $A$  choisi. Le vecteur  $\boldsymbol{\omega}(t)$  est appelé **vitesse (instantanée) de rotation du solide**.

DÉMONSTRATION. Remarquons pour commencer que si le théorème est établi pour un certain choix du point  $A$ , alors il est établi pour tout point  $B$  du solide et  $\boldsymbol{\omega}$  est indépendant du point choisi. En effet de (8.13) nous tirons

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB}$$

et

$\boldsymbol{\omega}$  ne dépend pas de  $A$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{AB} + \mathbf{BP}) = (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AB}) + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{BP} = \\ &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{BP}. \end{aligned}$$

Démontrons alors (8.13) pour un certain choix du point  $A$ . Soit  $P$  et  $Q$  deux points du solide tels que  $A$ ,  $P$  et  $Q$  ne soient pas colinéaires ; introduisons

$\mathbf{u} = \mathbf{AP}$  et  $\mathbf{v} = \mathbf{AQ}$ . Les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  étant liés au solide, le théorème préliminaire, exprimé sous la forme (8.7), implique

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega}_u \wedge \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega}_v \wedge \mathbf{v}. \quad (8.14)$$

Par ailleurs,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  étant constant,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= 0 = (\boldsymbol{\omega}_u \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\omega}_v \wedge \mathbf{v}) = \\ &= [(\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v) \wedge \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Les trois vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v$  sont donc coplanaires ; par conséquent, il existe  $\lambda$  et  $\mu$  tels que  $\boldsymbol{\omega}_u - \boldsymbol{\omega}_v = -\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$  et  $\boldsymbol{\omega}_u + \lambda\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}_v + \mu\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}$ .

Les équations (8.14) s'écrivent ainsi

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}. \quad (8.15)$$

Montrons maintenant que  $\boldsymbol{\omega}$  est indépendant des points  $P$  et  $Q$  choisis. Pour tout point  $R$  du solide, nous pouvons écrire

$$\mathbf{AR} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

d'où, de (8.15) et (4.18),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{AR}) &= \alpha\dot{\mathbf{u}} + \beta\dot{\mathbf{v}} + \gamma(\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \dot{\mathbf{v}}) = \\ &= \alpha\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} + \beta\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \gamma[(\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v})] = \\ &= \alpha\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} + \beta\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \gamma[\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})] = \\ &= \boldsymbol{\omega} \wedge [\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}] = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AR}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathbf{v}_R = \frac{d}{dt}(\mathbf{OR}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{OA} + \mathbf{AR}) = \mathbf{v}_A + \frac{d}{dt}(\mathbf{AR}) = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AR},$$

ce qui conclut la démonstration.

**Corollaire 1.** Soit  $P$  et  $Q$  deux points du solide. Les projections des vitesses de  $P$  et  $Q$  sur  $\boldsymbol{\omega}$  sont égales :

$$\mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (8.16)$$

En effet, de (8.13) nous obtenons :

$$\mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v}_Q + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{QP}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_Q \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

**Corollaire 2.** La distribution des vitesses d'un solide ayant un point  $C$  fixé est donnée par

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP}.$$



C'est une conséquence immédiate de (8.13) avec  $v_C = 0$ .

### Corollaire 3. Formule de Poisson

Pour tout vecteur  $\varepsilon$  lié au solide

$$\frac{d}{dt}\varepsilon = \omega \wedge \varepsilon \quad (8.17) \quad \dot{\varepsilon} = \omega \wedge \varepsilon$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation du solide.

En effet, un vecteur étant une grandeur ayant les mêmes propriétés que les déplacements, on peut écrire  $\varepsilon = PQ$  et (8.13) implique

$$\frac{d}{dt}\varepsilon = v_Q - v_P = \omega \wedge PQ = \omega \wedge \varepsilon.$$

### 8.3.5 Torseur abstrait $(\omega, v_A)$ et classification des mouvements instantanés

Ayant remarqué que la distribution des vitesses d'un solide définit en chaque point  $A$  du solide une paire de vecteurs liés  $(\omega, v_A)$ , où  $\omega$  est indépendant de  $A$  et  $v_B = v_A + \omega \wedge AB$ , on conclut que l'ensemble des couples  $(\omega, v_A)$  constitue un torseur abstrait (§ 4.6.7) : le théorème de distribution des vitesses n'est rien d'autre que le théorème du transfert et le corollaire 1 ci-dessus exprime l'un des invariants du torseur. Nous pouvons ainsi reprendre la discussion du paragraphe (4.6.6).



POISSON Denis  
Mathématicien français  
(1781-1840)

Torseur abstrait :  
 $\omega$  = résultante  
 $v_A$  = moment

Si  $\omega \neq 0$ , on introduit l'axe central de ce torseur, appelé **axe instantané de rotation** : c'est la droite  $\Delta$  définie par l'ensemble des points  $P$  où  $v_P$  est parallèle à  $\omega$ .

$\Delta$  est la droite parallèle à  $\omega$ , passant par le point  $C$  défini par (4.34)

$$AC = \frac{\omega \wedge v_A}{|\omega|^2} \quad (8.18)$$

et tous les points de  $\Delta$  ont même vitesse, égale à  $(v_A \cdot \hat{\omega}) \hat{\omega}$ .

Pour classifier les mouvements instantanés reprenons alors les conclusions (§ 4.6.6) avec  $A$  un point quelconque du solide :

- Si  $\omega = 0$  et  $v_A = 0$ , le torseur est équivalent à zéro. Le mouvement instantané est le **repos**.
- Si  $\omega = 0$  et  $v_A \neq 0$ , le torseur est un couple. Le mouvement instantané est une **translation**.
- Si  $\omega \neq 0$  et  $v_A \cdot \omega = 0$ , le torseur est équivalent à un vecteur lié. Le mouvement instantané est une **rotation autour de l'axe  $\Delta$**  (8.18).
- Si  $\omega \neq 0$  et  $v_A \cdot \omega \neq 0$ , le mouvement instantané est la superposition d'une rotation  $\omega$  autour de l'axe  $\Delta$  et d'une translation de vitesse  $(v_A \cdot \hat{\omega}) \hat{\omega}$  : par définition c'est un **mouvement hélicoïdal d'axe  $\Delta$** .

Description du  
mouvement  
instantané

### 8.3.6 Distribution des accélérations

**Théorème.** L'accélération de tout point  $P$  du solide est donnée par la relation

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}), \quad (8.19)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  est appelé **accélération (instantanée) de rotation**.

Distribution  
des accélérations

#### DÉMONSTRATION

$$\mathbf{a}_P = \frac{d}{dt} \mathbf{v}_P = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}).$$

Remarquons que le dernier terme de (8.19) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{AP}) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{AP} = |\boldsymbol{\omega}|^2 [(\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{AP}) \hat{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{AP}] = \\ &= -|\boldsymbol{\omega}|^2 \mathbf{P}_\perp \end{aligned} \quad (8.20)$$

où  $\mathbf{P}_\perp$  est la projection de  $P$  sur l'axe  $\Delta$ , parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$  passant par  $A$  (fig. 8.2).

### 8.3.7 Remarque importante

La distribution des vitesses d'un solide ayant à l'instant  $t$  un mouvement instantané de rotation est identique à la distribution des vitesses d'un solide ayant un mouvement uniforme de rotation autour du même axe, mais il n'en va pas de même pour la distribution des accélérations : la condition  $\mathbf{v}_C = 0$  n'implique pas  $\mathbf{a}_C = 0$  et par ailleurs  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  n'est pas nécessairement parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ .

### 8.3.8 Angles d'Euler

Introduisons un repère orthonormé  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié au solide et un repère orthonormé  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié au référentiel (fig. 8.5). Pour tout point  $P$  du solide, nous avons

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_A + \mathbf{AP} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i + \sum_i \xi_i^{(P)} \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (8.21)$$

où, par définition du solide, les composantes  $\xi_i^{(P)} = \mathbf{AP} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$  sont des constantes. Par conséquent, pour paramétriser la position du solide, il suffit de 3 coordonnées pour fixer le point  $A$  et 3 coordonnées pour fixer l'orientation du repère  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  : un solide est un système ayant au maximum 6 degrés de liberté.

Pour paramétriser l'orientation de  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , on utilise souvent les *angles d'Euler*  $(\theta, \varphi, \psi)$  représentés sur la figure 8.5 : la *ligne des nœuds* est l'intersection des plans  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  et  $A\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2$ , orientée dans la direction  $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3 \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_3$  :

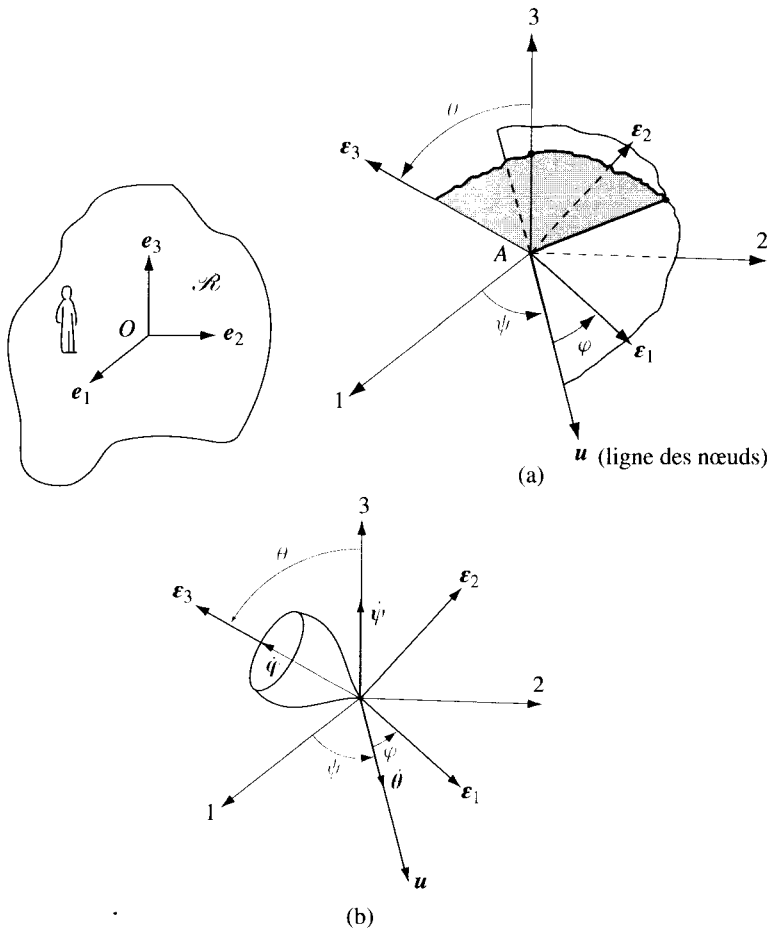


EULER Leonhard  
Mathématicien et  
physicien suisse  
(1707-1783)

- l'**angle de précession**  $\psi$  est défini par les vecteurs  $e_1$  et  $u$  ; le sens positif correspond à la rotation autour de  $e_3$  (amenant  $e_1$  sur  $u$ ) ;
- l'**angle de nutation**  $\theta$  est défini par les vecteurs  $e_3$  et  $\varepsilon_3$  ; le sens positif correspond à la rotation autour de  $u$  (amenant  $e_3$  sur  $\varepsilon_3$ ) ;
- l'**angle de rotation propre**  $\varphi$  est défini par les vecteurs  $u$  et  $\varepsilon_1$  ; le sens positif correspond à celui de la rotation autour de  $\varepsilon_3$  (amenant  $u$  sur  $\varepsilon_1$ ).

Angles d'Euler

De cette manière, à toute position du solide on peut associer trois angles et, inversement, la donnée du point  $A$  et des angles d'Euler détermine la position instantanée du solide.



Ayant choisi comme coordonnées généralisées, les 3 coordonnées du point  $A$  et les 3 angles d'Euler, il nous faut alors exprimer les vecteurs  $\omega$  et  $\dot{\omega}$  en fonction de ces coordonnées généralisées et de leurs dérivées temporelles.

La vitesse de  $P$  est obtenue en dérivant (8.21) par rapport au temps, où les  $\epsilon_i$  sont des fonctions de  $(\theta, \varphi, \psi)$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_A + \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \psi} \dot{\psi} = \\ &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_\theta + \mathbf{v}_\varphi + \mathbf{v}_\psi,\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_\theta$  est la vitesse de  $P$  si  $\theta$  varie seul, d'où  $\mathbf{v}_\theta = \dot{\theta} \mathbf{u} \wedge \mathbf{AP}$ ,

$\mathbf{v}_\varphi$  est la vitesse de  $P$  si  $\varphi$  varie seul, d'où  $\mathbf{v}_\varphi = \dot{\varphi} \epsilon_3 \wedge \mathbf{AP}$ ,

$\mathbf{v}_\psi$  est la vitesse de  $P$  si  $\psi$  varie seul, d'où  $\mathbf{v}_\psi = \dot{\psi} \epsilon_3 \wedge \mathbf{AP}$ .

Par conséquent

Distribution des vitesses  $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}$

où (fig. 8.5 b)

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{u} + \dot{\varphi} \epsilon_3 + \dot{\psi} \epsilon_3 = \dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}. \quad (8.22)$$

$\dot{\theta} \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\theta}}$  est la **vitesse de nutation** ;

$\dot{\varphi} \epsilon_3 = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$  est la **vitesse de rotation propre** ;

$\dot{\psi} \epsilon_3 = \dot{\boldsymbol{\psi}}$  est la **vitesse de précession**.

Ainsi, relativement au repère  $A \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$  lié au solide, nous avons

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega_i \epsilon_i \quad (8.23)$$

avec

Composantes de  $\boldsymbol{\omega}$  par rapport à  $A \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \varphi & + & \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ -\dot{\theta} \sin \varphi & + & \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\varphi} & + & \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

En outre,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i (\dot{\omega}_i \epsilon_i + \omega_i \dot{\epsilon}_i)$$

mais en vertu de la formule de Poisson

$$\sum_i \omega_i \dot{\epsilon}_i = \sum_i \omega_i \boldsymbol{\omega} \wedge \epsilon_i = \sum_i \sum_j \omega_i \omega_j \epsilon_j \wedge \epsilon_i = 0$$

d'où

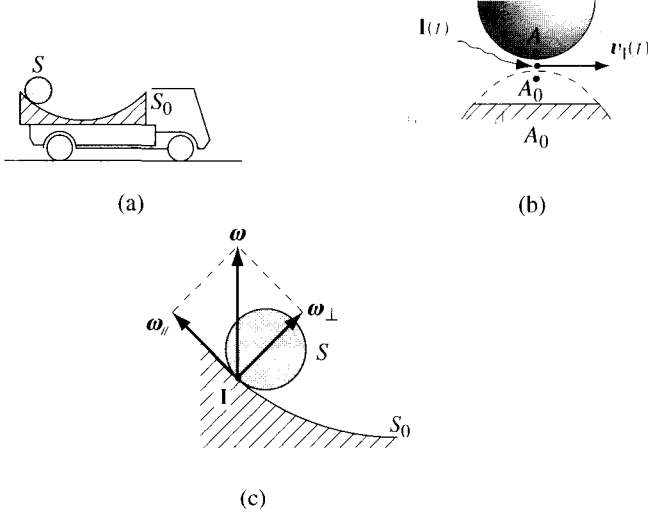
Composantes de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  par rapport à  $A \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \sum_i \dot{\omega}_i \epsilon_i = \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

## 8.4 SOLIDES EN CONTACT

### 8.4.1 Définitions

Considérons un solide  $S$  qui évolue de manière telle qu'il reste constamment en contact avec un solide  $S_0$  (fig. 8.6).



**Fig. 8.6** Solide  $S$  en contact avec un solide  $S_0$ . Définition de  $A \in S$ ,  $A_0 \in S_0$  et  $I$  point de contact.

Pour simplifier la discussion, nous supposons que le contact est ponctuel et que les solides admettent un même plan tangent au point de contact. Nous pouvons toujours choisir  $S_0$  comme référentiel – ce qui revient à considérer  $S_0$  immobile – et analyser le mouvement de  $S$  par rapport à  $S_0$ .

Soit  $I = I(t)$  le point de contact à l'instant  $t$ ,  $A$  le point fixé dans  $S$  qui coïncide avec  $I$ , et  $A_0$  le point fixé dans  $S_0$  qui coïncide avec  $I$ , à cet instant (fig. 8.6 b).

La vitesse de  $A$  par rapport à  $S_0$  est dans le plan tangent commun à  $S_0$  et  $S$ .

En effet, la trajectoire de  $I$  étant sur la surface de  $S_0$ ,  $\mathbf{v}_I(t)_{S_0}$  est dans le plan tangent à  $S_0$  en  $I$ ; de même, en prenant  $S$  comme référentiel, on conclut que  $\mathbf{v}_I(t)_S$  est dans le plan tangent à  $S$  en  $I$ . Or le théorème de composition des vitesses (§ 9.3.2) implique

$$\mathbf{v}_I)_{S_0} = \mathbf{v}_I)_S + \mathbf{v}_I^{(\text{entraînement})},$$

où la vitesse d'entraînement est la vitesse (par rapport à  $S_0$ ) du point fixé dans  $S$  qui coïncide avec  $I$  à l'instant  $t$  (c'est-à-dire le point  $A$ ). Par conséquent,

$$\mathbf{v}_I)_{S_0} = \mathbf{v}_I)_S + \mathbf{v}_A)_{S_0}$$

et  $\mathbf{v}_A)_{S_0}$  est dans le plan tangent à  $S_0$  et  $S$ .

Par définition,  $\mathbf{v}_A)_{S_0}$  est la **vitesse de glissement** du solide  $S$  par rapport à  $S_0$ .

On dira que le mouvement instantané est un **roulement sans glissement** de  $S$  sur  $S_0$  si

$$\mathbf{v}_A)_{S_0} = 0. \tag{8.25}$$

Si  $S_0$  est en mouvement par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  que l'on a choisi, le théorème de composition des vitesses (§ 9.3.2) s'exprime par

$$\mathbf{v}_A)_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_A)_{S_0} + \mathbf{v}_{A_0})_{\mathcal{R}}.$$

Roulement sans glissement

La condition de roulement sans glissement (8.25) devient

$$\mathbf{v}_A)_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{A_0})_{\mathcal{R}} \tag{8.26}$$

Finalement, la composante du vecteur de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  parallèle au plan tangent est appelée **vitesse de roulement** et la composante perpendiculaire à ce plan **vitesse de pivotement** (fig. 8.6 c).

8.4.2 Exemple. Bille dans une sphère

Considérons une bille de rayon  $r$  qui roule sans glisser à l'intérieur d'une sphère immobile de rayon  $R$ . Nous voulons exprimer la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  en fonction des coordonnées  $(\theta, \varphi)$  du centre de la bille (fig. 8.7).

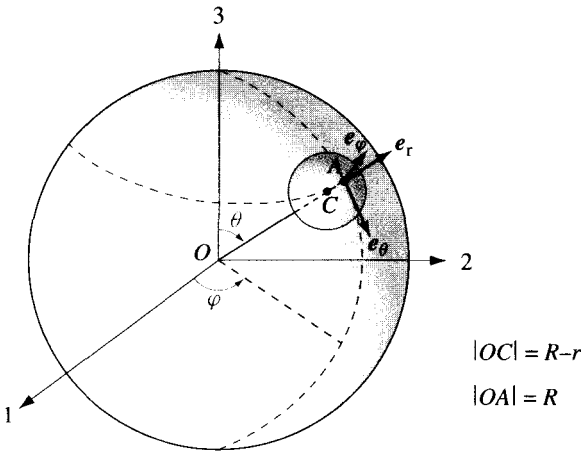


Fig. 8.7 Bille roulant sans glisser dans une sphère.

Soit  $C$  le centre de la bille et  $A$  le point de la bille en contact avec la sphère. La vitesse de  $C$  en coordonnées sphériques est donnée par

$$\mathbf{v}_C = (R - r) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + (R - r) \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (8.27)$$

Par ailleurs, de la distribution des vitesses dans un solide (8.12) et de la condition de roulement sans glissement (8.25)  $\mathbf{v}_A = 0$ , on déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AC} = \\ &= -(\omega_r \mathbf{e}_r + \omega_\theta \mathbf{e}_\theta + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi) \wedge r \mathbf{e}_r = \\ &= r \omega_\theta \mathbf{e}_\varphi - r \omega_\varphi \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Ainsi en identifiant (8.27) et (8.28), on trouve

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_r \mathbf{e}_r + \left( \frac{R}{r} - 1 \right) [\sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\theta - \dot{\theta} \mathbf{e}_\varphi]. \quad (8.29) \quad \text{Vitesse de rotation}$$

La vitesse de pivotement  $\omega_r \mathbf{e}_r$  n'est pas déterminée par les coordonnées sphériques.

L'équation (8.28) montre que la vitesse de roulement  $\boldsymbol{\omega}_{\text{roul}} = \boldsymbol{\omega} - \omega_r \mathbf{e}_r = \omega_\theta \mathbf{e}_\theta + \omega_\varphi \mathbf{e}_\varphi$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}_C$ , de norme  $|\boldsymbol{\omega}_{\text{roul}}| = |\mathbf{v}_C|/r$ .

Remarquons pour terminer que l'espace des vitesses est de dimension 3 ( $\omega_r, \omega_\theta, \omega_\varphi$ ) inférieure à la dimension de l'espace de configuration (deux coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  pour le centre  $C$  et trois angles d'Euler pour l'orientation de la bille); on dit alors que le système est *non holonôme* (§ 4.2.3 et 12.6.2).

Système  
non-holonôme

### 8.4.3 Exemple. Meule

Considérons une meule, entraînée par un axe vertical, qui roule sans glisser sur le sol (fig. 8.8).

Le système est holonôme à 1 degré de liberté et l'on choisit l'angle  $\psi$  comme coordonnée généralisée. On désire exprimer la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$ , la vitesse de rotation propre  $\omega_p$ , et la vitesse de précession  $\boldsymbol{\Omega}$ , en fonction de  $\psi$  et  $\dot{\psi}$  (la vitesse de nutation est nulle car  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

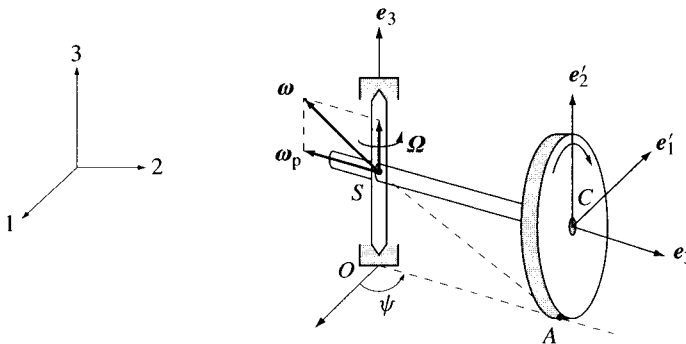


Fig. 8.8 Meule d'un moulin.



Meule d'un moulin à olives

Le point  $S$  étant immobile,  $\mathbf{v}_S = 0$ . Par ailleurs, le mouvement de la meule étant un roulement sans glissement  $\mathbf{v}_A = 0$ . Par conséquent, le mouvement instantané est une rotation d'axe  $AS$ , d'où

$$\boldsymbol{\omega} = \widehat{\omega AS} = \omega_p \mathbf{e}'_3 + \Omega \mathbf{e}_3. \tag{8.30}$$

Or  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AC} = (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\Omega}) \wedge \mathbf{AC} = \boldsymbol{\omega}_p \wedge \mathbf{AC} = -\omega_p r \mathbf{e}'_1$

et  $\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{SC} = (\boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\Omega}) \wedge \mathbf{SC} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{SC} = \Omega R \mathbf{e}'_1$ .

Relation entre les  
vitesses de rotation  
propre et de  
précession

Comme  $\Omega = \dot{\psi}$ , on obtient finalement

$$\omega_p = -\frac{R}{r} \dot{\psi}. \tag{8.31}$$

Dans ce cas,  $\boldsymbol{\Omega}$  est la vitesse de pivotement et  $\boldsymbol{\omega}_p$  la vitesse de roulement.

8.5 MOUVEMENT PLAN

8.5.1 Définition

Le mouvement d'un solide est dit **plan** – ou plan sur plan – si à tout instant les vitesses de chaque point sont parallèles à un plan  $\Pi_0$  fixé (fig. 8.9 a).

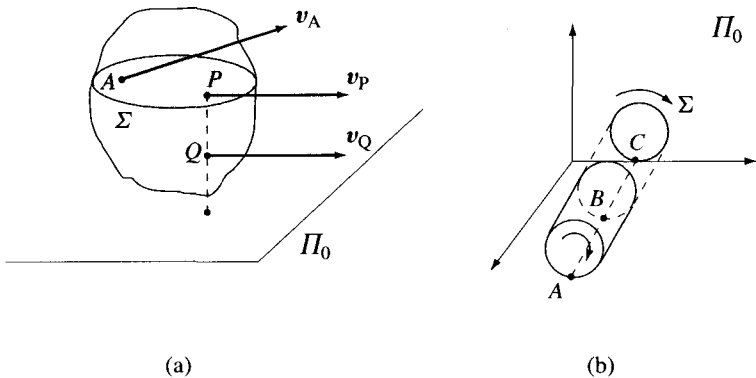


Fig. 8.9 Mouvements plans : (a) cas général ; (b) cylindre roulant sur un plan.

C'est par exemple le mouvement d'un cylindre roulant sans glisser sur un plan immobile (fig. 8.9 b). En effet, dans ce cas, la génératrice de contact  $AB$  est l'axe instantané de rotation et  $\mathbf{v}_p = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}$  est parallèle au plan  $\Pi_0$  perpendiculaire à l'axe du cylindre. Le mouvement d'une pierre de curling sur la glace ( $= \Pi_0$ ), ou celui de la bielle du système piston-bielle-manivelle (fig. 8.10), sont d'autres exemples de mouvements plans.



Les vecteurs  $\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP}$  étant pour tout  $P$  parallèles à  $\Pi_0$ , on conclut que  $\boldsymbol{\omega}$  est perpendiculaire à  $\Pi_0$ . De plus, tout point  $Q$  situé sur une même perpendiculaire à  $\Pi_0$  (fig. 8.9) aura même vitesse et il suffit par conséquent d'étudier le mouvement d'une section plane  $\Sigma$  parallèle à  $\Pi_0$ .

En conclusion, l'étude du mouvement plan se ramène à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide  $\Sigma$  se déplaçant sur un plan.

Finalement, la condition  $\mathbf{v}_P \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  implique que le mouvement instantané de  $\Sigma$  est soit une translation, soit une rotation autour du point  $C(t)$  du solide, défini par l'équation (8.18), appelé **centre instantané de rotation**. Ainsi pour tout point  $P$  de  $\Sigma$  nous avons  $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{CP}$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{CP}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}_P$  :

Centre instantané  
de rotation

Connaissant les vitesses de deux points  $A$  et  $B$  de  $\Sigma$ , le centre instantané de rotation est à l'intersection des perpendiculaires à  $\mathbf{v}_A$  et  $\mathbf{v}_B$  (fig. 8.10).

### 8.5.2 Exemple. Système piston-bielle-manivelle

Considérons la bielle  $AB$  du système piston-bielle-manivelle (fig. 8.10). Le centre instantané de rotation  $C(t)$  est sur les perpendiculaires à  $\mathbf{v}_A$  et  $\mathbf{v}_B$ .

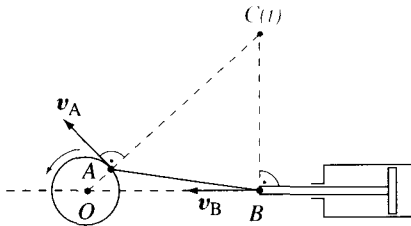


Fig. 8.10 Piston, bielle  $AB$ , manivelle  $OA$ .

Comme  $\mathbf{v}_A$  est perpendiculaire à  $\mathbf{OA}$  et  $\mathbf{v}_B$  est parallèle à  $\mathbf{OB}$ ,  $C(t)$  se trouve à l'intersection des droites définies par  $OA$  et par la perpendiculaire à  $OB$ .

### 8.5.3 Base et roulante

On appelle **base** le lieu des points fixés dans  $\Pi_0$  – et **roulante** le lieu des points fixés dans  $\Sigma$  – défini par les centres instantanés de rotation.

Base et roulante

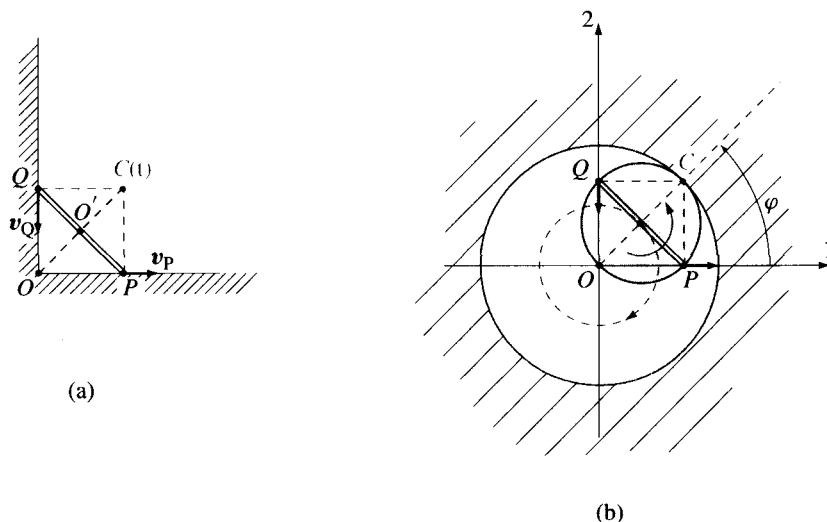
On peut montrer que tout mouvement plan correspond à un roulement sans glissement de la roulante sur la base.

Dans l'exemple du cylindre roulant sans glisser sur un plan, la roulante est la circonférence d'une section et la base est la droite sur laquelle roule cette section.

Remarquons pour terminer que ces notions seront utiles dans les cas où l'on connaît explicitement la base et la roulante.

### 8.5.4 Exemple. Tige s'appuyant sur deux droites perpendiculaires

Étudions le mouvement d'une tige  $PQ$ , de longueur  $\ell$ , s'appuyant sur deux droites perpendiculaires (fig. 8.11). Le centre instantané de rotation  $C(t)$  (fig. 8.11 a) se trouve à l'intersection des deux perpendiculaires à  $\mathbf{v}_P(t)$  et  $\mathbf{v}_Q(t)$ .



**Fig. 8.11** (a) centre instantané de rotation  $C(t)$  ; (b) roulante et base pour une tige s'appuyant sur deux droites perpendiculaires.

Comme  $|OC| = |PQ| = \ell$ , la base est un cercle de rayon  $\ell$ . Par ailleurs  $|O'C| = \ell/2$  et la roulante est un disque de rayon  $\ell/2$ , centré en  $O'$  (fig. 8.11 b).

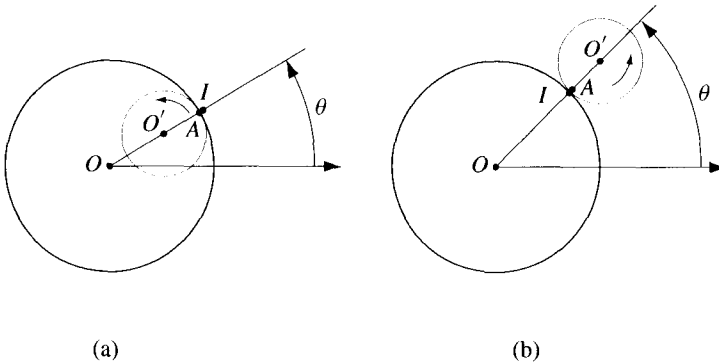
Ainsi le mouvement de la tige correspond au roulement sans glissement d'un disque de rayon  $\ell/2$  à l'intérieur d'un cercle de rayon  $\ell$  (fig. 8.11 b).

En particulier, les points  $P$  et  $Q$  de la figure 8.11 b, ont un mouvement rectiligne : nous avons ainsi un dispositif transformant un mouvement circulaire en mouvement rectiligne. Si le disque roule à vitesse constante, alors  $\dot{\varphi} = \text{cste}$ , et le mouvement de  $P$  est oscillatoire harmonique :

$$\overrightarrow{OP}(t) = \ell \cos \varphi(t) \widehat{OP}(0).$$

### 8.5.5 Exemple. Roulement d'un disque sur un autre

Considérons le roulement sans glissement d'un disque de rayon  $r$  (roulante) à l'intérieur, ou à l'extérieur, d'un disque immobile de rayon  $R$  (base), et cherchons la vitesse du centre instantané de rotation (fig. 8.12).



**Fig. 8.12** Roulement d'un disque sur un autre.

Soit  $A$  le point du disque mobile en contact avec le disque immobile et  $I$  le point de contact (fig.8.12).

De  $\mathbf{v}_A = 0$ ,  $\mathbf{v}_{O'} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AO}'$ ,

et  $\mathbf{v}_{O'} = (R - r) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  (fig. 8.12 a), ou  $\mathbf{v}_{O'} = (R + r) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  (fig. 8.12 b), nous avons,

$$\begin{aligned} (R - r) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta &= -\omega r \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = -\frac{\omega r}{R - r} \\ \text{ou} \\ (R + r) \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta &= \omega r \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{\omega r}{R + r}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

En conclusion, de  $\mathbf{v}_I = R \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$  on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= -\omega \frac{Rr}{R - r} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{disque à l'intérieur}) \\ \text{ou} \\ \mathbf{v}_I &= \omega \frac{Rr}{R + r} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{disque à l'extérieur}). \end{aligned} \quad (8.33)$$

Détermination de la vitesse du centre instantané de rotation en fonction de  $\omega$  et des rayons de courbure de la base et de la roulante

De façon générale, connaissant les rayons de courbure  $R$  et  $r$  de la base et de la roulante, ainsi que la vitesse de rotation  $\omega$  du solide, alors la vitesse  $\mathbf{v}_I$  du centre instantané de rotation est tangente à la base, de norme donnée par l'une des équations (8.33), selon que les centres de courbure se trouvent du même côté, ou non, de la base.

## 8.6 PROBLÈMES

**8.6.1** Quelle est la vitesse de rotation de la lune par rapport au référentiel géocentrique ? Où se trouve le centre instantané de rotation ? Rotation de la lune

**8.6.2** Un cylindre roule sans glisser sur le pont d'un camion. Trouver la relation entre la vitesse de rotation  $\omega$  du cylindre, la vitesse  $v_C$  de l'axe du cylindre par rapport à la route, et la vitesse  $u$  du camion.

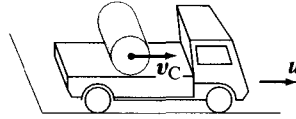


Fig. 8.13

**8.6.3** Un disque de rayon  $r$  roule sans glisser sur un disque immobile de rayon  $R$  (fig. 8.14). Exprimer la vitesse de rotation du disque en fonction de  $\dot{\theta}$ . Dans le cas où  $\dot{\theta}$  est constant, exprimer la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  du disque en fonction de  $\dot{\theta}$ .

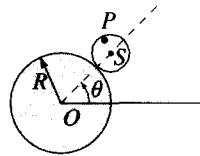


Fig. 8.14

Modèle de  
Tycho Brahé

**8.6.4** Le mouvement du point  $P$  de l'exercice précédent est analogue au mouvement d'une planète dans le modèle de Tycho Brahé ( $O = \text{Terre}$ ,  $S = \text{Soleil}$ ,  $P = \text{planète}$ ). Quels sont les rayons  $r$  et  $R$  associés au mouvement de Vénus ?

**8.6.5** Exprimer la vitesse de rotation  $\omega$  et l'accélération de rotation  $\dot{\omega}$  de la tige de l'exercice 5.7.3 en fonction de  $(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ .

Piston - bielle -  
manivelle

**8.6.6** Exprimer la vitesse du piston du système piston-bielle-manivelle (fig. 8.10) en fonction de  $(\theta, \dot{\theta})$ , à partir du théorème de distribution des vitesses appliqué à la bielle.

**8.6.7** Trouver la vitesse du point  $A_n$  du système articulé (fig. 8.15), sachant que  $\mathbf{v}_A = -\mathbf{v}_B = v_A \mathbf{e}_2$  ( $|A_i B_{i+1}| = |B_i A_{i+1}| = \ell$ ).

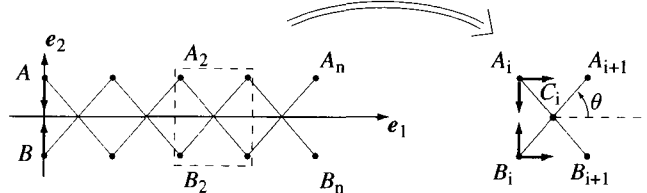


Fig. 8.15

(Idée : exprimer pour commencer la vitesse de  $A_{i+1}$  en fonction de  $\mathbf{v}_{A_i}$  et  $\theta$ .)

**8.6.8** Exprimer les composantes cartésiennes de la vitesse  $\omega$  et de l'accélération  $\dot{\omega}$  de rotation de l'antenne de l'exercice 5.7.14 en fonction des angles  $\theta$ ,  $\varphi$  et de leurs dérivées.

**8.6.9** On considère le système de la figure 8.16 : le cylindre de rayon  $R$  repose sur les petits cylindres de rayon  $R_1$  solidaires des roues de rayon  $R_2$ . Le tout avance avec une vitesse  $v_0$  constante par rapport au sol. Quelle est la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  du cylindre s'il y a roulement sans glissement ?

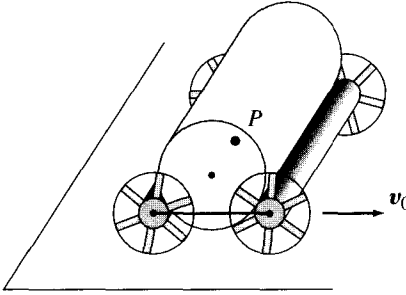


Fig. 8.16

**8.6.10** On tire sur le fil d'une bobine avec une vitesse horizontale  $v_0$  constante (fig. 8.17). Déterminer la vitesse de rotation de la bobine et la vitesse du point  $C$ . Trouver l'accélération des points  $A$  et  $C$  de la bobine. (La bobine roule sans glisser sur le sol.)

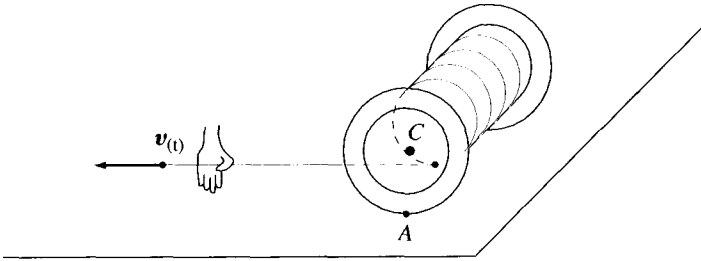


Fig. 8.17

**8.6.11** Un cerceau roule sans glisser sur le sol en restant constamment vertical (fig. 8.18). Montrer que la vitesse d'un point  $P$  du cerceau est donnée par

$$v_P = R [(\cos \theta + 1) \dot{\theta} \mathbf{e}_1 + \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{e}_2 - \sin \theta \dot{\theta} \mathbf{e}_3]$$

où  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  est un repère avec  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$  dans le plan du cerceau.

On remarquera que la dimension de l'espace des vitesses ( $= 2$ ) est inférieure à la dimension de l'espace de configuration ( $n = 4$ ) : c'est un système à liaisons non holonômes (§ 12.6.2).

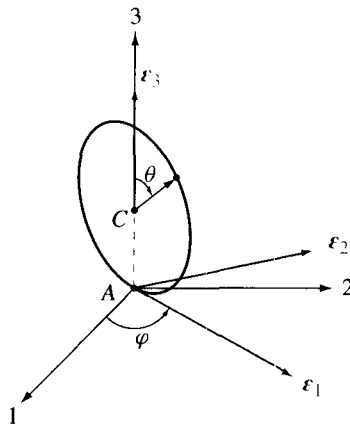


Fig. 8.18

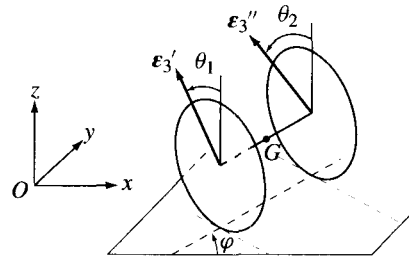


Fig. 8.19

**Essieu 8.6.12** Un essieu est formé de deux roues identiques de rayon  $R$ , reliées par un axe de longueur  $\ell$  autour duquel les roues tournent de façon indépendante tout en restant perpendiculaires à l'axe (fig. 8.19). Le système est paramétrisé par les coordonnées généralisées  $(\xi, \eta, \varphi, \theta_1, \theta_2)$  où  $(\xi, \eta, R)$  sont les coordonnées cartésiennes de  $G$  relativement à  $Oxyz$ . On suppose que l'essieu roule sans glisser sur un plan. Établir les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \frac{R}{2\ell} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \\ \dot{\xi} = -\frac{R}{2} \sin \varphi (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\eta} = \frac{R}{2} \cos \varphi (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{cases}$$

**Roulement à billes 8.6.13** Un roulement à billes est constitué de deux anneaux de rayons  $R_i$  et  $R_e$  (fig. 8.20). Exprimer la relation entre la vitesse de rotation  $\omega$  des billes et les vitesses de rotation  $\omega_i$  et  $\omega_e$  des anneaux (en admettant qu'il y a roulement sans glissement).

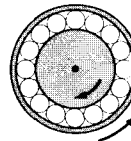


Fig. 8.20

## CHAPITRE 9

# MOUVEMENTS RELATIFS NON RELATIVISTES

La description d'un phénomène physique exige un certain nombre de choix : choix du référentiel, des coordonnées, des variables, des unités, ... A priori ces choix sont arbitraires et le critère qui nous guidera est celui de la plus grande simplicité dans l'étude du phénomène considéré. Cependant, si l'on veut prétendre à une description objective de la réalité et, de plus, si l'on veut utiliser cet arbitraire pour simplifier les calculs, il est nécessaire de pouvoir comparer les résultats obtenus par des observateurs ayant fait des choix différents.

Les concepts introduits jusqu'ici (position d'un point, vitesse, accélération, trajectoire) ont toujours été définis par rapport à un référentiel. Le but de ce chapitre est de montrer comment se transforment ces grandeurs lorsque l'on change de référentiel.

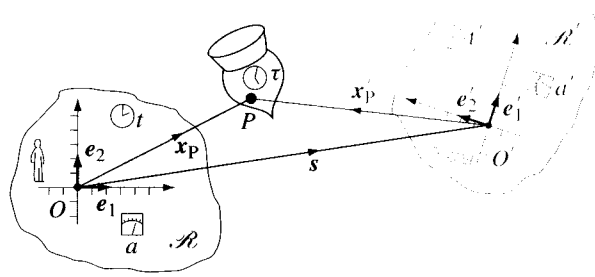
Nous analyserons pour commencer les questions de cinématique en nous basant sur les axiomes non relativistes. Les problèmes de dynamique seront abordés au chapitre 15 et ceux liés aux grandes vitesses (axiomes relativistes) au chapitre 21.

### 9.1 ÉNONCÉ DU PROBLÈME

Un système matériel muni d'une horloge indiquant un temps  $\tau$  est observé à partir de deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement l'un par rapport à l'autre. Nous voulons comparer les résultats obtenus relativement à ces deux référentiels. Pour fixer les idées, nous considérons  $\mathcal{R}$  immobile (*nous sommes dans  $\mathcal{R}$* ) et  $\mathcal{R}'$  en mouvement; ainsi, *nous* qualifierons d'*absolues* les grandeurs mesurées relativement à  $\mathcal{R}$  et de *relatives* les grandeurs mesurées relativement à  $\mathcal{R}'$ . Il faut cependant insister sur le fait que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  jouent des rôles symétriques et que la dénomination "absolue" et "relative" est une convention. Nous supposons que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  disposent des mêmes appareils de mesure, c'est-à-dire que pour tout appareil  $A$  dans  $\mathcal{R}$ , il existe un appareil identique  $A'$  dans  $\mathcal{R}'$ . On utilisera indifféremment la notation  $A$  ou  $A)_{\mathcal{R}}$  ou  $A_a$  ( $= A$  absolu) pour l'observable définie dans le référentiel absolu  $\mathcal{R}$  et  $A'$  ou  $A)_{\mathcal{R}'}$  ou  $A_r$  ( $= A$  relatif)

Temps propre  $\tau$

pour désigner l'observable correspondante définie dans le référentiel relatif  $\mathcal{R}'$ .



**Fig. 9.1** Observation du système à partir des deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

Au paragraphe 1.6, nous avons vu qu'en *physique classique* l'état du système est caractérisé dans  $\mathcal{R}$  par les variables  $(t, x_1, \dots, x_n)$  où  $t$  est le temps indiqué par l'horloge de  $\mathcal{R}$  et toute observable  $A$  est représentée par une fonction  $a = a(t, x_1, \dots, x_n)$ ; l'évolution du système est définie par  $(t(\tau), x_1(\tau), \dots, x_n(\tau))$ , ce qui définit l'évolution  $a(\tau)$  de l'observable  $A$ . Désignons par  $(t', x'_1, \dots, x'_n)$  les variables correspondantes dans  $\mathcal{R}'$ ; l'observable  $A'$  sera représentée par une fonction  $a' = a'(t', x'_1, \dots, x'_n)$ , où  $t'$  est le temps indiqué par l'horloge dans  $\mathcal{R}'$ , et l'évolution par  $(t'(\tau), x'_1(\tau), \dots, x'_n(\tau))$ . Le problème qui nous intéresse est de trouver la relation entre les valeurs  $t$  et  $t'$ ,  $x_i$  et  $x'_i$ , ainsi que la relation entre les fonctions associées aux observables dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

Dans le cas particulier de la *mécanique classique*, l'état instantané est entièrement défini par la position et la vitesse de chaque point du système (chap. 11). Ainsi, ayant introduit les repères  $Oe_1e_2e_3$  dans  $\mathcal{R}$  et  $O'e'_1e'_2e'_3$  dans  $\mathcal{R}'$ , le changement de référentiel définit une transformation  $g$  de  $\mathbb{R}^7$  dans  $\mathbb{R}^7$

$$g: (t, x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3) \mapsto (t', x'_1, x'_2, x'_3, v'_1, v'_2, v'_3) \quad (9.1)$$

reliant les mesures effectuées dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ . En particulier, l'évolution du point  $O'$  est décrite dans  $\mathcal{R}'$  par  $(t', 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  et dans  $\mathcal{R}$  par  $(t, s_1, s_2, s_3, u_1, u_2, u_3)$  où

$$s = \overrightarrow{OO'} \quad \text{et} \quad u = v_{O'} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} s \Big|_{\mathcal{R}}. \quad (9.2)$$

L'objectif de ce chapitre consiste à trouver la transformation (9.1), puis à relier l'expression de la vitesse et de l'accélération dans ces deux référentiels.

Rappelons encore que pour tout point  $P$  du système et tout référentiel  $\mathcal{R}$  on a défini le point coïncident  $P_t$ , point fixé dans  $\mathcal{R}$  qui coïncide avec  $P$  à l'instant  $t$  : c'est la marque mise par l'observateur dans son référentiel pour repérer la position instantanée. Ayant introduit deux référentiels, il existe alors deux points coïncidents avec  $P$  à l'instant  $\tau$ , soit  $P_t$  dans  $\mathcal{R}$  et  $P'_t$  dans  $\mathcal{R}'$ , avec  $t = t(\tau)$ ,  $t' = t'(\tau)$ . On pourra ainsi considérer le mouvement de  $P'_t$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Changement de  
référentiel

Points coïncidents  
dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$



## 9.2 AXIOMES NON RELATIVISTES

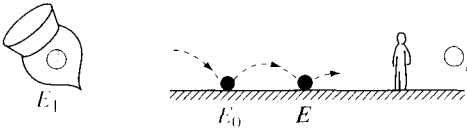
### 9.2.1 Intervalle de temps

Pour tout événement  $E$ , désignons par  $t(E)$  et  $t'(E)$  les temps indiqués respectivement par les horloges de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  à l'instant de cet événement.

Soit deux événements  $E_0$  et  $E_1$ , définis par exemple par le choc d'une balle sur le sol et la position de l'aiguille sur l'horloge  $H_S$  liée au système matériel (fig. 9.2).

Nous disons que les deux événements sont *simultanés par rapport à  $\mathcal{R}$*  si  $t(E_1) = t(E_0)$ , et qu'ils sont *simultanés par rapport à  $\mathcal{R}'$*  si  $t'(E_1) = t'(E_0)$ .

Simultanéité



**Fig. 9.2** Deux événements  $E_0$  (choc sur le sol) et  $E_1$  (position de l'aiguille de l'horloge) simultanés.

Les expériences journalières, effectuées à des vitesses inférieures à 10 km/s, montrent que si deux événements sont simultanés par rapport à un observateur, alors ils sont simultanés par rapport à tout observateur. (Par exemple si le passage du train dans un village est simultané à la position 12:07 sur la montre de la gare pour le chef de gare, ces deux événements sont également simultanés pour le voyageur dans le train.) Ces observations conduisent à introduire l'axiome suivant.

**Axiome 1. Non relativiste.** Deux événements simultanés par rapport à  $\mathcal{R}$  sont simultanés par rapport à tout autre référentiel  $\mathcal{R}'$ .

Soit  $t(\tau)$ ,  $t'(\tau)$  les temps indiqués par les horloges dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  lorsque l'horloge  $H_S$  indique  $\tau$ . En vertu de l'axiome 1 les événements  $\tau$ ,  $t(\tau)$ ,  $t'(\tau)$ , (positions respectives des aiguilles des horloges) sont simultanés par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Pour des horloges identiques dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (même appareil, même unité, mais pas nécessairement le même zéro), nous pouvons admettre que

$$t(\tau) = t'(\tau) + s_0 \quad (9.3)$$

où  $s_0$  est une constante qui ne dépend que de l'origine du temps choisie par  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ .

Pour tout événement  $E$ , on peut introduire  $\tau_E$  et  $\tau'_E$  définis par les positions de l'aiguille de l'horloge  $H_S$  simultanées à  $E$  relativement à  $\mathcal{R}$  et à  $\mathcal{R}'$ . En vertu de l'axiome 1, nous aurons  $\tau_E = \tau'_E$  et par conséquent de (9.3)

$$t(E) = t(\tau_E) = t'(\tau'_E) + s_0 = t'(E) + s_0.$$

Nous avons ainsi obtenu la *formule de transformation du temps*

$$t = t' + s_0 \tag{9.4}$$

et  $s_0$  est le temps indiqué par  $\mathcal{R}$  lorsque l'horloge de  $\mathcal{R}'$  indique  $t' = 0$ . Il est alors toujours possible de synchroniser les horloges dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en posant  $s_0 = 0$ .

En mécanique classique il existe un temps universel

En conclusion, il suit de l'axiome 1 qu'il existe un **temps universel** et il est toujours possible de poser  $t = t'$ .

9.2.2 Intervalle de longueur

En vertu de l'axiome 1, il est possible de comparer les intervalles de longueur mesurés dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  entre deux événements *simultanés*. Considérons par exemple les événements  $E_1$  et  $E_2$  définis par une lumière enclenchée au même instant aux extrémités d'un train en mouvement sur une voie rectiligne (fig. 9.3).

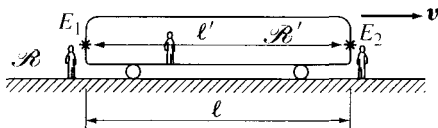


Fig. 9.3 Train sur une voie rectiligne ;  $E_1$  et  $E_2$  sont simultanés.

L'observation montre que la distance entre ces deux événements mesurée dans le train ( $\ell'$ ) est égale à la distance mesurée par des ouvriers immobiles à côté de la voie ( $\ell$ ) : c'est la longueur du train. Nous sommes ainsi conduits à l'axiome suivant.

**Axiome 2. Non relativiste.** Les intervalles de longueur (= distance) entre deux événements simultanés mesurés dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont égaux, c'est-à-dire

$$|P_t Q_t| = |P'_t Q'_t| \text{ où } t = t(\tau) \text{ et } t' = t'(\tau).$$

En conséquence, tout solide par rapport à  $\mathcal{R}'$  est un solide par rapport à  $\mathcal{R}$  et réciproquement. En outre, les longueurs mesurées sur ce solide (longueur du train, longueur d'une règle) ne dépendent pas du référentiel.

9.2.3 Conséquences des axiomes non relativistes

Référentiel  $\equiv$  solide

Il suit des axiomes 1 et 2 que  $\mathcal{R}'$  est un solide par rapport à  $\mathcal{R}$  et inversement tout solide définit un référentiel.

Le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est alors caractérisé par deux vecteurs  $v_O$  et  $\omega_e$  (chap. 8), appelés respectivement *vitesse de translation* et

**vitesse de rotation** de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . S'il est nécessaire d'être plus explicite, on écrit  $\mathbf{v}_{O'}^{\mathcal{R}}$  et  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ .

De plus, la vitesse et l'accélération par rapport à  $\mathcal{R}$  de n'importe quel point  $P'$  fixé dans  $\mathcal{R}'$  est donnée par (8.13) et (8.19), c'est-à-dire

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'P' \quad (9.5)$$

$$\mathbf{a}_{P'} = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \wedge \mathbf{O}'P' + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'P'). \quad (9.6)$$

Finalement, il suit des axiomes non relativistes que les droites dans  $\mathcal{R}'$  sont des droites dans  $\mathcal{R}$ ; les angles mesurés dans  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$  sont égaux; un repère orthonormé dans  $\mathcal{R}'$  est également un repère orthonormé relativement à  $\mathcal{R}$ .

### 9.3 COMPOSITIONS DES VITESSES ET DES ACCÉLÉRATIONS

#### 9.3.1 Transformation des coordonnées

On sait déjà qu'en mécanique non relativiste on peut supposer (axiome 1)  $t' = t$  que  $t \equiv t'$ .

Soit  $O'e'_1e'_2e'_3$  un repère orthonormé fixé dans  $\mathcal{R}'$ ; c'est également un repère orthonormé en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Dans  $\mathcal{R}$ , le vecteur-lieu de  $P$  s'écrit (fig. 9.1)

$$\mathbf{x}_P(t) = \mathbf{OP}_t = \mathbf{OO}'_t + \mathbf{O}'_tP_t = \sum_i x_i(t) \mathbf{e}'_i(t) = \sum_i (s_i(t) + \xi_i(t)) \mathbf{e}'_i(t),$$

c'est-à-dire

$$x_i(t) = \xi_i(t) + s_i(t). \quad (9.7)$$

Dans  $\mathcal{R}'$ , le vecteur lieu du même point  $P$  s'écrit

$$\mathbf{x}'_P(t) = \mathbf{O}'P'_t = \sum_i x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \quad (9.8)$$

où à l'instant  $t$  nous avons  $P \equiv P_t \equiv P'_t$ .

L'axiome 2 implique que les projections de  $\mathbf{O}'_tP_t$  sur  $\mathbf{e}'_i(t)$  dans  $\mathcal{R}$  et sur  $\mathbf{e}'_i(t)$  dans  $\mathcal{R}'$  sont égales, d'où

$$\xi_i(t) = x'_i(t) \quad (9.9)$$

et de (9.7) on obtient

$$x_i = x'_i + s_i \quad (9.10)$$

ce que l'on écrit sous la forme vectorielle

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{s} \quad \text{où} \quad \mathbf{s} = \mathbf{OO}'. \quad (9.11)$$

### 9.3.2 Composition des vitesses

**Théorème.** La vitesse absolue de  $P$  est égale à la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement

$$\mathbf{v}_a^{(P)} = \mathbf{v}_r^{(P)} + \mathbf{v}_e^{(P)} \quad (9.12)$$

où la **vitesse absolue** est la vitesse par rapport à  $\mathcal{R}$  ( $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}$ ), la **vitesse relative** est la vitesse par rapport à  $\mathcal{R}'$  ( $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}'$ ), et la **vitesse d'entraînement** est la vitesse du point coïncidant  $P'_i$  dans  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$

$$\mathbf{v}_e^{(P)} = \mathbf{v}_a^{(P'_i)} \quad \mathbf{v}_e^{(P)} = \mathbf{v}_{P'_i} \Big|_{\mathcal{R}} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'P. \quad (9.13)$$

avec  $\boldsymbol{\omega}_e$  la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

DÉMONSTRATION. Par définition

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{OP}_i \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \mathbf{OO}'_i \Big|_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt} \mathbf{O}'P_i \Big|_{\mathcal{R}} = \\ &= \mathbf{v}_{O'} \Big|_{\mathcal{R}} + \sum_i \dot{\xi}_i(t) \mathbf{e}'_i(t) + \sum_i \xi_i(t) \frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i(t) \Big|_{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Mais de  $t = t'$  et (9.9)

$$\sum_i \dot{\xi}_i(t) \mathbf{e}'_i = \sum_i \dot{x}'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{v}'_P(t)$$

et, de la formule de Poisson (8.17), on a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}'_i(t) \Big|_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{e}'_i. \quad (9.15)$$

Par conséquent (9.14) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \mathbf{v}_{O'} \Big|_{\mathcal{R}} + \mathbf{v}'_P + \sum_i \xi_i \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{e}'_i \\ &= \mathbf{v}'_P + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \left( \sum_i \xi_i \mathbf{e}'_i \right) \\ &= \mathbf{v}'_P + \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'P \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème.

### 9.3.3 Dérivée d'un vecteur dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Soit  $\mathbf{A}(t)$  un vecteur qui dépend du temps (par exemple le vecteur Terre-Lune à l'instant  $t$ ), alors

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} \Big|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{A}. \quad (9.16)$$

DÉMONSTRATION. Soit  $A = \sum_i a'_i e'_i$  alors

$$\left( \frac{d}{dt} A \right)_{\mathcal{R}} = \sum_i (\dot{a}'_i e'_i + a'_i \dot{e}'_i) = \frac{d}{dt} A_{\mathcal{R}'} + \sum_i a'_i \dot{e}'_i$$

En utilisant la formule de Poisson (8.17) on trouve

$$\left( \frac{d}{dt} A \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d}{dt} A \right)_{\mathcal{R}'} + \omega_e \wedge A.$$

**Remarque.** Il faut insister sur le fait que c'est le même vecteur  $A$  qui intervient dans les deux membres de (9.16).

### 9.3.4 Composition des vitesses de rotation d'un solide

**Théorème.** La vitesse de rotation absolue d'un solide  $S$  est égale à la somme de la vitesse de rotation relative et de la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e \quad (9.17)$$

ce que l'on écrit aussi sous la forme

$$\omega_{S/\mathcal{R}} = \omega_{S/\mathcal{R}'} + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}. \quad (9.18)$$

DÉMONSTRATION. Soient  $P$  et  $Q$  deux points du solide. De (8.17) avec  $\varepsilon = PQ$  on a

$$\frac{d}{dt} PQ_{\mathcal{R}} = \omega_a \wedge PQ.$$

Mais, d'après (9.16) et (8.17),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} PQ_{\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt} PQ_{\mathcal{R}'} + \omega_e \wedge PQ = \\ &= \omega_r \wedge PQ + \omega_e \wedge PQ = (\omega_r + \omega_e) \wedge PQ \end{aligned}$$

d'où

$$\omega_a = \omega_r + \omega_e.$$

### 9.3.5 Composition des accélérations

**Théorème.** L'accélération absolue de  $P$  est égale à la somme de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une accélération complémentaire

$$\mathbf{a}_a^{(P)} = \mathbf{a}_r^{(P)} + \mathbf{a}_c^{(P)} + \mathbf{a}_e^{(P)} \quad (9.19)$$

où

- l'**accélération absolue**  $\mathbf{a}_a$  est l'accélération par rapport à  $\mathcal{R}$ ;
- l'**accélération relative**  $\mathbf{a}_r$  est l'accélération par rapport à  $\mathcal{R}'$ ;
- l'**accélération d'entraînement**  $\mathbf{a}_e$  est l'accélération du point coïncidant  $P'_i$  dans  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  (9.6)

$$\mathbf{a}_e^{(P)} = \mathbf{a}_{P'_i}^{(P)} = \mathbf{a}_{P'_i}^{(P)} = \mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P}); \quad (9.20)$$

- l'**accélération complémentaire**, aussi appelée **accélération de Coriolis**, est définie par

$$\mathbf{a}_c^{(P)} = 2\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}_r^{(P)}. \quad (9.21)$$

Accélération  
de Coriolis

**DÉMONSTRATION.** De la définition de l'accélération et de (9.12), (9.13) et (9.16), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}' + \left. \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P}) \Big|_{\mathcal{R}} = \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \frac{d\mathbf{O}'\mathbf{P}}{dt} \end{aligned}$$

Or, de (9.16),

$$\left. \frac{d}{dt} \mathbf{O}'\mathbf{P} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{O}'\mathbf{P} \right|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}' + [\mathbf{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P} + \boldsymbol{\omega}_e \wedge (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{O}'\mathbf{P})] = \\ &= \mathbf{a}' + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_e. \end{aligned}$$



CORIO LIS  
Gustave-Gaspard  
Mathématicien français  
(1792-1843)

**Remarques.** La vitesse et l'accélération d'entraînement dépendent du point  $P$  ; il en est de même de l'accélération complémentaire. Par ailleurs,

l'accélération complémentaire de  $P$  est nulle si  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  ( $\omega_e = 0$ ), ou si  $P$  est immobile dans  $\mathcal{R}'$  ( $v_r^{(P)} = 0$ ).

## 9.4 CAS PARTICULIERS

### 9.4.1 $\mathcal{R}'$ en translation uniforme par rapport à $\mathcal{R}$

Si  $\mathcal{R}'$  est en *translation uniforme* par rapport à  $\mathcal{R}$ , on a

$$\omega_e = 0, \quad v_O' = u = \text{cste}, \quad (9.22)$$

et

$$s(t) = OO'_t = s + u t \quad \text{avec} \quad s = s(0).$$

Le changement de référentiel  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  est ainsi défini par la transformation

$$g: \begin{pmatrix} t \\ x \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' = t - s_0 \\ x' = x - u t - s \\ v' = v - u \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

où, pour simplifier la notation, nous n'avons pas écrit la transformation en terme des composantes  $(x'_i, v'_i)$ .

On appelle **transformation de Galilée inhomogène** toute transformation de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^4$  définie par

Transformation de Galilée inhomogène

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' = t - s_0 \\ x' = x - u t - s \end{pmatrix} \quad (9.24)$$

et (9.23) est le changement de référentiel associé. Ces transformations dépendent de 10 paramètres, soit les 7 paramètres  $(s_0, s, u)$  et les 3 paramètres pour l'orientation des axes.

Si l'origine du temps et des coordonnées est choisie de sorte qu'à  $t = 0$  on ait  $t' = 0$  et  $O' = O$ , on obtient la **transformation de Galilée (homogène)** :

Transformation de Galilée homogène

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' = t \\ x' = x - u t \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

De (9.22) on déduit que  $a_e = a_c = 0$  et (9.19) entraîne

$$a' = a. \quad (9.26)$$

Par conséquent les accélérations mesurées dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont égales. L'importance de ce résultat est liée au fait qu'il permettra de démontrer que la mécanique newtonienne est invariante par rapport aux transformations de Galilée.

#### 9.4.2 $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$

Si  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  (fig. 9.4), alors

$$\omega_e = 0 \quad \text{et} \quad v_O = u(t). \quad (9.27)$$

Le changement de référentiel est défini dans ce cas par la transformation

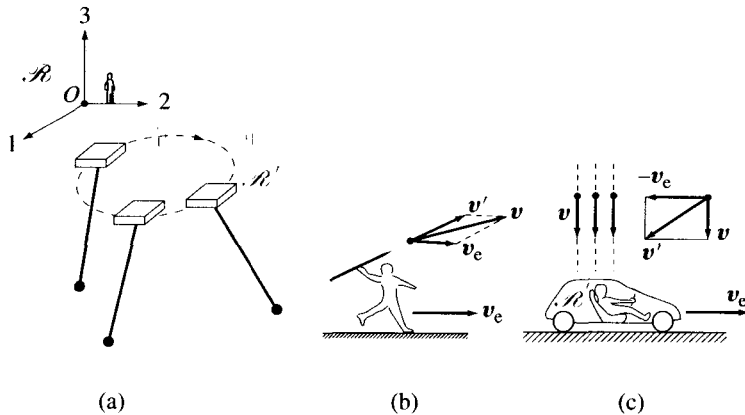
$$g: \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' = t - s_0 \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{s}(t) \\ \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}(t) \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

De (9.27) on déduit que  $\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a}_e = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a}_O(t)$ , et de (9.19) :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_O \quad (9.29)$$

où  $\mathbf{a}_O$  ne dépend pas de  $P$ , mais dépend du temps.

Par conséquent, à tout instant  $t$ , les accélérations mesurées dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ne diffèrent que d'une constante (qui dépend de  $t$  !). L'importance de ce résultat ressortira en relativité générale.



**Fig. 9.4**  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  : (a) pendule dont le point de suspension est animé d'un mouvement de rotation ; (b) lanceur de javelot ; (c) voiture sous la pluie sur une route rectiligne.



### 9.4.3 $\mathcal{R}'$ en rotation autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}$

Choisissons les axes  $Ox_3$  et  $O'x'_3$  confondus avec l'axe de rotation (fig. 9.5). Nous avons alors

$$\mathbf{v}_{O'} = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}_e = \dot{\psi}(t) \mathbf{e}_3. \quad (9.30)$$

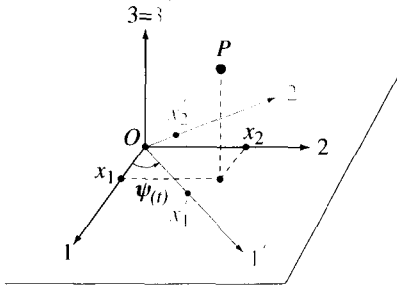


Fig. 9.5  $\mathcal{R}'$  en rotation autour de  $Ox_3 \equiv O'x'_3$ .

Le changement de référentiel est défini par la transformation

$$g: \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t' = t - s_0 \\ x'_1 = x_1 \cos \psi(t) + x_2 \sin \psi(t) \\ x'_2 = -x_1 \sin \psi(t) + x_2 \cos \psi(t) \\ x'_3 = x_3 \\ \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \dot{\psi}(t) \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (9.31)$$

où, pour simplifier, nous n'avons pas écrit la vitesse en composantes.

Soit  $(\rho, \varphi, z)$  les coordonnées cylindriques du point  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Alors de (9.19) et (9.30) on obtient l'accélération relative :

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c$$

où

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_{P'} \Big|_{\mathcal{R}} = \ddot{\psi} \rho \mathbf{e}_\varphi - \dot{\psi}^2 \rho \mathbf{e}_\rho \quad (9.32) \quad P = (\rho, \varphi, z)$$

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}'_P = 2\dot{\psi} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}'_P. \quad (9.33)$$

Nous remarquons que l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire dépendent du point  $P$ . Le facteur 2 dans  $\mathbf{a}_c$  a même origine que le facteur 2 dans l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques.

## 9.5 COMPOSITION DE DEUX CHANGEMENTS DE RÉFÉRENTIEL

### 9.5.1 Cas général

Soit  $\mathcal{R}''$  un référentiel – ou solide – dont le mouvement par rapport à  $\mathcal{R}'$  est décrit par  $\mathbf{v}_{O''}^{(R')}$  et  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}''|\mathcal{R}'}$ . Supposons ensuite que  $\mathcal{R}'$  soit lui-même en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , mouvement décrit par  $\mathbf{v}_{O'}^{(R)}$  et  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$  (fig. 9.6).

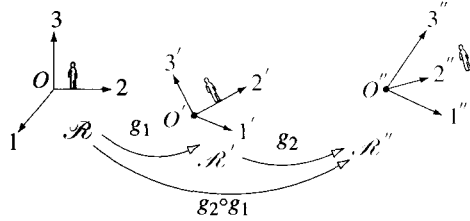


Fig. 9.6 Composition de deux changements de référentiel :  $g = g_2 \circ g_1$ .

Il découle de (9.12), (9.13) et (9.18) que le mouvement de  $\mathcal{R}''$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est décrit par  $\mathbf{v}_{O''}^{(R)}$  et  $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}''|\mathcal{R}}$  où

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{O''}^{(R)} = \mathbf{v}_{O'}^{(R)} + \mathbf{v}_{O''}^{(R')} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O'O''} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}''|\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}''|\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} \end{cases} \quad (9.34)$$

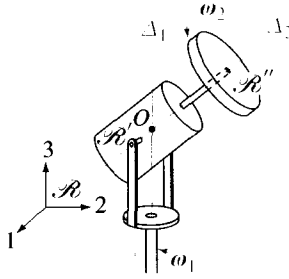
### 9.5.2 Composition de deux translations

Soit  $\mathcal{R}''$  en translation de vitesse  $\mathbf{w}$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ , lui-même en translation de vitesse  $\mathbf{u}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . L'équation (9.34) montre que  $\mathcal{R}''$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  de vitesse  $\mathbf{u} + \mathbf{w}$  : la composition de deux translations est une translation de vitesse égale à la somme des vitesses.

On vérifie facilement que l'ensemble des transformations de Galilée forme un groupe à 6 paramètres, appelé **groupe de Galilée**. De même, les transformations de Galilée inhomogènes constituent un groupe à 10 paramètres appelé **groupe de Galilée inhomogène**.

### 9.5.3 Composition de deux rotations d'axes concourants

Soit  $\mathcal{R}''$  un solide en rotation de vitesse  $\boldsymbol{\omega}_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  qui est lui-même en rotation de vitesse  $\boldsymbol{\omega}_1$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$  (fig. 9.7).



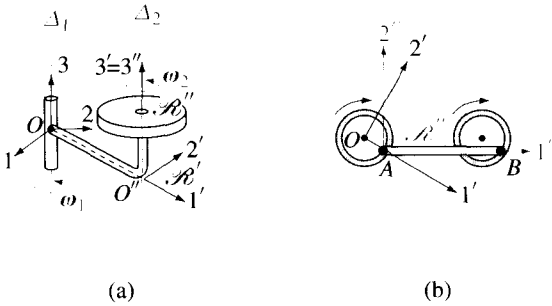
**Fig. 9.7** Composition de deux rotations d'axes concourants : le robot  $\mathcal{R}'$  fait tourner la meule  $\mathcal{R}''$  avec une vitesse  $\omega_2 = \omega_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}$  ; le robot a un mouvement de rotation de vitesse  $\omega_1 = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Si les axes de rotations  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  se coupent en un point  $O$ , on a  $v_O)_{\mathcal{R}''} = v_O)_{\mathcal{R}'} = v_O)_{\mathcal{R}} = 0$ .

La composition de deux rotations d'axes concourants est une rotation d'axe passant par le point d'intersection, de vitesse  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  (exemple § 8.4.3).

#### 9.5.4 Composition de deux rotations d'axes parallèles

Reprenons l'exemple du paragraphe 9.5.3 d'un solide  $\mathcal{R}''$  en rotation de vitesse  $\omega_2$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$ , lui-même en rotation de vitesse  $\omega_1$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Mais supposons maintenant que les axes  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  soient parallèles (fig. 9.8) :  $\omega_1 = \omega_1 \mathbf{e}_3$ ,  $\omega_2 = \omega_2 \mathbf{e}_3$ .



**Fig. 9.8** Composition de deux rotations  $\omega_2 = \omega_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'}$  et  $\omega_1 = \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  d'axes parallèles ; (a)  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$  ; (b) bielle  $AB$  de locomotive :  $\omega_1 + \omega_2 = 0$ .

En prenant  $O = O'$  sur  $\Delta_1$  et  $O''$  sur  $\Delta_2$ , nous avons

$$v_{O''})_{\mathcal{R}} = \omega_1 \wedge \overrightarrow{OO''} \quad \text{et} \quad \omega_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \omega_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \omega_1 + \omega_2. \quad (9.35)$$

Ainsi, pour tout point  $A$  fixé dans le solide  $\mathcal{R}''$ , (9.35) implique

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A)_{\mathcal{R}} &= \mathbf{v}_{O''})_{\mathcal{R}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} \wedge \mathbf{O}''\mathbf{A} = \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{OO}'' + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \mathbf{O}''\mathbf{A} = \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \wedge \mathbf{OA} - \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \mathbf{OO}''. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Le mouvement de  $\mathcal{R}''$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est ainsi un mouvement plan avec  $\Pi_0$  perpendiculaire à  $\mathbf{e}_3$  : si  $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = 0$ , c'est une translation de vitesse  $\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{OO}''$  ; si  $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \neq 0$ , c'est une rotation autour d'un axe parallèle à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  passant par un point  $I$  tel que  $\mathbf{v}_I = 0$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{OI} = \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2} \mathbf{OO}' \quad (9.37)$$

avec  $\mathbf{OO}''$  perpendiculaire à  $\Delta_1$ .

En conclusion, la composition de deux rotations d'axes parallèles est soit une rotation d'axe parallèle aux deux autres, soit une translation de vitesse perpendiculaire aux axes de rotation.

## 9.6 VITESSE ET ACCÉLÉRATION EN COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Nous voulons établir les formules (5.62 et 5.63) exprimant la vitesse et l'accélération en coordonnées sphériques.

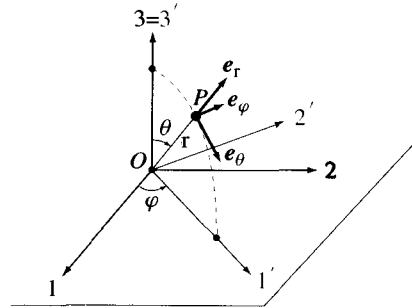


Fig. 9.9 Coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ .

Soit  $\mathcal{R}'$  le référentiel défini par  $O\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3$  en rotation de vitesse  $\boldsymbol{\omega}_e = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3$  autour de l'axe 3 (fig. 9.9). Comme le mouvement de  $P$  par rapport à  $\mathcal{R}'$  est plan, de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , et  $\mathbf{v}_e^{(P)} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{OP}$ , on obtient

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{e}_\varphi.$$

Par ailleurs,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c$  avec

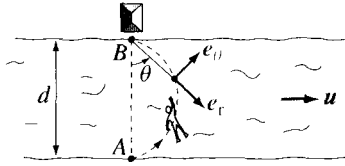
$$\begin{cases} \mathbf{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{a}_e = -r \sin \theta \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_1' + r \sin \theta \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = -r \sin \theta \dot{\varphi}^2 (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \\ \quad + r \sin \theta \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{v}_r = (2\dot{\varphi} \dot{r} \sin \theta + 2r\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi \end{cases}$$

ce qui démontre les formules du paragraphe 5.5.5.

## 9.7 ILLUSTRATIONS

### 9.7.1 Poursuite

Cherchons la trajectoire et le temps mis par un nageur qui traverse une rivière en fixant constamment un point  $B$  de la rive opposée. La vitesse de la rivière est  $\mathbf{u}$  et la vitesse du nageur en piscine  $v$ .



$\mathcal{R}' = \text{rivière}$

**Fig. 9.10** Nageur traversant une rivière ( $\mathcal{R}'$ ) en fixant un point  $B$  de la rive opposée :  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'} = -v\mathbf{e}_r$ .

Soit  $(r, \theta)$  les coordonnées polaires de centre  $B$ , d'axe  $BA$  et  $\mathcal{R}'$  le référentiel en translation de vitesse  $\mathbf{u}$ . Par rapport à  $\mathcal{R}'$  l'eau est au repos et la vitesse scalaire du nageur est  $v$ . De  $\mathbf{v}_r = -v\mathbf{e}_r$  et  $\mathbf{v}_a = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_r + \mathbf{u}$ , on tire

$\mathbf{v}_r$  = vitesse relative  
 $\mathbf{v}_a$  = vitesse absolue

$$\dot{r} = -v + u \sin \theta \quad \text{et} \quad r\dot{\theta} = u \cos \theta \quad (9.38)$$

d'où

$$u^2 = (\dot{r} + v)^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}(\dot{r} + 2v) + v^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

et avec (9.38)

$$u^2 - v^2 = \dot{r}(v + u \sin \theta) + r\dot{\theta}u \cos \theta =$$

$$= \frac{d}{dt} [r(v + u \sin \theta)].$$

En intégrant cette dernière équation différentielle, avec les conditions initiales  $r(t=0) = d$  et  $\theta(t=0) = 0$ , on obtient

$$(u^2 - v^2)t = r(t)[v + u \sin \theta(t)] - dv.$$

Temps pour la traversée Le temps  $t_1$  mis pour la traversée, soit  $r(t_1) = 0$ , est ainsi

$$t_1 = \frac{dv}{v^2 - u^2}$$

et il faudra que  $v$  soit supérieure à  $u$ .

L'équation de la trajectoire s'obtient à partir de (9.38)

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{-v + u \sin \theta}{\frac{1}{r} u \cos \theta}$$

d'où

$$\frac{dr}{r} = \left( -\frac{v}{u \cos \theta} + \tan \theta \right) d\theta \quad \text{avec} \quad r(\theta = 0) = d$$

$$\ln \frac{r}{d} = -\frac{v}{u} \ln \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right) - \ln(\cos \theta)$$

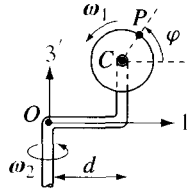
et

Trajectoire 
$$r = \frac{d}{\cos \theta \cdot \left( \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right)^{v/u}}.$$

### 9.7.2 Disque entraîné par une fourche

Considérons un disque de rayon  $R$  supporté par une fourche qui tourne à vitesse angulaire  $\omega_2$  constante (fig. 9.11). Cherchons la vitesse et l'accélération d'un point  $P$  du disque sachant que ce dernier a une vitesse de rotation propre  $\omega_1$  autour d'un axe perpendiculaire à  $\omega_2$ .

$\mathcal{R}' = \text{fourche}$



**Fig. 9.11** Disque en rotation ( $\omega_1$ ) entraîné par une fourche en rotation ( $\omega_2$ ). La position de  $P$  est donnée par l'angle  $\varphi$  ( $\varphi = \omega_1$ ).

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la fourche, on a

$$\mathbf{v}'_P = \omega_1 \wedge \mathbf{CP} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}'_P = -\omega_1^2 \mathbf{CP} \quad \text{où} \quad \omega_1 = -\dot{\varphi} \mathbf{e}'_2.$$

Le mouvement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  est une rotation de vitesse angulaire  $\omega_2 = \omega_2 \mathbf{e}'_3$ , d'où

$$\mathbf{v}_e^{(P)} = \omega_2 \wedge \mathbf{OP}, \quad \mathbf{a}_e^{(P)} = -\omega_2^2 (d + R \cos \varphi) \mathbf{e}'_1.$$

Finalement, l'accélération complémentaire est

$$\mathbf{a}_c^{(P)} = 2\boldsymbol{\omega}_2 \wedge (\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{CP}) = 2(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{CP}) \boldsymbol{\omega}_1$$

et nous obtenons

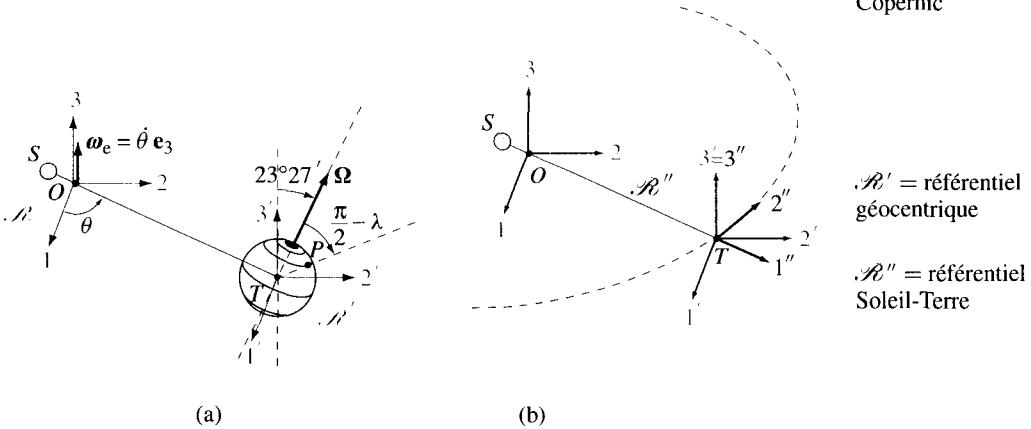
$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{CP} + \boldsymbol{\omega}_2 \wedge \mathbf{OP} = \dot{\varphi} R \mathbf{e}_\varphi + \omega_2 (d + R \cos \varphi) \mathbf{e}'_2$$

$$\mathbf{a}_P = -\omega_1^2 \mathbf{CP} - \omega_2^2 (d + R \cos \varphi) \mathbf{e}'_1 + 2(\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{CP}) \boldsymbol{\omega}_1.$$

### 9.7.3 Mouvement d'un point immobile à la surface de la Terre

Cherchons une estimation de la vitesse et de l'accélération d'un point  $P$  immobile à la surface de la Terre, à la latitude  $\lambda$ , par rapport au référentiel géocentrique  $\mathcal{R}'$  et par rapport au référentiel de Copernic  $\mathcal{R}$  (fig. 9.12).

$\mathcal{R}$  = référentiel de Copernic



**Fig. 9.12** a)  $R_T \cong 6,4 \cdot 10^6$  m,  $|OT| \cong 1,5 \cdot 10^{11}$  m,  $\lambda$  = latitude. b) Référentiel géocentrique  $\mathcal{R}'$ .

Rappelons pour commencer que  $\mathcal{R}'$  est le référentiel en *translation* par rapport à  $\mathcal{R}$ , lié au centre de la Terre.

Pour cette estimation, nous admettrons que les vitesses de rotation de la Terre sur elle-même et autour du Soleil sont constantes et nous reviendrons sur ce point au paragraphe suivant.

Par rapport au référentiel  $\mathcal{R}''$  défini par le centre du Soleil et le centre de la Terre, celle-ci a un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles de vitesse angulaire  $\omega'' = \frac{2\pi}{86400} \text{ s}^{-1}$ . Par ailleurs,  $\mathcal{R}''$  est un référentiel en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  de vitesse angulaire

Jour solaire

$$\omega_c = \frac{2\pi}{1 \text{ an}} = \frac{2\pi}{365,25 \cdot 86400} \cong 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}. \quad (9.39)$$

Par conséquent, la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  de la Terre par rapport à  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , c'est-à-dire par rapport aux étoiles fixes, est

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}'' + \boldsymbol{\omega}_c \quad (9.40)$$

ce qui donne approximativement (en prenant  $\Omega/\omega_c/\omega_c$ )

$$|\Omega| \cong \frac{2\pi}{86400} \left(1 + \frac{1}{365,25}\right) = \frac{2\pi}{86400} \frac{366,25}{365,25} \quad (9.41)$$

$$\cong 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Durée du jour  
sidéral

La période de rotation de la Terre par rapport aux étoiles fixes est donc

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 86400 \cdot \frac{365,25}{366,25} = 86164 \text{ s.} \quad (9.42)$$

Par rapport au référentiel géocentrique, nous avons ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_p = \Omega \wedge \mathbf{TP} = \Omega R_T \cos \lambda \mathbf{e}'_\varphi \\ \mathbf{a}'_p = \Omega \wedge (\Omega \wedge \mathbf{TP}) = -\Omega^2 R_T \cos \lambda \mathbf{e}'_\rho \end{cases} \quad (9.43)$$

où  $\mathbf{e}'_\varphi$  est dirigé d'Ouest vers l'Est et  $\mathbf{e}'_\rho$  est dirigé selon  $\mathbf{P}_\perp \mathbf{P}$  avec  $\mathbf{P}_\perp$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $\mathbf{P}$  sur l'axe  $\Omega$ .

En approximant le mouvement du centre de la Terre autour de  $O$  (= centre de masse du système Soleil-Terre) par un mouvement circulaire-uniforme, de vitesse  $\mathbf{v}_c = \omega_c \wedge \mathbf{OT}$ , on obtient par rapport au référentiel de Copernic

$$\begin{cases} \mathbf{v}_p = \Omega R_T \cos \lambda \mathbf{e}'_\varphi + \omega_c \wedge \mathbf{OT} \\ \mathbf{a}_p = -\Omega^2 R_T \cos \lambda \mathbf{e}'_\varphi + \omega_c \wedge (\omega_c \wedge \mathbf{OT}) \end{cases} \quad (9.45)$$

Pour l'estimation des vitesses et accélérations (9.43) – (9.46), les valeurs numériques sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega R_T &\cong 0,5 \text{ km/s} & \omega_c |\mathbf{OT}| &\cong 30 \text{ km/s} \\ \Omega^2 R_T &\cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2} & \omega_c^2 |\mathbf{OT}| &\cong 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}. \end{aligned}$$

#### 9.7.4 Remarques sur les causes de variation de la durée du jour

La durée du *jour solaire*  $T'' = 2\pi/\omega''$  varie au cours de l'année de  $\pm 25$  s. Cette variation est due à deux raisons :

- la trajectoire du centre de la Terre n'est pas un cercle mais une ellipse et il suit de  $r^2 \dot{\theta} = C$  (sect. 6.5 et 6.7) que  $\omega_c = \dot{\theta}$  n'est pas constant ; par conséquent, si l'on admet que  $\Omega$  est constant, on voit que  $\omega''$  doit varier ;
- l'axe des pôles n'est pas perpendiculaire au plan de la trajectoire mais fait un angle de  $23^\circ 27'$  par rapport à la normale à ce plan (fig. 9.12).

La période de rotation  $T = 2\pi/\Omega$  de la Terre sur elle-même ne varie que très faiblement. Il y a trois types de variations de  $T$  :

- une augmentation d'environ 0,002 s par siècle due au freinage causé par les marées ;



- des variations saisonnières de  $\pm 0,001$  s dues à la redistribution des masses d'air et d'eau à la surface de la Terre ;
- des variations irrégulières de  $\pm 0,004$  s dont les causes sont mal connues.

Remarquons pour terminer que la valeur de cette période  $T$  est très proche du *jour sidéral* défini en astronomie ( $T \cong 1 \text{ jour sidéral} + 0,008 \text{ s}$ ).

## 9.8 SYMÉTRIE ET INVARIANCE

### 9.8.1 Changement de référentiel : point de vue passif et actif

Les différents choix de référentiels conduisent à des transformations qui admettent deux interprétations : l'interprétation *passive* (§ 2.6.1) dans laquelle c'est uniquement la description qui est modifiée, mais pas le phénomène qui, lui, se déroule indépendamment des observateurs ; l'interprétation *active* (§ 2.6.2), dans laquelle il n'y a pas de changement d'observateur, et qui consiste à modifier l'état du système étudié. L'interprétation active présente un double intérêt : d'une part, elle conduit à la notion d'*invariance*, notion associée à des propriétés fondamentales telles que les *symétries* et les *lois de conservation* ; d'autre part, elle permet d'introduire des transformations qui ne sont pas liées à des changements d'observateurs. Par exemple le renversement du temps – transformation qui consiste à remplacer l'état à un instant donné par un autre obtenu en inversant les vitesses de chaque point – n'a pas d'interprétation passive : il n'existe pas d'observateur pour lequel la flèche du temps serait inversée. Le renversement du temps est la transformation que l'on obtient en regardant le film de l'évolution en marche arrière.

Le *point de vue passif*, que nous avons adopté jusqu'ici, considère la transformation (9.1) comme elle a été introduite : c'est un *changement de référentiel sans modification de l'état* (fig. 9.13 a). En particulier, si  $\mathcal{R}'$  est immobile par rapport à  $\mathcal{R}$ , nous pouvons considérer  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  comme un seul référentiel et la transformation  $g$  est simplement un changement de coordonnées.

Point de vue passif

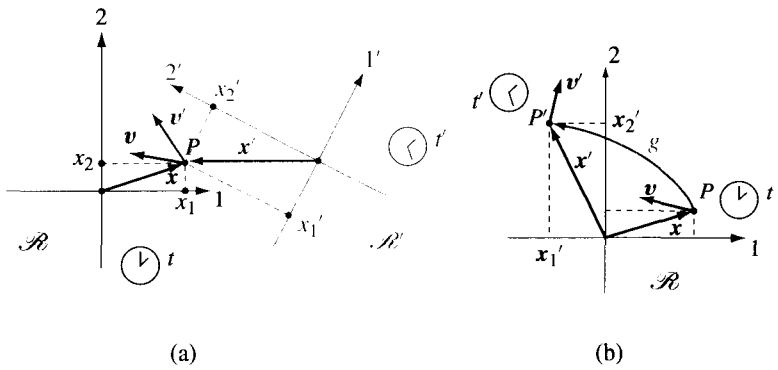
Du point de vue passif, les problèmes sont les suivants :

- Trouver la transformation (9.1) : c'est une question de *cinématique*.
- Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est par définition un ensemble de points immobiles par rapport à l'observateur dans  $\mathcal{R}'$ . Peut-on conclure que  $\mathcal{R}'$  est un solide par rapport à  $\mathcal{R}$  ? Un segment de droite dans  $\mathcal{R}'$  est-il un segment de droite par rapport à  $\mathcal{R}$  ? Deux segments orthogonaux dans  $\mathcal{R}'$  sont-ils orthogonaux relativement à  $\mathcal{R}$  ? Deux segments de même longueur dans  $\mathcal{R}'$  auront-ils même longueur dans  $\mathcal{R}$  ? Deux événements simultanés dans  $\mathcal{R}'$  seront-ils simultanés relativement à  $\mathcal{R}$  ? Ce sont des *problèmes spatio-temporels*. (Nous avons admis que la géométrie euclidienne était valable dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ ).
- L'observation des *forces* permet-elle de mettre en évidence des référentiels privilégiés ? En particulier, si les forces sont nulles relativement à  $\mathcal{R}$ , sont-elles nulles relativement à  $\mathcal{R}'$  ? C'est une question de *dynamique*.

- Si les lois de la mécanique (= lois de Newton) sont valables dans  $\mathcal{R}$ , sont-elles aussi valables dans  $\mathcal{R}'$ ? Plus généralement, si les lois de la physique (Newton, Maxwell, Einstein, ...) sont valables dans  $\mathcal{R}$ , sont-elles aussi valables dans  $\mathcal{R}'$ ? C'est-à-dire est-ce que les lois de la physique permettent de mettre en évidence des référentiels privilégiés? C'est une question de *principe fondamental*.

L'introduction des axiomes non relativistes nous a permis de répondre à la première série de questions. Nous reviendrons plus loin sur les questions liées à la dynamique.

Il est également possible de considérer la transformation (9.1) comme définissant un *changement de l'état sans modification du référentiel* (fig. 9.13 b); c'est le **point de vue actif**. Dans ce nouvel état, le temps, les positions, et les vitesses des points du système sont définis à l'instant  $\tau$  et *relativement à  $\mathcal{R}$*  par  $(t', x'_i, v'_i)$ , image de  $(t, x_i, v_i)$  par l'application  $g$ .

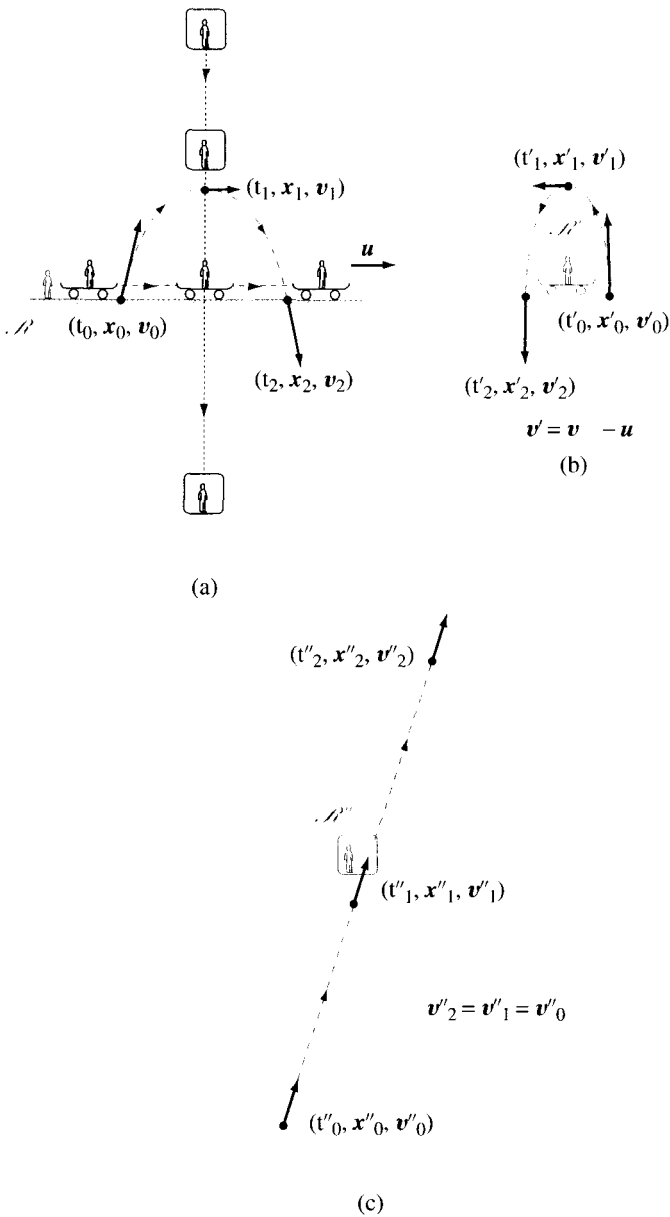


**Fig. 9.13** Changement de référentiel ; (a) point de vue passif ( $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ ) ; (b) point de vue actif ( $P \rightarrow P'$ ).

### 9.8.2 Symétrie et invariance

Si l'on adopte le point de vue actif, on peut chercher les transformations  $g$  qui sont des **symétries**. Par définition, la transformation est une symétrie si toute évolution observée depuis  $\mathcal{R}'$  peut être réalisée dans  $\mathcal{R}$  à partir de conditions initiales appropriées. En d'autres termes, la transformation est une symétrie s'il existe une nouvelle évolution du système telle que pour toute grandeur  $A$  et tout instant  $\tau$ , la valeur  $\bar{a}(\tau)$  de  $A$  relativement à  $\mathcal{R}$  lors de cette nouvelle évolution s'identifie avec la valeur  $a'(\tau)$  observée par  $\mathcal{R}'$  lors de l'évolution originale.

Si  $g$  est une symétrie, la transformation (9.1) ne permet pas de distinguer entre l'ancienne évolution par rapport au nouveau référentiel et la nouvelle évolution par rapport à l'ancien référentiel.



**Fig. 9.14** Mouvement d'un projectile observé depuis : (a) la Terre  $\mathcal{R}$  ; (b) un train  $\mathcal{R}'$  ayant un mouvement rectiligne uniforme ; (c) un observateur  $\mathcal{R}''$  en chute libre verticale ( $a = g$  constante).

L'analyse des problèmes de balistique telle que proposée sur la figure 9.14 nous fournit un exemple. Le mouvement du projectile est observé à partir de trois référentiels : la Terre ( $\mathcal{R}$ ), un train ayant un mouvement rectiligne uniforme ( $\mathcal{R}'$ ) et un parachutiste en chute libre ( $\mathcal{R}''$ ). Les expériences de balistique montrent que tout mouvement observé par  $\mathcal{R}'$  – en *translation*

Exemple : balistique

*uniforme* par rapport à  $\mathcal{R}$  – peut être réalisé dans  $\mathcal{R}$  en prenant des conditions initiales  $(t'_0, \mathbf{x}'_0, \mathbf{v}'_0)$  appropriées. Au contraire, il n'est pas possible d'observer dans  $\mathcal{R}$  un mouvement balistique rectiligne uniforme, comme l'a observé  $\mathcal{R}''$  – parachutiste en chute libre. En conclusion, la transformation  $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}'$  est une symétrie pour les problèmes balistiques, mais pas la transformation  $\mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}''$ .

Invariance      Si le changement de référentiel  $g$  est une *symétrie*, alors il commute avec l'évolution temporelle, c'est-à-dire que l'image par  $g$  de l'évolution (observée par  $\mathcal{R}$ ) est une évolution possible du système (par rapport à  $\mathcal{R}$ ). Dans ce cas, les observables et les lois sont représentées par les mêmes fonctions dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . On dit alors que le système est invariant par rapport à  $g$  (sect. 2.7).

9.9 PROBLÈMES

Javelot      **9.9.1** Un athlète immobile lance le javelot à 60 m. Quelle distance peut-il atteindre en courant à 10 m/s ? (Idée : la vitesse scalaire initiale du javelot par rapport à l'athlète est indépendante du mouvement de celui-ci.)

Fusil tournant      **9.9.2** On considère l'expérience du fusil tournant (fig. 4.2) réalisée avec les données suivantes :

- la cible est à 110 cm de l'axe,
- l'extrémité du fusil est à 40 cm de l'axe,
- la vitesse de la balle est 250 m/s,
- le support tourne en faisant 1 tour en 2 secondes.

A quelle distance du centre la balle frappera la cible ?

Nageur      **9.9.3** Un sportif nage avec une vitesse  $v_0 = 1,5$  m/s en piscine. Quel est le temps minimal pour traverser une rivière large de 50 m si la rivière coule à 0,75 m/s ? Quel sera le déportement  $\delta$  ?

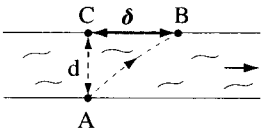


Fig. 9.15

**9.9.4** Le nageur de l'exercice précédent veut traverser la rivière suivant la droite AC. Comment doit-il nager et quelle sera la durée de la traversée ?

Bateau      **9.9.5** Un bateau traverse une rivière d'un point A à un point B en suivant une trajectoire rectiligne. Les durées des voyages aller et retour sont  $t_a$  et  $t_r$ .

Sachant que  $AB$  fait un angle de  $45^\circ$  avec la direction du courant, trouver la vitesse  $u$  du courant et la vitesse  $v$  du bateau dans un lac.

**9.9.6** Une moto effectue un virage de rayon  $R$  à vitesse  $v_0$  constante, inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale (fig. 9.16). Trouver la vitesse de rotation propre  $\omega_p$ , la vitesse de rotation  $\omega$  et l'accélération du point de la roue en contact avec le sol.

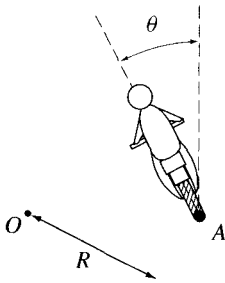


Fig. 9.16

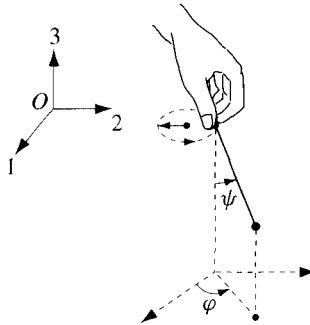


Fig. 9.17

**9.9.7** Un radiesthésiste imprime un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  au point de suspension d'un pendule de longueur  $l$  (fig. 9.17). Exprimer la vitesse et l'accélération du point  $P$  en fonction des coordonnées  $(\psi, \varphi)$  et de leurs dérivées.

**9.9.8** Une hélice (fig. 9.18) tourne autour de son axe  $AB$  avec une vitesse de rotation propre  $\omega_p$  constante ; la fourche supportant l'hélice tourne elle-même à la vitesse angulaire  $\Omega$  constante. Exprimer la vitesse et l'accélération de l'extrémité  $P$  de l'hélice en fonction de  $\psi$  ( $u$  = axe horizontal perpendiculaire à l'axe de l'hélice). Application numérique :  $|OP| = 1 [L]$ ,  $\Omega = 1 [T]^{-1}$ ,  $\omega_p = 300 [T]^{-1}$ ,  $\psi = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ .

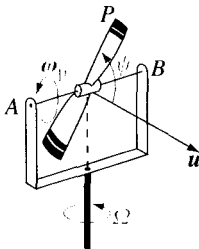


Fig. 9.18

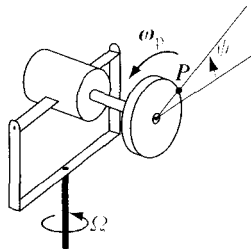


Fig. 9.19

**9.9.9** Un robot (fig. 9.19) fait tourner un disque à vitesse  $\omega_p$  constante autour d'un axe horizontal. Tout le système est monté sur un support tournant autour d'un axe vertical à vitesse angulaire constante. Trouver la vitesse et l'accélération du point  $P$  sur le disque.

Différentiel **9.9.10** On impose à la roue verticale de rayon  $R$  (fig. 9.20) une vitesse de rotation propre  $\omega_p$  et une vitesse de précession  $\Omega$ . Montrer que la vitesse de rotation des disques horizontaux est donnée par

$$\omega_1 = \Omega - \frac{R}{d} \omega_p \quad \omega_2 = \Omega + \frac{R}{d} \omega_p \quad \text{où} \quad d = |\mathbf{CA}|$$

où  $d$  est la distance du centre de la roue à l'axe vertical.

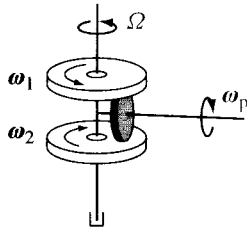


Fig. 9.20

On remarquera que les deux disques horizontaux tournent avec des vitesses différentes : c'est le principe du différentiel d'un véhicule.

**9.9.11** Résoudre les problèmes 3, 8, 14, 15 du chapitre 5 et ceux du chapitre 8 par la méthode des changements de référentiels.

## CHAPITRE 10

# BASES DE LA MÉCANIQUE NEWTONNIENNE

### 10.1 GÉNÉRALITÉS

La dynamique – étude des lois et des causes du mouvement – commence avec Galilée (1638); poursuivie par Descartes (1644) et Huygens (1673), elle culmine avec les travaux de Newton (1686). Trois notions nouvelles vont être nécessaires : la masse, la quantité de mouvement (deux grandeurs associées au système considéré) et la force (grandeur décrivant l'action de l'extérieur sur le système).

Un concept important dans l'élaboration de la dynamique est celui de point matériel. Ce concept est introduit, pour commencer, de façon vague, en définissant le point matériel comme un système de masse constante dont les dimensions sont « petites » et que l'on peut assimiler à un point. Les *systèmes matériels* sont ensuite définis comme un ensemble discret ou continu de points matériels. Finalement, après avoir développé la théorie des systèmes matériels, on se rendra compte qu'un point matériel est un système dont l'état et l'évolution sont entièrement caractérisés par 7 variables ( $t, \mathbf{x}, \mathbf{p}$ ) où  $\mathbf{p}$  est la *quantité de mouvement*.

Avant d'aborder le sujet il nous faut introduire quelques définitions importantes :

- Deux systèmes  $S^1$  et  $S^2$  sont dits **en interaction** si l'évolution temporelle de  $S^1$  dépend de l'évolution de  $S^2$ . Dans le cas contraire, ils sont dits **sans interaction**. (Exemple : la Lune est en interaction avec la Terre, le Soleil, ...)
- Un système sans interaction avec l'extérieur est dit **isolé**. Par définition, l'évolution de tels systèmes est indépendante de l'extérieur et les causes de l'évolution sont à l'intérieur du système.
- Un système qui ne peut pas échanger de matière avec l'extérieur est dit **fermé**; dans le cas contraire il est dit **ouvert**. (Les fusées sont des systèmes ouverts.)
- Une grandeur est dite **conservée** si elle est constante au cours de l'évolution de systèmes isolés. (Exemple : le nombre de points matériels d'un système.)
- Une grandeur est dite **extensive** si la valeur de cette grandeur pour un système formé de deux sous-systèmes est égale à la somme des valeurs pour chacun des deux sous-systèmes. (Le nombre de points matériels, ou le volume, sont des grandeurs extensives.)

Système isolé,  
fermé, ouvert

Grandeur conservée,  
extensive

10.2 MASSE – QUANTITÉ DE MOUVEMENT – FORCES

10.2.1 Masse

Les expériences journalières, effectuées à faibles vitesses, conduisent à compléter les deux axiomes non relativistes discutés au chapitre 9 en introduisant l'axiome suivant.

**Axiome 3, non relativiste.** La masse – ou quantité de matière – d'un corps est une grandeur scalaire, positive, extensive, conservée, qui ne dépend ni de l'état du système ni du référentiel.

Ce concept de masse est associé au nombre de particules dans le système. Pour préciser cette définition, en particulier la condition d'extensivité, considérons un *système homogène*, c'est-à-dire identique en toutes ses parties, et choisissons comme unité de masse  $[X]$  (pour la substance  $X$  en question), la quantité de matière contenue dans un volume étalon  $V_0(X)$  sous des conditions spécifiées (vitesse nulle, pression, température, ...); de la condition d'extensivité, la masse du système est définie par  $M = V / V_0(X) [X]$  où  $V$  est le volume du système sous les mêmes conditions spécifiées. La notion de masse ainsi définie est une notion purement géométrique. En outre, comme à chaque substance  $X$  est associée une unité de masse, il y aura autant d'unités de masse que de substances différentes; en particulier, il ne sera pas possible de comparer les masses de deux systèmes de composition différente et de définir la masse d'un système inhomogène.

On peut cependant introduire une unité de masse indépendante de la substance considérée en *choisissant* une fois pour toutes une masse étalon  $[M]$  et en *définissant* l'unité de masse de n'importe quelle substance homogène par comparaison avec la masse étalon au moyen d'une balance à plateau. Ce procédé, qui a l'avantage d'une grande précision (de l'ordre de  $10^{-8}$  à  $10^{-9}$  en valeur relative), permet de définir la masse de n'importe quel système homogène au moyen de la seule unité  $[M]$ ; la condition d'extensivité définit ensuite la masse de n'importe quel système inhomogène.

La masse d'un système discret formé de  $N$  corps de masse  $M_1, ..., M_N$  est définie par la somme des masses de chacun des corps

$$M = \sum_{\alpha=1}^N M_{\alpha}. \tag{10.1}$$

La masse d'un *système continu* est définie, comme nous l'avons déjà vu (§ 4.9.3), en décomposant le système en petits éléments de volume  $\Delta V(\mathbf{x})$ , centré en  $\mathbf{x}$ , auquel est associé la masse  $\Delta M(\mathbf{x})$ ; on introduit alors la *masse spécifique* au point  $\mathbf{x}$

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M(\mathbf{x})}{\Delta V(\mathbf{x})} \tag{10.2}$$



Masse étalon de l'Office fédéral de Métrologie à Berne

Grandeur extensive  
 $M \sim V$



Balance à plateau de la statue de la Justice à Lausanne

Masse spécifique



et la masse du système est définie par

$$M = \int dM(\mathbf{x}) = \int dV \rho(\mathbf{x}). \quad (10.3)$$

On introduit de façon analogue une *masse spécifique superficielle* et *linéique* (§ 4.9.3).

### Remarques

- L'unité de masse adoptée dans le système international est le kilogramme dont la définition a été donnée au chapitre 2.
- La loi exprimant la conservation de la masse dans les réactions chimiques est la *loi de Lavoisier*.
- Il faut remarquer que les propriétés d'extensivité, de conservation et d'invariance seront remises en question en physique atomique et relativiste : il suffit de regarder le tableau périodique des éléments pour se rendre compte que la masse d'un atome est inférieure à la somme des masses de ses constituants ; de même, les processus d'annihilation matière/antimatière montrent que la quantité de matière n'est pas conservée ; finalement, dans les expériences de diffusion à très grandes vitesses, on sera amené à considérer que la masse d'un corps dépend de l'état et du référentiel (chap. 21).



LAVOISIER Antoine  
Fondateur de la chimie  
Mort guillotiné  
1743-1794

## 10.2.2 Quantité de mouvement

L'expérience montre que la connaissance de la position  $\mathbf{x}$  d'un point matériel et du temps  $t$  où il se trouve à cet endroit ne suffit pas pour déterminer univoquement l'évolution temporelle ; ainsi la donnée de  $(\mathbf{x}, t)$  n'est pas suffisante pour décrire l'état du point matériel et il faut introduire une grandeur supplémentaire associée au mouvement. Nous savons qu'un objet en mouvement a la possibilité de provoquer le mouvement d'un autre objet, c'est-à-dire qu'il a la possibilité de lui transférer une partie de son mouvement. En conséquence, nous aimerions associer à un corps en mouvement une *grandeur extensive, conservée*, qui peut être transférée lors d'un choc et que nous appellerons quantité de mouvement.

C'est à Descartes que l'on doit l'idée de conservation de la quantité de mouvement (*Principes de la philosophie*, 1644) ; il s'exprime ainsi : « Car, bien que le mouvement ne soit qu'une façon en la matière qui est mue, elle en a une certaine quantité qui n'augmente et ne diminue jamais, encore qu'il y en ait tantôt plus et tantôt moins en quelques-unes de ses parties. » Newton, au contraire, n'attribue que peu d'importance aux principes de conservation.

Aujourd'hui, ayant réalisé l'importance fondamentale du concept de quantité de mouvement, on introduit le postulat suivant.

Tout système (matériel ou non, comme le rayonnement électromagnétique par exemple) est caractérisé par une grandeur vectorielle  $\mathbf{p}$ , extensive, conservée, associée à l'homogénéité de l'espace, appelée *quantité de mouvement*.

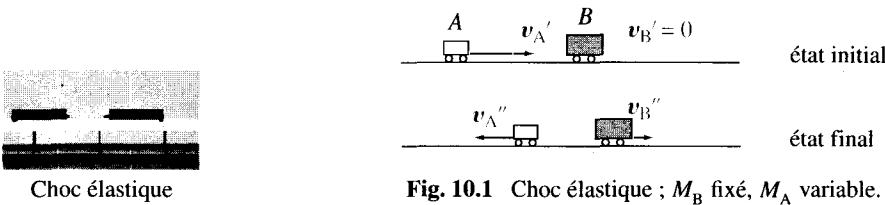


DESCARTES René  
(1596-1650)

Quantité de  
mouvement

Un choix judicieux d'expériences doit alors nous conduire à une loi permettant d'exprimer  $p$  en fonction de grandeurs mesurables.

**Expérience 1, chocs élastiques.** Considérons un choc « élastique » entre deux systèmes formés de substances différentes se déplaçant sur un rail à air rectiligne. La masse de  $B$  est constante, celle de  $A$  est modifiée au cours des diverses expériences (fig. 10.1). (Nous donnerons une définition précise du terme « élastique » au chapitre 19.)

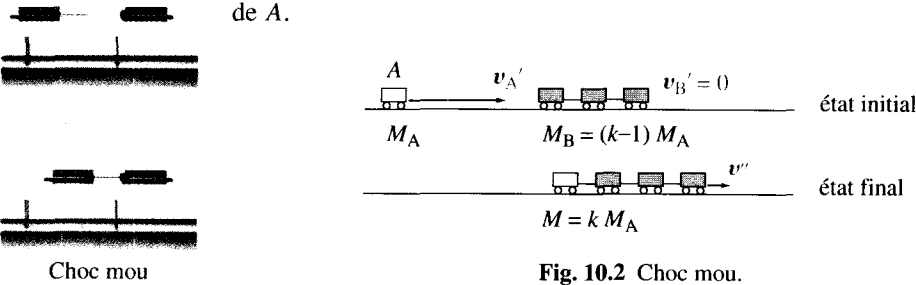


L'expérience montre que, quelles que soient la substance et la vitesse initiale de  $A$ , il y a transfert intégral de la « quantité de mouvement », c'est à dire  $v_B'' = v_A'$  et  $v_A'' = v_B' = 0$ , si et seulement si  $M_A = M_B$ . En outre, on observe que deux systèmes de même masse et même vitesse, mais de substance différente, ont même action sur un corps donné.

En conclusion, la *quantité de mouvement*  $p$  d'un corps est fonction de sa masse et de sa vitesse uniquement (la substance ne joue pas de rôle), soit  $p = p(M, v)$ . Il se pourrait que  $p = p(M, v, x)$  où  $x$  est la position ; cependant, si l'espace est homogène,  $p$  doit être indépendant de  $x$ .

**Expérience 2, chocs mous.** Nous savons qu'il est plus difficile d'arrêter un camion chargé qu'un camion vide roulant à la même vitesse ; nous savons aussi qu'il est plus difficile d'arrêter un camion roulant à grande vitesse que le même camion roulant à petite vitesse : nous dirons que la quantité de mouvement augmente si la masse ou la vitesse augmente.

Pour être plus quantitatif, considérons un « choc mou » entre un solide  $A$  de masse  $M_A$  et un solide  $B$  formé de  $(k - 1)$  solides identiques à  $A$  (fig. 10.2), c'est-à-dire qu'après le choc,  $A$  reste lié à  $B$  et le solide  $A \cup B$  est en translation de vitesse  $v''$ . L'expérience montre que  $v'' = v_A'/k$  où  $v_A'$  est la vitesse initiale de  $A$ .



Après le choc, chaque solide a même vitesse, même masse et, par conséquent, même quantité de mouvement. Des conditions d'extensivité et de

conservation de la quantité de mouvement, et de l'observation  $v'' = v'_A/k$ , nous tirons

$$p(M_A, v'_A) = p\left(kM_A, \frac{v'_A}{k}\right) = kp\left(M_A, \frac{v'_A}{k}\right).$$

En faisant varier le rapport des masses, on obtient pour tout  $\lambda$  réel

$$p(M, \lambda v) = \lambda p(M, v) \quad \text{et} \quad p(\lambda M, v) = \lambda p(M, v).$$

En conclusion, la quantité de mouvement est proportionnelle à  $Mv$ .

Finale, les expériences de chocs réalisées sur une table à air montrent que la grandeur extensive conservée est la grandeur vectorielle  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ .

### Loi zéro de la mécanique newtonienne

La quantité de mouvement d'un point matériel de masse  $M$  est le vecteur produit de la masse par la vitesse :

$\mathbf{p} = M\mathbf{v}$  est une loi de la mécanique newtonienne

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad \text{où encore} \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{M}. \quad (10.4)$$

Pour définir ensuite la quantité de mouvement d'un système matériel, nous utilisons à nouveau la condition d'extensivité :

- La quantité de mouvement d'un système formé de  $N$  points matériels de masse  $M_1, \dots, M_N$  est par définition la somme des quantités de mouvement de chacun des points

$$\mathbf{p} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{p}_\alpha \quad \text{d'où} \quad \mathbf{p} = \sum_{\alpha=1}^N M_\alpha \mathbf{v}_\alpha. \quad (10.5)$$

- La quantité de mouvement d'un système continu est définie en remplaçant les sommes par des intégrales (en reprenant la méthode utilisée au paragraphe 4.9.3), soit

$$\mathbf{p} = \int d\mathbf{p}(x) \quad \text{d'où} \quad \mathbf{p} = \int dM(x) \mathbf{v}(x). \quad (10.6)$$

### Théorème de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement d'un ensemble de points matériels de masse  $M_\alpha$  constante est égale au produit de la masse totale par la vitesse du centre de masse, soit

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G \quad \text{où} \quad M = \sum_{\alpha} M_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_G = \frac{d}{dt} \mathbf{OG}. \quad (10.7)$$

DÉMONSTRATION. De la définition du centre de masse (4.37) et de la condition  $M_\alpha(t) = M_\alpha$ , on a

$$p = \sum_\alpha M_\alpha \frac{d}{dt} (OP_\alpha) = \frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha M_\alpha OP_\alpha \right) = \frac{d}{dt} (MOG) = Mv_G.$$

**Remarque.** Aujourd’hui on considère que la relation (10.4) est une loi de la mécanique newtonienne. Cette loi sera modifiée en mécanique relativiste (§ 21.6.1) et en mécanique analytique (§ 22.6.4). Pour Newton, au contraire, (10.4) était la définition de la quantité de mouvement.

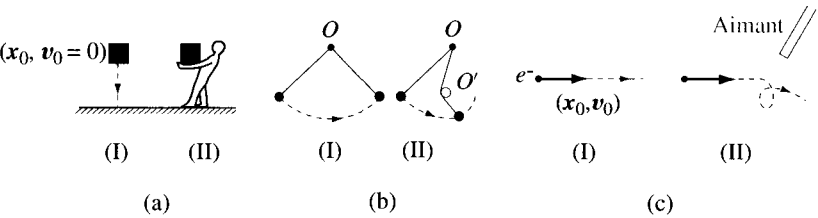
10.2.3 Force

Newton définit la force de la manière suivante : « *La force imprimée est l’action par laquelle l’état des corps est changé, que ce soit le repos ou le mouvement rectiligne uniforme.* » Malheureusement, cette définition est liée à celle du référentiel choisi pour décrire le mouvement. Pour nous affranchir du choix du référentiel, on introduit la définition suivante.

Force = action de l’extérieur sur le système

On appelle **force** toute action de l’extérieur sur le système conduisant à une modification de l’état de repos (déformation d’un solide), ou de mouvement, d’un système.

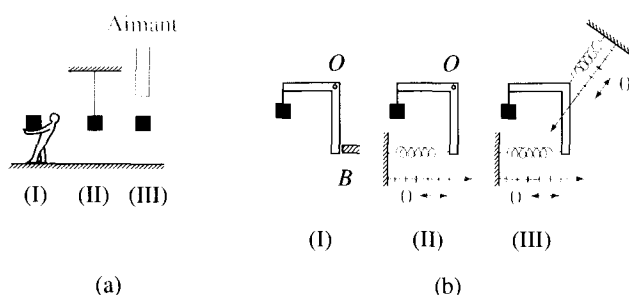
Par exemple, si l’on observe deux évolutions différentes d’un même système à partir d’un même état initial, on dira que dans le deuxième mouvement il y a soit une nouvelle force, soit une modification des forces agissant sur le système (fig. 10.3).



**Fig. 10.3** La différence entre les mouvements I et II des expériences (a), (b) et (c) est due à une force.

Même effet = même force

De plus, si différentes actions de l’extérieur sur un point matériel ont même effet, nous dirons que la même force agit sur le point (fig. 10.4). On remarque ainsi que la force est le concept physique qui correspond à la notion physiologique d’effort ; par ailleurs, nous voyons que la force est la seule manière de faire varier le mouvement d’un corps en mécanique newtonienne.



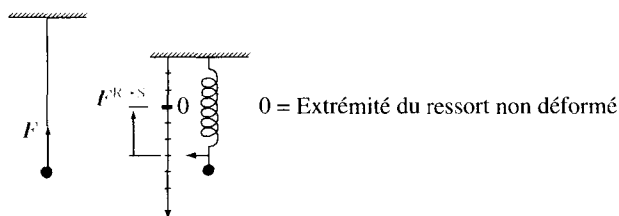
**Fig. 10.4** Les « mêmes forces » agissent dans les cas (I), (II) et (III) ; (a) corps immobile ; (b) structure maintenue en équilibre soit par l'axe  $O$  et le butoir  $B$ , soit par les dynamomètres.

Des expériences représentées sur les figures 10.4 (b) et 10.5, ainsi que des observations discutées au paragraphe 4.4.5, on déduit que la force est une grandeur caractérisée par une direction, un sens et une intensité.



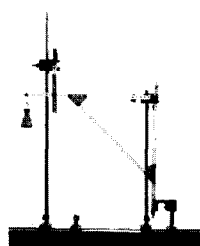
**Fig. 10.5** On tire avec une force  $F$  sur un essieu, posé sur une table horizontale, au moyen d'un fil enroulé autour de l'axe. Si  $\alpha = \alpha_0$ , l'essieu reste immobile ; si  $\alpha < \alpha_0$ , il se déplace vers la droite ; si  $\alpha > \alpha_0$ , il se déplace vers la gauche.

Pour mesurer l'intensité de la force, nous remarquons que l'effort nécessaire pour allonger un ressort augmente avec l'élongation. Nous pouvons alors mesurer la force exercée sur le point matériel en remplaçant l'action de l'extérieur par un ressort – ou dynamomètre – ayant même effet ; par définition, la force exercée par le dynamomètre est identique à la force originale et il suffit de mesurer l'élongation du ressort (fig. 10.6).



**Fig. 10.6** Mesure de la force  $F$  exercée par le fil sur le point matériel :  $F = F^{R \rightarrow S}$ .

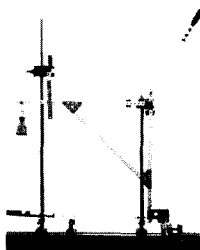
Pour étalonner le dynamomètre, on peut choisir comme unité le kilogramme-force (kgf), force exercée par la Terre, à Paris, sur le kilogramme-étalon. Cet étalon de force n'est pas transportable : la force exercée par la Terre sur un objet présente des variations de 5% à la surface du globe. Cependant, il est possible d'utiliser cette définition pour étalonner le dynamomètre à Paris au moyen des multiples du kilogramme-étalon et obtenir un appareil de mesure transportable.



Structure en équilibre avec axe et butoir

Propriété vectorielle des forces

Mesures des forces au moyen de dynamomètres



Le butoir et l'axe sont remplacés par des dynamomètres

La force est une grandeur vectorielle

Nous supposons que le dynamomètre a été choisi de manière telle que la force soit proportionnelle à l'élongation et ceci quel que soit le mouvement du dynamomètre.

Ayant un moyen de mesurer l'intensité de la force, l'expérience de Stevin (fig. 4.13) montre que la force est une grandeur vectorielle : *l'action de plusieurs forces sur un point est égale à l'action de la résultante vectorielle*.

Dans l'expérience précédente (fig. 10.6), nous avons mis en évidence la force exercée par le fil, ou par le ressort, sur un corps. Si l'on coupe le fil, on observe une modification du mouvement (chute libre) et l'on admet que cette modification est due à l'action de la Terre.

Poids

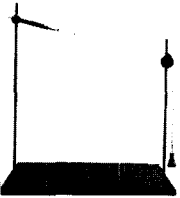
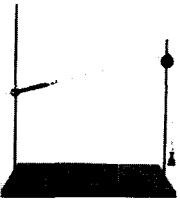
**Par définition, le *poids* d'un corps est la force exercée « par la Terre » sur le corps immobile ; cette force est appelée force de pesanteur.**

Nous reviendrons sur ce concept au paragraphe 15.5.2. Cette force se mesure en suspendant le corps au dynamomètre. En particulier, le poids d'une masse de 1 kg est égal à 1 kgf à  $\pm 5 \cdot 10^{-3}$  suivant la position à la surface de la Terre.

Densité

**La *densité* d'un corps est égale au poids du corps divisé par le poids d'un égal volume d'eau à 4° et 1 atmosphère : c'est une grandeur sans dimension.**

L'observation (fig. 10.7) montre que la force exercée par un fil souple est tangente au fil, d'intensité indépendante de la direction et du point d'application.



Fil souple

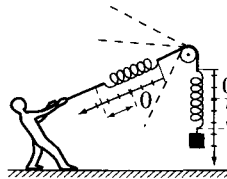


Fig. 10.7 Expérience avec un fil souple.

Ainsi, par définition, un *fil souple* est un système unidimensionnel idéal, de masse nulle, permettant de modifier la direction d'une force sans modifier son intensité. La force exercée par le fil est tangente à la direction du fil, dans le sens de la contraction du fil. Nous étudierons les fils pesants – ou câbles – à la section 16.4.

### 10.3 TROISIÈME LOI DE LA MÉCANIQUE

Nous commencerons la discussion des lois de Newton par la troisième, qui nous semble être la plus importante, bien qu'elle ne soit pas toujours vérifiée. En effet, du point de vue conceptuel, elle conduira à l'une des super-lois de la physique, la loi de conservation de la quantité de mouvement ; par ailleurs, du

point de vue pratique, elle permettra d'éliminer les forces inconnues, c'est-à-dire les forces intérieures.

Newton introduit le principe suivant.

« L'action est toujours égale et opposée à la réaction, c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de direction opposée. »

Lex Tertia :  
énoncé de Newton

Cette loi est illustrée par les deux expériences de la figure 10.8 qui montrent que  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ , où  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$  représente la force exercée par le système 1 sur le système 2.

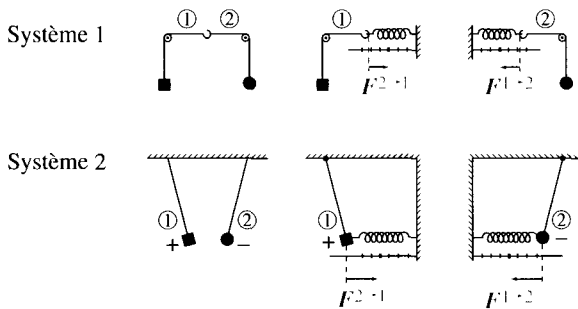


Fig. 10.8 Action = Réaction :  $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$ .

Pour donner un énoncé plus général de la troisième loi, considérons un système  $S$  formé de  $N$  points matériels. La force  $\mathbf{F}_\alpha$  agissant sur le point matériel  $P_\alpha$  de  $S$  peut être décomposée en deux contributions (fig. 10.9) :

- une **force intérieure**  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}$  dont l'origine est entièrement à l'intérieur du système ;
- une **force extérieure**  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$  dont l'origine est (en partie) à l'extérieur du système.

Forces intérieures et  
forces extérieures

Ainsi, par définition, les forces intérieures ne dépendent que de l'état du système.

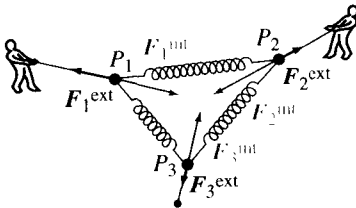


Fig. 10.9 Forces intérieures et extérieures agissant sur le système formé de 3 points matériels dont l'interaction mutuelle est représentée par 3 ressorts.

Si l'on admet que toutes les forces intérieures sont des forces à 2 corps, c'est-à-dire, que pour tout point matériel  $P_\alpha$  de  $S$ , la force intérieure sur  $P_\alpha$  est égale

Principe de  
superposition

à la somme des forces exercées sur  $P_\alpha$  par chacun des autres points matériels  $P_\beta$  de  $S$  indépendamment, soit

$$\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \quad (10.8)$$

où la force  $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$  exercée par  $P_\beta$  sur  $P_\alpha$  ne dépend que de l'état (position, vitesse) des points  $P_\alpha$  et  $P_\beta$ , alors la *Lex Tertia* implique

$$\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} (\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} &= \sum_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \mathbf{OP}_\alpha \wedge (\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}) = 0. \end{aligned}$$

Généralisant ce résultat, nous énoncerons la 3<sup>e</sup> loi de la mécanique newtonienne sous la forme suivante.

Troisième loi de la mécanique

A tout instant, et quel que soit le mouvement du système, le torseur des forces *intérieures* est équivalent à zéro :

$$\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} = 0. \quad (10.9)$$

Cet énoncé a une portée plus générale que celui de Newton car il n'est pas limité au cas de forces à 2 corps.

Forces à  $n$  corps

Pour comprendre l'origine des forces à  $n$  corps ( $n \geq 3$ ), considérons deux, puis trois atomes, que l'on assimile à des points matériels. La force interatomique  $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$  résulte des forces entre noyaux et électrons ; comme la présence d'un troisième atome modifie le mouvement des électrons dans les deux premiers atomes,  $\mathbf{F}_1^{\text{int}}$  ne sera pas égale à  $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} + \mathbf{F}^{3 \rightarrow 1}$ . La force définie par la différence  $\mathbf{F}_1^{\text{int}} - \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} - \mathbf{F}^{3 \rightarrow 1}$  est appelée force à 3 corps.

Dans la suite de cet ouvrage, nous considérons uniquement des forces à deux corps, ce qui est généralement une bonne approximation.

De la 3<sup>e</sup> loi de la mécanique on déduit deux corollaires importants.

**Corollaire 1.** Le torseur des forces agissant sur un système matériel est équivalent au torseur des forces extérieures au système

$$\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \sum_\alpha \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (10.10)$$

où  $(\mathbf{F}^{\text{ext}}, \mathbf{M}_O^{\text{ext}})$  sont les éléments de réduction du torseur des forces extérieures.



**Corollaire 2.** Étant donné deux systèmes matériels  $S^1$  et  $S^2$ , le torseur des forces exercées par  $S^1$  sur  $S^2$  est égal et opposé au torseur des forces exercées par  $S^2$  sur  $S^1$ ,

Principe de l'action  
et de la réaction

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{S^2 \rightarrow S^1} = \sum_{\alpha \in S^1} \mathbf{F}^{S^2 \rightarrow \alpha} = - \sum_{\beta \in S^2} \mathbf{F}^{S^1 \rightarrow \beta} = -\mathbf{F}^{S^1 \rightarrow S^2} \\ \mathbf{M}_O^{S^2 \rightarrow S^1} = \sum_{\alpha \in S^1} \mathbf{OP}_\alpha \wedge \mathbf{F}^{S^2 \rightarrow \alpha} = - \sum_{\beta \in S^2} \mathbf{OP}_\beta \wedge \mathbf{F}^{S^1 \rightarrow \beta} = -\mathbf{M}_O^{S^1 \rightarrow S^2}. \end{cases} \quad (10.11)$$

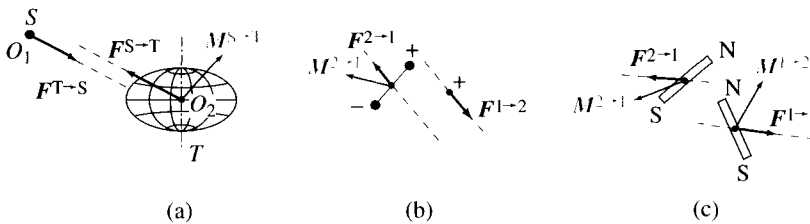
**DÉMONSTRATION.** En considérant  $S^1$  et  $S^2$  comme deux parties du système  $S^1 \cup S^2$ , ce corollaire est une conséquence immédiate de (10.9) (appliquée à  $S^1$ ,  $S^2$  et  $S^1 \cup S^2$ ) et des propriétés des torseurs.

En conclusion, le torseur des forces exercées par  $S^2$  sur  $S^1$  est équivalent à une force  $\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$  liée au point  $O_1$  et un couple  $\mathbf{M}^{2 \rightarrow 1}$ ; de même, le torseur des forces exercées par  $S^1$  sur  $S^2$  est équivalent à une force  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$  liée au point  $O_2$  et un couple  $\mathbf{M}^{1 \rightarrow 2}$ , tels que (4.32)

$$\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{O_2}^{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{M}_{O_1}^{2 \rightarrow 1} - \mathbf{O}_2 \mathbf{O}_1 \wedge \mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}. \quad (10.12)$$

### Remarques

- Il existe des situations où il peut sembler que la troisième loi soit mise en défaut. Par exemple dans le système Terre-Soleil, le torseur des forces exercées par le Soleil sur la Terre se réduit à une force unique appliquée en un point  $O$  distinct du centre de masse  $G$  de la Terre. Par conséquent, appliquée en  $G$  la force  $\mathbf{F}^{S \rightarrow T}$  n'a pas le même support que  $\mathbf{F}^{T \rightarrow S}$  et le moment résultant  $\mathbf{M}_G^{S \rightarrow T}$  n'est pas nul (fig. 10.10 a). Ainsi si, par erreur, on assimile des objets étendus à des points matériels, il se peut que les forces entre deux objets ne satisfassent pas le principe de l'action et de la réaction : les forces n'ont pas le même support ! *Nous voyons déjà apparaître une condition pour qu'un corps soit assimilable à un point matériel.*



**Fig. 10.10** Principe généralisé de l'action et de la réaction : (a) système Terre-Soleil ; (b) système dipôle-charge ; (c) système aimant-aimant.

Considérons, comme autre exemple, un fusil monté sur le rail à air qui tire sur une cible également montée sur le rail à air (fig. 10.11 a). On observe une

« action » du fusil sur la cible, ainsi qu’une « réaction » sur le fusil (recul). Toutefois, pendant un certain intervalle de temps la 3<sup>e</sup> loi semble en défaut : on observe une « réaction » avant d’observer l’« action ». Cependant, la 3<sup>e</sup> loi est applicable à tout instant si l’on inclut le projectile dans la discussion.

Violation de la 3<sup>e</sup> loi

• Il existe des situations où la troisième loi est véritablement mise en défaut. Considérons, par exemple, la création d’une paire d’électrons par  $2\gamma$  (fig. 10.11 b) ; l’action du proton sur la paire  $e^+ e^-$  s’effectue dès la création de celle-ci ; par contre, les forces ayant une vitesse de propagation finie, il faudra un temps fini pour que le proton subisse la force exercée par les électrons. Dans ce cas, il est nécessaire de faire intervenir d’autres phénomènes (propagation du photon).



Fig. 10.11 (a) La 3<sup>e</sup> loi s’applique ; (b) violation de la 3<sup>e</sup> loi.

Comme deuxième exemple, considérons deux particules chargées, de charge  $q_1$  et  $q_2$ . Lorsque les deux particules sont en mouvement, il apparaît une force qui s’exprime, dans le cas où  $|\mathbf{v}| \ll c$ , par (§ 21.8.4)

$$\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \mathbf{v}_2 \wedge \left[ \mathbf{v}_1 \wedge \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right]$$

et

$$\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = +\frac{\mu_0}{4\pi} q_1 q_2 \mathbf{v}_1 \wedge \left[ \mathbf{v}_2 \wedge \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right]$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1$ , et  $\mu_0$  est une constante ( $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ). Dans ce cas on voit que  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} \neq -\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}$ .

## 10.4 LOIS DU MOUVEMENT POUR LE POINT MATÉRIEL

### 10.4.1 Première loi de la mécanique

Énonçons pour commencer la première loi de la dynamique du point matériel sous la forme donnée par Newton.

*Lex Prima :* « Tout corps persévère dans l’état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite à moins que quelque force n’agisse sur lui et ne le contraigne à changer d’état. »

En effet, on observe que, quelles que soient les conditions initiales, le mouvement d’un point matériel sur la table à air horizontale est rectiligne uniforme jusqu’au choc au bord de la table.

Avec le concept de quantité de mouvement introduit au paragraphe 10.2.2 la première loi de la mécanique prend la forme suivante.

La quantité de mouvement d'un point matériel reste constante au cours de l'évolution si et seulement si la résultante des forces qui agissent sur lui est égale à zéro.

Première loi de la mécanique

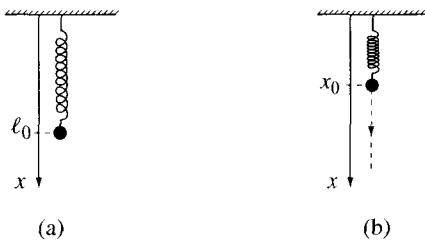
### Remarques

- L'observation d'un mouvement rectiligne uniforme ou de la conservation de la quantité de mouvement dépend du choix du référentiel ; Newton en conclut que la 1<sup>re</sup> loi n'est vérifiée que dans des référentiels privilégiés, les référentiels d'inertie. Au contraire, Mach admet que la première loi est valable dans tout référentiel : cette loi fixe alors la condition dite de « forces nulles » (§ 10.4.4).
- Bien que Newton attribue le principe d'inertie à Galilée, ce dernier ne s'intéressait pas à la formulation des lois universelles et le principe d'inertie n'a pas joué de grand rôle dans la pensée de Galilée. Descartes fut le premier à formuler le principe d'inertie comme une loi universelle. Il semblerait du reste que Newton l'ait appris de Descartes et non de Galilée [34].

Référentiels d'inertie

### 10.4.2 Deuxième loi de la mécanique

**Expérience 1.** Un point matériel est suspendu à un dynamomètre. La position d'équilibre est  $\ell_0$  (fig. 10.12 a).



**Fig. 10.12** Point matériel suspendu à un dynamomètre : (a) cas statique ; (b) cas dynamique.

Si nous prenons une condition initiale  $(x_0, v_0)$  arbitraire (fig. 10.12 b), nous observons l'évolution

$$x(t) - \ell_0 = A \cos(\omega t + \delta) \quad (10.13)$$

où  $\omega$  est une constante indépendante des conditions initiales. Nous avons ainsi l'accélération

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 (x(t) - \ell_0). \quad (10.14)$$

Dans le cas statique (fig. 10.12 a), il suit de la 1<sup>re</sup> loi que la résultante des forces appliquées sur le point matériel est nulle. Dans le cas dynamique, en vertu de la définition du dynamomètre, la force supplémentaire  $F$  exercée par



NEWTON Isaac  
(1642-1727)  
Mathématicien,  
physicien et astronome  
anglais

le ressort (qui est donc égale à la résultante des forces appliquées) s'exprime au moyen de l'élongation du dynamomètre :

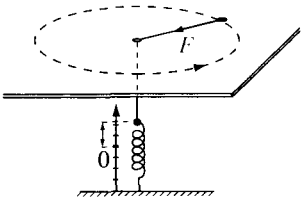
$$F = -k(x - \ell_0).$$

En introduisant cette expression dans (10.14), on obtient

$$F(t) = \left(\frac{k}{\omega^2}\right) a(t). \tag{10.15}$$

$F \sim a$  En conclusion, cette expérience montre qu'à tout instant  $t$  l'accélération est proportionnelle à la force.

**Expérience 2.** Considérons l'expérience de la figure 10.13 effectuée sur la table à air horizontale, avec le point matériel de l'expérience 1 et un fil souple.



**Fig. 10.13** Mesure au moyen d'un dynamomètre de la force agissant sur un point matériel en rotation.

Mouvements  
circulaires

Cette expérience montre que pour toute valeur  $R$ , il est possible de réaliser un mouvement circulaire uniforme de rayon  $R$ . De plus, on observe, pour ces mouvements circulaires, que la force exercée par le dynamomètre est proportionnelle à  $\dot{\theta}^2 R$ , où  $\dot{\theta}$  est la vitesse angulaire; on constate en outre que le coefficient de proportionnalité s'identifie au coefficient  $k/\omega^2$  de (10.15).

$F \sim a$  Sachant que l'accélération du point matériel est donnée par (5.59)  $\mathbf{a} = -\dot{\theta}^2 R \mathbf{e}_r$  (pour le mouvement circulaire uniforme que nous discutons), et que le fil modifie la direction de la force sans changer l'intensité, on arrive à la conclusion que le vecteur force est proportionnel au vecteur accélération, où le coefficient de proportionnalité est une propriété caractéristique du corps.

Ces expériences conduisent à introduire une nouvelle grandeur.

La **masse d'inertie**  $m$  d'un corps est définie par le facteur de proportionnalité entre la force et l'accélération.

On peut poser

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

où

$m$  = masse d'inertie

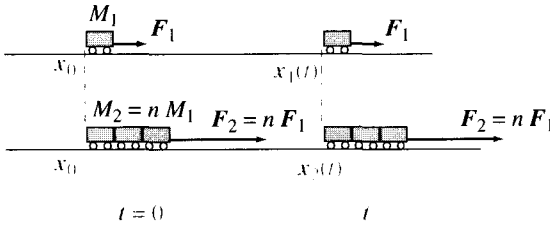
On arrive ainsi à la relation bien connue

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}. \tag{10.16}$$

Ayant introduit les grandeurs fondamentales « longueur », « temps », « masse » et « force », la masse d'inertie apparaît comme une grandeur dérivée d'unité  $[m] = [F][L]^{-1}[T]^2$ . Dans le système d'unités (m, s, kg, kgf), cette unité est le grave, c'est-à-dire 1 grave = 1 kgf m<sup>-1</sup> s<sup>2</sup>.

Si l'on effectue à nouveau les expériences 1 et 2 avec des points matériels de masse  $M$  (= quantité de matière) différente, on observe que  $\omega^2$  et  $\theta^2 R$  sont proportionnels à  $M$ . Par conséquent, l'observation montre que la masse d'inertie  $m$  et la masse quantité de matière  $M$  sont deux grandeurs proportionnelles. Cette conclusion étant fondamentale, effectuons encore les expériences suivantes pour la vérifier.

Considérons tout d'abord deux points matériels de masse (= quantité de matière)  $M_1$  et  $M_2 = nM_1$  sur lesquels agissent respectivement les forces  $F_1$  et  $F_2 = nF_1$  constantes (fig. 10.14).

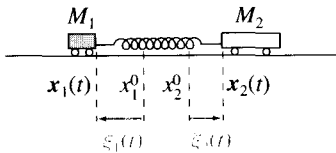


**Fig. 10.14** Mesure de  $x(t)$  et  $a(t)$  pour deux masses  $M_1$  et  $nM_1$  subissant les forces  $F_1$  et  $nF_1$ .

En prenant les mêmes conditions initiales pour  $M_1$  et  $M_2$ , on observe que  $x_1(t) = x_2(t)$ , c'est à dire qu'à tout instant,  $a_1(t) = a_2(t)$ . En conséquence

$$m_1 = \frac{F_1}{a_1}, \quad m_2 = \frac{F_2}{a_2} = \frac{nF_1}{a_1} = nm_1 = \frac{M_2}{M_1} m_1 \quad \text{et} \quad \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}.$$

Une expérience similaire peut être réalisée sans qu'il soit nécessaire de mesurer la force. Considérons deux points matériels reliés par un ressort (fig. 10.15). Initialement, le ressort est comprimé au moyen d'un fil et les deux points sont au repos; à l'instant  $t = 0$ , on coupe le fil. On observe l'évolution  $\xi_1(t) = x_1(t) - x_1^0$  et  $\xi_2(t) = x_2(t) - x_2^0$ .



**Fig. 10.15** Étude du mouvement de deux masses  $M_1$  et  $M_2$  reliées par un ressort.

De la relation  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  appliquée aux deux masses, et de la troisième loi  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}(t) = -\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1}(t)$ , on a

$$m_1 \ddot{\xi}_1(t) = -m_2 \ddot{\xi}_2(t).$$

Par ailleurs, l'expérience montre que

$$M_1 \xi_1(t) = -M_2 \xi_2(t), \quad \text{d'où} \quad \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}. \quad (10.17)$$

$m$  proportionnelle  
à  $M$

$\frac{m}{M} = \text{cste}$   
donc  
 $m = kM$

En conclusion, la masse d'inertie est proportionnelle à la masse quantité de matière, soit  $m = kM$ , où  $k$  est une constante indépendante du point matériel qui ne dépend que des unités choisies.

Choix des unités : Nous pouvons alors modifier le choix des unités de sorte que  $k = 1$  et, de cette manière, égaliser « masse d'inertie » et « masse quantité de matière ». Nous avons alors

$M =$  quantité de matière       $F = Ma.$  (10.18)

Ayant introduit les grandeurs fondamentales « longueur », « temps » et « masse », la relation  $F = Ma$  fait apparaître la force comme une grandeur dérivée, d'unité  $[F] = [M][L][T]^{-2}$  : c'est l'intensité d'une force qui donne une accélération de  $1 [L][T]^{-2}$  à une unité de masse. Dans le système MKSA, l'unité de force est le **newton** :

$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$     et     $1 \text{ kgf} \equiv 9,80665 \text{ N}.$  (10.19)

*Lex Secunda*      Newton exprime la deuxième loi sous la forme suivante « *Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.* »

On remarquera que Newton n'exprime pas la deuxième loi sous la forme « populaire »  $F = Ma$ , mais sous une forme plus générale qui restera valable en mécanique relativiste (chap. 21).

En introduisant le concept de quantité de mouvement  $p$  (§ 10.2.2), la deuxième loi prend la forme :

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces qui agissent sur lui :

Deuxième loi de la mécanique pour un point matériel

$\frac{d}{dt}p(t) = F(t)$     où     $F(t) = \sum_{\alpha} F_{\alpha}(t).$  (10.20)

Remarques

- Contrairement à ce que pouvait dire Kirchoff (et beaucoup d'autres), nous avons montré que la relation  $F = ma$  n'est pas une définition de la force mais l'expression d'une loi expérimentale.
- L'équation de Newton  $\dot{p} = F$  permet de calculer la force si l'on connaît l'évolution du point matériel ; c'est, par exemple, le cas dans l'étude du mouvement des planètes.

Inversement, supposons que l'on connaisse la force en fonction du temps ; par intégration de  $t_0$  à  $t_1$ , nous obtenons

$p(t_1) - p_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt F(t)$     où     $p_0 = p(t_0)$  (10.21)

puis, par intégration de  $t_0$  à  $t_1$ , on trouve l'évolution

$$\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{x}_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\mathbf{p}(t)}{m} \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \quad (10.22)$$

En conclusion, la donnée de  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, t_0)$  et  $\mathbf{F}(t)$  détermine univoquement l'évolution temporelle. Ainsi,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$  définit *l'état du point matériel à l'instant  $t_0$*  : ce sont les *conditions initiales*.

Dans les ouvrages techniques, la grandeur  $\int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{F}(t)$  est parfois appelée « impulsion » ; cette terminologie porte à confusion car en physique l'impulsion est une généralisation de la quantité de mouvement (§ 22.1.5).

En général, la force à l'instant  $t$  est définie par une fonction qui dépend de l'état du point matériel et du temps, soit  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  et

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t). \quad (10.23)$$

Par exemple, pour une particule de masse  $m$  et de charge  $q$ , en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et d'un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , la force due à ces champs est donnée par

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = q [\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)]. \quad (10.24)$$

Dans ces cas, l'évolution temporelle est décrite par les *équations du mouvement*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{p}}{m} & 3 \text{ équations scalaires} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) & 3 \text{ équations scalaires.} \end{cases} \quad \text{Évolution temporelle}$$

Nous avons ainsi un système de 6 équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre pour les 6 variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Si la fonction  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  n'est pas singulière, il y aura une solution et une seule  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$  telle que  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$  (Appendice D).

### 10.4.3 Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Considérons un point matériel en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ .

On appelle *moment cinétique  $L_O$  par rapport au point  $O$*  la grandeur vectorielle définie par

Définition du moment cinétique

$$L_O = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \quad (10.25)$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{OP}$  est le rayon vecteur du point matériel : c'est le moment par rapport à  $O$  du vecteur quantité de mouvement.  $L_O$  est un vecteur axial de dimension  $[L_O] = [M][L]^2[T]^{-1}$ .

Théorème du moment cinétique

Pour tout point  $O$  fixé dans le référentiel

$$\frac{d}{dt} L_O = M_O \tag{10.26}$$

où  $M_O = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}$  est le moment par rapport à  $O$  de la force (totale) agissant sur le point matériel.

DÉMONSTRATION. De  $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}}$  et  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$  on obtient

$$\frac{d}{dt} L_O = \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F}.$$

Remarques

- On voit que la vitesse aréolaire introduite en cinématique (§ 6.5.2) est égale au quotient  $L_O/2m$ .
- Pour un point matériel, les équations (10.20) et (10.26) ne sont pas indépendantes.



MACH Ernst  
(1838-1916)

Physicien autrichien

10.4.4 Référentiel d’inertie

Comme nous l’avons déjà remarqué, les lois de la mécanique sont des lois qui permettent de décrire le mouvement. Elles supposent donc le choix préalable d’un référentiel. Le point de vue traditionnel, hérité de Newton, suppose qu’il est possible de définir a priori un système isolé (un corps assez loin de toute matière pour qu’il ne subisse aucune force). La première loi ne peut alors s’appliquer que dans des référentiels privilégiés, les référentiels d’inertie. L’énoncé du premier principe prend alors la forme suivante.

Il existe des référentiels privilégiés munis d’une règle et d’une horloge appelés *référentiels d’inertie* ou *référentiels de Galilée*, par rapport auxquels tout corps isolé est au repos ou animé d’un mouvement rectiligne uniforme.

Il découle de la discussion du chapitre 9 que si  $\mathcal{R}$  est un référentiel d’inertie, alors tout référentiel  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , est également un référentiel d’inertie.

Ainsi, selon le point de vue newtonien, la première loi définit les référentiels d’inertie, référentiels par rapport auxquels la deuxième loi est applicable.

Toutefois, l’ingénieur aujourd’hui a souvent l’occasion de regarder (si ce n’est de vivre) l’expérience des cosmonautes observant le mouvement rectiligne uniforme des objets qu’ils se lancent à l’intérieur de la navette spatiale. Le point de vue moderne, hérité de Mach (§ 10.6.2), autorise le choix de la navette comme référentiel. Dans ce cas les cosmonautes peuvent conclure, de

Référentiel d’inertie  
= référentiel de  
Galilée

Point de vue de  
Newton



leurs observations et de la première loi de Newton, qu'il n'y a « aucune force » agissant sur les objets qu'ils se lancent, ou, plus exactement que « la résultante des forces (inconnues) agissant sur les objets est nulle ». Au contraire, dans la tour de contrôle sur Terre, on observe un mouvement accéléré de ces objets et l'on peut affirmer qu'ils sont soumis à la force gravifique exercée par la Terre. Par conséquent, si l'on adopte le point de vue de Mach, selon lequel tous les référentiels sont acceptables, il faut admettre que le concept de force, comme le concept d'accélération, dépend du choix du référentiel et que la première loi est une définition des conditions dans lesquelles la force est nulle :

Point de vue de Mach

Quel que soit le référentiel  $\mathcal{R}$ , la résultante des forces agissant sur un corps est nulle si le mouvement de ce corps est rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Nous reviendrons au paragraphe 10.6.2 sur l'importance conceptuelle, théorique et pratique, du point de vue de Mach. L'approche newtonienne a pour elle l'avantage qu'ayant élu certains référentiels au titre de référentiels d'inertie, il est possible de donner une liste exhaustive des forces pouvant agir sur le corps en mouvement (chap. 12). C'est le point de vue qu'il est conseillé d'adopter lors d'un premier contact avec l'application des lois de la mécanique.

Essayons alors de mettre en évidence un référentiel privilégié, par rapport auquel l'action de l'extérieur puisse être négligée. Pour ce faire, nous allons procéder par approximations successives.

Recherche d'un référentiel d'inertie

Le plus commode serait de prendre le référentiel lié à la Terre et de considérer que l'action de l'extérieur du système terrestre est négligeable dans l'étude des mouvements à la surface de la Terre ; après tout, c'est à partir de ce référentiel que Galilée, Descartes et Newton sont arrivés au principe d'inertie. En première approximation, ce sera effectivement le cas : le laboratoire peut être considéré comme un référentiel d'inertie pour l'explication de beaucoup de phénomènes et les observations seront généralement en accord avec les prédictions théoriques. Dans cette approximation, un point immobile à la surface de la Terre a une accélération  $\mathbf{a}_1 = 0$ .

$\mathcal{R}_1 = \text{laboratoire}$   
 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a})_{\mathcal{R}_1}$

Cependant, une observation plus soignée de la chute des corps (« déviation vers l'Est ») (§ 15.5.3), de la rotation du plan d'oscillation d'un pendule (Foucault, 1851) (§ 15.5.4), du mouvement des courants atmosphériques, de l'érosion des rives des grands fleuves, ... montre que les lois de Newton ne sont pas vérifiées par rapport au référentiel Terre.

Dans une deuxième approximation, nous pouvons choisir comme référentiel d'inertie le référentiel géocentrique. Par rapport à ce référentiel, la Terre tourne autour de l'axe des pôles avec une vitesse angulaire  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (§ 9.7.3) et un point immobile à la surface de la Terre a une accélération  $\mathbf{a}_2$ , dirigée vers l'axe de la rotation, d'intensité  $a_2 = \Omega^2 R_T \cos \lambda \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \cos \lambda \text{ ms}^{-2}$ , où  $\lambda$  est la latitude du point en question et  $R_T$  est le rayon de la Terre.

$\mathcal{R}_2 = \text{Référentiel géocentrique}$   
 $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a})_{\mathcal{R}_2}$

A partir de ce référentiel, il est possible d'expliquer les observations qui étaient en contradiction avec les prédictions obtenues dans le référentiel du laboratoire ; mais l'application des lois de Newton conduit à la conclusion que

le mouvement de la Lune devrait donner naissance à une marée par jour, alors que l'on en observe deux.

$\mathcal{R}_3 = \text{Référentiel de Copernic}$

Dans une *troisième approximation*, nous sommes conduits à prendre le *référentiel de Copernic*. Par rapport à ce référentiel, le centre de la Terre effectue une révolution autour du Soleil en une année, ce qui correspond à une vitesse angulaire  $\omega_e = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$  (§ 9.7.3) et un point immobile à la surface de la Terre a une accélération supplémentaire  $a_3$ , dirigée vers le Soleil, d'intensité  $a_3 \cong \omega_e^2 R \cong 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$  où  $R$  est la distance Terre-Soleil. Ce fut l'un des grands succès de la théorie de Newton que d'expliquer le phénomène des marées à partir de ce référentiel.

L'analyse du déplacement des raies spectrales par effet Doppler conduit ensuite à considérer dans une *quatrième approximation* que le centre de gravité du système solaire n'est pas immobile, mais qu'il effectue un mouvement circulaire autour du centre de notre *Galaxie*. La période est de 250 millions d'années et ce mouvement conduit à une accélération supplémentaire  $a_4$ , dirigée vers le centre de la galaxie, d'intensité

$$a_4 \cong \omega_4^2 R_4 \cong \left( \frac{2\pi}{2,5 \cdot 3 \cdot 10^{15}} \right)^2 \cdot 3 \cdot 10^{20} \cong 2 \cdot 10^{-10} \text{ ms}^{-2}.$$

Le plus souvent, on s'arrêtera à cette approximation. Toutefois, l'effet Doppler montre que notre Galaxie est en mouvement par rapport au centre du *groupe local*, qui lui-même est en mouvement par rapport à d'autres amas de galaxies, qui elles-mêmes... Heureusement, à chaque approximation, les corrections à l'accélération deviennent de plus en plus petites !

Théoriquement, si l'on suppose que la quantité de matière de l'Univers est finie, nous pourrions définir le référentiel d'inertie de notre Univers à partir du théorème suivant : « Il existe un référentiel et un seul par rapport auquel le torseur des quantités de mouvement est nul ». (Par rapport à ce référentiel, la quantité de mouvement et le moment cinétique de l'Univers seraient nuls.) Au contraire, si l'on suppose que la quantité de matière est infinie, on pourrait choisir le référentiel par rapport auquel l'expansion de l'Univers apparaît isotrope. Grâce aux mesures très précises du satellite COBE sur le rayonnement fossile, reliquat du Big Bang initial, il a été récemment possible de mettre en évidence un tel référentiel.

*Point de vue de Newton*

*Expérimentalement, on dira qu'un référentiel est un référentiel d'inertie si les lois de Newton sont vérifiées, à la précision des appareils de mesure, dans l'étude des phénomènes considérés.*

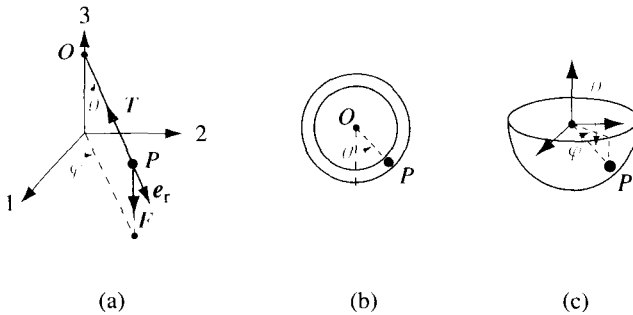
## 10.5 ILLUSTRATIONS

### 10.5.1 Pendule mathématique plan

Le pendule mathématique est constitué d'un point matériel  $P$ , de masse  $m$ , attaché à l'extrémité d'un fil mince, de longueur  $\ell$  et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixée à un point  $O$  immobile (fig. 10.16).

Pendule de radiesthésiste

Si le fil est souple, on a la condition  $|OP| \leq \ell$  (c'est aussi la situation de la figure 10.16 c) ; si le fil est rigide la condition  $|OP| = \ell$  est satisfaite à tout instant et dans ce cas le système est holonôme à deux degrés de liberté (c'est aussi la situation de la figure 10.16 b). La force  $T$  exercée par le fil (tendu) est tangente au fil ; cette propriété – que nous avons vérifiée expérimentalement dans le cas d'un fil souple immobile – est une conséquence des équations générales de la dynamique (chap 11) et de l'hypothèse que le fil est de masse négligeable. (Dans le cas des figures 10.16 b et c,  $T$  est parallèle à  $OP$  s'il n'y a pas de frottement.)



**Fig. 10.16** (a) Pendule mathématique ; (b) point matériel dans un anneau ; (c) point matériel à l'intérieur d'une sphère.

Nous voulons tout d'abord trouver les conditions initiales pour que le mouvement du point matériel soit plan, puis étudier l'évolution et la tension dans le fil, lorsque l'on choisit ces conditions initiales.

Mouvement plan

Ayant choisi la Terre comme référentiel d'inertie, on remarque que les seules forces agissant sur  $P$  sont le poids  $F$ , supposé constant, dirigé vers le bas (§ 6.2.1), et la force  $T$  exercée par le fil, où  $T = T_r e_r$  avec la condition  $T_r \leq 0$  dans le cas d'un fil souple.

Les équations du mouvement sont données par l'équation de Newton (10.20) et le théorème du moment cinétique (10.26). Du théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} L_O = \mathbf{x} \wedge (\mathbf{F} + \mathbf{T}), \quad (10.27)$$

et des conditions sur les forces  $F$  et  $T$ , il vient

$$\frac{d}{dt} L_O = r F_z e_r \wedge e_z.$$

Par conséquent,  $\frac{d}{dt} L_{O,z} = 0$ , et de la définition de  $L_O$ , on obtient

$$L_{O,z} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = m r_0^2 \sin^2 \theta_0 \dot{\varphi}_0. \quad (10.28)$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement soit dans un plan vertical ( $\dot{\varphi} = 0$ ) est que  $\dot{\varphi}_0 = 0$ .

En conclusion, le mouvement de  $P$  sera plan si la vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  est nulle ou dans le plan vertical contenant  $\mathbf{OP}_0 = \mathbf{x}_0$ .

Supposons pour commencer que  $r = |\mathbf{OP}| = \ell$  et que le mouvement est plan. *Le système est alors holonôme à 1 degré de liberté.* Nous choisissons comme variable l'angle  $\theta$ .

De  $\mathbf{ma} = \mathbf{F} + \mathbf{T}$  et  $r = \ell$ , on obtient en coordonnées polaires

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = F \cos \theta + T_r, & (10.29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta} = -F \sin \theta. & (10.30) \end{cases}$$

Il découle de (10.30) que le mouvement de divers pendules de même longueur  $\ell$  ne dépend que du rapport  $F/m$ . Les expériences de Galilée et de Newton ayant montré que le mouvement est indépendant du poids et de la substance du pendule, on en conclut que  $F/m$  est une constante  $g$  indépendante du point matériel et que la force de pesanteur est donnée par la relation

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \quad (10.31)$$

Équation  
du mouvement

Nous avons par conséquent

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + T_r, & (10.32) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta & (10.33) \end{cases}$$

Constante du  
mouvement

et du lemme fondamental (§ 6.3.4), on déduit la *constante du mouvement*

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta = K \quad \left( = \frac{1}{2}\dot{\theta}_0^2 - \frac{g}{\ell} \cos \theta_0 \right). \quad (10.34)$$

### Analyse qualitative du mouvement

Effectuons une analyse qualitative du mouvement d'équation (10.33) en suivant la méthode décrite au paragraphe 7.4.2. Nous avons

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + U(\theta) = K \quad \text{avec} \quad U(\theta) = -\frac{g}{\ell} \cos \theta \quad (10.35)$$

et comme  $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = K - U(\theta) \geq 0$ , il est facile d'esquisser l'allure des orbites associées à différentes valeurs de  $K$  (fig. 10.17).

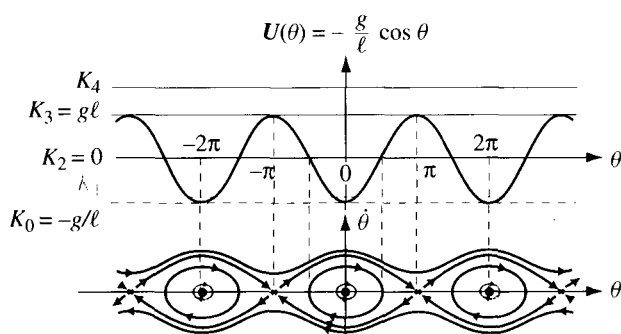


Fig. 10.17 Orbits du pendule plan.

Il découle de (10.34) que  $K \geq -g/\ell$  :

- $K = -\frac{g}{\ell}$  Pour cette valeur,  $\theta = 2k\pi$ ,  $k$  entier, et  $\dot{\theta} = 0$  : ce sont les *points d'équilibre stables*. Équilibre stable
- $-\frac{g}{\ell} < K < \frac{g}{\ell}$  Le mouvement est périodique, oscillant entre  $\pm\theta_{\max}$  où
 
$$\cos \theta_{\max} = -\frac{\ell}{g} K. \quad (10.36)$$

Dans ce cas, on parle de *mouvement de libration*.

Libration

Lorsque  $\theta$  augmente, on a  $\dot{\theta} = +\sqrt{2(K - U(\theta))}$ . Par ailleurs la période  $T$  du mouvement étant le double du temps nécessaire pour aller de  $\theta_{\min} = -\theta_{\max}$  à  $\theta_{\max}$ , on obtient

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{-\theta_{\max}}^{+\theta_{\max}} d\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \frac{\ell}{g} K}}. \quad (10.37)$$

- $K = +\frac{g}{\ell}$  Il y a plusieurs mouvements possibles : soit  $\theta = (2k + 1)\pi$ ,  $k$  entier, et  $\dot{\theta} = 0$  : ce sont les *points d'équilibre instables* ; soit le pendule évolue vers la position verticale qu'il atteint à  $t = \infty$ , en tournant dans le sens défini par le signe de  $\dot{\theta}_0$ . La courbe définie par les orbites associée à cette valeur de  $K$  est appelée *séparatrice*. Équilibre instable
- $K > \frac{g}{\ell}$  Le pendule effectue des révolutions complètes, soit dans un sens, soit dans l'autre ; c'est un mouvement périodique, de période Rotation

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \frac{\ell}{g} K}}. \quad (10.38)$$

Dans ce cas, on parle de *mouvement de rotation*.

### Mouvement au voisinage des points d'équilibre

Voisinage d'un point d'équilibre stable

1. Au voisinage de  $\theta = 0$ , on a  $\sin \theta \cong \theta$  et la linéarisation de (10.33) donne

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\theta. \quad (10.39)$$

C'est un mouvement oscillatoire harmonique (sect. 6.5), de période  $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ ; les orbites sont des ellipses.

Voisinage d'un point d'équilibre instable

2. Au voisinage de  $\theta = \pi$ , on introduit  $\psi = \theta - \pi$ . Dans ce cas,  $\ddot{\theta} = \ddot{\psi}$  et  $\sin \theta \cong -\psi$ . La linéarisation de (10.33) donne

$$\ddot{\psi} = +\frac{g}{\ell}\psi. \quad (10.40)$$

D'où

$$\psi(t) = \psi_0 \cosh \omega t + \frac{\dot{\psi}_0}{\omega} \sinh \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (10.41)$$

et

$$\frac{1}{2}\dot{\psi}^2 - \frac{1}{2}\omega^2\psi^2 = K - \frac{g}{\ell}. \quad (10.42)$$

Au voisinage de  $\theta = \pi$ , les orbites sont des hyperboles si  $K > g/\ell$ , et les droites  $\dot{\psi} = \pm\omega(\theta - \pi)$  si  $K = g/\ell$ . Dans ce dernier cas, on aura  $\psi(t) = \psi_0 e^{\pm\omega t}$ .

### Cas des fils souples

Si la liaison est réalisée par un fil souple, il faut vérifier si la condition  $T_r \leq 0$ , nécessaire pour que  $r = \ell$  est satisfaite. De (10.32) et (10.34) on tire

$$T_r = -mg \left( 3 \cos \theta + 2 \frac{\ell}{g} K \right). \quad (10.43)$$

Si  $K \leq 0$ , nous avons  $|\theta| \leq \pi/2$  et  $T_r = -mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_{\max}) \leq 0$ ; au contraire, si  $K > 0$ , la condition  $T_r \leq 0$  n'est satisfaite que pour  $K \geq \frac{3}{2} \frac{g}{\ell}$ . Par conséquent, si  $0 < K < \frac{3}{2} \frac{g}{\ell}$ , le point matériel tombe en chute libre dès que  $\cos \theta = \pm \frac{2}{3} \frac{\ell}{g} K$ .

### Remarque

L'équation (10.34) implique

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2 \left( K + \frac{g}{\ell} \cos \theta \right)},$$

soit

$$t = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left( K + \frac{g}{\ell} \cos \theta \right)}}. \quad (10.44)$$

Si le pendule est lâché sans vitesse de la position initiale  $\theta_0$ , on peut exprimer cette intégrale au moyen de fonctions tabulées. En effet, de

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2g/\ell} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}$$

et de  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , on obtient pour tout  $t \in [0, T/4]$ , où  $T$  est la période du mouvement,

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (10.45)$$

Introduisons la variable  $\varphi$  définie par

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \varphi$$

$$\cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi d\varphi$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \varphi.$$

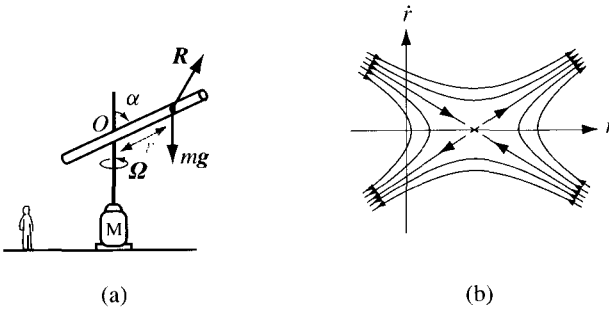
On obtient alors

$$t(\theta) = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\varphi(\theta)}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \sin^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{\ell}{g}} F(k, \varphi(\theta)) \quad (10.46)$$

où  $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$  et  $F(k, \varphi)$  est l'intégrale elliptique de première espèce.

### 10.5.2 Centrifugeuse

Une centrifugeuse est un système qui se compose d'un tube tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante, autour d'un axe vertical avec lequel il fait un angle  $\alpha$  constant (fig. 10.18 a). Étudions l'évolution d'un point matériel  $P$  de masse  $m$  se déplaçant sans frottement à l'intérieur de ce tube.



**Fig. 10.18** (a) Masse  $m$  se déplaçant sans frottement à l'intérieur d'un tube tournant autour d'un axe vertical et entraîné par un moteur  $M$ ; (b) orbites (Les valeurs  $r$  négatives correspondent à  $\theta = \pi - \alpha$ .)

Le système est holonôme à un degré de liberté. Ayant choisi comme référentiel le laboratoire, les forces agissant sur le point sont le poids  $mg$  et la réaction  $\mathbf{R}$  du tube. L'absence de frottement se traduit par la relation  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{x} = 0$  où  $\mathbf{x} = \mathbf{OP}$ . Comme nous avons les contraintes  $\dot{\varphi} = \Omega$  et  $\theta = \alpha$  ou  $\pi - \alpha$ , il est naturel de choisir les coordonnées sphériques. On prendra cependant  $\theta = \alpha$  et  $r \geq 0$ . Avec la condition  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_r = R_r = 0$ , l'équation de Newton  $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{R}$  s'écrit, en coordonnées sphériques (§ 5.5.5),

$$\text{Équation du mouvement} \quad \left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{r} - r\Omega^2 \sin^2 \alpha) = -mg \cos \alpha \\ m(-r\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha) = R_\theta \\ m(2\dot{r}\Omega \sin \alpha) = R_\varphi \end{array} \right. \quad (10.47)$$

d'où

$$\ddot{r} = r\Omega^2 \sin^2 \alpha - g \cos \alpha. \quad (10.48)$$

Du lemme fondamental (§ 6.3.4) on tire *une constante du mouvement*,

$$\text{Constante du mouvement} \quad \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}r^2\Omega^2 \sin^2 \alpha + rg \cos \alpha = K,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\left(r\Omega \sin \alpha - \frac{g}{\Omega \tan \alpha}\right)^2 = \tilde{K}. \quad (10.49)$$

Si  $\tilde{K} \neq 0$ , les orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$  sont des hyperboles (fig. 10.18 b); si  $\tilde{K} = 0$ , les orbites sont d'une part les droites

$$\dot{r} = \pm \left( r\Omega \sin \alpha - \frac{g}{\Omega \tan \alpha} \right)$$

et d'autre part le point  $(\bar{r}, \dot{r} = 0)$  où

$$\bar{r} = \frac{g \cos \alpha}{\Omega^2 \sin^2 \alpha}. \quad (10.50)$$

Le point  $(\bar{r}, \dot{r} = 0)$  est un point d'équilibre instable (fig. 10.18 b).

Pour résoudre (10.48), on l'écrit

$$\ddot{r} = (r - \bar{r}) \Omega^2 \sin^2 \alpha \quad (10.51)$$

et on introduit la variable  $\xi = r - \bar{r}$ . On obtient alors

$$\ddot{\xi} = \xi \Omega^2 \sin^2 \alpha$$

dont la solution est

$$\xi(t) = \xi_0 \cosh(\Omega \sin \alpha t) + \frac{\dot{\xi}_0}{\Omega \sin \alpha} \sinh(\Omega \sin \alpha t).$$

On trouve finalement  $r(t)$ ,  $\dot{r}(t)$  et, de (10.47), la force inconnue  $\mathbf{R}(t)$ .



### 10.5.3 Points matériels reliés par un fil

Un point matériel  $P$  de masse  $m$ , sur la table à air horizontale, est relié par un fil mince de longueur  $\ell$  à une masse  $m_1$  astreinte à se déplacer verticalement (fig. 10.19). Nous voulons analyser les mouvements possibles et trouver la tension dans le fil.

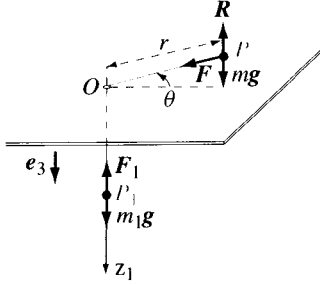


Fig. 10.19 Point matériel soumis à une force  $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r$ .

Nous considérons le système comme formé de deux sous-systèmes auxquels nous appliquons les lois de Newton. La table à air étant choisie comme référentiel, les forces sont  $m\mathbf{g}$ ,  $m_1\mathbf{g}$ , la force  $\mathbf{R}$  exercée par la table, et les forces  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{F}_1$ , exercées par le fil sur les masses  $m$  et  $m_1$ , qui sont parallèles au fil et de même intensité.

Le fil impose la contrainte  $|\mathbf{OP}| + |\mathbf{OP}_1| = \ell$  et, pour la masse  $m$ , nous avons la condition  $z = 0$ .

Le système est holonôme à deux degrés de liberté. Les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  s'imposent par le fait que  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_r$  et l'équation de liaison s'exprime par la condition

$$z_1 = \ell - r \quad \text{soit} \quad \ddot{z}_1 = -\ddot{r}. \quad (10.52) \quad \text{Équation de liaison}$$

Des équations de Newton, on tire

$$\text{pour la masse } m : m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{R} + m\mathbf{g},$$

$$\text{pour la masse } m_1 : m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_1 + m_1\mathbf{g}.$$

Équation de Newton

De  $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_3$  (pas de frottement) et

$$\ddot{z} = 0, \quad \mathbf{F} = F\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{F}_1 = F\mathbf{e}_3, \quad \text{où} \quad F \leq 0,$$

nous tirons  $\mathbf{R} + m\mathbf{g} = 0$  et

$$\begin{cases} m\mathbf{a} = F\mathbf{e}_r \\ m_1\ddot{z}_1 = F + m_1g. \end{cases} \quad (10.53)$$

$$(10.54)$$

De l'équation (10.53) il découle que le mouvement de  $P$  est central et l'on en déduit une *première constante du mouvement*, soit  $r^2\dot{\theta} = C$ . L'équation radiale du mouvement de  $P$ , soit  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F$ , devient alors

$$m\left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) = F. \quad (10.55)$$

En utilisant l'équation de liaison (10.52) l'équation du mouvement de  $P_1$  (10.54) devient

$$m_1\ddot{r} = -F + m_1g. \quad (10.56)$$

Cette dernière équation permet d'éliminer  $F$  de (10.55), d'où

$$(m + m_1)\ddot{r} = -m_1g + m\frac{C^2}{r^3} \quad (10.57)$$

Deuxième constante  
du mouvement

et le lemme fondamental (§ 6.3.4) donne une *deuxième constante du mouvement* :

$$\frac{1}{2}(m + m_1)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + m_1gr = E \quad (= \text{cste}). \quad (10.58)$$

Finalement, on obtient la tension  $T$  à partir de (10.55) et (10.57),

$$T = -F = \frac{mm_1}{m + m_1} \left(g + \frac{C^2}{r^3}\right), \quad (10.59)$$

ce qui montre que la condition  $T \geq 0$  est toujours satisfaite.

### Analyse qualitative du mouvement

Il nous faut distinguer les deux cas  $C = 0$  et  $C \neq 0$ .

1. Soit  $C = r_0^2\dot{\theta}_0 = 0$ .

Mouvement  
rectiligne

Si  $r_0 = 0$  et  $\dot{r}_0 = 0$ , le système reste immobile et  $T = m_1g$ . Sinon de (10.57) on tire  $(m + m_1)\ddot{r} = -m_1g$  et le mouvement de  $P$  est rectiligne, uniformément accéléré (excepté en  $r = 0$ , où l'accélération change de signe); dans ce cas

$$T = \frac{mm_1}{m + m_1}g \quad (\text{sauf lors des chocs en } r = 0 \text{ et } r = \ell).$$

2. Soit  $C = r_0^2\dot{\theta}_0 \neq 0$  (fig. 10.20).

Mouvement plan

Comme  $r^2\dot{\theta} = C$ , on a  $\text{sign } \dot{\theta} = \text{sign } \dot{\theta}_0$  et le point  $P$  tourne toujours dans le même sens autour de  $O$ .

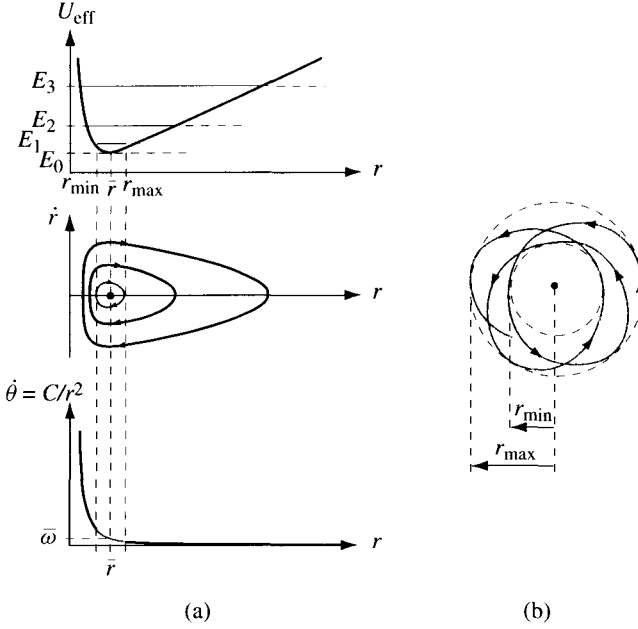
De (10.57) on déduit que le mouvement de  $P$  est circulaire uniforme de rayon  $\bar{r}$  si  $r_0 = \bar{r}$ ,  $\dot{r}_0 = 0$  et

$$\dot{\theta}_0 = \pm \sqrt{\frac{m_1g}{m\bar{r}}}.$$

Dans ce cas, la tension est constante, égale à  $m_1 g$ . Pour d'autres conditions initiales,  $r$  évolue de façon périodique entre  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$ , solutions de

$$\frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} + m_1 g r = E \quad (10.60)$$

et la tension (10.59) varie entre  $T_{\max}$  et  $T_{\min}$ .



**Fig. 10.20** (a) Analyse qualitative du mouvement pour  $C$  fixé, non nul, et différentes valeurs de  $E$  ; (b) trajectoire de  $P$ .

### Petits mouvements au voisinage du mouvement circulaire $\left( \bar{r}, \bar{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 g}{m \bar{r}}} \right)$

Pour une valeur fixée de  $C$ , et  $E - U_{\text{eff}}(\bar{r}) \ll 1$  (fig. 10.20), l'amplitude de  $(r - \bar{r})$  reste faible et la linéarisation de (10.57) donne

$$\begin{aligned} (m + m_1)\ddot{r} &= f(r) \cong \underbrace{f(\bar{r})}_{=0} + \frac{df}{dr}(\bar{r}) \cdot (r - \bar{r}) = \\ &= -3 \frac{mC^2}{\bar{r}^4} (r - \bar{r}) = -3m\bar{\omega}^2 (r - \bar{r}) \end{aligned}$$

d'où

$$r(t) = \bar{r} + A \cos(\Omega t + \delta) \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\frac{3m}{m + m_1}} \bar{\omega}.$$

On voit que le mouvement radial est périodique, de période  $\tilde{T} = 2\pi/\Omega$ . Dans la même approximation, l'équation angulaire  $\dot{\theta} = C/r^2$  devient

$$\dot{\theta} = \frac{C}{\bar{r}^2} - 2 \frac{C}{\bar{r}^3} (r - \bar{r}) = \bar{\omega} \left[ 1 - \frac{2}{\bar{r}} A \cos(\Omega t + \delta) \right],$$

soit

$$\theta(t) = \bar{\omega} t - \frac{2}{\bar{r}} \sqrt{\frac{m+m_1}{3m}} A \sin(\Omega t + \delta) + B$$

et

$$\theta(t = k\tilde{T}) - \theta(t = 0) = 2k\pi \sqrt{\frac{m+m_1}{3m}}.$$

Par conséquent, pour presque toutes les valeurs de  $m$  et  $m_1$  le mouvement de  $P$  n'est pas périodique (fig. 10.20 b).

10.5.4 Systèmes intégrables et application de Poincaré (idée)

On a vu qu'un système à un degré de liberté, pour lequel on connaît une constante du mouvement, est résoluble par quadrature ; de même un système à deux degrés de liberté, pour lequel on connaît deux constantes du mouvement, est résoluble par des quadratures (§ 10.5.3). De façon générale, on peut démontrer qu'un système hamiltonien (sect. 22.5), à  $k$  degrés de liberté, pour lequel on connaît  $k$  constantes du mouvement « indépendantes », est résoluble par des quadratures : on dit alors que le système est *intégrable* [35]. Dans le cas d'une force centrale, on a un système à 3 degrés de liberté et 3 constantes du mouvement « indépendantes » (§ 13.1.2).

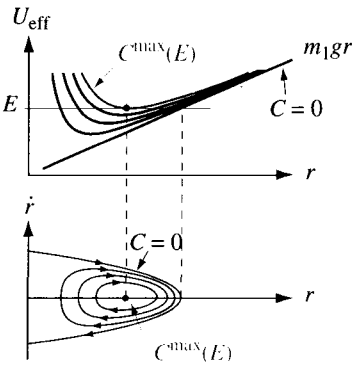
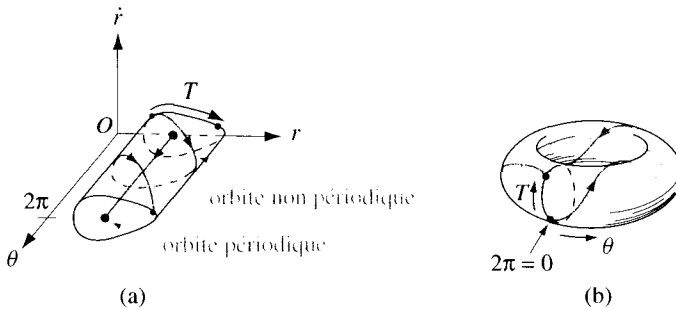


Fig. 10.21 Orbites pour  $E$  fixé et différentes valeurs de  $C$ .

Les systèmes intégrables sont les plus simples, mais presque tous les systèmes mécaniques qui sont intéressants pour le physicien ne sont pas intégrables. L'étude des systèmes non intégrables est très complexe. Pour donner

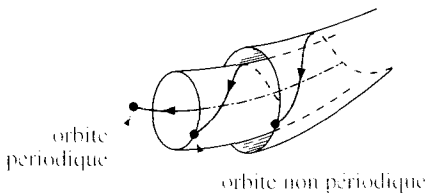
une idée de l'approche actuelle de la mécanique, reprenons l'exemple intégrable du paragraphe 10.5.3 que nous avons étudié en fixant la constante des aires  $C$  et en prenant différentes valeurs de  $E$  (fig. 10.20). Comme dans les systèmes non intégrables, l'énergie est toujours une constante du mouvement, nous allons reprendre (10.58) mais en considérant maintenant les *évolutions associées à une valeur fixée de  $E$  et différentes valeurs de  $C$*  (fig. 10.21).

On a représenté sur la figure 10.22 deux orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r}, \theta)$  associées à une valeur fixée de  $E$ .



**Fig. 10.22** (a) Orbites pour  $E$  fixé ; (b) application de Poincaré :  $T$ .

En identifiant les points  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi$ , l'orbite est une courbe sur la surface définie par l'ensemble des états caractérisés par une même valeur de  $E$  et  $C$  (fig. 10.22). On dit que le sous-espace de l'espace de phase  $\mathbb{R}^4 = \{(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})\}$  défini par les valeurs  $E$  et  $C$  est un sous-espace « difféomorphe »<sup>1</sup>, à un tore, invariant par l'évolution ; c'est une propriété générale des systèmes intégrables. Pour une valeur de  $E$  fixée et différentes valeurs de  $C$  (fig. 10.21), on obtient ainsi une série de tores emboîtés (fig. 10.23).



**Fig. 10.23** Orbites pour  $E$  fixé,  $C$  variable : tores emboîtés.

L'étude de l'évolution s'effectue au moyen de l'*application de Poincaré* ; c'est l'application  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie sur la section  $(r, \dot{r}, \theta = 0)$  associée à  $E$ , où l'image par  $T$  de  $(r, \dot{r})$  est le point où l'orbite de conditions initiales  $(r, \dot{r}, \theta = 0)$  recoupe le plan  $\theta = 2\pi$  (fig. 10.22). Si le mouvement de  $P$  n'est pas périodique, les courbes de la figure 10.21 coïncident avec celles engendrées par les itérés  $T^n(r, \dot{r})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , de l'application de Poincaré : ce sont les points où l'orbite coupe la section  $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ .

A titre de comparaison, la figure 10.24 montre l'image correspondante à un système non intégrable, à 2 degrés de liberté (on connaît une seule constante du



POINCARÉ Henri  
Mathématicien français  
(1854-1912)

<sup>1</sup> C'est-à-dire obtenu par déformation continue d'une « chambre à air de camion ».

mouvement, l'énergie  $E$ ) : c'est le modèle de Hénon-Heiles [36], introduit pour étudier le mouvement d'une planète dans une galaxie. Comme dans l'exemple précédent, le plan de la figure 10.24 représente une section dans l'espace de phase associé à une valeur donnée de l'énergie. Les courbes « fermées » (fig. 10.24 a) représentent, comme précédemment, l'intersection de différentes orbites avec la section en question. Au contraire, l'ensemble des points, qui semblent distribués au hasard, représente l'intersection d'une seule orbite avec cette section (fig. 10.24 b).

Chaos      En conclusion on observe que, pour certaines valeurs des paramètres définissant le système, l'évolution dépend très fortement des conditions initiales et les points sur la section de Poincaré apparaissent distribués de manière entièrement aléatoire : on constate ainsi l'apparition de *chaos* dans un système purement déterministe.

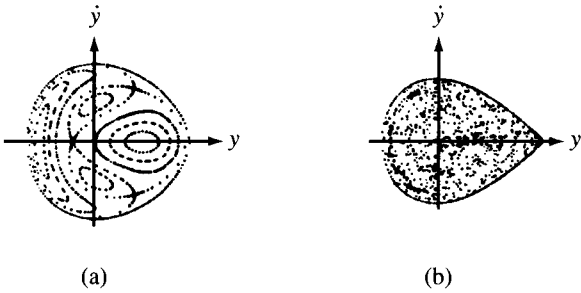


Fig. 10.24 Section de Poincaré pour deux valeurs de  $E$ .

10.5.5 Mouvement central en présence de frottement

Étudions l'effet d'une force de frottement proportionnelle à la vitesse sur un satellite de masse  $m$  décrivant une trajectoire « presque » circulaire autour de la Terre ; cela signifie que l'on considère des conditions initiales telles que le mouvement serait circulaire en l'absence de frottement. (On néglige le mouvement de la Terre autour du Soleil.)

Prenons le référentiel géocentrique et un système d'axes liés au centre de la Terre. Nous savons que la force exercée par la Terre sur le satellite est égale à  $-x_T m r^{-2} \mathbf{e}_r$ , où  $\mathbf{x} = \mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r$  (§ 6.7.1). On suppose que la force de frottement est de la forme  $-\lambda \mathbf{v}$  où  $\lambda$  est une constante positive, très petite si le satellite est à haute altitude.

L'équation de Newton et le théorème du moment cinétique impliquent

Équations du mouvement

$$\left\{ \begin{array}{l} m \mathbf{a} = -x_T \frac{m}{r^2} \mathbf{e}_r - \lambda \mathbf{v} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{x} \wedge (-\lambda \mathbf{v}) \end{array} \right.$$

d'où

$$\frac{d}{dt} L_O = -\frac{\lambda}{m} L_O \quad \text{et} \quad L_O(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}t} L_O(0). \quad (10.61)$$

En conséquence, le mouvement est plan et, en coordonnées polaires, nous avons

$$\begin{cases} r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta}_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} \\ \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\kappa_T}{r^2} - \frac{\lambda}{m} \dot{r} \end{cases} \quad (10.62)$$

d'où

$$\ddot{r} - \frac{r_0^4 \dot{\theta}_0^2}{r^3} e^{-2\frac{\lambda}{m}t} = -\frac{\kappa_T}{r^2} - \frac{\lambda}{m} \dot{r}.$$

Pour une trajectoire « presque » circulaire, les conditions initiales sont telles que  $r_0^3 \dot{\theta}_0^2 = \kappa_T$ , d'où

$$\ddot{r} + \frac{\lambda}{m} \dot{r} = \frac{\kappa_T}{r^2} \left( \frac{r_0}{r} e^{-2\frac{\lambda}{m}t} - 1 \right).$$

Si  $(\lambda/m) \ll 1$ , alors  $\ddot{r}$  est de l'ordre  $(\lambda/m)^2$ ,  $\dot{r}$  est de l'ordre  $(\lambda/m)$  et en première approximation la solution a la forme

$$r(t) \cong r_0 e^{-2\frac{\lambda}{m}t}.$$

En introduisant cette expression dans (10.62), on tire

$$\dot{\theta}(t) \cong \dot{\theta}_0 e^{3\frac{\lambda}{m}t},$$

d'où

$$\theta(t) \cong \frac{m}{3\lambda} \dot{\theta}_0 \left( e^{3\frac{\lambda}{m}t} - 1 \right)$$

et

$$r(\theta) \cong r_0 \left[ 1 + 3 \frac{\lambda}{m} \frac{\theta}{\dot{\theta}_0} \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Remarquons pour terminer, que l'on obtient pour la vitesse scalaire

$$|v(t)| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \cong r_0 \dot{\theta}_0 e^{+\frac{\lambda}{m}t}.$$

Ainsi, contrairement à ce que l'on aurait pu naïvement croire, la vitesse scalaire augmente sous l'effet du frottement. Cette accélération est évidemment due à la force de gravitation. Nous voyons d'autre part que l'évolution dépend de la masse  $m$ , mais elle n'en dépend que par le rapport  $\lambda/m$ .

L'évolution dépend  
de la masse

## 10.6 ÉPISTÉMOLOGIE

## 10.6.1 Masse, masse et masse en mécanique newtonienne et accélération terrestre

Dans la définition de la *masse-quantité de matière*  $M$ , la balance a été utilisée uniquement pour choisir l'*unité* de masse de la substance  $X$  ; la masse  $M$  est ensuite définie par la *condition d'extensivité*.

On introduit également la notion de *masse pesante*  $M^*$  définie pour n'importe quel système matériel par comparaison avec les multiples de la masse étalon au moyen d'une balance à plateau. Cette définition est basée sur le *fait expérimental* que le rapport de deux poids est indépendant du lieu, c'est-à-dire que

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{M_1^*}{M_2^*} \quad (10.63)$$

où  $P_i(x)$  est le poids du corps  $i$  au point  $x$  à la surface de la Terre.

Au contraire, la *masse d'inertie*  $m$  est définie sans référence à l'attraction terrestre par la relation entre force et accélération,  $F = ma$ .

Nous avons vu par ailleurs que l'observation de la chute des corps avait conduit Galilée à conclure que le mouvement des corps, en chute libre à la surface de la Terre, est uniformément accéléré, d'accélération  $g$ , indépendante du corps (§ 6.2.1). Si l'on admet que la force de pesanteur n'est pas modifiée par le mouvement (sect. 15.5), il découle de la deuxième loi que le poids  $P$  est proportionnel à la masse d'inertie, soit

$$P = mg. \quad (10.64)$$

Par conséquent,

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{M_1^*}{M_2^*} = \frac{m_1}{m_2}$$

et les observations de Galilée montrent qu'il est possible d'égaliser la masse d'inertie et la masse pesante (avec une précision relative de  $10^{-1}$ ), d'où

$$M = m = M^*. \quad (10.65)$$

Rappelons que Newton commence par introduire le concept de masse-quantité de matière qu'il identifie à celui de masse d'inertie. A partir de l'observation du mouvement des pendules, il arrive ensuite à la conclusion expérimentale que le rapport  $|P|/m$  est indépendant du corps (§ 10.5.1) et il écrit dans les *Principia* : « Je désigne la quantité de matière par les mots de corps ou de masse. Cette quantité se connaît par le poids des corps car j'ai trouvé par des expériences très exactes sur les pendules, que les poids des corps sont proportionnels à leur masse. » Ces expériences sur les pendules permettent de vérifier l'*équivalence de la masse d'inertie et de la masse pesante* avec une précision relative de  $10^{-3}$ . Nous reviendrons à la section 15.6 sur ce résultat expérimental qui est l'un des plus importants de la mécanique.



### 10.6.2 Mouvements absolus ou relatifs : Newton ou Mach

Aujourd'hui, le principe d'inertie nous est si familier que nous l'admettons comme une vérité a priori évidente. Pour en apprécier le contenu, il faut cependant souligner qu'il résulte d'une abstraction intellectuelle remarquable, conclusion d'une réflexion qui a porté sur plusieurs siècles. En effet, ce principe est contraire aux observations journalières, observations ayant conduit les Grecs à énoncer l'antithèse de ce principe, c'est-à-dire « le mouvement cesse dès que cesse la cause qui lui a donné naissance ». Pour Kant (1747), il existe deux sortes de mouvements, ceux qui cessent après un certain temps et ceux qui persistent. Aujourd'hui, nous disons qu'il existe des mouvements irréversibles (typiques de la thermodynamique) et des mouvements réversibles (typiques de la mécanique).

Remarquons aussi que du point de vue mathématique, la première loi apparaît comme cas particulier de la deuxième; toutefois, du point de vue conceptuel, il n'en va pas de même. En effet, comme nous l'avons vu au paragraphe 10.4.4, *selon le point de vue newtonien, la première loi définit les référentiels d'inertie, référentiels par rapport auxquels la deuxième loi est applicable; au contraire, selon le point de vue de Mach, la première loi définit la condition de « force nulle » (§ 10.4.4)*. En conclusion, quel que soit le point de vue adopté, *la première loi précède la deuxième et n'en est pas un simple cas particulier*.

#### Point de vue de Newton

Les lois de la mécanique sont des lois qui décrivent le mouvement. Elles supposent donc le choix préalable d'un référentiel, d'une règle et d'une horloge. La première loi affirme que, ayant fait ce choix, le mouvement d'un corps sera rectiligne uniforme si le corps n'est soumis à aucune action extérieure.

Si, comme Newton, on admet qu'un corps loin de toute matière est un système isolé, il est évident que la première loi ne peut pas être valable par rapport à tout référentiel. En effet, si le corps est isolé, il n'y a aucune action de l'extérieur; par ailleurs, si le mouvement est rectiligne par rapport à  $\mathcal{R}$ , il ne peut pas être rectiligne par rapport à  $\mathcal{R}'$  si  $\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ .

En conséquence, Newton admet l'existence d'un espace et d'un temps absolus (sect. 1.4) et considère les lois du mouvement comme des lois relatives à un référentiel immobile par rapport à l'espace absolu. On remarquera que la distinction entre « mouvement vrai » et « mouvement relatif » cause des inquiétudes à Newton qui écrit : « *Il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais des corps. Cependant il ne faut pas désespérer...* »

Pour préciser la distinction entre les concepts absolus et relatifs, il dira : « *Les effets par lesquels on peut distinguer le mouvement vrai du mouvement relatif sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement; car dans le cas du mouvement circulaire purement relatif les forces sont nulles et dans le mouvement circulaire vrai et absolu elles sont plus ou moins grandes.* »

Pour illustrer son propos, Newton utilise l'expérience d'un vase rempli d'eau que l'on met en rotation par rapport aux étoiles fixes. L'eau, initialement

immobile, se met progressivement en mouvement jusqu'à ce que toute la masse d'eau soit « *dans un repos relatif au vase* », et la surface – initialement plane – devient parabolique. Pour un observateur immobile par rapport au vase, « *l'ascension de l'eau vers les bords du vase marque l'effort qu'elle fait pour s'éloigner du centre de son mouvement et on peut connaître et mesurer par cet effort le mouvement circulaire et absolu de cette eau* ». Selon Newton, si, au lieu de faire tourner l'eau par rapport aux étoiles fixes, on faisait tourner les étoiles par rapport au vase, la surface de l'eau resterait plane.

Le même raisonnement permettait d'expliquer l'aplatissement de la Terre par le mouvement de rotation autour de l'axe des pôles.

En conclusion, *pour Newton, le concept de force est un concept absolu*, permettant en particulier de distinguer entre les mouvements vrais et les mouvements relatifs. On remarquera cependant que dans cette discussion, Newton a considéré uniquement des référentiels accélérés les uns par rapport aux autres.

### Remarques

- Newton admet qu'un corps loin de toute matière est un système isolé. Aujourd'hui on justifie cette hypothèse en se basant sur le fait que les interactions fortes et faibles ont une portée de l'ordre du Fermi ; les interactions électromagnétiques ont une portée effective très petite parce que les corps sont neutres ; finalement, la quatrième force fondamentale, soit la force gravifique, décroît comme  $r^{-2}$  et est environ  $10^{-36}$  fois plus faible que les autres.
- Comme nous l'avons établi au chapitre 9, il suit des axiomes non relativistes que *les accélérations relativement à deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, sont identiques*. Ainsi, en admettant que les masses d'inertie sont les mêmes dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , on conclut que si les lois de Newton sont valables dans  $\mathcal{R}$ , alors elles le sont aussi dans  $\mathcal{R}'$ , et les forces ne sont pas modifiées. On exprime ce résultat en disant que *les lois de Newton et les forces sont invariantes par rapport aux transformations de Galilée*, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas de forme lorsque l'on passe d'un observateur à un autre, animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au premier : c'est le **principe de la relativité de Galilée** appliqué au point matériel. Il répond en partie aux questions posées dans le chapitre 9 ; nous y reviendrons dans le cas général au chapitre 15.

### Point de vue de Mach et origine de la masse d'inertie

Trois questions se trouvent au centre des réflexions d'Ernst Mach :

- La notion d'accélération absolue a-t-elle un sens objectif ?
- Quelle est l'origine de l'inertie ?
- Pourquoi la masse d'inertie est-elle identique à la masse pesante (ou gravifique) ?

Mach commence par souligner le fait que seule l'accélération relativement au reste de l'Univers a un sens. « *D'après moi, il n'existe somme toute qu'un mouvement relatif et je n'aperçois à cet égard aucune distinction entre la rotation et la translation.* »

*Une rotation relativement aux étoiles fixes fait naître dans un corps des forces d'éloignement de l'axe ; si la rotation n'est pas relative aux étoiles fixes, ces forces d'éloignement n'existent pas... Pouvons-nous fixer le vase d'eau de Newton, faire ensuite tourner les étoiles fixes et prouver alors que ces forces d'éloignement sont absentes ? Cette expérience est irréalisable, cette idée est dépourvue de sens, car les deux cas sont indiscernables l'un de l'autre dans la perception sensible. Je considère ces deux cas comme n'en formant qu'un seul et la distinction qu'en fait Newton comme illusoire. »*

Ainsi, contrairement à Newton, Mach considère que le mouvement n'a de sens que relativement aux étoiles fixes et il postule qu'il n'est jamais possible de négliger l'action du reste de l'Univers sur un corps. Si l'on adopte ce point de vue, il n'existe pas de système isolé et l'énoncé de la première loi met en évidence non pas l'existence d'un espace absolu, mais uniquement le fait que la notion de force est une notion relative, liée à celle de référentiel : si par rapport à  $\mathcal{R}$  le mouvement est rectiligne et uniforme, alors  $\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = 0$  relativement à  $\mathcal{R}$  ; si le même mouvement est accéléré par rapport à  $\mathcal{R}'$ , alors  $\sum_{\alpha} \mathbf{F}'_{\alpha} \neq 0$  relativement à  $\mathcal{R}'$ .

En conséquence, l'énoncé de la première loi ne fait pas appel à des référentiels privilégiés, mais postule que l'action du reste de l'Univers sur un corps peut apparaître nulle dans un référentiel (où l'Univers apparaît au repos), et non nulle dans un autre référentiel (où l'Univers apparaît accéléré). Par analogie, nous savons que la force magnétique peut apparaître nulle dans un référentiel et non nulle dans un autre.

L'expérience fondamentale de la gravitation ayant montré que la « masse d'inertie » est proportionnelle à la « masse gravifique », Mach considère ensuite que la masse d'inertie résulte de l'interaction gravifique du système avec le reste de l'Univers.

En effet, la force gravifique a la même forme que la force électrique entre deux charges au repos

$$|\mathbf{F}^{\text{gr}}| = G \frac{M_1^* M_2^*}{r^2}, \quad |\mathbf{F}^{\text{él}}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (10.66)$$

où  $M_1^*$ ,  $M_2^*$  sont les masses gravifiques et  $q_1$ ,  $q_2$  les charges électriques. Si la charge  $q_2$  est accélérée, d'accélération  $\mathbf{a}$ , il apparaît une force supplémentaire sur la charge immobile  $q_1$ , de la forme

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} \frac{|\mathbf{a}|}{c^2} \quad \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière} \quad (10.67)$$

c'est-à-dire une force qui décroît en  $1/r$ .

Par analogie, Mach postule qu'une masse  $M_2^*$  d'accélération  $\mathbf{a}$  engendre une force supplémentaire sur une masse  $M_1^*$  immobile, de la forme

$$|\mathbf{F}| = G \frac{M_1^* M_2^*}{r} \frac{|\mathbf{a}|}{c^2}. \quad (10.68)$$

Considérons alors le référentiel  $\mathcal{R}$  par rapport auquel l'Univers est au repos ; un point matériel soumis à une force  $\mathbf{F}$  a une accélération  $\mathbf{a}$  où

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad m = \text{masse d'inertie.}$$

Par ailleurs par rapport au référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au point matériel, le point matériel est immobile et par conséquent la résultante  $\mathbf{F}'$  des forces agissant sur ce point doit être nulle. Par rapport à  $\mathcal{R}'$ , l'Univers est accéléré d'accélération  $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$  et si l'on admet l'hypothèse (10.68), il apparaît dans  $\mathcal{R}'$  une force supplémentaire due à l'accélération des masses dans l'Univers. Nous avons ainsi

$$\mathbf{F}' = 0 = \mathbf{F} + \mathbf{F}'_{\text{Univers}} = m\mathbf{a} + \mathbf{F}'_{\text{Univers}}$$

où

$$\mathbf{F}'_{\text{Univers}} = \mathbf{a}' M^* \left[ \sum_{\alpha \in \text{Univers}} G \frac{M_\alpha^*}{r_\alpha} \frac{1}{c^2} \right], \quad \mathbf{a}' = -\mathbf{a}.$$

Une estimation grossière montre que le coefficient entre parenthèses est de l'ordre de 1, ce qui implique

$$0 = (m - M^*) \mathbf{a} \quad \text{soit} \quad m = M^*.$$

Ce résultat suggère qu'il est effectivement possible de considérer la masse d'inertie comme résultant de l'action gravifique de l'Univers sur le point matériel.

La force centrifuge  
est due au  
mouvement des  
étoiles par rapport à  
l'observateur

Mentionnons pour terminer que, pour Newton, la *force centrifuge* que ressent un observateur dans un référentiel tournant (voiture dans un virage), est une *force fictive* qui provient d'un mauvais choix du référentiel et n'a pas d'origine physique. Pour Mach, c'est une *force réelle* qui a pour origine le mouvement accéléré de l'Univers par rapport à l'observateur.

Einstein a donné le nom de *principe de Mach* à cet ensemble d'idées proposées par Mach. Ce principe l'a séduit et l'a conduit à élaborer sa théorie de la relativité générale, c'est-à-dire la théorie de la gravitation. Ainsi, l'approche de Mach est fondamentale du point de vue conceptuel (elle correspond au principe d'objectivité selon lequel les lois de la nature ne doivent pas dépendre du choix arbitraire du référentiel introduit pour décrire les phénomènes) et théorique (développement de la relativité générale). De plus, c'est la seule approche satisfaisante puisque, comme nous l'avons vu, l'expérience ne permet pas de mettre en évidence un référentiel d'inertie. Finalement, cette approche est utile à l'ingénieur qui, par exemple, l'utilise pour le calcul des problèmes de balistique de portée supérieure au kilomètre, pour lesquels le mouvement de rotation de la Terre n'est plus négligeable.

Il faut remarquer que ce principe de Mach n'est pas universellement reconnu. Aujourd'hui, l'espace-temps vide n'est plus l'équivalent du néant, mais au contraire le siège de phénomènes très complexes (création et annihilation de « particules »...). En outre, on admet que la matière agit sur l'espace-temps pour définir la géométrie et réciproquement, la géométrie agit sur la matière pour définir le mouvement; la gravitation est ainsi un effet géométrique lié à la présence des masses dans l'Univers.

## Conclusion

Comme nous l'avons déjà suggéré au paragraphe 10.4.4, la discussion de cette section montre que l'on peut adopter l'un ou l'autre des points de vue suivants :

- le point de vue de Newton qui considère la force comme un concept absolu, en supposant l'existence de système isolé, et selon lequel les lois de la mécanique ne sont valables que dans certains référentiels appelés référentiels d'inertie ;
- le point de vue de Mach qui considère la force comme un concept relatif et pour qui les lois du mouvement sont valables dans n'importe quel référentiel.

## 10.7 PROBLÈMES

**10.7.1** La corde d'un arc exerce une force de 15 kgf lorsqu'elle est tendue de 70 cm. En admettant que la force est proportionnelle au déplacement, quelle sera la vitesse initiale d'une flèche de 25 g ? Quelle est la portée maximale ? Tir à l'arc

**10.7.2** Un train de masse  $M$  arrive contre un butoir avec une vitesse  $v_0$  (fig. 10.25). Sachant que la voie fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale et que le butoir exerce une force  $|\mathbf{F}| = k\delta + q\delta^3$  lorsqu'il est comprimé d'une longueur  $\delta$ , quelle sera la compression maximale ? ( $k$  et  $q$  sont des constantes positives). Butoir

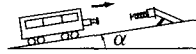


Fig. 10.25

**10.7.3** Un point matériel de masse  $m$ , se déplaçant sur la droite horizontale  $\lambda\mathbf{e}_1$ , est lié à un ressort exerçant une force  $\mathbf{F} = -kx\mathbf{e}_1$ . Le point, initialement immobile en  $x = 0$ , est alors soumis à une force supplémentaire  $\mathbf{F}(t) = F(t)\mathbf{e}_1$  qui agit pendant l'intervalle de temps  $[0, T]$  où  $T = \pi\sqrt{m/k}$ . Déterminer l'amplitude finale des oscillations dans les deux cas suivants : Ressort forcé

1.  $F(t) = F_0 \quad t \in [0, T];$

2.  $F(t) = F_0 \frac{t}{T} \quad t \in [0, T]$

(Pour résoudre l'équation différentielle, voir le paragraphe 7.3.4.)

**10.7.4** Deux étoiles de même masse  $M$  ont un mouvement circulaire de rayon  $R$  autour de leur centre de masse  $G$ . Quelle est la vitesse des étoiles ? Étudier le mouvement d'un corps de masse  $m$  ( $m \ll M$ ) se déplaçant sur la droite contenant  $G$ , perpendiculaire au plan de la trajectoire des étoiles, c'est-à-dire : Mouvement à 3 corps

1. Esquisser quelques orbites dans l'espace de phase  $(x, v)$ .
  2. Calculer la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre.
  3. Calculer la vitesse de libération à partir de la position d'équilibre.
- (Le corps n'a pas d'influence sur le mouvement des étoiles ; les forces de gravitation sont données par la loi (12.1).)

Formation d'une  
molécule

**10.7.5** Un atome  $A$  est projeté avec une vitesse  $v_0$  et un paramètre d'impact  $d$  vers un atome  $B$  (fig. 10.26). Lorsqu'il se trouve à une distance  $\delta$  de  $B$ , il se lie à  $B$  pour former une molécule. On admet que  $B$  reste immobile et que la force est  $\mathbf{F}^{B \rightarrow A} = -k(r - \delta)\mathbf{e}_r$ , où  $k$  est une constante positive ( $\mathbf{BA} = r\mathbf{e}_r$ ).

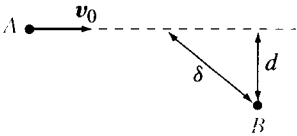


Fig. 10.26

1. Esquisser l'orbite dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$ . Comment peut-on trouver l'amplitude du mouvement ?
2. Calculer la période et l'amplitude du mouvement dans le cas  $d = 0$ .
3. Dans le cas où le mouvement est voisin d'un mouvement circulaire, calculer la période  $T_r$  du mouvement radial  $r(t)$ . Vérifier que pendant une période l'atome  $A$  a tourné autour de  $B$  d'un angle inférieur à  $\pi$ . Esquisser la trajectoire.

Fil coupé **10.7.6** On considère le système de la figure 10.27.

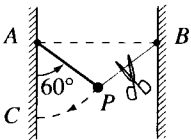


Fig. 10.27

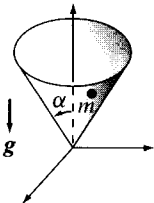


Fig. 10.28

Calculer la force exercée par le fil  $AP$  avant et immédiatement après avoir coupé le fil  $BP$ . Calculer cette force lorsque  $P$  se trouve au point  $C$ .

Cône **10.7.7** Un point matériel se déplace sur la surface d'un cône immobile sous l'action de la pesanteur (fig. 10.28). L'axe du cône est parallèle à  $\mathbf{g}$  et l'angle au sommet  $2\alpha$ . Analyser les mouvements de condition initiale  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$  (coordonnées sphériques) : esquisse des orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$  ; période du mouvement circulaire de rayon  $R$  ; période  $T_r$  de  $r(t)$  pour les mouvements voisins du mouvement circulaire ; quel est l'angle dont a tourné le point pendant  $T_r$  ? Calculer la force exercée par la surface.

Le point matériel est lancé avec une vitesse horizontale  $v_0$  d'un point de hauteur  $h_0$ . Calculer les hauteurs maximale et minimale au cours de l'évolution.

**10.7.8** Un point matériel est attaché par un fil au milieu d'un tube horizontal tournant à vitesse  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical (fig. 10.29). Quelle est la tension dans le fil ? Le fil se casse ; calculer la vitesse du point matériel à la sortie du tube (en négligeant les frottements). Calculer la force exercée par le tube.

Centrifugeuse

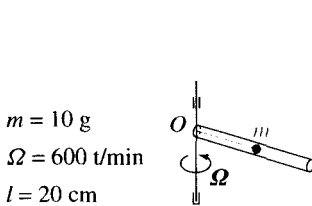


Fig. 10.29

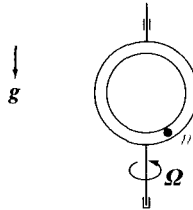


Fig. 10.30

**10.7.9** Un point matériel se déplace sans frottement à l'intérieur d'un tube tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical ; l'angle entre le tube et l'axe est constant (fig. 10.18). Le point matériel est relié au point  $O$  par un ressort exerçant une force  $\mathbf{F} = -kr(1 - r^{-3}\ell^3)\mathbf{e}_r$ , où  $k$  et  $\ell$  sont des constantes positives.

Valeurs critiques

Vérifier qu'il existe deux valeurs  $\Omega_0$  et  $\Omega_1$  telles que si  $\Omega \leq \Omega_0$  le point reste au voisinage de l'origine, et si  $\Omega > \Omega_1$  le point part à l'infini, pour toute condition initiale. Esquisser quelques orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$  en considérant les trois cas  $\Omega \leq \Omega_0$ ,  $\Omega_0 < \Omega \leq \Omega_1$ ,  $\Omega > \Omega_1$ .

**10.7.10** Analyser le mouvement d'un point se déplaçant sans frottement à l'intérieur d'un anneau de rayon  $R$  tournant à vitesse  $\Omega$  constante autour d'un diamètre vertical (fig. 10.30) ; esquisser les orbites dans l'espace de phase ; trouver les positions d'équilibre (par rapport à l'anneau) et la période des petits mouvements au voisinage des positions d'équilibre.

Anneau tournant





## DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

### 11.1 ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

Considérons pour simplifier un système discret formé de  $N$  points matériels  $P_\alpha$ , de masse  $m_\alpha$  et de vecteur-lieu  $\mathbf{OP}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha$ . Le passage à une distribution continue de masse s'effectuera, comme nous l'avons déjà vu avec le centre de masse, en remplaçant les sommes sur  $\alpha$  par des intégrales.

De la deuxième loi de Newton (10.20) et (10.26) appliquée au point matériel  $P_\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{p}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \quad \text{où} \quad \mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (11.1)$$

Deuxième loi de  
Newton pour un  
point matériel

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{O,\alpha} = \mathbf{M}_{O,\alpha} \quad \text{où} \quad \mathbf{L}_{O,\alpha} = \mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{p}_\alpha, \quad \mathbf{M}_{O,\alpha} = \mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha \end{array} \right. \quad (11.2)$$

et de la troisième loi exprimée sous la forme (10.10)

$$\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad \sum_\alpha \mathbf{M}_{O,\alpha} = \sum_\alpha \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (11.3) \quad \text{Troisième loi}$$

nous obtenons, en sommant les équations (11.1) et (11.2) sur l'indice  $\alpha$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \right) = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left( \sum_\alpha \mathbf{L}_{O,\alpha} \right) = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}. \quad (11.4)$$

Par conséquent, en introduisant les grandeurs extensives **quantité de mouvement totale**  $\mathbf{p}$  et **moment cinétique total**  $\mathbf{L}_O$  **par rapport à**  $O$ , définies par

$$\mathbf{p} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_O = \sum_\alpha \mathbf{L}_{O,\alpha}, \quad (11.5)$$

Éléments de  
réduction du tenseur  
des quantités de  
mouvement

nous obtenons le théorème suivant.

Théorème  
fondamental

### Théorème fondamental. Lois générales du mouvement.

Le mouvement de tout système matériel satisfait les équations générales de la dynamique newtonienne

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (11.6)$$

où  $O$  est un point fixé du référentiel ;  $(\mathbf{p}, \mathbf{L}_O)$  sont les éléments de réduction par rapport au point  $O$  du torseur des quantités de mouvement et  $(\mathbf{F}^{\text{ext}}, \mathbf{M}_O^{\text{ext}})$  sont les éléments de réduction du torseur des forces *extérieures* au système. En d'autres termes, la dérivée par rapport au temps du torseur des quantités de mouvement est équivalente au torseur des forces extérieures au système.

### Remarques

Solide idéal

- Tout système matériel est caractérisé par trois grandeurs extensives, la masse qui est un scalaire, la quantité de mouvement qui est un vecteur, et le moment cinétique qui est un pseudo-vecteur.
- Contrairement au cas du point matériel, pour un système formé de  $N$  points matériels, les 6 équations scalaires (11.6) sont indépendantes, mais elles ne suffisent pas pour décrire l'évolution d'un système ayant  $3N$  degrés de liberté si  $N > 2$ . Cependant, dans le cas d'un solide idéal, nous avons 6 degrés de liberté et 6 équations du mouvement : l'évolution d'un solide idéal est entièrement définie par le théorème fondamental et les conditions initiales.
- Si le système est constitué de  $k$  solides  $S_1, \dots, S_k$ , l'évolution temporelle est entièrement décrite par les  $6k$  équations :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S_r)} = \mathbf{F}^{\text{ext} \rightarrow S_r} + \mathbf{F}^{\text{int} \rightarrow S_r}, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_O^{(S_r)} = \mathbf{M}_O^{\text{ext} \rightarrow S_r} + \mathbf{M}_O^{\text{int} \rightarrow S_r}, \end{cases} \quad r = 1, \dots, k \quad (11.7)$$

où  $(\mathbf{p}^{(S_r)}, \mathbf{L}_O^{(S_r)})$  sont les éléments de réduction du torseur des quantités de mouvement du solide  $S_r$  et  $(\mathbf{F}^{\text{int} \rightarrow S_r}, \mathbf{M}_O^{\text{int} \rightarrow S_r})$  sont les éléments de réduction du torseur des forces exercées par les autres solides du système sur  $S_r$ .

Postulat fondamental

- Ayant obtenu le théorème fondamental, on pourra « oublier » la démarche suivie pour son obtention et l'introduire comme postulat fondamental de la mécanique newtonienne ; c'est le point de vue adopté dans certains ouvrages. En particulier, le principe de l'action et de la réaction apparaîtra alors comme conséquence du postulat fondamental.

En effet, considérons un système  $S$  formé de deux parties  $S = S_1 \cup S_2$  et appliquons le postulat fondamental (11.6) à  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  ; on a

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S_1)} = \mathbf{F}^{\text{ext} \rightarrow S_1} + \mathbf{F}^{S_2 \rightarrow S_1}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S_2)} = \mathbf{F}^{\text{ext} \rightarrow S_2} + \mathbf{F}^{S_1 \rightarrow S_2}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S)} = \mathbf{F}^{\text{ext} \rightarrow S_1} + \mathbf{F}^{\text{ext} \rightarrow S_2}, \quad \mathbf{p}^{(S)} = \mathbf{p}^{(S_1)} + \mathbf{p}^{(S_2)}$$

$$\text{d'où} \quad \mathbf{F}^{S_2 \rightarrow S_1} + \mathbf{F}^{S_1 \rightarrow S_2} = 0.$$

De la même manière, les équations pour le moment cinétique impliquent

$$\mathbf{M}_O^{S_2 \rightarrow S_1} + \mathbf{M}_O^{S_1 \rightarrow S_2} = 0.$$

- Les équations de la statique, sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 16, sont un cas particulier du théorème fondamental. En effet, par définition, **un système  $S$  est en équilibre par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$**  si la quantité de mouvement de tout point matériel  $P_\alpha$  de  $S$  est nulle à tout instant.

Par conséquent,  $S$  est en équilibre si et seulement si la quantité de mouvement de n'importe quel sous-système  $S'$  de  $S$  est nulle. Les équations du mouvement (11.6) conduisent ainsi aux **lois de la statique** suivantes.

- Un système  $S$  reste en équilibre si et seulement si pour tout sous-système  $S'$  de  $S$  le torseur des forces **extérieures à  $S'$**  est équivalent à zéro :

Lois de la statique

$$\forall S' \subset S \quad \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = 0.$$

- En particulier, un solide reste en équilibre si et seulement si le torseur des forces **extérieures** est équivalent à zéro.

## 11.2 THÉORÈME DU CENTRE DE MASSE

Le centre de masse d'un système *fermé* évolue comme un point matériel de masse égale à la masse du système, soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures au système :

$$M \mathbf{a}_G = \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad \text{où} \quad M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}. \quad (11.8)$$

**DÉMONSTRATION.** Conséquence du théorème fondamental et de la relation  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G$  avec  $M$  constant.

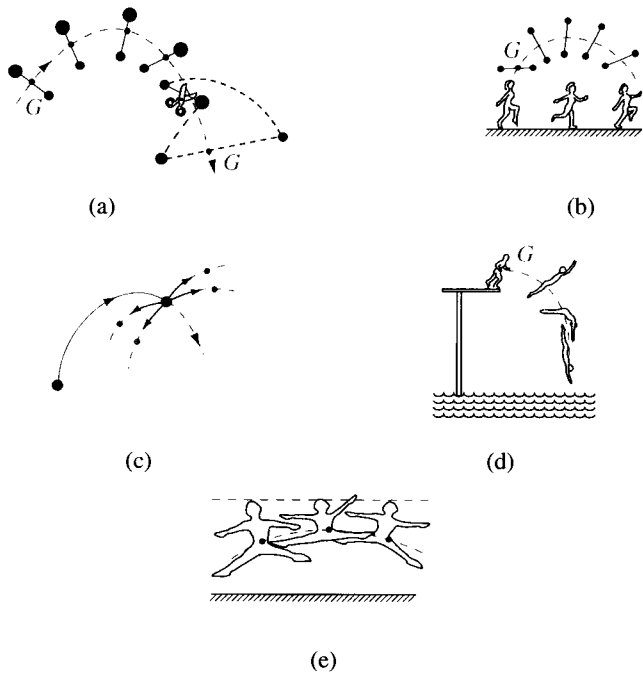
**Remarque.** Si la résultante des forces extérieures est une fonction qui ne dépend que des variables  $(\mathbf{x}_G, \mathbf{v}_G, t)$ , le mouvement du centre de masse est univoquement défini par les conditions initiales et le théorème (11.8). Par exemple, pour tout système isolé le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme; de même, le mouvement du centre de masse d'un système matériel chargé, soumis à l'action d'un champ gravifique  $\mathbf{g}$  et d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  homogènes et constants, est uniformément accéléré, d'accélération égale à  $\mathbf{g} + (Q/M)\mathbf{E}$  où  $Q = \sum_{\alpha} q_{\alpha}$  est la charge électrique totale.

**Illustrations expérimentales du théorème du centre de masse**

- Si on analyse le mouvement sur la table à air inclinée de deux corps rigide-ment liés, on constate que le centre de masse décrit une parabole (fig. 11.1 a). En supprimant la liaison à un instant  $t_0$ , on observe que le centre de masse pour-suit la trajectoire parabolique, sans modification.
- La trajectoire parabolique du centre de masse est également mise en évi-dence dans l'analyse du mouvement du bâton de la majeurette, lors de l'explo-sion d'un obus, ou dans le cas du plongeur (fig. 11.1 b, c, d).
- C'est cette même propriété qui est utilisée par le danseur lors d'un « grand jeté » (fig. 11.1 e) : pour donner l'illusion de flotter, le danseur déplace son centre de masse par rapport au corps de manière telle que sa tête ait un mou-vement rectiligne horizontal.

Mouvement  
parabolique du  
centre de masse

« grand jeté »



**Fig. 11.1** Théorème du centre de masse.

### 11.3 LOIS DE CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET DU MOMENT CINÉTIQUE

Par définition, pour un système isolé,  $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$  et  $\mathbf{M}_O^{\text{ext}} = 0$ , et les lois de Newton (11.6) impliquent les **lois de conservation** suivantes.

**Théorème.** Pour un système isolé, la quantité de mouvement totale et le moment cinétique total sont constants au cours de l'évolution temporelle.

Les grandeurs  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{L}_O$  sont ainsi des grandeurs conservées : ce sont des **constantes du mouvement** des équations de la dynamique.

#### Illustrations de la conservation de la quantité de mouvement

- Le « fusil » sur le rail et la « mise à feu » forment un système isolé (fig. 11.2 a). Comme  $\mathbf{p} = 0$  avant le départ du coup, nous aurons  $\mathbf{p}(t) = 0$  pour tout temps  $t$  : l'expulsion de la balle, soit  $\mathbf{v}_b \neq 0$ , imprime un mouvement de recul au fusil tel que  $m_c \mathbf{v}_c + m_b \mathbf{v}_b = 0$  (phénomène familier avec l'effet de recul d'un fusil). Nous observons que le « fusil » s'immobilise si la balle est ensuite arrêtée par une cible fixée au fusil. Cette même propriété sera mise en évidence par une personne se déplaçant sur un radeau (fig. 11.2 b).

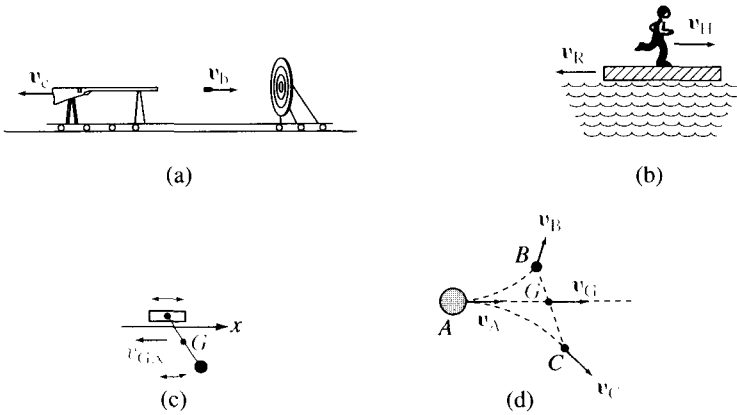


Fig. 11.2 Conservation de la quantité de mouvement.

Conservation de la quantité de mouvement



« Canon » sur rail à air ; la cible est fixée au canon

- En concentrant son attention sur le centre de masse  $G$  d'un pendule elliptique sur le rail à air (fig. 11.2 c et § 14.4.3), on observe que  $v_{G,x}$  est constant ; c'est une conséquence du fait que la composante de  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  selon l'axe du rail est nulle.

- L'expérience de la figure 11.2 (d) est effectuée sur la table à air horizontale. Avant la désintégration de  $A$  en deux parties  $B$  et  $C$ , le mouvement de  $A$  est rectiligne uniforme et  $\mathbf{p} = m_A \mathbf{v}_A$ . Après la désintégration (avec  $m_B + m_C = m_A$ ), on observe que le mouvement du centre de masse n'est pas modifié.

En effet la force exercée par la table à air « annule » la force gravifique de sorte que la résultante des forces extérieures est nulle. Ainsi

$$\mathbf{p} = m_A \mathbf{v}_A = m_B \mathbf{v}_B + m_C \mathbf{v}_C = (m_B + m_C) \mathbf{v}_G, \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A. \quad (11.9)$$

Illustrations de la conservation du moment cinétique

- En diminuant le rayon du mouvement circulaire (fig. 11.3 a), on observe que la vitesse angulaire du point augmente et satisfait la relation  $r_1^2 \omega_1 = r_2^2 \omega_2$  : il y a conservation de  $L_O$  car  $\mathbf{M}_O = 0$ , et  $\mathbf{L}_O = \mathbf{x} \wedge m \mathbf{v} = m r^2 \dot{\theta} \mathbf{n}$ .
- En mettant la voiture en mouvement sur un plateau mobile autour d'un axe vertical, on observe que le plateau tourne en sens inverse et qu'il s'immobilise dès que l'on arrête la voiture (fig. 11.3 b). Comme  $L_O$ , le moment cinétique total (voiture plus plateau), est nul avant la mise en mouvement de la voiture, et que le moment résultant des forces extérieures est nul, nous avons  $L_O(t) = 0$  pour tout  $t$  : le moment cinétique de la voiture, soit  $L_O^{(v)} \cong m \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$ , est compensé par le moment cinétique du plateau, soit  $L_O^{(p)} = \frac{1}{2} M R^2 \omega$  (§ 14.1.3), c'est-à-dire  $m \mathbf{x} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} M R^2 \omega = 0$ .

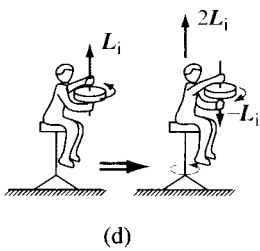
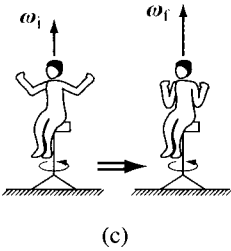
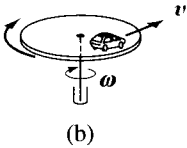
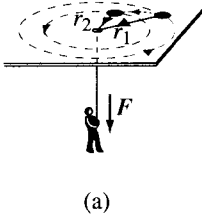


Fig. 11.3 Conservation du moment cinétique.

- L'expérimentateur est en rotation sur un tabouret tournant avec les bras initialement étendus (fig. 11.2 c) ; on observe que la vitesse de rotation augmente lorsqu'il approche les bras du corps et que cet effet est amplifié s'il tient des haltères à bout de bras. En effet, on a  $L_O = (\sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2) \omega$  (§ 14.1.1) où  $d_{\alpha}$  est la distance de la masse  $m_{\alpha}$  à l'axe de rotation ; ainsi en diminuant les distances  $d_{\alpha}$  la vitesse angulaire  $\omega$  doit augmenter pour qu'il y ait conservation du moment cinétique. Ce même effet est utilisé dans la pirouette de la patineuse ou l'arabesque de la danseuse [57].
- L'expérimentateur immobile sur le tabouret tournant tient une roue, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical, soit  $L_i = M R^2 \omega$



(fig. 11.2 d). On observe qu'en inversant l'axe de rotation, l'expérimentateur se met en mouvement. En effet, le moment cinétique de la roue sera alors  $L_i^{(R)} = -MR^2\omega$ ; pour qu'il y ait conservation du moment cinétique, le reste du système (expérimentateur plus tabouret) devra avoir un moment cinétique  $L_i^{(S)} = 2MR^2\omega$ .

- L'horizon artificiel utilisé dans les avions et le guidage inertiel sont basés sur la conservation du moment cinétique d'un gyroscope équilibré (c'est-à-dire tel que  $M_G^{\text{ext}} = 0$ ). Gyroscope

## 11.4 THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

Nous allons observer un certain nombre de phénomènes associés au théorème du moment cinétique, phénomènes sur lesquels nous reviendrons par la suite.

Rappelons le théorème du moment cinétique (11.6)

$$\frac{d}{dt} L_O = M_O^{\text{ext}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} L_O = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \wedge m_{\alpha} v_{\alpha}, \\ M_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} x_{\alpha} \wedge F_{\alpha}^{\text{ext}}, \end{cases} \quad (11.10)$$

et  $O$  est un point fixe du référentiel.

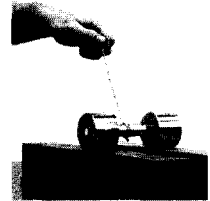
Bien que déduit très simplement des lois de Newton (apparemment proches de l'intuition), le théorème du moment cinétique n'est pas intuitif. Il est donc essentiel d'effectuer soi-même une partie des expériences suivantes et en particulier de jouer avec une roue de vélo.

### Illustrations du théorème du moment cinétique

- Un fil enroulé sur l'axe d'un essieu exerce une force  $F$  dont la direction varie (fig. 11.4 a). On observe que le mouvement de l'essieu va vers la droite si  $\theta > \theta_0$ , vers la gauche si  $\theta < \theta_0$ , et l'essieu reste immobile si  $\theta = \theta_0$ . En effet, le moment  $M_A^{\text{ext}}$  s'annule pour  $\theta = \theta_0$  et change de direction.
- Lorsque le moteur de la figure 11.4 b est arrêté, la force exercée par le ressort pour maintenir le support horizontal est  $F_0$ . On observe que lorsque le moteur est accéléré, la force  $F$  est différente de  $F_0$ . En effet, le théorème du moment cinétique montre que

$$\frac{d}{dt} L_{O,z} = I_{\Delta} \dot{\omega} = (F - F_0)_y d$$

où  $I_{\Delta}$  est une constante (§ 14.1.1).



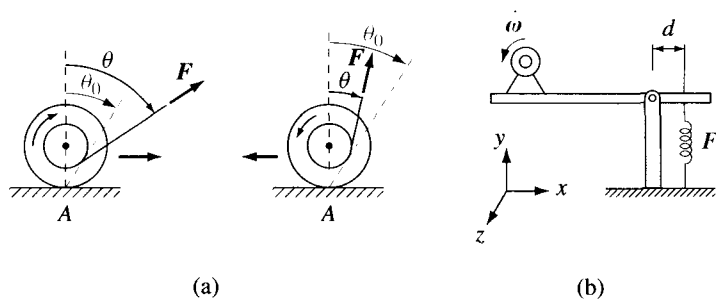
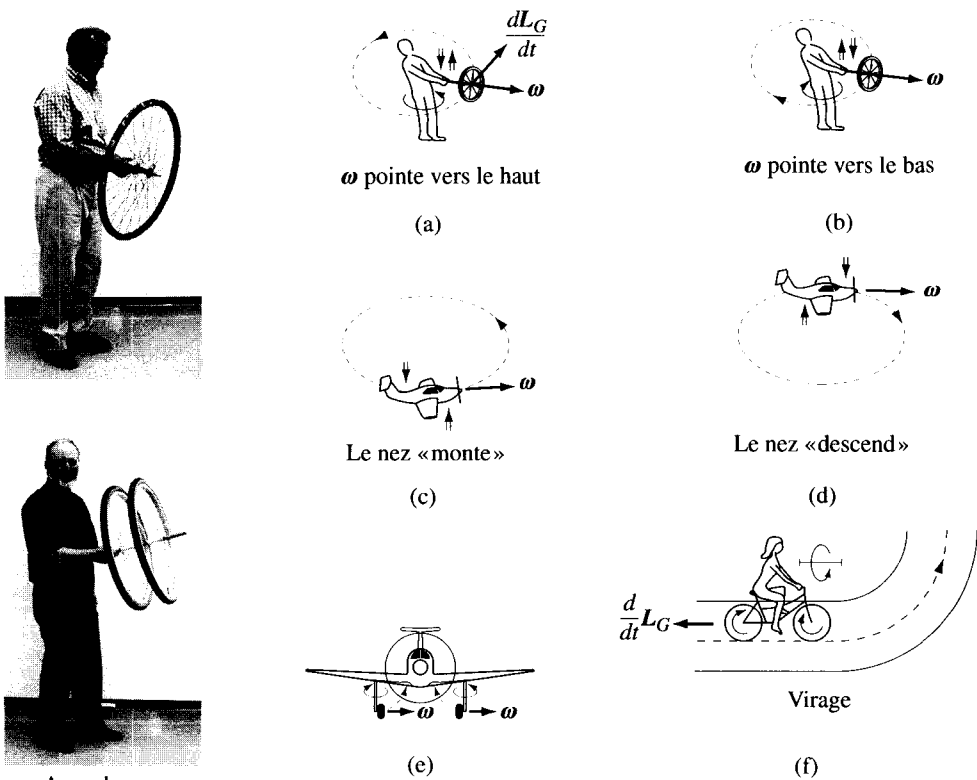


Fig. 11.4 Théorème du moment cinétique.



Avec deux roues tournant dans des sens opposés c'est plus facile

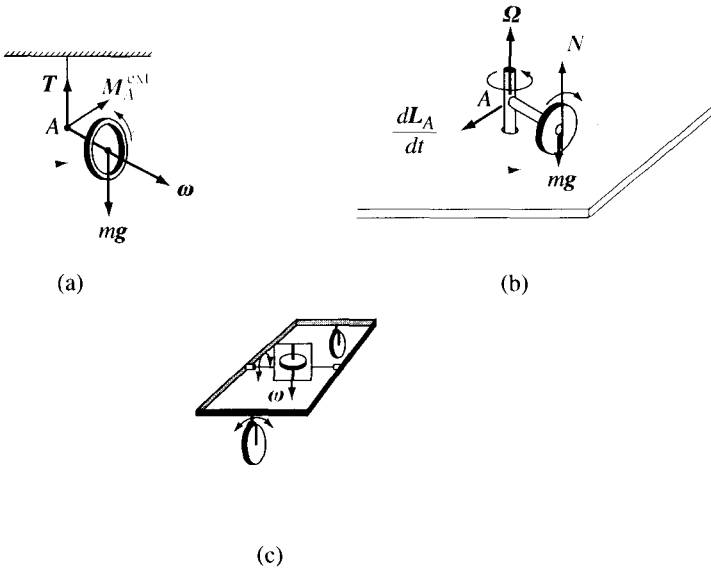
Fig. 11.5 Les symboles  $\Uparrow$  ou  $\Downarrow$  ou  $\curvearrowright$  représentent le couple de réaction exercé par le système en rotation sur l'axe.

- Les expériences présentées sur la figure 11.5 (a) et (b) sont réalisées avec une roue de vélo tournant autour de son axe ; elles permettent de sentir avec les poignets les conséquences d'une variation de la direction du moment cinétique (attention à ne pas se faire mal !). Ces conséquences sont technologiquement importantes (rupture d'un essieu). Les couples indiqués sur la figure sont ceux ressentis par l'observateur : ce sont les couples exercés *par* le système



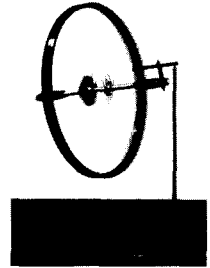
*sur* l'extérieur. Ces mêmes effets conduisent à l'apparition de couples sur un avion effectuant un virage, couples qu'il faudra compenser par les ailerons ; de même, en rentrant les roues de l'avion alors qu'elles tournent encore, on engendre des couples dans les supports ; le même effet apparaît également sur une moto dans un virage.

- Une roue de vélo tournant rapidement autour de son axe est suspendue à une corde (fig 11.6 a) ; on observe que l'effet du poids de la roue conduit à une rotation de l'axe dans le plan horizontal et non à une chute de la roue dans le plan vertical.
- L'observation montre que la force  $N$  exercée par le sol sur une meule peut atteindre plusieurs fois le poids  $mg$  de la meule (fig 11.6 b) ; cet exemple sera étudié au paragraphe 14.3.1.

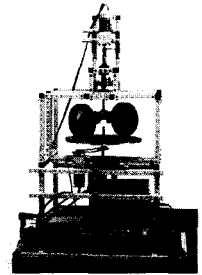


**Fig. 11.6** Effets gyroscopiques.

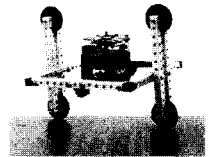
- Ce même phénomène permet de stabiliser un mobile à deux roues au moyen d'un volant tournant rapidement autour d'un axe supporté par un cadre mobile (fig 11.6 c) ; le sens de rotation doit être tel que  $\omega$  soit dirigé vers le bas.



(a)



(b)



(c)

## 11.5 PROPRIÉTÉS ET THÉORÈMES DU MOMENT CINÉTIQUE

### 11.5.1 Extensivité et théorème du transfert

Par définition, le moment cinétique  $L_A$  est le moment résultant par rapport au point  $A$  du torseur des quantités de mouvement :

$$L_A = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_{\alpha} = A P_{\alpha}.$$

Définition du moment cinétique au point  $A$

C'est donc une *grandeur extensive*

$$L_A^{(S)} = \sum_k L_A^{(S_k)} \quad \text{si} \quad S = \bigcup_k S_k \quad (11.11)$$

Théorème du transfert qui satisfait le *théorème du transfert* (4.32)

$$L_A = L_B + AB \wedge Mv_G \quad (11.12)$$

car  $\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha = p = Mv_G$  est la résultante de ce torseur.

### 11.5.2 Référentiel du centre de masse et 1<sup>er</sup> théorème de König

Considérons un système de points matériels  $P_\alpha$ , de masse  $m_\alpha$ , que l'on étudie par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

Référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}_G$

On appelle **référentiel du centre de masse**  $\mathcal{R}_G$ , le référentiel lié au centre de masse  $G$  du système, en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  (vitesse d'entraînement  $v_e = v_G$  et  $\omega_e = 0$ ).

Ainsi, par rapport au référentiel  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$  nous avons

$$p' = Mv'_G = 0 \quad (11.13)$$

car  $G$  est immobile dans  $\mathcal{R}_G$ , et  $M' = M$  en vertu de l'axiome 3 non relativiste (§ 10.2.1).

$L'_A = L'_G$  si  
 $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$

**Propriété 1.** Dans le référentiel du centre de masse, la quantité de mouvement du système est nulle, et le moment cinétique est indépendant du point  $A$ .

En effet, du théorème du transfert et (11.13), nous avons pour tout point  $A$  :

$$L'_A = L'_G + AG \wedge Mv'_G = L'_G. \quad (11.14)$$

$L_G = L'_G$

**Propriété 2.** Pour tout référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , les moments cinétiques par rapport à  $G$  évalués dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont égaux :

$$L_G = L'_G \quad \text{si} \quad \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 0 \quad (11.15)$$

En effet, soit  $v_e = v_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ ; alors

$$\begin{aligned} L_G &= \sum_\alpha GP_\alpha \wedge m_\alpha v_\alpha \\ &= \sum_\alpha GP_\alpha \wedge m_\alpha (v'_\alpha + v_e) \end{aligned}$$

d'où, de (4.38),

$$L_G = L'_G + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} G P_{\alpha} \right) \wedge v_e = L'_G.$$

En combinant cette 2<sup>e</sup> propriété avec le théorème du transfert nous obtenons

$$L_A = AG \wedge M v_G + L'_G. \quad (11.16) \quad \begin{array}{l} \text{1<sup>er} \text{ théorème} \\ \text{de König} \end{array}</sup>$$

Cette dernière équation est l'expression du théorème suivant.

**Premier théorème de König.** Le moment cinétique  $L_A$  est égal à la somme du moment cinétique par rapport à  $A$  de la masse totale concentrée en  $G$  et du moment cinétique  $L'_G$  évalué dans le référentiel du centre de masse.

On appelle *moment cinétique orbital*, le moment cinétique  $AG \wedge M v_G$  du point matériel obtenu en concentrant toute la masse du système au centre de masse, et *moment cinétique intrinsèque* le moment cinétique évalué dans  $\mathcal{R}_G$ .

En conséquence, le premier théorème de König s'exprime sous la forme :

Le moment cinétique d'un système est la somme du moment cinétique orbital et du moment cinétique intrinsèque.



KÖNIG Johann Samuel  
Mathématicien et  
physicien suisse  
(1712-1757)

### 11.5.3 Théorème du moment cinétique. Énoncé général

Le théorème du moment cinétique (11.10) nécessite le choix préalable d'un point  $O$  fixé dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Cependant, dans les applications pratiques, il est souvent utile de considérer le moment cinétique par rapport à un point  $A$  en mouvement.

En outre, du point de vue conceptuel, il n'est pas satisfaisant d'avoir un théorème fondamental qui fasse intervenir explicitement un point  $O$  arbitrairement choisi dans le référentiel. Il serait plus judicieux d'avoir un théorème faisant intervenir un point du système, par exemple le centre de masse. Pour cela, nous allons généraliser le théorème du moment cinétique (11.10).

**Théorème du moment cinétique.** Quel que soit le point  $A = A(t)$  choisi

$$\frac{d}{dt} L_A + v_A \wedge M v_G = M^{\text{ext}}_A \quad (11.17)$$

où  $v_A = \frac{d}{dt} OA$  est la vitesse du point  $A(t)$  par rapport auquel on a défini le moment cinétique  $L_A(t)$ .

Théorème du  
moment cinétique  
avec  $A$  mobile

DÉMONSTRATION. Du théorème du transfert (11.12)  $L_O = L_A + OA \wedge Mv_G$ , et du théorème du moment cinétique (11.10), avec  $O$  un point fixé, on déduit

$$\frac{d}{dt} L_O = \frac{d}{dt} L_A + v_A \wedge Mv_G + OA \wedge Ma_G = M_O^{\text{ext}}$$

d'où, de (11.8),

$$\frac{d}{dt} L_A + v_A \wedge Mv_G = M_O^{\text{ext}} + AO \wedge F^{\text{ext}} = M_A^{\text{ext}}.$$

### Cas particuliers

i) Si  $A$  est le centre de masse ( $A \equiv G$ ), alors :

$$\frac{d}{dt} L_G = M_G^{\text{ext}}. \quad (11.18)$$

ii) Si  $A$  est un point de vitesse  $v_A$  parallèle à  $v_G$ , alors :

$$\frac{d}{dt} L_A = M_A^{\text{ext}}. \quad (11.19)$$

### Remarques

- Si  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  on a selon (11.15)

$$\frac{d}{dt} L'_G = M_G^{\text{ext}}; \quad (11.20)$$

de plus, il est possible d'effectuer la dérivation soit dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , soit dans  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  (par exemple dans  $\mathcal{R}_G$ ). En effet

$$\left( \frac{d}{dt} L'_G \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d}{dt} L'_G \right)_{\mathcal{R}'} \quad \text{si} \quad \omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 0.$$

Les équations du mouvement impliquent

$$\begin{array}{l} \text{Équations} \\ \text{du mouvement} \end{array} \quad ma_G = F^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad \left( \frac{d}{dt} L'_G \right)_{\mathcal{R}_G} = M_G^{\text{ext}}. \quad (11.21)$$

Ces dernières équations permettent souvent de décomposer l'étude du mouvement d'un système en l'étude du mouvement du centre de masse d'une part, et l'étude du mouvement par rapport au référentiel du centre de masse d'autre part.

- Pour le calcul de la dérivée, il est parfois utile d'effectuer la dérivation dans un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  (9.16) et le théorème du moment cinétique devient

$$\left. \frac{d}{dt} L_A \right)_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge L_A + \mathbf{v}_A \wedge M \mathbf{v}_G = M_A^{\text{ext}}. \quad (11.22)$$

- En général, on choisit un point  $A$  tel que  $\mathbf{v}_A \wedge M \mathbf{v}_G = 0$ . De plus, dans la mesure du possible, on prend  $A$  tel que certaines forces inconnues aient un moment nul en  $A$ .
- Les équations générales du mouvement permettent de préciser le concept de point matériel.

Un système peut être assimilé à un point matériel de masse  $M$ , situé en  $\mathbf{x}_G$ , si le torseur des forces extérieures est équivalent à un seul vecteur, lié en  $\mathbf{x}_G$ , qui ne dépend que des variables  $(\mathbf{x}_G, \mathbf{p}, t)$ .

Point matériel

## 11.6 APPLICATIONS

### 11.6.1 Cylindre creux roulant sans glissement sur un plan incliné

Comme première application, étudions le mouvement d'un cylindre creux homogène sur un plan incliné, en supposant qu'il y ait roulement sans glissement.

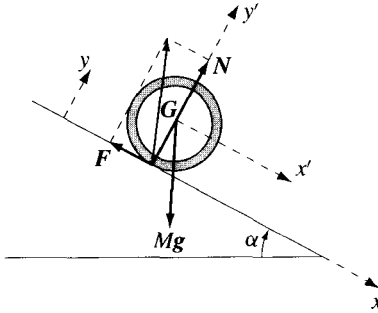


Fig. 11.7 Cylindre creux roulant sans glisser sur un plan incliné.

Le système considéré est le cylindre et le référentiel choisi, le laboratoire. Les forces extérieures sont le poids  $M\mathbf{g}$  et les forces de liaisons inconnues  $N$  et  $F$ . La condition de roulement sans glissement implique que le mouvement est plan sur plan et

$$\dot{\mathbf{x}}_G = -R\boldsymbol{\omega} = -R\dot{\theta} \quad (11.23)$$

où  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3 = \dot{\theta} \mathbf{e}_3$  est la vitesse de rotation du cylindre : c'est un système à 1 degré de liberté.

Calculons pour commencer  $L'_G$ , le moment cinétique par rapport au référentiel du centre de masse. Pour un cylindre creux, homogène, de masse  $M$ , rayon  $R$ , d'épaisseur négligeable, en rotation autour de son axe, nous avons

$$\begin{aligned}
 L'_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{x}'_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} & (\mathbf{x}'_{\alpha} = G\mathbf{P}_{\alpha}) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}'_{\alpha} \wedge (\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{x}'_{\alpha}) & (\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\mathbf{x}'_{\alpha})^2 \boldsymbol{\omega} - (z'_{\alpha} \omega) \mathbf{x}'_{\alpha}] \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} R^2 \boldsymbol{\omega} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} (z'^2_{\alpha} \boldsymbol{\omega} - (z'_{\alpha} \omega) \mathbf{x}'_{\alpha}) \\
 &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} R^2 \boldsymbol{\omega} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} z'_{\alpha} \omega (x'_{\alpha} \mathbf{e}_1 + y'_{\alpha} \mathbf{e}_2)
 \end{aligned}$$

Mais le dernier terme s'annule en vertu de la symétrie par rapport au plan  $z' = 0$ ; en effet, à tout point  $P_{\alpha}$  de coordonnées  $(x'_{\alpha}, y'_{\alpha}, z'_{\alpha})$  on peut associer  $\bar{P}_{\alpha}$  de coordonnées  $(x'_{\alpha}, y'_{\alpha}, -z'_{\alpha})$ . Par conséquent,

Moment cinétique  
d'un cylindre creux

$$L'_G = MR^2 \boldsymbol{\omega} \quad (11.24)$$

### Première méthode

En utilisant les équations du mouvement (11.21), on a

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = F + Mg \sin \alpha & (F = F_x) \\ 0 = N - Mg \cos \alpha & (N = N_y) \\ MR^2\ddot{\theta} = RF \end{cases}$$

et l'on peut éliminer  $F$  en utilisant la condition (11.23), d'où

$$\ddot{x}_G = \frac{1}{2}g \sin \alpha \quad (11.25)$$

### Deuxième méthode

Il est possible d'éliminer directement la force inconnue  $F$  de l'équation du moment cinétique, en choisissant comme point  $A$  dans le théorème du moment cinétique (11.17) le point de contact du cylindre sur le plan. Comme  $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G$ , nous avons

$$\frac{d}{dt} L_A = \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{g}$$

avec

$$\begin{aligned}
 L_A &= L'_G + \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{v}_G \\
 &= L'_G - RM\dot{x}_G \mathbf{e}_3
 \end{aligned} \quad (11.26)$$

En introduisant l'hypothèse de roulement sans glissement (11.23), et (11.24), il vient

$$L_A = 2MR^2\omega$$

d'où

$$2MR^2\ddot{\theta} = -MgR \sin \alpha \quad \text{et} \quad \ddot{x}_G = \frac{1}{2}g \sin \alpha.$$

### Remarques

- L'accélération (11.25) est deux fois plus faible que celle obtenue lorsque le cylindre glisse sans rouler en l'absence de frottement ( $F = 0$ ).
- Nous voyons que pour qu'il y ait roulement sans glissement, il faut que la force de frottement soit égale à  $F = -\frac{1}{2}Mg \sin \alpha$ . Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 12.5.2.
- Considérons le cas d'un cylindre plein. Pour calculer le moment cinétique  $L'_G$ , il faut décomposer le cylindre en tube de rayon  $r_\alpha$ , d'épaisseur  $\delta r$  et de masse  $\delta m_\alpha$ . Par extensivité, on obtient de (11.24)

$$\begin{aligned} L'_G &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \delta m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \omega \\ &= \lim_{\delta r \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r_{\alpha} \delta r r_{\alpha}^2 \omega = \frac{2M}{R^2} \int_0^R dr r^3 \omega, \end{aligned}$$

Par conséquent, dans le cas du cylindre plein, on a

$$L'_G = \frac{1}{2}MR^2\omega. \quad (11.27)$$

Avec

$$L_A = L'_G - RM\dot{x}_G e_3$$

et la condition de roulement sans glissement (11.23) il vient

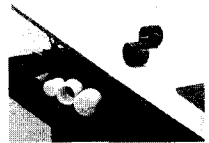
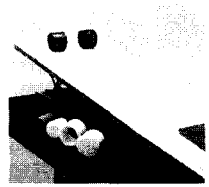
$$L_A = \frac{3}{2}MR^2\omega$$

d'où

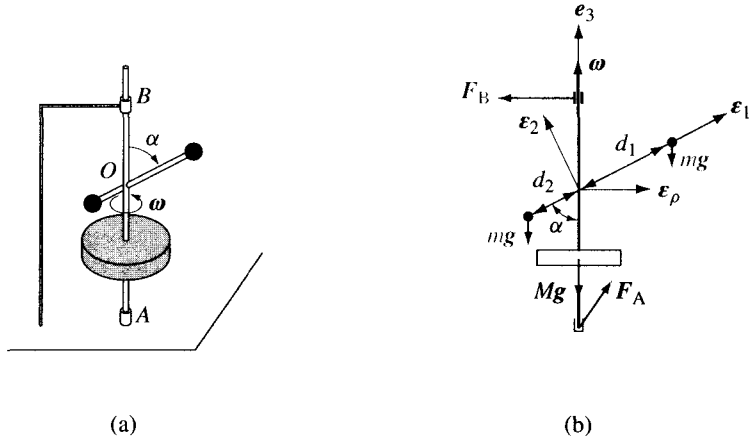
$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} = -MgR \sin \alpha \quad \text{et} \quad \ddot{x}_G = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

### 11.6.2 Réactions sur l'axe d'un solide en rotation

Cherchons les forces de réaction en  $A$  et  $B$  lorsque le solide de la figure 11.8 tourne autour de l'axe  $AB$ , à vitesse angulaire  $\omega$  constante. On négligera les frottements.



Un cylindre creux a une accélération supérieure à celle d'un cylindre plein



**Fig. 11.8** Disque de rayon  $R$ , masse  $M$  ; deux masses égales sont soudées à une tige (de masse négligeable) faisant un angle  $\alpha$  constant avec la verticale.

Prenons comme *référentiel* le laboratoire et comme *système d'axes* le repère  $O\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$  lié au solide. La condition d'*absence de frottement* s'exprime par la relation  $F_B \cdot \epsilon_3 = 0$  et par le fait que les supports  $A$  et  $B$  n'exercent pas de couple parallèle à  $\epsilon_3$ . De plus, le moment résultant des forces appliquées sur le système étant perpendiculaire à  $AB$ , il n'y a pas besoin de couple extérieur pour maintenir  $\omega$  constant.

Des *équations du mouvement* on a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{p} = (2m + M) \mathbf{g} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B \\ \frac{d}{dt} \mathbf{L}_A = (d_1 - d_2) \epsilon_1 \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_B \end{cases}$$

$$\text{où } \mathbf{p} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m(d_1 - d_2) \omega \wedge \epsilon_1. \quad (11.28)$$

Commençons par calculer le moment cinétique  $\mathbf{L}_A$ . Par extensivité du moment cinétique et de (11.27), on obtient en utilisant le théorème du transfert :

$\mathbf{L}_A$  n'est pas parallèle à  $\omega$  !

$$\begin{cases} \mathbf{L}_A = \mathbf{L}_A^{(1)} + \mathbf{L}_A^{(2)} + \mathbf{L}_A^{(\text{disque})} = \\ = \mathbf{L}_O^{(1)} + \mathbf{L}_O^{(2)} + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{p} + \mathbf{L}_A^{(\text{disque})} = \\ = m(d_1^2 + d_2^2) \omega \sin \alpha \epsilon_2 + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{p} + \frac{1}{2} M R^2 \omega \end{cases}$$

avec  $\omega = \omega \epsilon_3$ .

De (11.28),

$$\begin{aligned} \mathbf{AO} \wedge \mathbf{p} &= m(d_1 - d_2) |\mathbf{AO}| \epsilon_3 \wedge (\omega \wedge \epsilon_1) = \\ &= m(d_1 - d_2) |\mathbf{AO}| \omega [\cos \alpha \epsilon_3 - \epsilon_1] \end{aligned}$$



et nous obtenons les équations du mouvement

$$\begin{cases} m(d_1 - d_2) \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = (2m + M) \mathbf{g} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B \\ m(d_1^2 + d_2^2) \omega \sin \alpha \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2 - m(d_1 - d_2) |AO| \omega \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1 = \\ = -(d_1 - d_2) mg \sin \alpha \boldsymbol{\epsilon}_3 + \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_B. \end{cases} \quad (11.29)$$

De plus, les vecteurs  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  étant liés au solide, la formule de Poisson (8.17) implique

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1 &= \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon}_1 = -\omega \sin \alpha \boldsymbol{\epsilon}_3, & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_2 &= \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon}_2 = \omega \cos \alpha \boldsymbol{\epsilon}_3, \\ \boldsymbol{\omega} \wedge \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_1 &= -\omega^2 \sin \alpha \boldsymbol{\epsilon}_\rho & \text{avec} & \quad \boldsymbol{\epsilon}_\rho = \boldsymbol{\epsilon}_3 \wedge \boldsymbol{\epsilon}_3, \end{aligned}$$

et (11.29) devient

$$\begin{cases} -m(d_1 - d_2) \omega^2 \sin \alpha \boldsymbol{\epsilon}_\rho = (2m + M) \mathbf{g} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B \\ m(d_1^2 + d_2^2) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + m\omega^2(d_1 - d_2) |AO| \sin \alpha = \\ = -mg(d_1 - d_2) \sin \alpha - |AB| F_B \end{cases} \quad (11.30)$$

où  $\mathbf{F}_B = F_B \boldsymbol{\epsilon}_\rho$ .

On trouve ainsi les réactions en A et B :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= -|AB|^{-1} m \sin \alpha [\omega^2(d_1^2 + d_2^2) \cos \alpha + \\ &+ \omega^2(d_1 - d_2) |AO| + g(d_1 - d_2)] \boldsymbol{\epsilon}_\rho \end{aligned} \quad (11.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= |AB|^{-1} m \sin \alpha [\omega^2(d_1^2 + d_2^2) \cos \alpha - \omega^2(d_1 - d_2) |BO| + \\ &+ g(d_1 - d_2)] \boldsymbol{\epsilon}_\rho - (2m + M) \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

- Si  $d_1 = d_2$ , le centre de masse est sur l'axe de rotation et l'on dit que le système est **équilibré statiquement**. Dans ce cas,  $\mathbf{p} = 0$  et la résultante des forces extérieures est nulle ; on remarquera que les forces de réaction  $\mathbf{F}_A$  et  $\mathbf{F}_B$  sont proportionnelles à  $\omega^2$ . De plus le moment des forces extérieures n'est pas nul. Équilibrage statique :  $\mathbf{v}_G = 0$
- Si  $d_1 = d_2$  et  $\alpha = \pi/2$ , le moment cinétique est parallèle à l'axe de rotation et l'on dit que le système est **équilibré dynamiquement**. Les forces de réaction (11.31) et (11.32) sont alors égales aux forces exercées dans le cas statique :  $\mathbf{F}_B = 0$ ,  $\mathbf{F}_A = -(2m + M)\mathbf{g}$ . Équilibrage dynamique :  $L_A/\omega$

En conclusion, lorsque le système n'est pas équilibré, il apparaît des forces de réaction supplémentaires sur l'axe de rotation. Ces dernières étant proportionnelles à  $\omega^2$ , elles seront très importantes à grandes vitesses ; elles entraîneront des vibrations dans le support et de l'usure aux points A et B.

### 11.6.3 Solide en rotation sous l'effet d'une force

Le solide équilibré du paragraphe précédent ( $d_1 = d_2 = d$ ,  $\alpha = \pi/2$ ) tourne librement autour de son axe. Il est alors soumis à une force constante appliquée au moyen d'un fil enroulé sur le disque (fig. 11.9). Cherchons le mouvement et les forces de réaction.

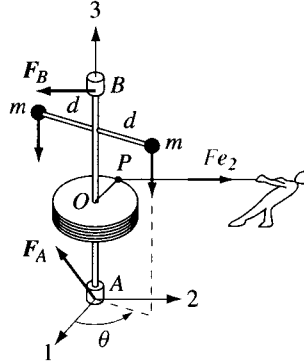


Fig. 11.9 Force constante perpendiculaire à  $AB$ .

Système holonôme à 1 degré de liberté :  $\theta$

Le système est holonôme à 1 degré de liberté et l'on choisit l'angle  $\theta$  comme paramètre. Le théorème du moment cinétique s'écrit avec (11.16) et (11.27)

$$\frac{d}{dt} L_A = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_B + \mathbf{AP} \wedge \mathbf{F} \quad \text{avec} \quad L_A = \left(\frac{1}{2}MR^2 + 2md^2\right)\omega,$$

$$\text{soit} \quad \left(\frac{1}{2}MR^2 + 2md^2\right)\ddot{\theta}\mathbf{e}_3 = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_B - R\mathbf{F}\mathbf{e}_3 - |\mathbf{AO}|F\mathbf{e}_1$$

ce qui donne

$$\begin{array}{l} \text{Équation} \\ \text{du mouvement} \end{array} \quad \ddot{\theta} = -\frac{RF}{\frac{1}{2}MR^2 + 2md^2} \quad \text{et} \quad \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_B = |\mathbf{AO}|F\mathbf{e}_1.$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré et

$$\mathbf{F}_B = -\frac{|\mathbf{AO}|}{|\mathbf{AB}|}F\mathbf{e}_2. \quad (11.33)$$

Finalement, du théorème du centre de masse (sect. 11.2)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F} + (2m + M)\mathbf{g}$$

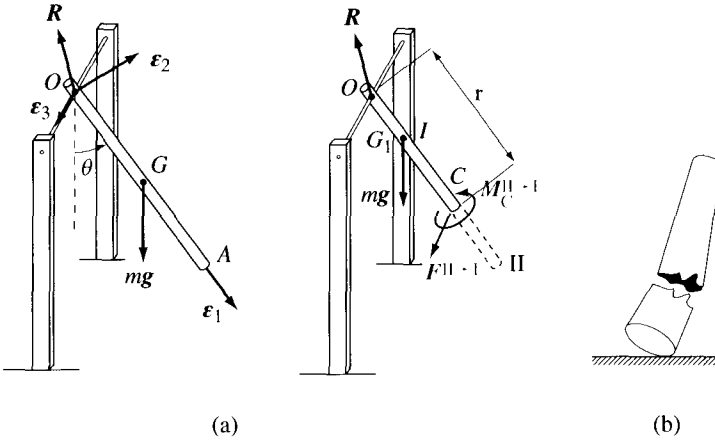
on obtient

$$\mathbf{F}_A = -(M + 2m)\mathbf{g} - \frac{|\mathbf{BO}|}{|\mathbf{BA}|}F\mathbf{e}_2.$$

### 11.6.4 Pendule physique et tensions internes

Analysons le mouvement d'une tige mince rigide homogène  $OA$  (masse  $m$ , longueur  $\ell$ ), mobile autour d'un axe  $\epsilon_3$  horizontal, en l'absence de tout frottement (fig. 11.10). Cherchons ensuite la force  $R$  exercée par l'axe sur la tige, ainsi que les *tensions* en un point  $C$  de la tige, c'est-à-dire les éléments de réduction du torseur des forces exercées par la partie  $CA$  sur la partie  $OC$ .

Tensions



**Fig. 11.10** (a) Tige mobile autour d'un axe fixe ; (b) chute d'une cheminée.

La tige est un système holonôme à 1 degré de liberté et l'on choisit l'angle  $\theta$  comme variable. Les forces extérieures sont la réaction  $R$  et  $mg$ .

 $O\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$  liés à la tige

Pour appliquer les équations du mouvement

$$\begin{cases} ma_G = mg + R \\ \frac{d}{dt} L_O = OG \wedge mg \end{cases} \quad (11.34)$$

il nous faut commencer par calculer  $L_O$ .

$$\begin{aligned} L_O &= \sum_{\alpha} x_{\alpha} \wedge m_{\alpha} v_{\alpha} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \sum_{\alpha} \frac{m}{\ell} \delta r r_{\alpha}^2 \dot{\theta} \epsilon_3 \\ &= \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} dr r^2 \dot{\theta} \epsilon_3 = \frac{1}{3} m \ell^2 \dot{\theta} \epsilon_3. \end{aligned}$$

Moment cinétique en  $O$  d'une tige mince rigide

Nous obtenons alors l'équation d'évolution

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (11.35)$$

Équation du mouvement

et le lemme fondamental (§ 6.3.4) implique

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \theta = K \quad (= \text{cste}). \quad (11.36)$$

Lemme fondamental

L'analyse du mouvement est donc identique à celle d'un pendule mathématique (§ 10.5.1), de longueur  $\ell' = \frac{2}{3} \ell$ .

La réaction  $\mathbf{R}$  est donnée par (11.34)

$$\mathbf{R} = m \left[ -\frac{\ell}{2} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_1 + \frac{\ell}{2} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 - \mathbf{g} \right]$$

c'est-à-dire, en utilisant (11.35) et (11.36),

$$\mathbf{R} = mg \left[ -\left( \frac{5}{2} \cos \theta + \frac{\ell}{g} K \right) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{4} \sin \theta \mathbf{e}_2 \right].$$

Contrairement au pendule mathématique, la réaction n'est pas parallèle à  $\mathbf{e}_1$  (sauf en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ ).

Pour calculer les **tensions au point C**, écrivons  $OC = r$  et appliquons les équations du mouvement à la portion (I) =  $OC$ .

De

$$m_1 \mathbf{a}_{G_1} = \mathbf{R} + m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}^{II \rightarrow I} \quad \text{où} \quad |OG_1| = \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad m_1 = \frac{m}{\ell} r$$

nous avons

Équation du centre  
de masse pour  
le système (I)

$$\frac{m}{\ell} r \left[ -\frac{r}{2} \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_1 + \frac{r}{2} \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 \right] = \mathbf{R} + \frac{m}{\ell} r \mathbf{g} + \mathbf{F}^{II \rightarrow I}$$

et

$$\mathbf{F}^{II \rightarrow I} = \frac{m}{2\ell} \left[ (\ell^2 - r^2) \dot{\theta}^2 \mathbf{e}_1 - (\ell^2 - r^2) \ddot{\theta} \mathbf{e}_2 + 2g(\ell - r) \right].$$

Par conséquent, de (11.35) et (11.36)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{II \rightarrow I} = mg \left( 1 - \frac{r^2}{\ell^2} \right) & \left\{ \left[ \left( \frac{3}{2} + \frac{\ell}{\ell + r} \right) \cos \theta + \frac{\ell}{g} K \right] \mathbf{e}_1 \right. \\ & \left. + \left[ \frac{3}{4} - \frac{\ell}{\ell + r} \right] \sin \theta \mathbf{e}_2 \right\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme  $\mathbf{v}_C$  est parallèle à  $\mathbf{v}_{G_1}$ , le théorème du moment cinétique par rapport à C, avec (14.26), implique

$$\mathbf{L}_C^{(I)} = \mathbf{L}_C^{(I) \text{rot}} + \mathbf{L}_C^{(I) \text{trans}}$$

et

Théorème du  
moment cinétique  
pour le système (I)

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{3} \frac{m}{\ell} r^3 \dot{\theta} \mathbf{e}_3 + \frac{m}{\ell} r \mathbf{C}G_1 \wedge \mathbf{v}_C \right] = \mathbf{C}O \wedge \mathbf{R} - \frac{m}{\ell} r \frac{r}{2} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{g} + \mathbf{M}_C^{II \rightarrow I},$$

soit

$$-\frac{1}{6} \frac{m}{\ell} r^3 \ddot{\theta} = -r \frac{mg}{4} \sin \theta + \frac{mg}{2\ell} r^2 \sin \theta + \mathbf{M}_C^{II \rightarrow I},$$

c'est-à-dire

$$M_C^{l \rightarrow l} = M_C^{l \rightarrow l} \epsilon_3,$$

avec

$$\begin{aligned} M_C^{l \rightarrow l} &= -\frac{1}{6} \frac{m}{\ell} r^3 \ddot{\theta} + \frac{mg}{4} r \sin \theta \left( 1 - \frac{2r}{\ell} \right) = \\ &= \frac{mg}{4} \sin \theta r \left( 1 - \frac{r}{\ell} \right)^2. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Nous voyons de (11.37) que *le moment est maximal en  $r = \ell/3$* . Ce résultat explique par exemple le fait qu'une cheminée qui s'abat se casse au tiers de sa hauteur avant de toucher le sol (fig. 11.10 b).

## 11.7 IMPORTANCE DES LOIS DE CONSERVATION

Comme nous l'avons vu, les lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique ont été établies à partir des deuxième et troisième lois de Newton. Cependant, *ces lois de conservation sont si fondamentales que les physiciens admettent qu'elles restent valables même dans les cas où elles sembleraient violées, ainsi que dans les cas où la troisième loi est mise en défaut.*

Généralisation de la conservation de  $\mathbf{p}$

Par exemple, l'observation des chocs élastiques

$$e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$$

à très hautes vitesses montre que la grandeur  $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$  n'est pas conservée. Cependant, on observe qu'il y aura conservation de la « quantité de mouvement » si l'on remplace la loi de Newton  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  par la loi relativiste

$$\mathbf{p} = m(v) \mathbf{v} \quad \text{avec} \quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.38)$$

et la « masse » dépendra de la vitesse du point matériel. Si  $v \ll c$ , on a

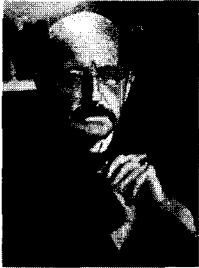
$$m(v) = m_0 [1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 + \dots] \cong m_0 \quad (11.39)$$

et nous retrouvons la loi de Newton  $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$ . Aujourd'hui, on préfère garder le concept de masse invariante et modifier la définition de la vitesse, soit

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{w} \quad \text{où} \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.40)$$

ce qui est plus naturel dans le cadre des théories relativistes (chap. 21).

Généralisation de la conservation de  $L_O$



PLANCK Max  
(1858-1947)

Physicien allemand  
Prix Nobel, 1918

Principes  
d'invariance et  
symétries

Par ailleurs, pour que la conservation du moment cinétique soit expérimentalement satisfaite lors du choc ( $e^+$ ,  $e^-$ ), on est obligé de supposer que les électrons possèdent un moment cinétique interne, appelé *spin*, qui s'ajoute au terme  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ .

Finalement, l'existence de processus d'annihilation tels que

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

et la condition de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique nous force à admettre que les photons – particules de masse nulle – possèdent une quantité de mouvement et un moment cinétique. De même, une onde électromagnétique de fréquence  $\nu$  a une quantité de mouvement

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n}$$

(où  $h$  est la constante de Planck,  $c$  la vitesse de la lumière et  $\mathbf{n}$  un vecteur unité), et un moment cinétique.

L'importance des *lois de conservation* est liée au fait qu'elles sont intimement associées à des *principes d'invariance*, c'est-à-dire à des *symétries* : ce sont les superlois discutées au chapitre 1, sur lesquelles nous reviendrons à la section 22.4.

A ce propos, nous pouvons remarquer que la physique n'évolue pas de façon continue ; au contraire, c'est un perpétuel recommencement qui permet, en repartant de zéro, de progresser et d'approfondir nos connaissances de la nature. En effet, il arrive souvent que les conséquences tirées des lois (dites fondamentales à une certaine époque) deviennent plus fondamentales que les lois dont elles ont été tirées. C'est le cas des lois de conservation de  $\mathbf{p}$ ,  $L_O$  et de l'énergie  $E$  que nous discuterons au chapitre 13.

La loi de conservation de  $\mathbf{p}$  est liée à l'*homogénéité de l'espace*, c'est-à-dire à l'invariance par rapport aux translations d'espace. Cette propriété affirme qu'il est possible de translater nos expériences n'importe où dans l'Univers et que sous les mêmes conditions nous observons les mêmes résultats ; en particulier, ceci signifie que les lois de la physique établies sur la Terre sont valables partout dans l'Univers.

La loi de conservation de  $L_O$  est liée à l'*isotropie de l'espace*, c'est-à-dire à l'invariance par rapport aux rotations d'espace. Cette propriété affirme qu'il est possible d'effectuer une rotation de nos expériences et que sous les mêmes conditions nous observons les mêmes résultats.

La loi de conservation de l'énergie est liée à l'*homogénéité du temps*, c'est-à-dire à l'invariance par rapport aux translations dans le temps. Cette propriété affirme qu'il est possible de répéter à n'importe quel moment les expériences et que sous les mêmes conditions nous observons les mêmes résultats.

Par conséquent, les lois de conservation de  $\mathbf{p}$ ,  $L_O$  et  $E$  sont liées aux propriétés géométriques de l'espace-temps.

De même, la loi de conservation de la charge électrique est liée à l'invariance par rapport aux transformations de jauge (voir cours d'électromagnétisme).

Dans le cadre des théories non relativistes, la loi de conservation de la masse est liée à l'invariance par rapport aux transformations de Galilée [56].

### 11.8 PROBLÈMES

**11.8.1** Un anneau est posé sur un cône initialement en rotation libre de vitesse  $\omega_i$  autour de son axe (fig. 11.11). Quelle est la vitesse de rotation finale  $\omega_f$  du système ?

Anneau sur cône

Est-ce que le résultat dépend des frottements qui ont mis l'anneau en rotation ? (Anneau : masse  $m$ , rayon  $r$  ; cône : masse  $M$ , rayon  $R$ , hauteur  $H$ ).



Fig. 11.11

**11.8.2** Un cylindre (masse  $m$ , rayon  $r$ ) roule sans glisser sur un cylindre fixe de rayon  $R$ . Sachant qu'à  $t = 0$ , on a  $\dot{\theta}_0 = 0$  et  $\theta_0 \cong 0$ , trouver l'angle  $\theta_f$  à partir duquel les cylindres ne sont plus en contact (fig. 11.12).

Cylindre sur un cylindre

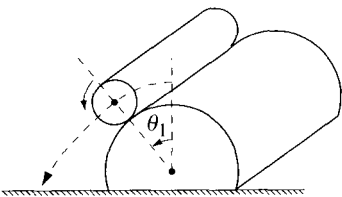


Fig. 11.12

**11.8.3** Une masse  $m$  est retenue par une corde enroulée sur la poulie d'un puits (fig. 11.13). On lâche la corde. Trouver l'évolution et la tension dans la corde. On admettra que la poulie (masse  $M$ , rayon  $R$ ) tourne sans frottement autour de son axe et qu'il n'y a pas glissement de la corde sur la poulie.

Poulie avec masse

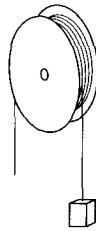


Fig. 11.13

Molécule soumise à  $\mathbf{g}$  et  $\mathbf{E}$

**11.8.4** Une molécule  $AB$  rigide ( $|AB| = d$ , masse  $m_A$  et  $m_B$ , charges  $q_A = -q_B = q$ ) est placée dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  constant perpendiculaire à  $\mathbf{g}$ . Décrire l'évolution du système en choisissant les conditions initiales  $AB(0)$  parallèle à  $\mathbf{g}$ , et  $\mathbf{v}_A(0) = \mathbf{v}_B(0) = 0$ .

Solide en rotation

**11.8.5** Trouver l'évolution du système de la figure 11.14 sachant que la masse  $m_1$  est lâchée sans vitesse initiale. Calculer la force de réaction au point  $A$  et la tension du fil. On suppose qu'il n'y a pas de frottement et que les masses du tambour, des axes et du fil sont négligeables. (Tambour : rayon  $R$ ;  $\alpha$  est constant; le point  $C$  est le milieu de la tige de longueur  $\ell$  reliant les deux masses.)

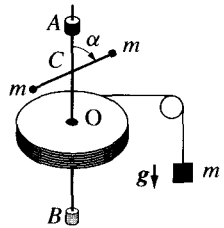


Fig. 11.14

Moteur sur une poutre

**11.8.6** Un moteur permet de monter ou descendre une charge au moyen d'un câble enroulé sur une poulie solidaire de l'axe du moteur. Le système est fixé sur une poutre encastrée dans le mur (fig. 11.15). La masse totale du système (poutre, moteur, poulie) est  $M$  et son centre de masse se trouve en  $G$ ; le moment d'inertie du moteur et de la poulie par rapport à l'axe de rotation est  $I$ . Calculer le moment des forces exercées par le mur sur la poutre : (1) si la charge est immobile et (2) si la charge est montée avec une accélération  $a$  constante.

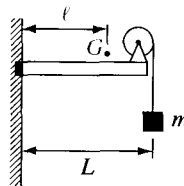


Fig. 11.15



**11.8.7** Une masse  $m$  est fixée à un ressort dont l'autre extrémité est attachée à un fil souple enroulé sur une poulie de rayon  $R$  et masse  $M$  (fig. 11.16). On admet que les masses du fil et du ressort sont négligeables et que la poulie peut tourner sans frottement autour de son axe. Trouver l'évolution temporelle  $x(t)$  pour les conditions initiales  $x_A^{(0)} = 0$ ,  $x^{(0)} = \ell$ ,  $v_A^{(0)} = 0$ ,  $v^{(0)} = 0$ , sachant que la force exercée par le ressort est  $\mathbf{F} = -k(x - x_A - \ell)\mathbf{e}_1$ . Vérifier que le fil reste constamment tendu au cours de l'évolution.

Poulie - ressort -  
masse

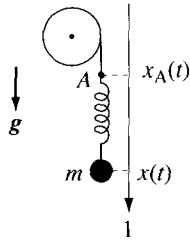


Fig. 11.16



## CHAPITRE 12

# ANALYSE DES FORCES

L'observation montre que l'action de l'extérieur sur un système peut s'effectuer soit par contact, soit par action à distance. De plus, les forces peuvent agir soit en un point, soit être distribuées sur une surface (force de pression, frottement, tension) ou dans un volume (forces gravifiques, d'inertie, de Coriolis). Les forces volumiques sont généralement associées à des forces à distance, tandis que les forces superficielles sont typiquement des forces de contact. Dans les théories quantiques, les forces à distance seront remplacées par des forces de contact en considérant qu'elles ont pour origine l'échange de « particules ».

Pour analyser les divers types de forces, nous considérerons successivement les cas suivants :

- **Forces appliquées** : ce sont des forces en principe connues, définies univoquement par l'état du système et de l'extérieur.

- **Forces de frottement** : ce sont des forces de contact qui s'opposent au mouvement du système par rapport à un autre système (fluide ou solide). Cependant ces mêmes forces sont, dans bien des cas, celles responsables du mouvement (celui d'une voiture par exemple). L'étude systématique des frottements ne peut se faire que dans un cadre plus général, tel que la thermodynamique (il y aura une variation de température) ou la mécanique statistique (en considérant les chocs des particules sur le système). Toutefois, il est possible de prendre en considération les forces de frottement dans le cadre de la mécanique en introduisant des lois phénoménologiques ; de telles lois résument un ensemble de résultats observés sous certaines conditions, mais elles n'ont pas un caractère absolu et ne sont pas des lois fondamentales.

Lois  
phénoménologiques

- **Forces de contrainte ou de liaison** : ce sont des forces inconnues a priori, qui apparaissent dans les systèmes construits par l'ingénieur et qui imposent certaines restrictions aux mouvements (surface, rail, articulations, axes, enceinte).

- **Tensions internes** : ce sont les forces exercées par une partie d'un solide sur une autre partie et qui assurent la rigidité du solide.

Remarquons pour terminer que, quelle que soit la manière dont se manifestent les forces en mécanique, elles sont toutes d'origine gravifique ou

électromagnétique (§ 3.1.5). Les deux autres forces fondamentales (fortes et faibles), ayant une portée de l'ordre du Fermi, ne sont pas observables.

12.1 FORCES GRAVIFIQUES

12.1.1 Loi de la gravitation

Avec la mise en évidence du principe d'inertie, le problème du mouvement de la Lune et des planètes apparaissait comme une énigme qui passionnait les gens au XVII<sup>e</sup> siècle. Comme nous l'avons vu (§ 6.7.1), Newton résolut ce problème en admettant pour commencer que les forces responsables de la chute des corps et du mouvement de la Lune autour de la Terre ont une même origine : l'attraction terrestre. Il postule ensuite que le mouvement des planètes autour du Soleil est dû à une force de même nature que l'attraction terrestre. Ayant déduit des lois de Képler que la force exercée par le Soleil sur une planète est une force centrale (sect. 6.5 et 6.6), attractive, inversement proportionnelle au carré de la distance, il conclut que l'attraction terrestre est une force ayant ces mêmes propriétés. Cette hypothèse ayant été vérifiée (§ 6.7.1), il la généralise finalement à l'ensemble de l'Univers.

Loi de la gravitation universelle

Loi de la gravitation

Tout point matériel *A* exerce sur un point matériel *B* une force attractive, appelée **force gravifique**, de la forme (fig. 12.1)

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B}^{gr} = -G \frac{m_A^* m_B^*}{|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A, \tag{12.1}$$

où *G* est une constante universelle appelée **constante de la gravitation**, et *m<sub>A</sub><sup>\*</sup>*, *m<sub>B</sub><sup>\*</sup>* sont des grandeurs strictement positives qui décrivent l'intensité avec laquelle ces corps s'attirent : c'est la **masse gravifique**. Cette grandeur ne dépend ni de l'état du point matériel, ni de l'état de l'extérieur.

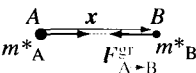


Fig. 12.1 Force gravifique entre deux points ou deux sphères homogènes.

Dans le système international, l'unité de masse gravifique est la masse gravifique du kilogramme étalon, ce qui, avec (12.1), définit la valeur de *G* :

$$G \cong 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \tag{12.2}$$

Principe  
d'équivalence  
*m<sup>\*</sup>* = *m*

Les expériences qui avaient permis d'égaliser la masse pesante et la masse d'inertie (§ 10.6.1) conduisirent Newton à égaliser la masse gravifique et la masse d'inertie. Ce **principe d'équivalence** de la masse gravifique et de la

masse d'inertie est un principe fondamental de la mécanique, vérifié aujourd'hui avec une précision extraordinaire de  $10^{-12}$ . Dans la suite, nous poserons  $m^* = m$  et nous reviendrons sur ce point à la section 15.6.

Mentionnons pour terminer que la forme (12.1) n'est valable que pour des vitesses très inférieures à celle de la lumière ; en relativité générale il apparaîtra des corrections en  $(v/c)^2$ .

### 12.1.2 Champ gravifique

Considérons un ensemble de points matériels de masse  $m_\alpha$ , situés à l'instant  $t$  en  $\mathbf{x}_\alpha(t)$ . En admettant que les forces gravifiques sont des forces à 2 corps, la force exercée par les  $m_\alpha$  sur un point matériel de masse  $m$ , situé au point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ , est donnée par la relation

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = - \sum_{\alpha} G \frac{m_{\alpha} m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)). \quad (12.3)$$

On écrit cette force sous la forme

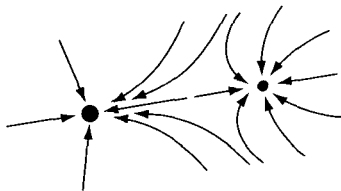
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = m \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \quad (12.4)$$

où

Champ gravifique

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = -G \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)) \quad (12.5)$$

est le **champ gravifique** créé par les masses  $m_\alpha$  : c'est une propriété de l'espace-temps qui caractérise la force qui agirait sur une masse unité située au point  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ . On appelle **lignes de champ** les courbes orientées tangentes en chaque point au champ gravifique (fig. 12.2).



Lignes de champ

Fig. 12.2 Champ gravifique.

12.1.3 Force gravifique exercée par une sphère

Théorème de Newton

- La force gravifique exercée par une sphère  $A$  homogène, de rayon  $R$ , centrée à l'origine, sur un point matériel  $B$  au point  $\mathbf{x}$ , est donnée par la relation

$$\begin{cases} F_{A \rightarrow B}^{gr} = -G \frac{m_A m_B}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} & \text{si } |\mathbf{x}| \geq R \\ F_{A \rightarrow B}^{gr} = -G \frac{m_A m_B}{R^3} \mathbf{x} & \text{si } |\mathbf{x}| \leq R \end{cases} \quad (12.6)$$

c'est-à-dire que pour  $|\mathbf{x}| < R$  la force est identique à celle exercée par la portion de la sphère  $A$  de rayon  $|\mathbf{x}|$ , et de centre  $O$ .

Force entre deux sphères

- La force gravifique entre deux sphères  $A$  et  $B$  homogènes, de rayon  $R_A$  et  $R_B$ , centrées en  $\mathbf{x}_A$  et  $\mathbf{x}_B$ , est donnée par (12.1) si les sphères sont disjointes.

DÉMONSTRATION. La démonstration de (12.6) est donnée dans l'appendice C. La deuxième partie du théorème est une conséquence de (12.6).

12.1.4 Expérience de Cavendish

La loi de la gravitation fut confirmée un siècle plus tard par l'expérience de Cavendish (1798). Elle consistait à mesurer la force entre deux couples de sphères en plomb, ayant respectivement 2 et 12 pouces de diamètre, au moyen d'un pendule de torsion (fig. 12.3).



CAVENDISH Henry  
Physicien et chimiste  
anglais  
(1731-1810)

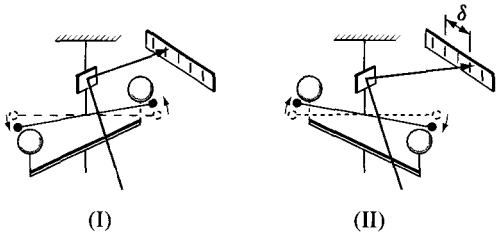
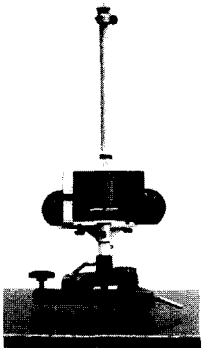


Fig. 12.3 La force est mesurée par la déviation  $\delta$  du faisceau lumineux entre les positions I et II.

Remarque

Nous voyons que les coefficients  $\kappa_S$  et  $\kappa_T$  introduits au paragraphe 6.7.1 sont

$$\begin{aligned} \kappa_S &= GM_S = 1,327 \cdot 10^{29} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \\ \kappa_T &= GM_T = 3,98 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \end{aligned} \quad (12.7)$$



où  $M_S$  est la masse du Soleil et  $M_T$  la masse de la Terre.

Par conséquent la détermination expérimentale de  $G$  par Cavendish permet de déduire de (12.7), la masse du Soleil et de la Terre.

Mesure de la masse  
du Soleil et de la  
Terre

## 12.2 FORCES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

### 12.2.1 Forces électrostatiques

Les expériences de Coulomb, effectuées à la même époque que celles de Cavendish, ont montré que la force entre deux points matériels électriquement chargés, immobiles, dans le vide, est une force centrale (§ 13.5.3), attractive ou répulsive, inversement proportionnelle au carré de la distance.

#### Loi de Coulomb électrostatique

Toute charge  $A$  exerce sur une charge  $B$  immobile une force, appelée *force de Coulomb*, de la forme

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B}^{\text{él}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{|\mathbf{x}|^2} \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A. \quad (12.8)$$

où  $\epsilon_0$  est une constante universelle, appelée constante diélectrique, et  $q_A, q_B$  sont des grandeurs positives ou négatives qui décrivent l'intensité avec laquelle ces corps interagissent : c'est la *charge électrique*, grandeur extensive, conservée, indépendante de l'état du point ou de l'extérieur.

Dans le système international, l'unité de charge électrique est le Coulomb, ce qui définit par (12.8) la valeur de  $\epsilon_0$  :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2} \quad (12.9)$$

### 12.2.2 Champ électrique

Considérons la force exercée sur une charge  $q$ , située en  $\mathbf{x}$  à l'instant  $t$ , par un ensemble de charges  $q_\alpha$  situées en  $\mathbf{x}_\alpha(t)$ . Par analogie avec la force gravifique, on écrit

$$\mathbf{F}^{\text{él}}(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (12.10)$$

où

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\alpha}(t)) \quad (12.11)$$

est le *champ électrique* créé par l'ensemble des charges  $\{q_{\alpha}\}$ .



COULOMB  
Charles-Auguste  
Physicien et  
mécanicien français  
(1736-1806)

Champ électrique

### Remarques

- Le champ électrique s'exprime dans le système international en volt par mètre. De (12.10), on a  $[F] = [Q][E]$  et  $1 \text{ V} = 1 \text{ N m C}^{-1}$ .
- Pour comparer les intensités des forces gravifiques et électriques, considérons deux protons à une distance  $d$  l'un de l'autre ; nous aurons

Comparaison des  
forces gravifiques et  
électriques

$$\frac{|F_{\text{gr}}|}{|F_{\text{él}}|} = 4\pi\epsilon_0 G \frac{m^2}{e^2} \cong 10^{-36} !$$

Par exemple, la force gravifique entre deux protons situés à une distance de  $1 \text{ \AA}$  est égale en intensité à la force électrique lorsque les deux protons sont éloignés de  $10^8 \text{ m}$ , soit le tiers de la distance Terre-Lune.

Les forces électriques ont une intensité beaucoup plus élevée que les forces gravifiques. Par ailleurs, les forces électriques sont attractives et répulsives, phénomène responsable de la *stabilité des atomes et de la matière*.

Finalement, tous les corps observés à l'échelle du laboratoire sont *neutres*, c'est-à-dire de charge totale nulle, ce qui explique le fait que cette force nous soit moins familière que la force gravifique.



TESLA Nikola  
Physicien américain  
d'origine serbe  
(1856-1943)

### 12.2.3 Forces magnétiques et illustration

La force exercée sur une particule chargée, de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , par un **champ magnétique**  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ , créé par exemple par des courants, est

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (12.12)$$

Dans le système international, l'unité de  $\mathbf{B}$  est le Tesla et  $1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$ .

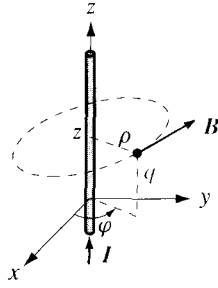
#### Illustration

Étudions le mouvement d'une particule de charge  $q$  positive soumise à l'action du champ  $\mathbf{B}$  créé par un fil rectiligne, parcouru par un courant d'intensité  $I$  constant (fig. 12.4), sachant que

$$\text{Champ magnétique} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{\rho} \mathbf{e}_\varphi, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = \frac{\mu_0}{2\pi} I \\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N s}^2 \text{ C}^{-2}. \end{cases} \quad (12.13)$$

Le système est holonôme à trois degrés de liberté. De par la symétrie du problème, on choisit les coordonnées cylindriques de la particule  $(\rho, \varphi, z)$ .





**Fig. 12.4** Champ magnétique créé par un courant dans un fil.

En exprimant l'équation de Newton

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (12.14)$$

en coordonnées cylindriques, on a

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{qA}{m} \frac{\dot{z}}{\rho} \end{cases} \quad (12.15)$$

$$\begin{cases} \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (12.16) \quad \text{Équations du mouvement}$$

$$\begin{cases} \ddot{z} = \frac{qA}{m} \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \end{cases} \quad (12.17)$$

De (12.16) on obtient *une première constante du mouvement*, soit

$$\rho^2\dot{\varphi} = C. \quad (12.18) \quad \text{Constantes du mouvement}$$

De (12.17) on obtient *une deuxième constante du mouvement*, soit

$$\dot{z} = \frac{qA}{m} \ln \frac{\rho}{R} \quad (12.19)$$

ou encore

$$\rho e^{-\frac{m}{qA}\dot{z}} = R. \quad (12.20)$$

Finalement, en introduisant (12.18) et (12.19) dans (12.15), on tire

$$\ddot{\rho} = \frac{C^2}{\rho^3} - \left(\frac{qA}{m}\right)^2 \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{\rho}{R}\right) \quad (12.21)$$

ce qui permet de trouver, par le lemme fondamental (§ 6.3.4), *une troisième constante du mouvement*

$$\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) = K \quad (12.22) \quad \text{Lemme fondamental}$$

avec

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{C^2}{\rho^2} + \left(\frac{qA}{m} \ln \frac{\rho}{R}\right)^2 = \frac{C^2}{\rho^2} + U(\rho), \quad (12.23)$$

$$U(\rho) = \left( \frac{qA}{m} \ln \frac{\rho}{R} \right)^2.$$

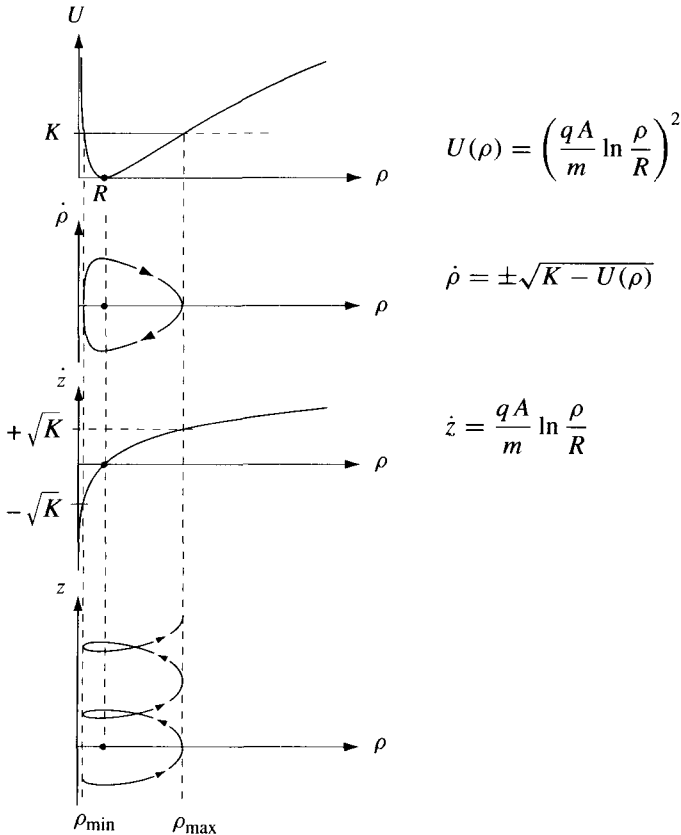
En conclusion, nous avons obtenu trois constantes du mouvement pour un système à trois degrés de liberté : le système est intégrable.

### Analyse qualitative du mouvement ( $C = 0$ , fig. 12.5)

$$C = 0$$

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho)$$

Nous allons considérer uniquement le cas  $C = 0$ , c'est-à-dire  $\dot{\varphi}_0 = 0$  (la vitesse initiale  $\mathbf{v}_0$  est dans le plan contenant le fil). Dans ce cas,  $\varphi(t) = \varphi_0$  et le mouvement de la particule s'effectue dans le plan défini par le fil et la position initiale. La figure 12.5 montre que si  $\mathbf{v}_0 \neq 0$ , la distance au fil varie entre  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$  ; d'autre part, de (12.19), on voit que la particule se déplace vers le haut ( $\dot{z} > 0$ ) lorsque  $\rho > R = \rho_0 \exp(-(m/(qA))\dot{z}_0)$ , vers le bas ( $\dot{z} < 0$ ) lorsque  $\rho < R$ .



**Fig. 12.5** Orbites et trajectoires pour  $K = 0$  (équilibre) et  $K > 0$  dans le cas  $C = 0$  et  $R$  fixé.

Finalement, de (12.19) et (12.22), on obtient :

$$\frac{dz}{d\rho} = \frac{\dot{z}}{\dot{\rho}} = \pm \frac{qA}{m} \frac{\ln(\rho/R)}{\sqrt{K - U(\rho)}}$$

et il est facile de vérifier qu'il y a un « mouvement de dérive » vers le haut, c'est-à-dire que  $z(\rho_{\min})$  augmente :

$$\Delta z = 2 \frac{qA}{m} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho \frac{\ln(\rho/R)}{\sqrt{K - U(\rho)}} > 0.$$

### Petits mouvements autour de l'état d'équilibre ( $\rho = R, \dot{\rho} = 0$ )

En linéarisant (12.19) et (12.21) avec  $C = 0$  autour de l'état d'équilibre, on obtient :

$$\ddot{\rho} = - \left( \frac{qA}{m} \right)^2 \frac{1}{R^2} (\rho - R) \quad (12.24)$$

$$\dot{z} = \left( \frac{qA}{m} \right) \frac{1}{R} (\rho - R) \quad (12.25)$$

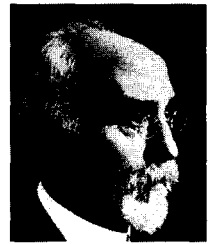
ce qui donne par intégration

$$\begin{cases} \rho(t) = R + C_1 \cos(\Omega t + \delta) \\ z(t) = C_1 \sin(\Omega t + \delta) + C_2 \end{cases}$$

où

$$\Omega = \frac{qA}{mR} = \frac{q}{m} B(R) \quad (12.26)$$

Le mouvement est donc circulaire uniforme de centre ( $\rho = R, z = C_2$ ), de vitesse angulaire  $\Omega$  et de rayon  $C_1 = v_0/\Omega$  : les petits mouvements sont identiques au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  constant, égal à  $B(R)\mathbf{e}_\varphi$  (§ 12.2.4).



LORENTZ Hendrik  
Antoon  
Physicien néerlandais  
(1853-1928)  
Prix Nobel en 1902  
avec Zeeman

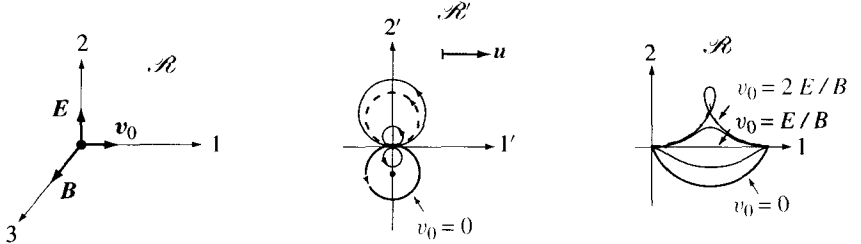
### 12.2.4 Force de Lorentz et illustration

La force exercée sur une particule chargée, de charge  $q$  et de vitesse  $\mathbf{v}$ , par un champ électromagnétique ( $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ ) est appelée **force de Lorentz** ; elle a pour expression

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (12.27)$$

### Illustration

Soit  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  un repère orthonormé lié au référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}$ . Considérons l'évolution d'un électron (charge  $q = -e$ ), de vitesse initiale  $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_1$ , soumis à l'action des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  constants où  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$ .



**Fig. 12.6** Mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique ;  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  est un repère orthonormé.

Pour résoudre l'équation de Newton

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (12.28)$$

on considère le référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation de vitesse  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$  constante. Les formules de transformation  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}'$ , impliquent

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{q}{m}((E - uB)\mathbf{e}_2 + \mathbf{v}' \wedge \mathbf{B}). \quad (12.29)$$

Par conséquent, en prenant

$$\mathbf{u} = \frac{E}{B}\mathbf{e}_1 \quad (12.30)$$

Équation du mouvement dans  $\mathcal{R}'$  nous sommes conduits à résoudre

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{q}{m}\mathbf{v}' \wedge \mathbf{B} \quad (12.31)$$

avec les données

$$\mathbf{v}'(0) = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\mathbf{e}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = B\mathbf{e}_3. \quad (12.32)$$

L'équation (12.31) est l'équation du mouvement d'un électron soumis au seul champ magnétique  $\mathbf{B}$  : par un choix judicieux du référentiel nous avons éliminé le champ électrique.

Solution de (12.31) Pour résoudre (12.31), on remarquera pour commencer que  $\dot{\mathbf{v}}' \cdot \mathbf{B} = 0$ , ce qui implique  $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{B} = \text{cste} = \mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{B} = 0$ , en vertu de (12.32), c'est-à-dire que le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . Par ailleurs, en

projetant (12.31) sur les axes 1 et 2 et en dérivant ces équations par rapport au temps, on obtient successivement :

$$\begin{cases} \dot{v}'_1 = +\omega v'_2 \\ \dot{v}'_2 = -\omega v'_1 \end{cases} \quad (12.33)$$

où

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (\text{négatif dans notre exemple})$$

est appelé **pulsation cyclotron**.

Puis en dérivant les équations (12.33) par rapport au temps,

$$\begin{cases} \ddot{v}'_1 = -(\omega)^2 v'_1 & \text{avec } v'_1(0) = v_0 - \frac{E}{B} \\ \ddot{v}'_2 = -(\omega)^2 v'_2 & \text{avec } v'_2(0) = 0 \end{cases}$$

et de (12.33)

$$\dot{v}'_1(0) = 0, \quad \dot{v}'_2(0) = -\omega v'_1(0),$$

ce qui donne par intégration

$$\begin{cases} v'_1(t) = v'_1(0) \cos(\omega t) \\ v'_2(t) = -v'_1(0) \sin(\omega t). \end{cases}$$

En choisissant l'origine des axes telle que  $x'_0 = 0$ , on obtient finalement l'évolution par rapport à  $\mathcal{R}'$

$$\begin{cases} x'_1(t) = \frac{1}{\omega} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) \sin(\omega t) \\ x'_2(t) = -\frac{1}{\omega} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right) (1 - \cos(\omega t)). \end{cases} \quad (12.34)$$

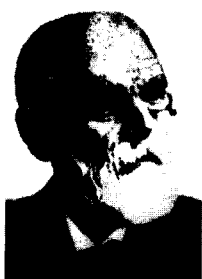
En conclusion, par rapport à  $\mathcal{R}'$ , le mouvement est circulaire uniforme

$$\text{de rayon } R = \frac{m}{eB} \left| v_0 - \frac{E}{B} \right|.$$

Par rapport à  $\mathcal{R}$ , le mouvement de l'électron est celui d'un point situé à la distance  $R$  du centre d'une roue (de rayon  $R_1 = u/|\omega| = mE/(eB^2)$ ), qui roule sans glisser à la vitesse  $\mathbf{u} = (E/B)\mathbf{e}_1$ . Si  $v_0 = E/B$ , le mouvement est rectiligne ; si  $v_0 = 0$  ou  $2E/B$ , la trajectoire est une cycloïde (fig. 12.6).

12.2.5 Forces intermoléculaires (ou forces de Van der Waals)

La force entre *deux molécules neutres*, sans moment dipolaire, est une force centrale, répulsive à très courte distance, qui s'annule pour une distance de l'ordre de 1 Å et qui est attractive pour des distances supérieures, mais tend très rapidement vers zéro avec la distance. Cette force, appelée *force de Van der Waals*, résulte des forces électriques entre noyaux et électrons. On utilise souvent le *modèle de Lennard-Jones* dans lequel la force s'exprime sous la forme

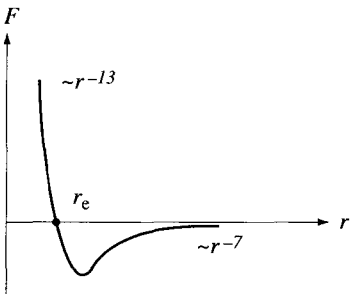


VAN DER WAALS  
Physicien hollandais  
(1837-1923)  
Prix Nobel 1910

$$F_{A \rightarrow B} = 6 \left[ \frac{2a}{r^{13}} - \frac{b}{r^7} \right] \widehat{AB} \quad , \quad r = |AB| \tag{12.35}$$

où *a* et *b* sont des constantes positives (fig. 12.7). C'est un modèle et non une loi fondamentale.

	$\sigma$ [Å]	$\varepsilon$ [eV]
Hydrogène (H <sub>2</sub> )	2,9	$1,3 \cdot 10^{-2}$
Oxygène (O <sub>2</sub> )	3,4	$4,0 \cdot 10^{-2}$
CO <sub>2</sub>	3,7	$9,0 \cdot 10^{-2}$
Air	3,5	$3,5 \cdot 10^{-2}$



LENNARD-JONES  
(Sir John Edward)  
chimiste anglais  
1894-1954

$$F(r) = \frac{6\varepsilon}{r} \left[ 2 \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]. \text{ Position d'équilibre, } r_e = 2^{1/6} \sigma.$$

Fig. 12.7 Modèle de Lennard-Jones.

Attention ! Les valeurs indiquées sur la figure 12.7 correspondent aux forces entre deux molécules. Les forces interatomiques, qui assurent la stabilité de la molécule, sont beaucoup plus élevées. (Dans le cas de la molécule H<sub>2</sub>, la distance entre deux atomes est de l'ordre de 0,74 Å, alors que  $r_e \cong 3,2$  Å.)

## 12.3 FORCES DE FROTTEMENT VISQUEUX

### 12.3.1 Définition

Le frottement visqueux représente l'action exercée par un fluide sur un solide, action qui s'oppose au mouvement du solide par rapport au fluide.

Considérons un *solide en translation* de vitesse  $\mathbf{v}$  dans un *fluide immobile* et soit  $\mathbf{F}$  la résultante des forces exercées par le fluide sur le solide, associées au mouvement du solide (la force d'Archimède, force de pression exercée par le fluide sur le solide immobile, n'est pas incluse dans  $\mathbf{F}$ ).

On appelle **force de frottement**  $\mathbf{F}^{\text{fr}}$  la composante de  $\mathbf{F}$  selon  $\mathbf{v}$  :

Solide en translation

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -f(v)\hat{\mathbf{v}}, \quad \text{avec } f(v) \geq 0.$$

Si  $f(v) = 0$ , on dit qu'il n'y a pas de frottement.

On peut mesurer la force de frottement en mesurant la force extérieure qu'il faut appliquer sur le solide pour maintenir  $\mathbf{v}$  constant, la condition  $\mathbf{a} = 0$  entraînant  $\mathbf{F}^{\text{ext}} = -\mathbf{F}^{\text{fr}}$  (fig. 12.8 a). Une autre méthode consiste à mesurer la force nécessaire pour maintenir le solide immobile dans le fluide animé d'une vitesse  $\mathbf{v}_\Pi = -\mathbf{v}$  à l'infini, ce qui correspond à un changement de référentiel ; c'est la méthode utilisée dans les souffleries (fig 12.8 b).

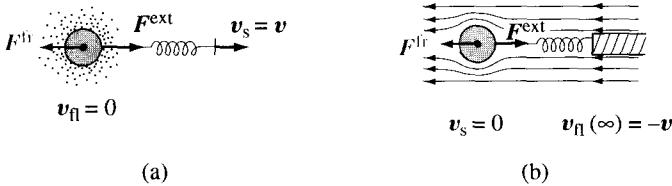


Fig. 12.8 Mesure de la force de frottement.

### 12.3.2 Lois phénoménologiques du frottement visqueux

L'observation conduit à la **loi de Stokes** :

A *très basses vitesses* la force de frottement est proportionnelle à la vitesse relative du solide par rapport au fluide :

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -k \eta \mathbf{v} \quad \text{avec } \mathbf{v} = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_\Pi \quad (12.36)$$

où  $k$  est un coefficient qui dépend de la géométrie et a la dimension d'une longueur ; dans le cas d'une sphère de rayon  $R$ ,  $k = 6\pi R$ . Le **coefficient de viscosité**  $\eta$  est une grandeur caractéristique du fluide, de dimension  $[F][T][L]^{-2}$ , qui dépend de la température.

On remarquera que le cas « très basses vitesses » correspond à un écoulement très régulier du fluide, appelé **régime laminaire**.



STOKES  
(Sir George Gabriel)  
Physicien et  
mathématicien irlandais  
(1819-1903)

Coefficient de  
viscosité

Dans le système SI

$$1\left[\eta\right]=1\,\mathrm{N\,m^{-2}\,s}=10\,\mathrm{poises}=1\,\mathrm{d\acute{e}capoise}.\tag{12.37}$$

Le tableau 12.9 donne les coefficients de viscosité de quelques fluides. On observera que le coefficient  $\eta$  augmente avec la température pour les gaz, mais au contraire diminue fortement pour les liquides.

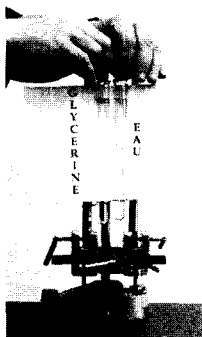


Tableau 12.9 Coefficient de viscosité  $\eta$  en  $\mathrm{Nm^{-2}s}$ .





Liquide		Gaz	
Eau 0°C	$1,80\cdot 10^{-3}$	Air 0°C	$1,70\cdot 10^{-5}$
Eau 20°C	$1,00\cdot 10^{-3}$	Air 20°C	$1,81\cdot 10^{-5}$
Eau 40°C	$0,66\cdot 10^{-3}$	Air 40°C	$1,91\cdot 10^{-5}$
Glycérine	$1490,00\cdot 10^{-3}$	H <sub>2</sub>	$0,93\cdot 10^{-5}$
Huile	$10,00\cdot 10^{-3}$	Ammoniaque	$0,97\cdot 10^{-5}$
Alcool	$0,37\cdot 10^{-3}$	CO <sub>2</sub>	$1,46\cdot 10^{-5}$

A des vitesses plus « élevées », correspondant à un régime d’écoulement turbulent du fluide, mais inférieures à la vitesse du son dans le fluide ( $v_{\text{air}}^{\text{son}}=330\,\text{m/s}$ ,  $v_{\text{eau}}^{\text{son}}=1400\,\text{m/s}$ ), la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\boldsymbol{F}^{\text{fr}}=-C_x\,\frac{1}{2}\,\rho_{\text{fl}}\,v^2\,S\,\hat{\boldsymbol{v}}\tag{12.38}$$

où  $S$  est l’aire de la projection du solide sur un plan perpendiculaire à  $\boldsymbol{v}$  ( $=\boldsymbol{v}_{\text{S}}-\boldsymbol{v}_{\text{fl}}$ ) et  $\rho_{\text{fl}}$  est la masse spécifique du fluide.

Le coefficient  $C_x$ , appelé *coefficient de traînée*, est un nombre sans dimension qui dépend de la forme du solide. Donnons-en quelques valeurs typiques :

- 
  - Disque se déplaçant perpendiculairement à son plan  $C_x\cong 1,32$
- 
  - Sphère  $C_x\cong 0,45$
- 
  - Demi-sphère et cône  $C_x\cong 0,04$
- 
  - Aile d’avion  $C_x\cong 0,03$

Propriété de similitude

Il suit de l’analyse dimensionnelle (§ 2.5.2) que la force de frottement visqueux s’exprime par une relation générale de la forme

$$\boldsymbol{F}=-f(v)\,\hat{\boldsymbol{v}}=-\frac{1}{2}\rho_{\text{fl}}\,v^2\,S\,C_x(R_e)\,\hat{\boldsymbol{v}}\tag{12.39}$$

$$\text{où}\quad R_e=\frac{\rho_{\text{fl}}d}{\eta}v\tag{12.40}$$

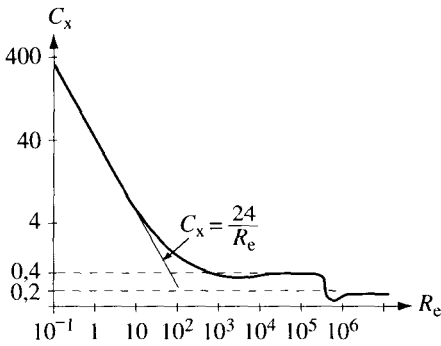
est un nombre sans dimension, appelé *nombre de Reynolds*, qui caractérise les propriétés de l’écoulement du fluide ;  $d$  est une longueur caractéristique du solide (par exemple  $d=2R$  pour une sphère de rayon  $R$ ).



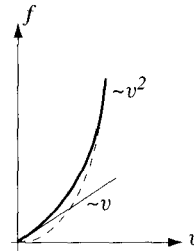
La forme typique de la fonction  $C_x(R_e)$  est représentée sur la figure 12.10. A très basses vitesses  $C_x(R_e)$  est inversement proportionnelle à  $R_e$  (c'est la loi de Stokes); au contraire, à des vitesses élevées,  $C_x(R_e)$  présente des paliers. On voit que le domaine de « basses vitesses » correspond à des nombres de Reynolds inférieurs à 10, celui des « hautes vitesses » correspond à des nombres de Reynolds supérieurs à 2400.

Ainsi pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $5 \cdot 10^5$ , la force de frottement visqueux sur une sphère de rayon  $R$  est

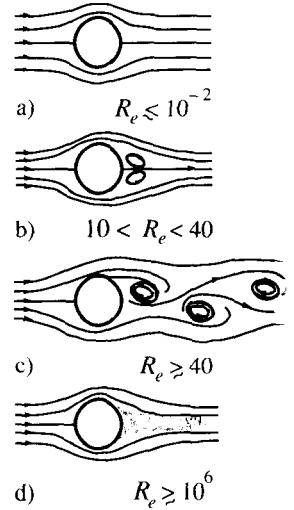
$$f(v) = 6\pi R\eta v + \frac{1}{2}(\pi R^2) 0,45 \rho_{\text{fl}} v^2. \quad (12.41)$$



(a)



(b)



Loi  
phénoménologique  
du frottement

**Fig. 12.10** (a) Coefficient de traînée pour une sphère ; (b) force de frottement visqueux.

Très souvent on pose

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda v^n \hat{\mathbf{v}} \quad (12.42)$$

où le **coefficient de frottement**  $\lambda$  est un coefficient positif (qui dépend de la température) et l'exposant  $n$  varie avec la vitesse  $v$ , mais peut être considéré constant dans certains domaines de vitesse (fig. 12.10).

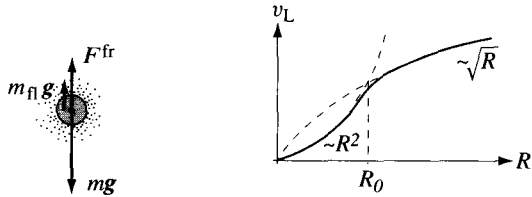
### 12.3.3 Vitesse limite

Considérons un solide soumis à une *force extérieure constante* (force gravifique, moteur d'un bateau ou d'une voiture ...). Le mouvement du solide sera accéléré jusqu'à ce que la vitesse atteigne une **vitesse limite**  $v_L$ , vitesse pour laquelle  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mathbf{F}^{\text{ext}}$ , puis il sera uniforme. Pour un frottement de la forme (12.42), on obtient

$$v_L^n = \frac{F^{\text{ext}}}{\lambda}. \quad (12.43) \quad \text{Vitesse limite}$$

**Exemple 1. Vitesse limite d'un corps en chute libre**

Cherchons la vitesse limite d'une sphère homogène de masse spécifique  $\rho$  et de rayon  $R$  qui tombe dans un fluide de masse spécifique  $\rho_{\text{fl}}$  et de viscosité  $\eta$  (fig. 12.11).



**Fig. 12.11** Vitesse limite pour une sphère de rayon  $R$ .

En tenant compte de la force d'Archimède, on a

Force d'Archimède  $F^{\text{ext}} = (\rho - \rho_{\text{fl}}) \frac{4}{3} \pi R^3 g.$

Par conséquent, la vitesse limite  $v_L$  sera obtenue à partir de (12.41) et de la condition  $F^{\text{fr}} + F^{\text{ext}} = 0$ . On obtient

$$6\pi R\eta v_L + \frac{1}{2}\pi R^2 0,45 \rho_{\text{fl}} v_L^2 = (\rho - \rho_{\text{fl}}) \frac{4}{3} \pi R^3 g. \tag{12.44}$$

Prenons par exemple un grêlon de 1 cm de diamètre qui tombe dans l'air :

C'est le terme en  $v^2$  qui détermine la vitesse limite

$$\rho = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 ; \quad \rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3 ; \quad \eta_{\text{air}} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Nm}^{-2}\text{s}.$$

L'équation (12.44) devient  $v_L^2 + 0,08v_L - 2,35 \cdot 10^2 = 0$  d'où  $v_L = 15 \text{ m/s}$ .

**Exemple 2. Frottement linéaire en  $v$**

$F^{\text{ext}} = \text{cste}$  Étudions l'évolution d'un corps de masse  $m$  se déplaçant dans un fluide sous l'action d'une *force extérieure constante*, en supposant que la force de frottement est linéaire en la vitesse.

De  $m\dot{v} = F^{\text{ext}} - \lambda v$  nous voyons que

$$m \frac{d}{dt} \left( e^{\frac{\lambda}{m}t} v \right) = e^{\frac{\lambda}{m}t} F^{\text{ext}}. \tag{12.45}$$

Par intégration de (12.45) de 0 à  $t$ , on a

$$e^{\frac{\lambda}{m}t} v - v_0 = \frac{1}{\lambda} \left( e^{\frac{\lambda}{m}t} - 1 \right) F^{\text{ext}}$$

ce que l'on écrit sous la forme

$$v(t) = v_L + (v_0 - v_L) e^{-\frac{\lambda}{m}t} \tag{12.46}$$

où  $v_L = \frac{1}{\lambda} F^{\text{ext}}$  est la vitesse limite.

Il faut ainsi un temps infini pour atteindre la vitesse limite, mais on s'en approche exponentiellement vite ; par exemple, pour  $t = 4m/\lambda$ , la vitesse ne diffère de la vitesse limite que de quelques pour cent. Le facteur  $m/\lambda$  qui apparaît dans (12.46) est appelé **constante de temps**.

La vitesse limite s'approche exponentiellement

Finalement, en intégrant (12.46), on obtient l'évolution

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_L t + \frac{m}{\lambda} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_L) \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t} \right). \quad (12.47)$$

Dans le cas particulier où  $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$ , on a  $\mathbf{v}_L = 0$  et

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 e^{-\frac{\lambda}{m} t}$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \frac{m}{\lambda} \mathbf{v}_0 \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t} \right) = \mathbf{x}_0 + \frac{m}{\lambda} (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}(t)).$$

Si  $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$ , les orbites dans l'espace de phase  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  sont des droites. Le corps s'arrête après avoir parcouru une distance finie égale à  $|\mathbf{v}_0| m/\lambda$ , mais il faut un temps infini (fig. 12.14).

Frottements linéaires en  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{F}^{\text{ext}} = 0$

### Exemple 3. Frottement quadratique en $\mathbf{v}$

Étudions le mouvement d'un corps de masse  $m$  se déplaçant dans un fluide sous l'action d'une *force extérieure constante*, en supposant que la force de frottement est quadratique en la vitesse. On prendra la condition initiale  $\mathbf{v}_0$  parallèle à  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  de sorte que le mouvement sera rectiligne (fig. 12.12).

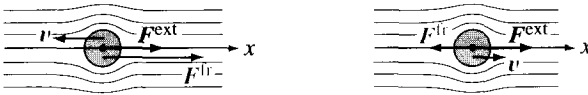


Fig. 12.12 Mouvement rectiligne d'un solide dans un fluide.

Prenons l'axe des  $x$  dans la direction de  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  ; on a

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \text{cste}$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - (\text{sign } v) \lambda v^2 \mathbf{e}_x \quad \text{où} \quad \text{sign } v = \frac{v}{|v|} = \pm 1$$

soit

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\lambda}{m} (v_L^2 - (\text{sign } v) v^2) \quad (12.48)$$

avec  $v_L^2 = \frac{F^{\text{ext}}}{\lambda}$  ( $v_L$  = vitesse limite). En intégrant (12.48) de  $t = 0$  à  $t$ , on a

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - (\text{sign } v) v^2} = \frac{\lambda}{m} t. \quad (12.49)$$

- Si  $v(0) = v_0$  est négatif, alors, aussi longtemps que  $v(t)$  est négatif, l'intégration de (12.49) donne (tableau 12.13)

$$v(t) = v_L \tan \left( v_L \frac{\lambda}{m} t - \alpha \right), \quad \tan \alpha = \frac{|v_0|}{v_L}. \quad (12.50)$$

**Tableau 12.13**

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right $
$\int \frac{x dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$	$\int \frac{x dx}{a^2 - x^2} = -\frac{1}{2} \ln  a^2 - x^2 $

En outre

$$\dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$$

et de (12.48)  $\dot{v} = \frac{\lambda}{m} (v_L^2 + v^2)$

d'où  $\frac{dv}{dx} v = \frac{\lambda}{m} (v_L^2 + v^2)$

ce qui implique  $\int_{v_0}^v \frac{v dv}{v_L^2 + v^2} = \frac{\lambda}{m} (x - x_0).$

L'intégration (tableau 12.13) donne l'équation des orbites pour  $v$  négatif

$$v^2 + v_L^2 = (v_0^2 + v_L^2) e^{2\frac{\lambda}{m}(x - x_0)}, \quad x \leq x_0 \quad (\text{fig 12.14 a}). \quad (12.51)$$

De (12.50), la vitesse s'annule et change de signe à l'instant

$$t_1 = \frac{m}{\lambda v_L} \arctan \frac{|v_0|}{v_L} \quad (12.52)$$

et la distance d'arrêt est

$$D = \frac{m}{2\lambda} \ln \left( 1 + \frac{v_0^2}{v_L^2} \right). \quad (12.53)$$

- Pour  $t$  supérieur à  $t_1$ ,  $v$  est positif et l'intégration de (12.49) donne

$$\ln \left( \frac{v_L + v}{v_L - v} \right) = 2v_L \frac{\lambda}{m} (t - t_1). \quad (12.54)$$

Finalement, comme dans le cas  $v < 0$ , on a

$$\int_0^v \frac{v dv}{v_L^2 - v^2} = \frac{\lambda}{m} (x - x_1)$$

ce qui donne l'équation des orbites pour  $v$  positif (fig. 12.14 b)

$$v^2 = v_L^2 \left( 1 - e^{-2\frac{\lambda}{m}(x - x_1)} \right). \quad (12.55)$$

Dans le cas particulier où  $F^{\text{ext}} = 0$  et  $v_0$  est positif, nous avons

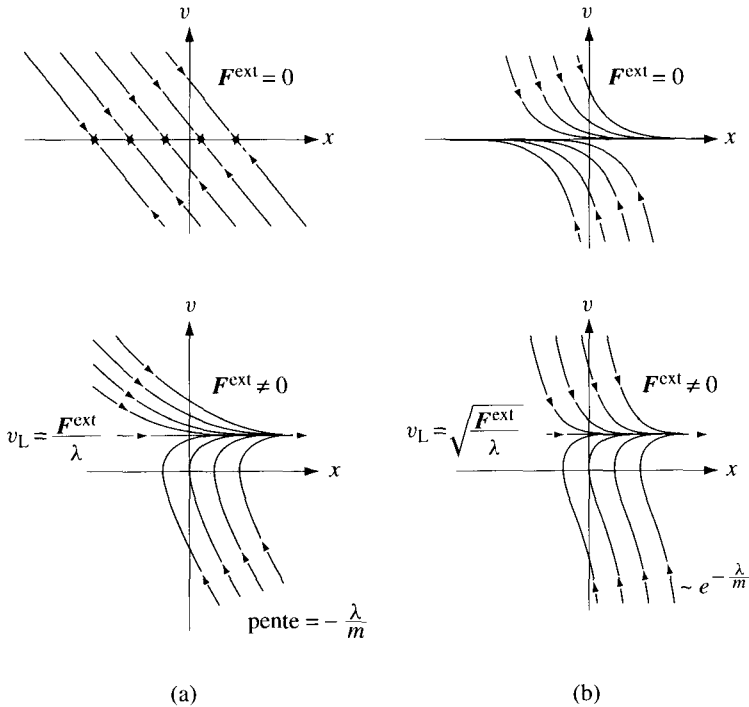
$$F^{\text{ext}} = 0$$

$$m\dot{v} = -\lambda v^2 \quad \text{et} \quad m \frac{dv}{dx} = -\lambda v.$$

Par intégration, on obtient

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + \frac{\lambda}{m} t \quad \text{et} \quad v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}(x - x_0)}. \quad (12.56)$$

Si  $F^{\text{ext}} = 0$ , la distance et le temps de freinage sont tous deux infinis (mais la loi  $F^{\text{fr}} \sim v^2$  ne sera plus applicable à basse vitesse).



**Fig. 12.14** Orbites d'un corps soumis à une force extérieure constante et à une force de frottement : (a)  $F^{\text{fr}} = -\lambda v$  ; (b)  $F^{\text{fr}} = -\lambda v^2 \hat{v}$ .

### 12.3.4 Remarques

• La loi de Stokes peut être établie à partir des équations du mouvement des fluides visqueux incompressibles dans le cas où les vitesses sont suffisamment petites. Pour des gaz à très basse pression, on est obligé d'aller au-delà de la théorie des milieux continus et il faut aborder le problème par la mécanique statistique. Dans ce cas, on obtient une correction à la loi de Stokes qui devient, pour une sphère de rayon  $R$ ,

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\frac{6\pi R}{1 + \alpha\ell/R} \eta \mathbf{v} \quad (12.57)$$

où  $\ell$  est le libre parcours moyen des molécules de gaz et  $\alpha$  un coefficient numérique dont il est difficile de trouver une interprétation physique. (Cette correction de Cunningham fut importante pour la détermination de la charge électrique par la méthode de Millikan.)

- Comme nous l'avons déjà remarqué (§ 10.5.5), contrairement à l'expérience du tube de Newton (§ 6.2.1), en présence de frottement le mouvement d'un corps en chute libre dépend de la masse, plus précisément du rapport  $\lambda/m$ .
- Newton (1686) a étudié les cas où la force de frottement est de la forme  $\lambda v$ ,  $\lambda v^2$  et  $\lambda_1 v + \lambda_2 v^2$ , Bernouilli (1711), les cas  $\lambda v^n$  avec  $n$  entier, et Poisson (1806) les cas singuliers tels que  $\sqrt{v}$ .

### 12.3.5 Force de portance

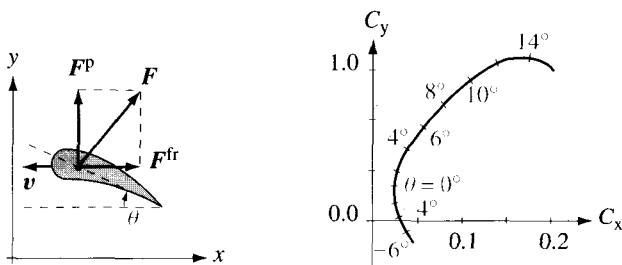
De façon générale, la force  $\mathbf{F}$  exercée par le fluide sur un solide en translation est de la forme

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho_{\text{fl}} v^2 S \mathbf{C}(\theta, R_e) \quad (12.58)$$

Portance

La composante de  $\mathbf{F}$  parallèle à la vitesse est la **force de frottement** dont nous avons parlé ; la composante de  $\mathbf{F}$  perpendiculaire à la vitesse est la **force de portance** et le coefficient  $C_y$  est appelé **coefficient de portance**.

L'importance relative de ces deux composantes dépend de la forme et de l'angle d'attaque  $\theta$  (fig. 12.15). Si le solide possède deux plans de symétrie parallèles à la vitesse – par exemple dans le cas d'une sphère – la force de portance est nulle pour des raisons de symétrie.



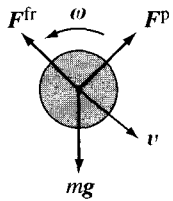
**Fig. 12.15** Coefficients de traînée  $C_x$  et de portance  $C_y$  d'une aile d'avion pour différentes valeurs de l'angle d'attaque  $\theta$ .

12.3.6 Solide en rotation

De façon analogue, un solide en rotation dans un fluide subit de la part de celui-ci un *couple de frottement* qui, pour de petites vitesses  $\omega$ , est linéaire en  $\omega$ . Dans le cas d'une sphère nous avons

$$M^{fr} = -8\pi R^3 \eta \omega. \tag{12.59}$$

Si la sphère est animée d'un mouvement de rotation  $\omega$  et d'un mouvement de translation  $v$  perpendiculaire à  $\omega$ , l'expérience montre qu'il y a une force de portance dans la direction  $\omega \wedge v$  : c'est l'*effet Magnus*, responsable par exemple du lift des balles de tennis (fig. 12.16). (Alors que la force de portance est nulle sur une sphère en translation sans rotation.)



**Fig. 12.16** Effet Magnus.



MAGNUS  
Henri-Gustave  
Chimiste allemand  
(1802-1870)

Effet Magnus

Brisure de symétrie  
par rotation de la  
sphère

12.4 FORCES DE FROTTEMENT SEC

12.4.1 Définition

Le frottement sec représente l'action d'une surface rigide sur un solide, action qui s'oppose au mouvement du solide par rapport à la surface.

Soit  $F$  et  $M_A$  les éléments de réduction du torseur des forces exercées par la surface sur le solide (fig. 12.17). Si la résultante  $F$  est normale à la surface de contact nous disons qu'il n'y a pas de frottement.

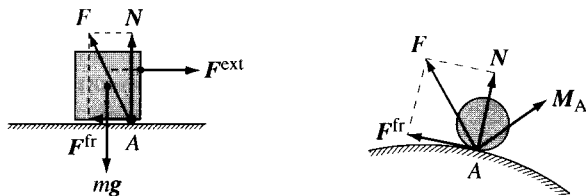


Fig. 12.17 Forces et moments exercés sur un solide situé sur une surface rigide.

Frottement sec

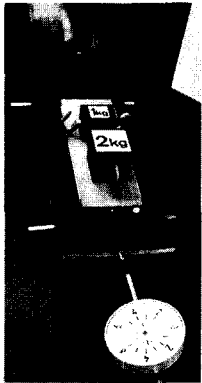
Résistance  
au pivotement

Résistance  
au roulement

La composante de  $F$  perpendiculaire à la surface de contact est appelée **réaction normale  $N$**  ; c'est une force de liaison dirigée vers l'extérieur de la surface. La composante de  $F$  dans le plan tangent au point de contact est appelée **force de frottement sec**.

Les composantes du moment  $M_A$  perpendiculaire et parallèle au plan tangent sont appelées respectivement **couple de résistance au pivotement  $M_A^{(n)}$**  et **couple de résistance au roulement  $M_A^{(t)}$** .

Nous pouvons mesurer la force de frottement comme nous l'avons fait dans le cas du frottement visqueux en mesurant la force qu'il faut appliquer pour maintenir la vitesse  $v$  constante ; nous aurons alors  $F^{fr} = -F^{ext}$  (fig. 12.18). Cependant, l'expérience montre qu'il faut traiter séparément les cas  $v \neq 0$  et  $v = 0$ .



Mesure de la force  
de frottement

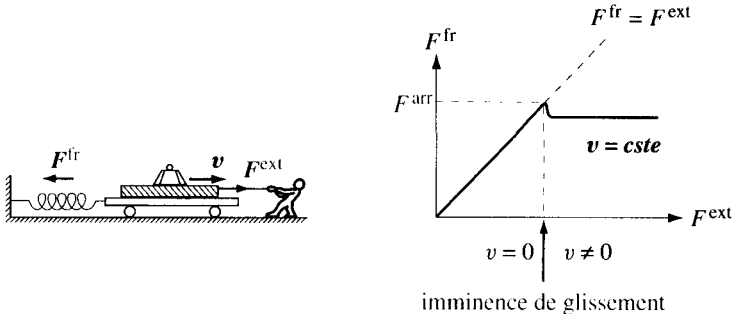


Fig. 12.18 Mesure de la force de frottement sec.

12.4.2 Cas du glissement  $v \neq 0$

Loi dynamique

L'observation conduit à la **loi de Coulomb dynamique** des frottements secs

$$F^{fr} = -\mu_c |N| \hat{v} \quad \text{si } v \neq 0 \tag{12.60}$$

Coefficient de  
frottement cinétique

où  $v$  est la vitesse relative du point de contact du solide par rapport à la surface ;  $\mu_c$  est un coefficient positif, appelé **coefficient de frottement cinétique**, qui dépend de la température, de la nature, et de l'état des surfaces de contact (rugueux ou poli, sec ou lubrifié).



En première approximation, le coefficient de frottement est indépendant de la vitesse (pour autant qu'elle soit non nulle) et de l'aire de la surface de contact (pour autant qu'elle soit plane). Remarquons que la loi de Coulomb correspond à  $n = 0$  dans la formule (12.42).

L'expérience montre que  $\mu_c$  varie entre 0,01 et 100 (tab. 12.19, ... sans prendre trop au sérieux les valeurs indiquées).

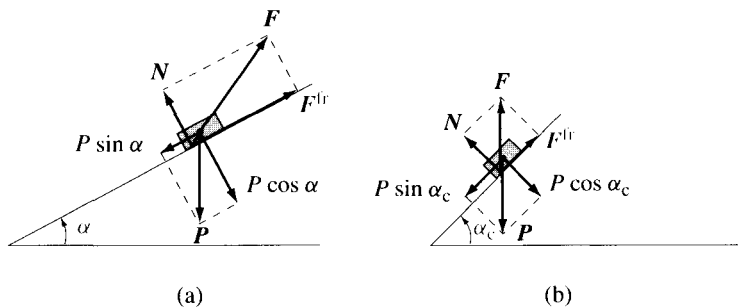
**Tableau 12.19** Coefficients de frottement cinétique et statique.

Corps en contact	$\mu_c$	$\mu_s$
Acier sur acier, dur, sec	0,42	0,78
Acier sur acier, dur, gras	0,05	0,10
Acier sur acier, surfaces polies	100	100
Bois sur bois, sec	0,30	0,50
Métal sur glace	0,01	0,03
Pneu sur route sèche	0,6	0,8
Pneu sur route mouillée	0,1	0,15
Teflon sur teflon	0,04	0,04

En présence d'un lubrifiant, le frottement peut à nouveau devenir du type visqueux, c'est-à-dire proportionnel à la vitesse.

### Mesure de $\mu_c$

Lançons un corps sur un plan incliné et cherchons pour quelle inclinaison  $\alpha_c$  le corps garde un mouvement uniforme (fig. 12.20).



**Fig. 12.20** (a)  $\alpha < \alpha_c$ ; (b)  $\alpha = \alpha_c$ .

Pour un mouvement uniforme, la résultante des forces agissant sur le corps est nulle, d'où :

$$\begin{cases} N = P \cos \alpha_c \\ F^{fr} = P \sin \alpha_c = N \tan \alpha_c \end{cases}$$

et

$$\mu_c = \tan \alpha_c. \quad (12.61)$$

L'angle  $\alpha_c$  est appelé **angle de frottement** (cinétique).

### 12.4.3 Cas statique $v = 0$

Observation Exerçons sur le corps immobile une force  $F^{\text{ext}}$ , parallèle à la surface, d'intensité croissante (fig. 12.18). L'expérience montre que tant que  $|F^{\text{ext}}|$  est inférieure à une valeur limite  $F_{\text{max}}^{\text{fr}}$ , appelée **force d'arrachement**, le corps reste immobile. Nous pouvons ainsi conclure que tant que  $|F^{\text{ext}}|$  est inférieure à  $F_{\text{max}}^{\text{fr}}$  la surface exerce sur le corps une force de frottement égale et opposée à  $F^{\text{ext}}$ . Dès que  $|F^{\text{ext}}|$  est supérieure à la force d'arrachement, le solide se met en mouvement et l'on observe que la force nécessaire pour maintenir la vitesse constante est constante, généralement inférieure à  $F_{\text{max}}^{\text{fr}}$ .

Loi statique Finalement, l'observation conduit à la **loi de Coulomb statique**

$$|F^{\text{fr}}| \leq F_{\text{max}}^{\text{fr}} = \mu_s |N| \quad \text{si } v_s = 0. \quad (12.62)$$

Coefficient de frottement statique Le **coefficient de frottement statique**  $\mu_s$  dépend de la nature et de l'état des surfaces de contact, mais ne dépend pas de l'aire de la surface de contact (pour autant qu'elle soit plane).

Comme on le voit sur le tableau 12.19, le coefficient statique est généralement supérieur au coefficient cinétique et la force de frottement diminue dès que le solide se met à glisser.

Mesure de  $\mu_s$  (fig. 12.21)

Posons un corps sur un plan incliné et augmentons l'angle d'inclinaison. Pour une certaine valeur  $\alpha_s$  le corps se met en mouvement. Pour tout angle  $\alpha$  inférieur à  $\alpha_s$ ,  $F^{\text{fr}} + N + P = 0$  et, comme précédemment, nous obtenons

$$\mu_s = \tan \alpha_s. \quad (12.63)$$

L'angle  $\alpha_s$  est appelé **angle de frottement statique**.

Mesure d' $\alpha_s$   
(imminence  
de glissement)

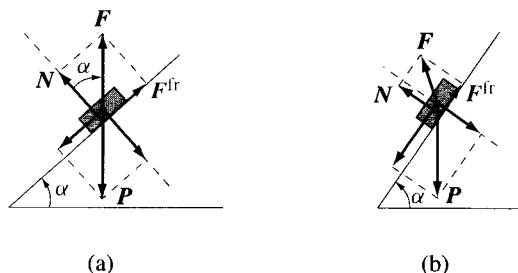


Fig. 12.21 (a)  $\alpha \leq \alpha_s$ ; (b)  $\alpha > \alpha_s$ .

### 12.4.4 Conclusion

Si le solide est immobile, la force  $\mathbf{F}$  exercée par la surface n'est pas univoquement définie mais le vecteur  $\mathbf{F}$  est nécessairement à l'intérieur d'un cône d'axe perpendiculaire à la surface et d'angle au sommet  $2\alpha_s$  (fig. 12.22). En effet, si le solide est immobile,  $|\mathbf{F}^{fr}| \leq \mu_s |N|$ , c'est-à-dire  $F \sin \alpha < \mu_s F \cos \alpha$ , soit  $\tan \alpha \leq \tan \alpha_s$ . Par conséquent, la force de frottement sec n'est pas une fonction de l'état du système.

Cône associé aux frottements secs

### 12.4.5 Remarque sur la résolution des problèmes

Dans les problèmes faisant intervenir les frottements secs, on procédera de la façon suivante : si à l'instant  $t_0$  il y a glissement du solide sur la surface, la force de frottement est connue, égale à  $-\mu_c |N| \hat{\mathbf{v}}$ . Si à  $t_0$ , il n'y a pas de glissement, la force de frottement est inconnue ; dans ce cas, on fera l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement pour  $t > t_0$  et on calculera la force de frottement. Si le résultat est inférieur à  $\mu_s |N|$ , l'hypothèse est justifiée et le système restera immobile ; au contraire, si le résultat est supérieur à  $\mu_s |N|$ , l'hypothèse n'est pas valable : il y aura glissement et la force de frottement sera égale à  $\mu_c |N|$  pour  $t > t_0$ .

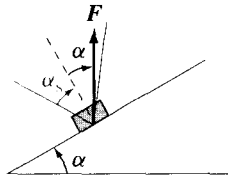
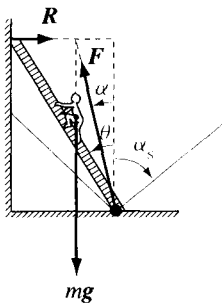
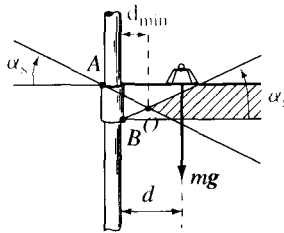


Fig. 12.22 Cône associé à la force de frottement statique.

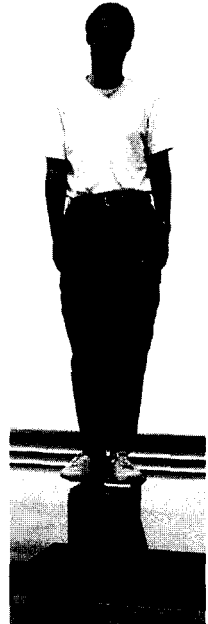


(a)



(b)

Fig. 12.23 Application des frottements statiques.



### Illustrations

- Considérons une échelle (de masse négligeable) appuyée contre un mur parfaitement lisse. Si l'angle  $\theta$  entre l'échelle et la verticale est inférieur à  $\alpha_s$ , le personnage pourra monter en haut de l'échelle quel que soit son poids, mais si  $\alpha_c < \theta \leq \alpha_s$ , il faudra faire attention à ce qu'il n'y ait pas de vibrations qui

amorcent le glissement (fig. 12.23 a). En effet, le système restera en équilibre si le torseur des forces exercées par le sol, le mur et la pesanteur est équivalent à zéro ; par ailleurs, un torseur de 3 forces est équivalent à zéro si et seulement si les forces sont concourantes et  $\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = 0$  ; par conséquent, la condition  $\alpha \leq \alpha_s$  implique  $\theta \leq \alpha_s$ .

- Considérons un système à rochet (fig. 12.23 b) et cherchons à quelle distance de l'axe il faut placer la masse pour que le système reste en équilibre. Les supports des trois forces  $F_A$ ,  $F_B$  et  $mg$  devant être concourants, la construction des cônes d'angle au sommet  $2\alpha_s$  montre que la distance  $d$  doit être supérieure à la distance de  $O$  à l'axe. Si cette condition est satisfaite le système restera en équilibre quel que soit le poids, mais attention aux vibrations. Pour que le système n'amorce pas une chute sous l'effet de vibrations, il faudra que  $d$  soit supérieure à la distance de  $O'$  à l'axe, où  $O'$  est défini à partir des cônes d'angle au sommet  $2\alpha_c$ .

#### 12.4.6 Remarques sur la loi de Coulomb

- Les propriétés des forces de frottement sec étaient déjà connues de Léonard de Vinci au XV<sup>e</sup> siècle, mais encore aujourd'hui des recherches sont effectuées pour essayer de comprendre l'origine physique de la loi de Coulomb.
- Le fait que la force de frottement ne dépende pas de l'aire de la surface de contact s'explique en partie en remarquant que les surfaces ne sont pas planes et la surface de contact véritable n'est pas la surface apparente (fig. 12.24).



**Fig. 12.24** Surfaces de contact véritable et apparente.

Les points de contact, soumis à une très grande pression, se déforment et la surface de contact « véritable » sera proportionnelle à la charge. La force de frottement, proportionnelle à la surface de contact « véritable », est ainsi proportionnelle à la charge.

La surface de contact « véritable » est très petite et, en général, elle est indépendante de la surface de contact apparente. Par exemple, pour l'acier, la surface de contact véritable est de l'ordre de  $10 \text{ mm}^2$  par charge de 1 kg. Au contraire, pour des substances comme le mica, qui peuvent être très lisses, les surfaces de contact véritables et apparentes sont du même ordre de grandeur et le comportement des forces de frottement est très différent.

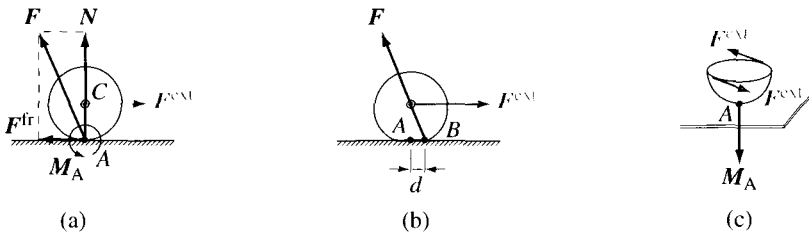
Le degré de rugosité des surfaces en contact modifie le coefficient  $\mu$  qui a tendance à décroître si la surface est moins rugueuse, mais peut devenir très élevé pour des surfaces extrêmement lisses. Par exemple,  $\mu_s \cong 1$  pour du verre sur du verre, mais si les surfaces de contact sont extrêmement lisses, le coefficient de frottement est si élevé qu'il n'est pas possible de faire glisser une plaque de verre sur une autre : elle se brise avant de glisser !

- Mentionnons finalement que la relation de proportionnalité entre  $F^{\text{fr}}$  et  $N$  peut être brisée pour des métaux qui sont légèrement oxydés.

En conclusion, la loi empirique des frottements secs est une bonne approximation..., mais elle n'est pas toujours applicable.

### 12.4.7 Résistance au roulement et au pivotement

L'expérience montre qu'il existe également un **couple de résistance au roulement et au pivotement** (fig. 12.25) : aussi longtemps que le moment extérieur est inférieur à une certaine valeur  $M_A^{\text{max}}$ , le solide reste immobile et la surface exerce un couple de frottement  $M_A = -M_A^{\text{ext}}$  ; par ailleurs, lorsque le solide est en rotation, il faut appliquer un couple extérieur pour maintenir  $\omega$  constant. De nouveau ces frottements sont dus à la déformation des surfaces en contact.



**Fig. 12.25** Moment de frottement : (a) résistance au roulement ; (b) force  $F$  équivalente au torseur des forces exercées par la surface ; (c) résistance au pivotement.

Considérons par exemple un cylindre sur lequel on applique une force extérieure  $F^{\text{ext}}$  (fig. 12.25 a). Aussi longtemps que  $|F^{\text{ext}}|$  est inférieure à  $F^{\text{max}}$ , le cylindre reste immobile ; dès que  $|F^{\text{ext}}|$  est supérieure à  $F^{\text{max}}$ , le cylindre se met en mouvement et il faut appliquer une force constante pour que le mouvement soit uniforme. Par conséquent, aussi longtemps que le cylindre est immobile, la surface exerce sur le cylindre des forces dont les éléments de réduction sont

$$F = -mg - F^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad M_A = -AC \wedge F^{\text{ext}}.$$

Par ailleurs, si le cylindre se met à rouler sans glisser, on aura  $F^{\text{max}} < \mu_s |N|$ .

Remarquons que dans cet exemple, le torseur des forces exercées par la surface est équivalent à un seul vecteur  $F$  lié au point  $B$ , à une distance  $d$  du point  $A$  où  $F^{\text{ext}} R = mgd$  (fig. 12.25 b).

L'expérience montre que  $F^{\text{max}}$ , et par conséquent  $M_A^{\text{max}}$ , sont approximativement proportionnelles à la réaction normale :

$$M_A^{\text{max}} = F^{\text{max}} R = \delta |N|.$$

A titre d'illustration, une roue de bois sur du bois a un  $\delta$  de l'ordre de 0,5 mm ; pour une roue d'acier sur de l'acier,  $\delta \cong 0,05$  mm, et  $\delta \cong 0,005$  mm dans le cas de l'acier dur, poli ; pour une roue de voiture sur l'asphalte  $\delta \cong 20$  mm.



$$\delta = 20 \text{ mm}$$

De façon générale, décomposons les vecteurs  $\omega$  et  $M_A$  en une composante (t) tangente à la surface, et une composante (n) perpendiculaire à cette surface :

$$\omega = \omega^{(t)} + \omega^{(n)} \quad M_A = M_A^{(t)} + M_A^{(n)}. \quad (12.64)$$

Les *lois des frottements* s'expriment par les relations suivantes :

$$\text{si } \omega^{(t)} = 0 \quad |M_A^{(t)}| \leq \delta_s |N|; \quad \text{si } \omega^{(t)} \neq 0 \quad M_A^{(t)} = -\delta_c |N| \hat{\omega}^{(t)}$$

$$\text{si } \omega^{(n)} = 0 \quad |M_A^{(n)}| \leq \nu_s |N|; \quad \text{si } \omega^{(n)} \neq 0 \quad M_A^{(n)} = -\nu_c |N| \hat{\omega}^{(n)}$$

où  $\delta$  et  $\nu$  sont des coefficients qui ont la dimension d'une longueur, mais pour lesquels on ne connaît pas de loi générale.

Dans le cas du roulement avec glissement, il ne sera pas nécessaire de tenir compte de la résistance au roulement, car  $\delta_c/R$  est très inférieur à  $\mu_c$ .

#### Mesure de $\delta_s$

Posons un cylindre de rayon  $R$  sur un plan incliné et cherchons pour quel angle  $\beta_s$  le cylindre commence à rouler (fig. 12.26).

Mesure de  $\beta_s$   
(imminence  
de roulement)

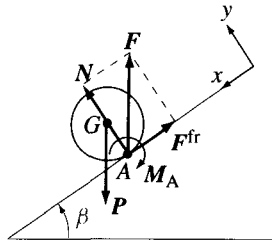


Fig. 12.26 Détermination expérimentale de  $\delta_s$ .

Tant que le système est au repos, nous avons :

$$\begin{cases} ma_G = 0 = F^{\text{fr}} + N + P \\ \frac{d}{dt}L_A = 0 = AG \wedge P + M_A \end{cases} \quad \mapsto \quad \begin{cases} F^{\text{fr}} = mg \sin \beta \\ N = mg \cos \beta \\ M_A = Rmg \sin \beta \end{cases}$$

d'où

$$M_A^{\text{max}} = \delta_s mg \cos \beta_s = Rmg \sin \beta_s$$

et

Relation entre  
 $\beta_s$  et  $\delta_s$

$$\delta_s = R \tan \beta_s. \quad (12.65)$$

## 12.5 ILLUSTRATIONS DES FROTTEMENTS SECS

### 12.5.1 Glissement sur un plan incliné

Analysons l'évolution d'un bloc sur un plan incliné (fig. 12.27 a) et comparons les orbites avec celles associées aux frottements visqueux (fig. 12.14) (le mouvement est supposé rectiligne).

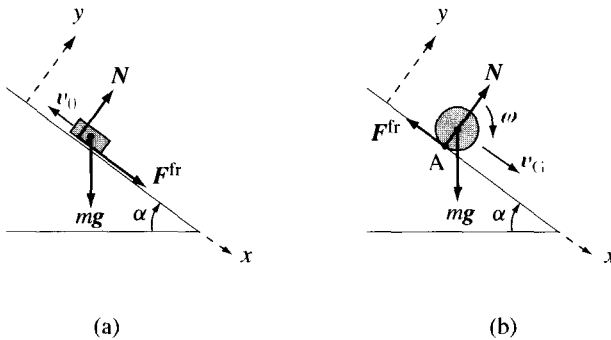


Fig. 12.27 Évolution d'un bloc (a) et d'un cylindre (b) sur un plan incliné ( $\delta = 0$ ).

De l'équation du mouvement  $ma = mg + N + F^{\text{fr}}$ , on a

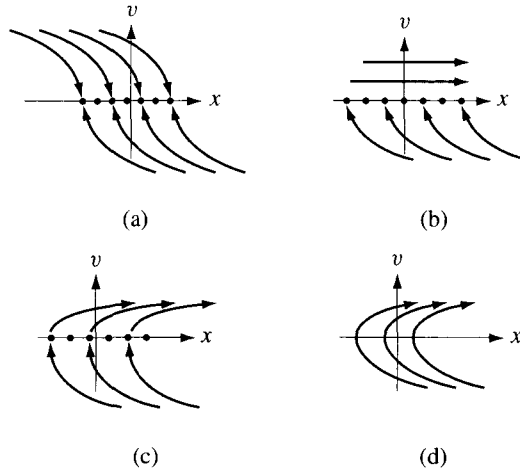
$$\begin{cases} m\ddot{x} = F^{\text{fr}} + mg \sin \alpha \\ 0 = N - mg \cos \alpha \end{cases}$$

Si la vitesse est non nulle, on obtient de la loi de Coulomb

$$\ddot{x} = g [\sin \alpha - (\text{sign} v) \mu_c \cos \alpha] \quad (12.66) \quad \text{Évolution temporelle}$$

et le mouvement est uniformément accéléré (aussi longtemps que la vitesse ne change pas de signe).

De plus, si  $\tan \alpha < \mu_c$ , le solide s'arrête après avoir parcouru une distance finie ; si  $\mu_c \leq \tan \alpha \leq \mu_s$ , le solide ne s'arrête que pour  $v_0$  négatif ; finalement, si  $\tan \alpha > \mu_s$ , il n'y a pas de position d'équilibre (fig. 12.28).



**Fig. 12.28** Orbites dans le cas du glissement sur un plan incliné : (a)  $\tan \alpha < \mu_c$  ; (b)  $\tan \alpha = \mu_c$  ; (c)  $\mu_s \geq \tan \alpha > \mu_c$  ; (d)  $\tan \alpha > \mu_s$ .

### 12.5.2 Roulement sur un plan incliné

Étudions le mouvement d'un cylindre homogène posé sans vitesse initiale sur un plan incliné (fig. 12.27) ; on supposera que la résistance au roulement est négligeable.

Nous avons déjà obtenu (§ 11.6.1) les équations du mouvement du cylindre :

$$\begin{array}{l} \text{Équations} \\ \text{du mouvement} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(Mv) = F^{\text{fr}} + Mg \sin \alpha \quad \text{où} \quad v = v_{G,x} \\ 0 = N - Mg \cos \alpha \\ \frac{d}{dt}(I\omega) = RF^{\text{fr}} \end{array} \right.$$

avec  $I = MR^2$  pour le cylindre creux (11.24) et  $I = \frac{1}{2}MR^2$  pour le cylindre plein (11.27).

En éliminant la force de frottement, on obtient

$$\frac{d}{dt}(MRv) = \frac{d}{dt}(I\omega) + MgR \sin \alpha$$

c'est-à-dire

$$\begin{array}{l} \text{Évolution temporelle} \end{array} \quad \frac{d}{dt}(MRv - I\omega) = MgR \sin \alpha$$

équation que nous devons intégrer avec les conditions initiales  $v(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ , d'où

$$v - \frac{I\omega}{MR} = (g \sin \alpha) t. \quad (12.67)$$



Si l'on suppose que le cylindre roule sans glisser, on a  $v = -\omega R$  et de (12.67)

$$v \left( 1 + \frac{I}{MR^2} \right) = (g \sin \alpha) t.$$

Roulement  
sans glissement

Dans ce cas, le mouvement de G est uniformément accéléré, d'accélération  $a = (1 + \frac{I}{MR^2})^{-1} g \sin \alpha$ , et

$$F^{\text{fr}} = -Mg \sin \alpha \left[ 1 + \frac{MR^2}{I} \right]^{-1}.$$

Pour que l'hypothèse de roulement sans glissement puisse être satisfaite, il faudra que

$$|F^{\text{fr}}| \leq \mu_s Mg \cos \alpha$$

soit

$$\tan \alpha \leq 3\mu_s.$$

Si  $\tan \alpha$  est supérieur à  $3\mu_s$ , le cylindre roule avec glissement ; dans ce cas la force de frottement est connue et l'on obtient

$$\begin{cases} \dot{v} = g(-\mu_c \cos \alpha + \sin \alpha) \\ \dot{\omega} = -\mu_c \frac{R}{I} Mg \cos \alpha. \end{cases}$$

Roulement  
avec glissement

La vitesse du point du solide en contact avec le plan est donnée par

$$v_A = v + \omega R = g \sin \alpha \left( 1 - 3 \frac{\mu_c}{\tan \alpha} \right) t ;$$

comme  $v_A$  reste positif pour tout  $t$ , le cylindre n'atteindra jamais un régime de roulement sans glissement.

### 12.5.3 Frottement d'un câble sur une poulie

Un câble souple (de masse négligeable) est enroulé autour d'un cylindre immobile. Calculons les tensions  $T_1$ ,  $T_2$  aux extrémités de câble quand il y a imminence de glissement (fig. 12.29).

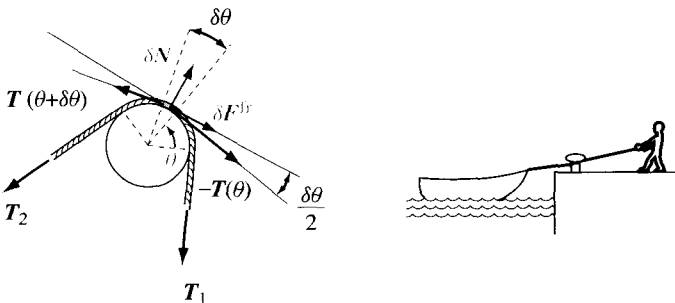


Fig. 12.29 Frottement d'un câble sur une bitte d'amarrage.

Soit  $T(\theta)$  la tension de la corde en  $\theta$  (= force exercée par la partie  $\theta' > \theta$  sur la partie  $\theta' \leq \theta$ ). Considérons la portion de câble entre  $\theta$  et  $\theta + \delta\theta$  et posons  $T(\theta + \delta\theta) = T(\theta) + \delta T$ ; désignons par  $\delta F^{\text{fr}}(\theta)$ ,  $\delta N(\theta)$  la force de frottement et la réaction normale sur la portion considérée.

Dans le cas statique, la somme des forces agissant sur la portion de câble doit être nulle, d'où

Équation  
de la statique

$$\delta F^{\text{fr}} + T(\theta + \delta\theta) - T(\theta) + \delta N = 0$$

soit, en projetant sur les axes  $(e_r, e_\theta)$ ,

$$\begin{cases} \delta N - (T + \delta T) \sin \frac{\delta\theta}{2} - T \sin \frac{\delta\theta}{2} = 0 \\ \delta F^{\text{fr}} + (T + \delta T) \cos \frac{\delta\theta}{2} - T \cos \frac{\delta\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \delta N = 2T \sin \frac{\delta\theta}{2} + \delta T \sin \frac{\delta\theta}{2} \\ \delta F^{\text{fr}} = -\delta T \cos \frac{\delta\theta}{2}. \end{cases}$$

Par continuité de  $T(\theta)$  nous avons

$$\lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\delta F^{\text{fr}}}{\delta N} = -\frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} \quad (12.68)$$

et, à l'imminence de glissement,

Imminence  
de glissement

$$\delta F^{\text{fr}} = \pm \mu_s \delta N.$$

On obtient ainsi

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{d\theta} = \pm \mu_s \quad (12.69)$$

et, par intégration de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ ,

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \pm \mu_s (\theta_2 - \theta_1) \quad (12.70)$$

où  $\theta_2 - \theta_1$  est l'angle de contact du câble sur la poulie.

En conséquence, dans le cas statique, on a l'inégalité

Cas statique

$$e^{-\mu_s(\theta_2 - \theta_1)} \leq \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu_s(\theta_2 - \theta_1)} \quad (\text{avec } [\theta] = \text{radian}). \quad (12.71)$$

Dans le cas où le câble glisse sur la poulie, nous obtenons de façon similaire

Glissement

$$T_2 = e^{\pm \mu_c(\theta_2 - \theta_1)} T_1. \quad (12.72)$$

En conclusion, le rapport des tensions aux extrémités croît exponentiellement avec l'angle de contact et ne dépend pas du rayon.

Par exemple, pour  $\mu_s = 0,5$  et  $\theta = 3\pi$  ( $= 1,5$  tour), on a  $T_2 = 112T_1$ , pour  $\theta = 5\pi$  ( $= 2,5$  tours), on a  $T_2 = 2576T_1$ .

#### 12.5.4 Roues motrices et roues porteuses

Cherchons le coefficient de frottement des pneus d'une moto nécessaire pour obtenir une accélération maximale (fig. 12.30). Pour simplifier, nous négligeons la masse des roues, la résistance de l'air et la résistance au roulement.

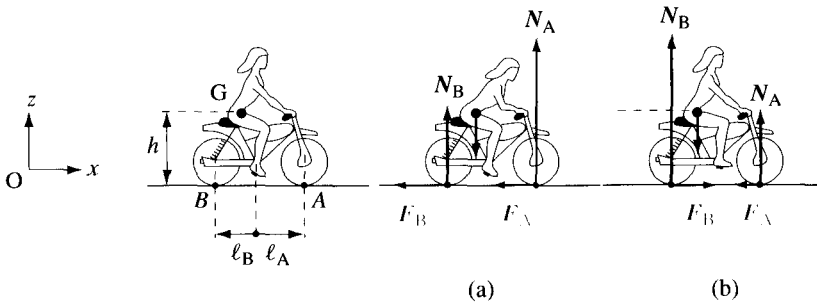


Fig. 12.30 (a) Freinage ; (b) accélération.

Le système considéré est défini par la moto et le conducteur. Les *forces extérieures* sont les frottements secs, les réactions normales de la route et le poids.

##### • Équations du mouvement

$$\begin{cases} M\mathbf{a}_G = \mathbf{F}_A + \mathbf{N}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{N}_B + M\mathbf{g} \end{cases} \quad (12.73)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathbf{L}_G = \mathbf{GA} \wedge (\mathbf{F}_A + \mathbf{N}_A) + \mathbf{GB} \wedge (\mathbf{F}_B + \mathbf{N}_B). \end{cases} \quad (12.74)$$

##### • Loi de Coulomb (absence de glissement)

$$|\mathbf{F}_A| \leq \mu_s^A N_A \quad \text{si } \mathbf{v}_A = 0$$

$$|\mathbf{F}_B| \leq \mu_s^B N_B \quad \text{si } \mathbf{v}_B = 0.$$

##### • Absence de culbute ( $\approx$ contact des roues sur la route)

$$z_G = h \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_G = \mathbf{L}_G)_{\mathcal{R}_G} = 0.$$

(car nous avons supposé la masse des roues négligeable).

Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = N_A + N_B - Mg \end{array} \right. \quad (12.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ma_G = F_A + F_B \end{array} \right. \quad (12.76)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = N_A \ell_A + h(F_A + F_B) - N_B \ell_B \end{array} \right. \quad (12.77)$$

d'où

$$Ma_G = \frac{1}{h}(N_B \ell_B - N_A \ell_A)$$

et

$$a_G = \frac{1}{h} \left[ \frac{N_B}{M} (\ell_A + \ell_B) - \ell_A g \right] \quad (12.78)$$

L'équation (12.78), qui fait intervenir la géométrie de la moto, exprime la réaction normale  $N_B$  (et  $N_A = Mg - N_B$ ) en fonction de l'accélération (fig. 12.31).

#### Accélération • Accélération (roue arrière motrice)

Ayant supposé la masse des roues négligeable ( $L_C = 0$ ), nous avons pour la roue avant (roue porteuse)

$$\frac{d}{dt} L_C = CA \wedge F_A = 0$$

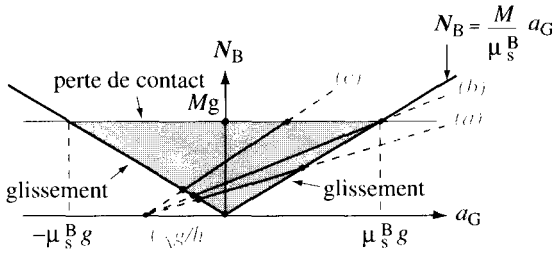
(C = centre de la roue avant) ce qui implique  $F_A = 0$ . Les équations du mouvement sont ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} Ma_G = F_B \\ a_G = \frac{1}{h} \left[ \frac{N_B}{M} (\ell_A + \ell_B) - \ell_A g \right] \end{array} \right. \quad (12.79)$$

avec les conditions

$$0 \leq N_B \leq Mg \quad (\text{contact des roues sur le sol}) \quad (12.80)$$

$$-\mu_s^B N_B \leq F_B = Ma_G \leq \mu_s^B N_B \quad (\text{roulement sans glissement}). \quad (12.81)$$



**Fig. 12.31** Réaction normale sur la roue arrière en fonction de l'accélération pour différentes géométries : (a)  $\ell_B > \mu_s^B h$  ; (b)  $\ell_B = \mu_s^B h$  ; (c)  $\ell_B < \mu_s^B h$ . La région hachurée est celle où il n'y a ni glissement ni perte de contact des roues sur la route.

Comme nous le voyons sur la figure 12.31, l'accélération maximale correspond à  $N_B = Mg$  (tout le poids est sur la roue arrière) et  $a_G = g\ell_B/h = \mu_s^B g$  implique

$$\mu_s^B = \ell_B/h, \quad a_G^{\max} = g\ell_B/h. \quad (12.82)$$

Par ailleurs, la figure 12.31 conduit aux résultats suivants :

- si  $\ell_B > \mu_s^B h$  (centre de gravité bas, courbe *a*), l'accélération maximale est déterminée par  $N_B$ , c'est-à-dire par la limite d'adhérence ;
- si  $\ell_B < \mu_s^B h$  (centre de gravité haut, courbe *c*), l'accélération maximale correspond à  $N_B = mg$ ,  $N_A = 0$ , et l'on est à la limite de la culbute où la roue avant décolle.

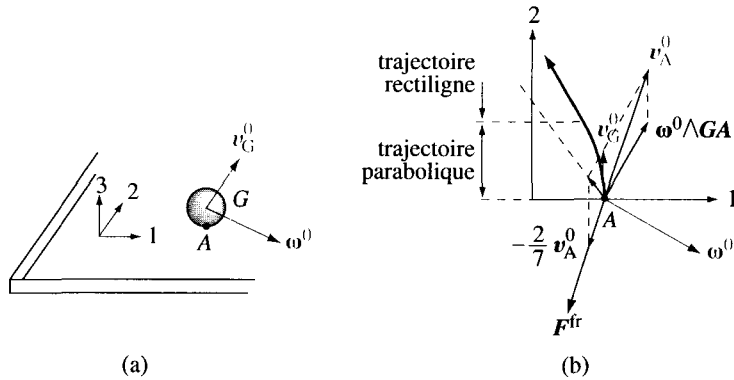
### 12.5.5 Remarques

- L'accélération maximale au départ n'est pas limitée par le moteur mais par la force de frottement maximale : au départ, il n'est pas possible d'utiliser le couple moteur maximal, sinon les roues motrices perdent l'adhérence.
- L'accélération d'une moto pourra être égale à  $a^{\max}$  aussi longtemps que la vitesse est inférieure à une certaine vitesse limite qui dépend du couple et de la puissance du moteur (§ 13.8.2). Au-delà de cette vitesse limite, l'accélération maximale dépend du couple et de la puissance du moteur et il n'est plus possible de négliger les frottements de l'air.
- La traction maximale que peut fournir un véhicule autopropulsé est proportionnelle au poids porté par les roues motrices et au coefficient de frottement. D'où l'intérêt des voitures à 4 roues motrices, de l'introduction de pneus sur les métros et de l'accouplement des roues d'une locomotive par des bielles.

Limitation de l'accélération

### 12.5.6 Billard, bowling...

Étudions le mouvement d'une boule (masse  $m$ , rayon  $R$ ) lancée sur un plan horizontal, avec les conditions initiales  $(\mathbf{v}_G(0), \boldsymbol{\omega}(0))$ .



**Fig. 12.32** Billard : (a) conditions initiales ; (b) trajectoire de  $G$ .

Les forces extérieures sur la boule sont le poids et la force exercée par le plan (on néglige les couples de résistance au roulement et au pivotement).

Soit  $A = A(t)$  le point de la boule en contact sur le plan.

• *Solide indéformable*

Cinématique  
du solide

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA}. \quad (12.83)$$

• *Équations du mouvement d'une sphère*

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_G = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}^{\text{fr}} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{L}_G = \mathbf{GA} \wedge \mathbf{F}^{\text{fr}} \quad \text{où} \quad \mathbf{L}_G = \frac{2}{5}mR^2\boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (12.84) \quad (12.85)$$

• *Loi de Coulomb*

Lois de frottement

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mu_c |N| \hat{\mathbf{v}}_A \quad \text{si} \quad \mathbf{v}_A \neq 0; \quad |\mathbf{F}^{\text{fr}}| \leq \mu_s |N| \quad \text{si} \quad \mathbf{v}_A = 0.$$

• *Contrainte*

Équation  
de liaison

$$z_G = R, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Par conséquent, (12.84) devient

$$\mathbf{N} + m\mathbf{g} = 0, \quad m\dot{\mathbf{v}}_G = \mathbf{F}^{\text{fr}}. \quad (12.86)$$

De (12.83) et des équations du mouvement (12.85) et (12.86), on tire

$$m\dot{\mathbf{v}}_A = \mathbf{F}^{\text{fr}} + \frac{5}{2R^2}(\mathbf{GA} \wedge \mathbf{F}^{\text{fr}}) \wedge \mathbf{GA}$$

Inconnue :  $\mathbf{F}^{\text{fr}}$

$$m\dot{\mathbf{v}}_A = \frac{7}{2}\mathbf{F}^{\text{fr}}. \quad (12.87)$$

Il nous faut résoudre le problème en deux étapes.

### 1<sup>er</sup> temps : Roulement avec glissement

Si  $\mathbf{v}_A(0)$  est non nul, alors dans un premier temps  $\mathbf{v}_A(t) \neq 0$ ; de l'équation (12.87) et de la loi de Coulomb nous avons

$$m\dot{\mathbf{v}}_A = -\frac{7}{2}\mu_c mg\hat{\mathbf{v}}_A \quad (12.88) \quad \mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mu_c mg\hat{\mathbf{v}}_A$$

ce qui entraîne  $\hat{\mathbf{v}}_A(t) = \hat{\mathbf{v}}_A(0)$  (voir la remarque § 5.3.4); par conséquent  $\mathbf{v}_A(t) = \mathbf{v}_A(0) - \frac{7}{2}\mu_c g t \hat{\mathbf{v}}_A(0)$  et de (12.86), avec la loi de Coulomb,

$$\dot{\mathbf{v}}_G(t) = -\mu_c g \hat{\mathbf{v}}_A(0). \quad (12.89)$$

Le mouvement de  $G$  est ainsi uniformément accéléré, d'accélération  $\mathbf{a}_G = -\mu_c g \hat{\mathbf{v}}_A(0)$  et sa trajectoire est une parabole d'axe parallèle à  $\mathbf{v}_A(0)$ . De (12.83), si  $\boldsymbol{\omega}(0) \wedge \mathbf{e}_3$  n'est pas parallèle à  $\mathbf{v}_G(0)$ , alors  $\mathbf{v}_G(0)$  n'est pas parallèle à  $\mathbf{a}_G(0)$  et la trajectoire n'est pas rectiligne. Cette évolution se poursuit jusqu'à l'instant  $t_1$  où  $\mathbf{v}_A(t_1) = 0$ , soit

$$t_1 = \frac{2}{7} \frac{|\mathbf{v}_A(0)|}{\mu_c g}. \quad (12.90)$$

Attention ! Dans (12.88)  $\dot{\mathbf{v}}_A$  n'est pas l'accélération du point  $A$  du solide.

### 2<sup>e</sup> temps : Roulement sans glissement

A l'instant  $t_1$  la vitesse du point  $A$  s'annule; pour  $t > t_1$ , la force de frottement  $\mathbf{v}_A = 0$  est nulle et le mouvement de  $G$  est rectiligne uniforme

$$\mathbf{v}_G(t) = \mathbf{v}_G(t_1) = \mathbf{v}_G(0) - \frac{2}{7}\mathbf{v}_A(0) \quad \text{pour } t \geq t_1. \quad (12.91)$$

### Conclusions

- Le mouvement d'une sphère sur un plan horizontal n'est en général pas rectiligne mais devient rectiligne et uniforme après un certain temps.
- Les problèmes faisant intervenir des frottements secs doivent être résolus en deux étapes : dans un premier temps, il y a glissement et  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mu_c |\mathbf{N}| \hat{\mathbf{v}}_A$ ; puis, dans un deuxième temps, le solide roule sans glisser.

Le mouvement est rectiligne uniforme dès que la sphère roule sans glisser

### Remarque. Autre méthode

En choisissant le point de contact  $A$  pour écrire le théorème du moment cinétique, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{L}_A &= 0 \quad \text{avec } \mathbf{L}_A = \mathbf{L}_G + \mathbf{AG} \wedge m\mathbf{v}_G = \\ &= \frac{2}{5}mR^2\boldsymbol{\omega} + mR\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}_G \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\mathbf{L}_A(t) = \mathbf{L}_A(0)$ , d'où

$$\frac{2}{5}R\boldsymbol{\omega} + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}_G = \frac{2}{5}R\boldsymbol{\omega}(0) + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}_G(0)$$

et de (12.83), on obtient :

$$\mathbf{v}_A(t) - \mathbf{v}_A(0) = \frac{7}{2}[\mathbf{v}_G(t) - \mathbf{v}_G(0)]$$

ce qui donne immédiatement (12.88), et (12.91) lorsque  $\mathbf{v}_A(t) = 0$ .

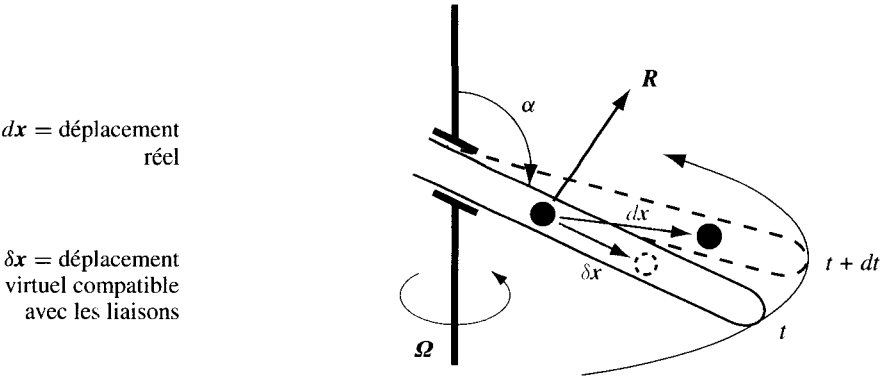
12.6 FORCES DE LIAISON

12.6.1 Définitions

Nous disons qu'un système est soumis à des *liaisons* s'il existe des *contraintes*, c'est-à-dire des conditions qui limitent les mouvements possibles du système (sect. 5.5, 5.6, 9.7, 10.5, 11.6).

Pendule et  
centrifugeuse

Dans le cas du pendule, étudié au paragraphe 10.5.1, la contrainte  $|OP| = \ell$  conduisait à une force  $\mathbf{T}$ , exercée par le fil sur la masse, que nous avons calculée. Nous avons également analysé (§ 10.5.2) l'exemple de la centrifugeuse, dans lequel un point se déplace sans frottement à l'intérieur d'un tube tournant à vitesse constante autour d'un axe vertical (fig. 12.33). Nous avons vu que la contrainte se traduisait à nouveau par une force  $\mathbf{R}$  perpendiculaire au tube, force que nous avons calculée à partir des équations du mouvement.



$dx$  = déplacement  
réel

$\delta x$  = déplacement  
virtuel compatible  
avec les liaisons

**Fig. 12.33** Centrifugeuse :  $\alpha = \text{cste}$ ,  $\varphi = \Omega t$ . Force de liaison  $\mathbf{R}$  ;  $dx$  = déplacement réel pendant  $dt$  ;  $\delta x$  = déplacement virtuel compatible à l'instant  $t$ .

De façon générale, on admettra qu'il est toujours possible de remplacer les liaisons par des forces, appelées *forces de liaison*, et de considérer le système comme un système sans contraintes soumis à l'action des forces appliquées et des forces de liaison. Ces forces de liaison sont des forces qui s'adaptent à tout instant pour que les conditions imposées au système soient satisfaites. De cette manière, on peut décomposer la résultante des forces agissant sur tout point matériel  $P_\alpha$  (ou tout solide) en deux contributions, et l'on écrira

Forces de liaison

$$m_\alpha \mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{F}^{(\alpha)} + \mathbf{R}^{(\alpha)} \tag{12.92}$$



avec  $\mathbf{R}^{(\alpha)}$  la résultante des forces de liaison et  $\mathbf{F}^{(\alpha)}$  la résultante des forces appliquées.

### 12.6.2 Classification des liaisons

Considérons un système décrit par les coordonnées généralisées  $(q_1, \dots, q_k)$ , c'est-à-dire que pour tout point matériel  $P_\alpha$ , on a

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t). \quad (12.93)$$

Le système est dit **holonôme à  $k$  degrés de liberté** s'il peut être décrit par  $k$  coordonnées généralisées  $\{q_i\}$ , telles que les  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  sont des variables indépendantes, c'est-à-dire s'il n'existe aucune condition entre ces  $2k$  variables.

Système matériel  
holonôme à  $k$  degrés  
de liberté

Si les  $2k$  variables  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  ne sont pas indépendantes, on dit qu'il existe des **liaisons**.

On distingue deux types de liaisons.

Les **liaisons unilatérales** sont des liaisons définies par des conditions qui s'introduisent – ou qui cessent – brusquement au cours du temps : particule à l'intérieur d'une enceinte, point matériel attaché à un fil souple, skieur sur un tremplin (§ 12.6.4). Ces liaisons s'expriment généralement au moyen d'inégalités

Liaisons unilatérales

$$f(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) \geq 0. \quad (12.94)$$

Les **liaisons bilatérales** sont des liaisons qui persistent au cours du temps ; elles s'expriment par des fonctions, appelées **équations de liaison**, de la forme

Liaisons bilatérales

$$f^{(\nu)}(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, t) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (12.95)$$

Si les  $2k$  variables  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  sont soumises à des liaisons bilatérales, on pourra chercher s'il existe  $(k - m)$  nouvelles coordonnées  $\{q'_j\}$  telles que le système soit holonôme à  $(k - m)$  degrés de liberté.

Le cas le plus simple est celui où l'équation de liaison (12.93) ne dépend pas des variables  $\{\dot{q}_i\}$ , soit

$$f^{(\nu)}(q_1, \dots, q_k, t) = 0. \quad (12.96)$$

De telles liaisons sont dites **holonômes** ; elles permettent de diminuer le nombre de coordonnées généralisées.

Liaisons holonômes

Par exemple, dans le cas du pendule plan, en choisissant les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on aura les liaisons holonômes

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \ell^2.$$

Pendule plan

Au contraire, en choisissant les coordonnées polaires dans le plan du mouvement, il suffira d'une seule coordonnée  $\theta$  et  $\{\theta, \dot{\theta}\}$  sont des variables indépendantes : le système est holonôme à 1 degré de liberté.

Dans le cas de la centrifugeuse (fig. 12.33), en choisissant les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on aura les liaisons holonômes

$$\text{Centrifugeuse} \quad z - \sqrt{x^2 + y^2} \tan \alpha = 0 \quad \text{et} \quad y - x \tan(\Omega t) = 0.$$

Au contraire, en choisissant les coordonnées sphériques, il suffit d'une coordonnée  $r$  et  $\{r, \dot{r}\}$  sont des variables indépendantes : le système est holonôme à 1 degré de liberté.

Remarquons que l'équation de liaison (12.96) peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f^{(v)}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f^{(v)}}{\partial t} = 0. \quad (12.97)$$

De façon générale, on introduit l'**hypothèse** que toutes les liaisons bilatérales s'expriment au moyen d'équations de liaison de la forme

$$\text{Équations de liaison} \quad \sum_{i=1}^k f_i^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) \dot{q}_i + f_0^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) = 0 \quad v = 1, \dots, m \quad (12.98)$$

dont (12.97) est un cas particulier.

Avec cette hypothèse, pour tout intervalle de temps  $dt$  *infinitésimal*, le déplacement (réel)  $(dq_1, \dots, dq_k)$  à partir de l'état  $(q_1, \dots, q_k, t)$  satisfait les équations

$$\sum_{i=1}^k f_i^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) dq_i + f_0^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) dt = 0. \quad (12.99)$$

et le déplacement (réel) du point matériel  $P_\alpha$  est donné par

$$\text{Déplacement réel} \quad d\mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} dt. \quad (12.100)$$

Une liaison bilatérale de la forme (12.98) est dite **intégrable** si elle peut s'écrire sous la forme d'une **liaison holonôme**

$$F^{(v)}(q_1, \dots, q_k, t) = C \quad (12.101)$$

Une liaison intégrable permet ainsi de diminuer le nombre de variables, mais, contrairement à (12.96),  $C$  est ici une constante qui peut dépendre des conditions initiales  $\{q_i(0), \dot{q}_i(0)\}$ .

Pour vérifier si la liaison (12.98) est intégrable, on a le **critère d'intégrabilité** suivant.

Une condition nécessaire et suffisante pour que la liaison (12.98) soit intégrable est que pour tout triplet  $(\ell, m, n) \subset \{0, 1, \dots, k\}$ , on ait

$$\sum^c f_\ell^{(\nu)} \left( \frac{\partial f_n^{(\nu)}}{\partial q_m} - \frac{\partial f_m^{(\nu)}}{\partial q_n} \right) = 0 \quad \text{où} \quad q_0 \equiv t$$

et où  $\sum^c$  signifie « somme sur toutes les permutations cycliques des indices  $(\ell m n)$  ».

Si les  $m$  liaisons sont intégrables et indépendantes, on est ramené à un système holonôme à  $(k - m)$  degrés de liberté.

Les liaisons non intégrables sont appelées ***liaisons non holonomes***. Dans ce cas, la dimension de l'espace des vitesses est strictement inférieure à la dimension de l'espace de configuration.

Liaisons non holonomes

On dit que le système est à ***liaisons indépendantes du temps*** si les fonctions (12.93) et les équations de liaison (12.98) ne dépendent pas explicitement du temps.

Liaisons indépendantes du temps

Dans le cas d'un système à ***liaisons holonomes indépendantes du temps***, on a

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k) & \alpha = 1, \dots, N \\ f^{(\nu)}(q_1, \dots, q_k) = C^{(\nu)} & \nu = 1, \dots, m \end{cases}$$

Si l'une des équations (12.93), (12.98) dépend explicitement du temps, on dit que le système est à ***liaisons dépendantes du temps***.

Liaisons dépendantes du temps

### 12.6.3 Déplacement virtuel et liaisons parfaites

Les forces de liaisons sont des forces inconnues a priori. Dans ce paragraphe, nous introduisons une condition qui reflète deux propriétés que ces forces devraient posséder :

Propriétés des forces de liaisons

1. elles obéissent à la troisième loi de Newton ;
2. leur seul effet est d'assurer que les contraintes sont satisfaites.

Pour commencer, il nous faut introduire le concept de « déplacement virtuel compatible avec les liaisons à l'instant  $t$  », ou, plus simplement, « déplacement virtuel compatible ».

Déplacement virtuel

On appelle **déplacement virtuel compatible** à partir de  $(q_1, \dots, q_k, t)$  tout déplacement que l'on pourrait imposer au système en tenant compte des liaisons telles qu'elles existent à l'instant  $t$ , c'est-à-dire

$$\delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \delta q_i \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (12.102)$$

où les  $\delta q_i$  sont solutions des équations

$$\sum_{i=1}^k f_i^{(v)}(q, t) \delta q_i = 0 \quad v = 1, \dots, m \quad (12.103)$$

Ces expressions sont à comparer avec le **déplacement infinitésimal réel** qui satisfait les équations (12.99) et (12.100).

**Propriété.** Si le système est à liaisons holonômes indépendantes du temps, tout déplacement infinitésimal réel est un déplacement virtuel compatible.

Le pendule plan discuté plus haut est un système holonôme à liaisons indépendantes du temps.

Centrifugeuse

Dans l'exemple de la centrifugeuse on a un système holonôme à 1 degré de liberté, mais à liaisons dépendantes du temps car

$$\begin{cases} x = r \sin \alpha \cos \Omega t \\ y = r \sin \alpha \sin \Omega t \\ z = r \cos \alpha. \end{cases}$$

Dans ce cas, les déplacements virtuels compatibles à l'instant  $t$  sont de la forme

Déplacement virtuel

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \delta r = \delta r \mathbf{e}_r(t) \quad \text{avec} \quad \delta r \in \mathbb{R}$$

alors que le déplacement réel pendant  $dt$  est donné par

Déplacement réel

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) dt = dr \mathbf{e}_r(t) + dt \Omega r \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi(t) \quad (\text{fig. 12.33}).$$

De plus, on constate dans cet exemple que la condition d'absence de frottement ( $R_r = 0$ ) est équivalente à la condition «  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{x} = 0$  pour tout déplacement virtuel compatible » (alors que pour le déplacement réel  $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{x} = R_\varphi \Omega r dt \neq 0$ ). Cette remarque nous conduit à introduire la définition suivante.

Les liaisons sont dites **parfaites** si elles satisfont la **condition des travaux virtuels** suivante :

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = 0 \quad (12.104) \quad \begin{array}{l} \text{Condition des} \\ \text{travaux virtuels} \end{array}$$

pour tout déplacement virtuel compatible.

Cette condition s'exprime en disant que *la somme des travaux effectués par les forces de liaison est nulle pour tout déplacement virtuel compatible* (§ 13.1.1).

Vérifions que cette condition correspond aux deux propriétés mentionnées au début de ce paragraphe.

Considérons par exemple une molécule diatomique rigide dont l'équation de liaison est :

$$|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}|^2 = d^2 \quad (= \text{constante}).$$

Dans ce cas, les déplacements virtuels compatibles sont définis par

$$(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) \cdot (\delta \mathbf{x}^{(2)} - \delta \mathbf{x}^{(1)}) = 0$$

c'est-à-dire  $\delta \mathbf{x}^{(2)} = \delta \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) = 0$ .

La condition des travaux virtuels  $\mathbf{R}^{(1)} \cdot \delta \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)} \cdot \delta \mathbf{x}^{(2)} = 0$  devient

$$(\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)}) \cdot \delta \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)} \cdot \mathbf{b} = 0$$

pour tout  $\mathbf{b}$  perpendiculaire à  $(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$  et pour tout  $\delta \mathbf{x}^{(1)}$ , ce qui implique

$$\mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{R}^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^{(2)} = \lambda (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}).$$

En conclusion, la condition des travaux virtuels exprime la condition que les forces inconnues  $\mathbf{R}^{(1)}$  et  $\mathbf{R}^{(2)}$  – responsables de la rigidité de la molécule – satisfont le principe de l'action et de la réaction.

Dans le cas d'un solide, les déplacements virtuels compatibles infinitésimaux sont définis par

$$\delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = \delta \mathbf{x}^{(A)} + \delta \Phi \wedge \mathbf{A} \mathbf{P}_\alpha.$$

Soit  $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_A)$  les éléments de réduction des forces de liaison dans le solide ; la condition des travaux virtuels devient

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{M}_A \cdot \delta \Phi = 0 \quad (12.105)$$

Condition des  
travaux virtuels  
 $\equiv$   
le torseur des forces  
intérieures est nul

pour toute translation  $\delta \mathbf{x}$  et toute rotation  $\delta \boldsymbol{\Phi}$  compatibles avec les liaisons à l'instant  $t$ . Ces conditions impliquent  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ , ce qui exprime le fait que, pour un solide, le torseur des forces intérieur est nul.

Dans le cas d'un solide en translation sur une surface, la liaison sera parfaite si  $\mathbf{R}$  est perpendiculaire à la surface, c'est-à-dire s'il n'y a pas de frottement. Dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe, la liaison sera parfaite si le moment des forces de liaison est perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire s'il n'y a pas de frottement.

Frottement
 En présence de frottement, on considérera la liaison parfaite qui réalise la contrainte et l'on introduira les frottements dans les forces appliquées.

12.6.4 Classification des liaisons

Liaisons unilatérales

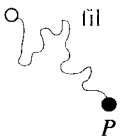
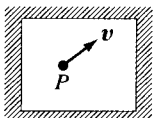
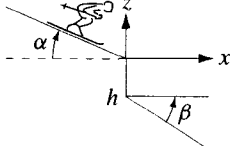
	Fil souple 	Particule dans une enceinte 	Skieur sur un tremplin 
Liaison	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - L \leq 0$	$a_i \leq x_i \leq b_i$ $i = 1, 2, 3$	$z = -x \tan \alpha, \text{ si } x < 0$ $z \geq -h - x \tan \beta, \text{ si } x > 0$
État	$(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$	$(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$	$(x, z, \dot{x}, \dot{z})$

Fig. 12.34 Liaisons unilatérales.

Liaisons bilatérales

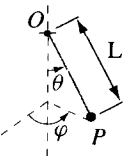
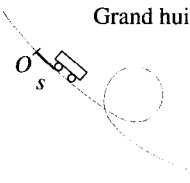
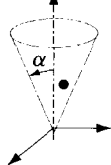
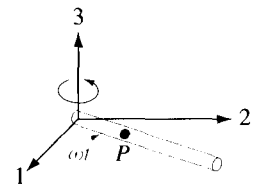
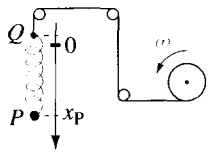
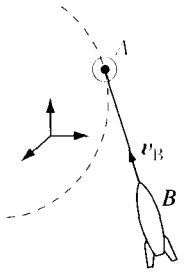
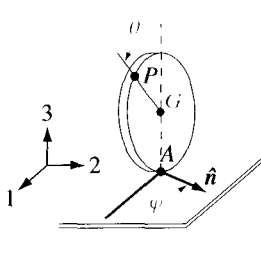
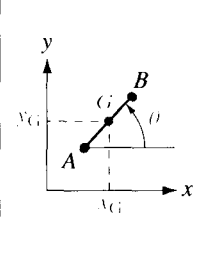
	Pendule 	Grand huit 	point sur cône 
Liaison	$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} - L = 0$	$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ $g(x_1, x_2, x_3) = 0$	$x_3 \tan \alpha - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0$
État	$(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$	$(s, \dot{s})$	$(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$

Fig. 12.35 Liaisons bilatérales, holonômes, indépendantes du temps.

	<b>Centrifugeuse</b> 	<b>Ressort excité</b> 
Liaison	$x_3 = 0; x_2 - x_1 \tan \omega t = 0$	$x_Q - \varepsilon \cos \omega t = 0$
États	$(\rho, \dot{\rho})$	$(x_P, \dot{x}_P)$

Liaisons holonômes dépendantes du temps

Fig. 12.36 Liaisons bilatérales, holonômes, dépendantes du temps.

	<b>Poursuite</b> Fusée et satellite 	<b>Roue verticale roulant</b> sans glisser sur un plan 	<b>Patin à glace</b> 
Liaison	A a un mouvement donné $\mathbf{v}_B = v \widehat{BA}, v = \text{cste}$	$z_G = R \quad \mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG}$ $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3 + \dot{\theta} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \dot{\theta} \sin \varphi \mathbf{e}_2$ soit $\dot{x}_G = \dot{\theta} R \sin \varphi$ $\dot{y}_G = -\dot{\theta} R \cos \varphi$	$\mathbf{v}_G // \mathbf{AB}$ soit $\dot{y}_G - \tan \theta \dot{x}_G = 0$
État	$(x, y, z)$	$(x_G, y_G, \theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$	$(x_G, y_G, \theta, \dot{x}_G, \dot{\theta})$

Liaisons non holonômes

Fig. 12.37 Liaisons bilatérales, non holonômes, dépendantes (a) et indépendantes (b) et (c) du temps.

12.6.5 Exemple. Mouvement le long d’une droite mobile

Considérons un système formé de deux points matériels de masse  $m_A, m_B$  se déplaçant sans frottement sur une droite rectiligne, horizontale, tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour d’un axe vertical (fig. 12.38). Les deux points interagissent au moyen de la force

$$\mathbf{F}^{B \rightarrow A} = -\mathbf{F}^{A \rightarrow B} = -k(|\mathbf{x}| - \ell)\hat{\mathbf{x}}$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B$ . Étudions l'évolution en supposant qu'à l'instant initial ( $t = 0$ ) le système est immobile par rapport à la droite mobile.

Système holonôme  
à deux degrés  
de liberté

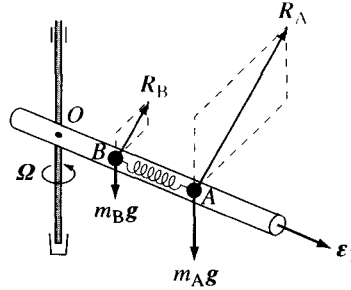


Fig. 12.38 Centrifugeuse.

- *Référentiel* : laboratoire.
- *Forces extérieures* : poids et forces de liaison (exercées par la droite).
- *Forces intérieures* :  $\mathbf{F}^{A \rightarrow B}$ ,  $\mathbf{F}^{B \rightarrow A}$ .
- *Liaisons* :

$$z_A = z_B = 0, \quad \dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_B = \Omega. \quad (12.106)$$

- *Absence de frottement* :

$$\mathbf{R}_A \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{R}_B \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1 = 0. \quad (12.107)$$

- *Équations du mouvement* :

$$\begin{cases} m_A \ddot{\mathbf{x}}_A = m_A \mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{F}^{B \rightarrow A} \\ m_B \ddot{\mathbf{x}}_B = m_B \mathbf{g} + \mathbf{R}_B - \mathbf{F}^{B \rightarrow A}. \end{cases} \quad (12.108)$$

Introduisons les vecteurs  $\mathbf{x}_G$  et  $\mathbf{x}$ , où

$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{M} (m_A \mathbf{x}_A + m_B \mathbf{x}_B), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B, \quad M = m_A + m_B. \quad (12.109)$$

Des équations (12.108) et (12.109), on obtient :

$$\begin{cases} M \ddot{\mathbf{x}}_G = M \mathbf{g} + \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_B \\ \mu \ddot{\mathbf{x}} = \frac{m_B}{M} \mathbf{R}_A - \frac{m_A}{M} \mathbf{R}_B + \mathbf{F}^{B \rightarrow A} \end{cases} \quad (12.110)$$

où

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}. \quad (12.111)$$

(C'est la forme générale du problème à 2 corps discuté au chapitre 18.)



Le système est holonôme à deux degrés de liberté et les liaisons sont dépendantes du temps.

Nous choisissons les variables  $\rho_G = |\mathbf{x}_G|$  et  $\rho = |\mathbf{x}|$ . En tenant compte des liaisons (12.106), (12.107) et de l'expression de la force  $\mathbf{F}^{B \rightarrow A}$ , on obtient, en projetant (12.110) sur l'axe  $\mathbf{e}_1$ ,

$$\begin{cases} M(\ddot{\rho}_G - \Omega^2 \rho_G) = 0 \\ \mu(\ddot{\rho} - \Omega^2 \rho) = -k(\rho - \ell) \end{cases}$$

avec les conditions initiales  $\dot{\rho}_G(0) = \dot{\rho}(0) = 0$ . D'où

$$\begin{cases} \ddot{\rho}_G = \Omega^2 \rho_G \\ \ddot{\rho} = -\left(\frac{k}{\mu} - \Omega^2\right) \left[\rho - \frac{k\ell}{k - \mu\Omega^2}\right], \quad \text{si } k \neq \mu\Omega^2 \\ \ddot{\rho} = \frac{k\ell}{\mu}, \quad \text{si } k = \mu\Omega^2. \end{cases} \quad (12.112)$$

On obtient ainsi l'évolution du centre de masse

$$\rho_G(t) = \rho_G(0) \cosh \Omega t.$$

Pour la variable relative  $\rho = \rho_A - \rho_B$ , il faut distinguer les trois cas suivants :

$$1. \text{ Si } \Omega^2 < \frac{k}{\mu} : \begin{cases} \rho(t) = \ell' + (\rho_0 - \ell') \cos \omega t \\ \ell' = \frac{k}{k - \mu\Omega^2} \ell, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu} - \Omega^2} \end{cases} \quad \text{État lié}$$

(pour autant que  $\rho_0 \leq 2\ell'$ ).

C'est un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation  $\omega$ , centré en  $\ell'$ , d'amplitude  $|\rho_0 - \ell'|$ . En particulier, si  $\rho_0 = \ell'$ , le système s'éloigne de l'axe de rotation sans se déformer.

$$2. \text{ Si } \Omega^2 = \frac{k}{\mu} : \rho(t) = \rho_0 + \frac{1}{2} \frac{k}{\mu} \ell t^2. \quad \text{Dissociation}$$

$$3. \text{ Si } \Omega^2 > \frac{k}{\mu} : \begin{cases} \rho(t) = -|\ell'| + (\rho_0 + |\ell'|) \cosh \omega' t \\ \omega' = \sqrt{\Omega^2 - \frac{k}{\mu}}. \end{cases} \quad \text{Dissociation}$$

En conclusion, il y a une **vitesse de rotation critique** : si  $\Omega$  est inférieure à la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ , le système reste lié et oscille avec une pulsation  $\omega$  inférieure à  $\omega_0$  ; au contraire, si  $\Omega$  est supérieure à  $\omega_0$ , le système se dissocie ( $\rho(t) \rightarrow \infty$ ).

La vitesse de rotation critique est ainsi égale à la pulsation propre  $\omega_0$  du ressort, résultat analogue à celui du paragraphe 14.3.2.

12.7 TENSIONS INTERNES, DÉFORMATIONS ET LOI DE HOOKE

12.7.1 Tenseur des tensions

Tensions internes

Considérons un petit élément de volume  $\Delta V$  à l'intérieur d'un solide (fig. 12.39). Il est soumis à des forces extérieures qui sont soit distribuées dans le volume, soit appliquées en des points. De plus, il est soumis à des forces intérieures exercées par le reste du solide sur  $\Delta V$  : ce sont les *tensions internes*. Comme ces forces sont de très courte portée, nous admettrons qu'elles agissent sur la surface de l'élément de volume en question.

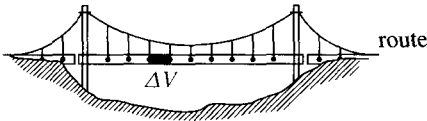


Fig. 12.39 Système : le tablier du pont. Les forces extérieures sont les forces gravifiques et celles exercées par les câbles.

Pour définir les tensions au point  $P$ , on introduit un système d'axes cartésiens  $Pe_1e_2e_3$  et on « coupe » le solide en deux parties par le plan passant par  $P$ , perpendiculairement à l'axe 1 (fig. 12.40). La surface telle que  $e_1$  est dirigé vers l'extérieur est appelée *surface positive dans la direction  $e_1$*  et l'autre, *surface négative*.

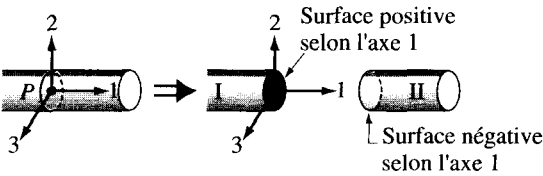


Fig. 12.40 Surface positive et négative selon l'axe 1.

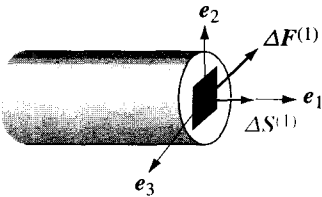


Fig. 12.41 Force  $\Delta F$  exercée par la partie II sur l'élément de surface  $\Delta S$ .

Considérons alors un petit élément  $\Delta \mathbf{S}^{(1)}$  de la surface positive, d'aire  $\Delta S_1$  (fig. 12.40). On introduit  $\Delta \mathbf{F}^{(1)}$ , résultante des forces exercées par la partie II sur cet élément,

$$\Delta \mathbf{F}^{(1)} = \sum_{i=1}^3 \Delta F_i^{(1)} \mathbf{e}_i \quad (12.113) \quad \Delta \mathbf{S}^{(1)} = \Delta S_1 \mathbf{e}_1$$

ainsi que les trois nombres

$$\sigma_{11} = \frac{\Delta F_1^{(1)}}{\Delta S_1}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Delta F_2^{(1)}}{\Delta S_1}, \quad \sigma_{13} = \frac{\Delta F_3^{(1)}}{\Delta S_1}, \quad (12.114)$$

dont la dimension est celle d'une force par unité de surface, c'est-à-dire d'une tension. Si l'on répète cette construction en prenant la direction 2, on obtient trois nombres  $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}$ , et en prenant la direction 3 on obtient trois autres nombres  $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ .

Le **tenseur des tensions** au point  $P$  est la matrice  $3 \times 3$  définie par

$$\sigma_{ij}(P) = \frac{\Delta F_j^{(i)}}{\Delta S_i} \quad (12.115) \quad \text{Tenseur des tensions}$$

où  $\Delta \mathbf{F}^{(i)}$  est la force exercée par le reste du solide sur l'élément de surface perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$ , d'aire  $\Delta S_i$ , contenant  $P$ .

En conclusion, le tenseur des tensions au point  $P$ , permet d'exprimer la force exercée sur la surface  $\Delta S_i$  perpendiculaire à  $\mathbf{e}_i$ , sous la forme

$$\Delta \mathbf{F}^{(i)} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(P) \Delta S_i \mathbf{e}_j. \quad (12.116)$$

### 12.7.2 Propriétés du tenseur des tensions

Étant donné un élément de surface, on introduit le vecteur  $\Delta \mathbf{S}$ , perpendiculaire à l'élément de surface, de norme égale à l'aire.

- Le tenseur des tensions est une matrice symétrique

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (12.117)$$

définie en chaque point  $P$  du solide.

- Soit  $\Delta \mathbf{F}$  la force interne exercée sur l'élément de surface  $\Delta \mathbf{S}$  contenant  $P$ , alors

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{i,j} \sigma_{ij}(P) \Delta S_j \mathbf{e}_i \quad \text{avec} \quad \Delta \mathbf{S} = \sum_j \Delta S_j \mathbf{e}_j \quad (12.118)$$

ou encore, en utilisant la notation matricielle,

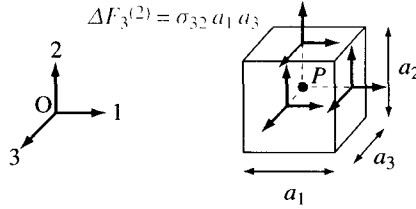
$$\Delta \mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{P}) \cdot \Delta \mathbf{S}. \quad (12.119)$$

- La matrice  $\{\sigma_{ij}(\mathbf{P})\}$  est un tenseur.

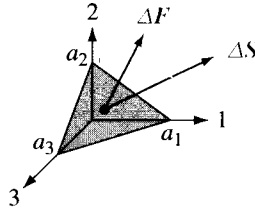
**DÉMONSTRATION.** Il suit de la troisième loi de Newton que la force exercée par la partie I (fig. 12.40) sur la surface négative de la partie II correspondant à  $\Delta \mathbf{S}^{(1)}$  est égale à  $-\Delta \mathbf{F}^{(1)}$ . Considérons alors un petit parallélépipède centré en  $P$ , de côté  $a_1, a_2, a_3$  (fig. 12.42). La condition d'équilibre appliquée à ce parallélépipède, soit  $\sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{M}_P^{(\alpha)} = 0$ , où  $\mathbf{M}_P^{(\alpha)}$  est le moment résultant par rapport à  $P$  des forces internes exercées sur la face  $\alpha$ , entraîne

$$\sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{M}_{P,1}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} a_2 (\sigma_{32} a_1 a_3) 2 - \frac{1}{2} a_3 (\sigma_{23} a_1 a_2) 2 = a_1 a_2 a_3 (\sigma_{23} - \sigma_{32}) = 0$$

Matrice symétrique d'où  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ .



**Fig. 12.42** Équilibre du parallélépipède de côté  $(a_1, a_2, a_3)$ .



**Fig. 12.43** Force interne exercée sur  $\Delta \mathbf{S}$ .

Considérons maintenant un petit élément de volume ayant une surface perpendiculaire à  $\mathbf{n}$  (fig. 12.43). Nous avons

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{1}{2} (a_3 \mathbf{e}_3 - a_2 \mathbf{e}_2) \wedge (a_1 \mathbf{e}_1 - a_2 \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2} (a_1 a_3 \mathbf{e}_2 + a_2 a_3 \mathbf{e}_1 + a_1 a_2 \mathbf{e}_3).$$

Ce petit élément de volume étant en équilibre, la condition d'équilibre entraîne

$$\Delta \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}^{(1)} - \Delta \mathbf{F}^{(2)} - \Delta \mathbf{F}^{(3)} = 0.$$

(Il faut prendre le signe négatif car les surfaces selon  $\mathbf{e}_i$  sont négatives. Nous avons négligé les forces proportionnelles au volume car  $\Delta V / \Delta S$  tend vers zéro lorsque  $\Delta V$  tend vers zéro.) Nous obtenons ainsi, en utilisant (12.116) et la symétrie  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,

$$\Delta \mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \Delta \mathbf{F}^{(i)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \Delta S_i \sigma_{ij} \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} \sigma_{ji} \Delta S_i \mathbf{e}_j.$$

$$\Delta \mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}(P) \cdot \Delta \mathbf{S}$$

Finalement, il suit de (12.118) que pour tout vecteur unité  $\hat{\mathbf{n}}$ , la grandeur

$$\sum_{i,j} \sigma_{ij} n_i n_j = \frac{\Delta \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{\Delta S}, \quad \text{où} \quad \Delta \mathbf{S} = \Delta S \hat{\mathbf{n}},$$

$\sigma_{ij}$  est un tenseur

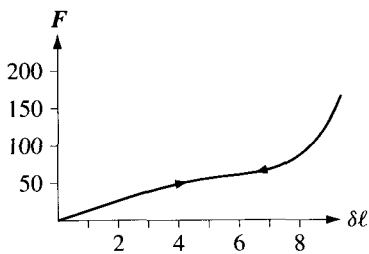
est un scalaire et, par conséquent, la matrice symétrique  $\sigma_{ij}$  est un tenseur (Appendice B). Nous avons établi ces propriétés à partir des lois de la statique ; si le solide est en mouvement, ces propriétés sont conséquences des équations du mouvement car  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{L}_G$  sont proportionnels au volume.

### 12.7.3 Observations expérimentales et loi de Hooke

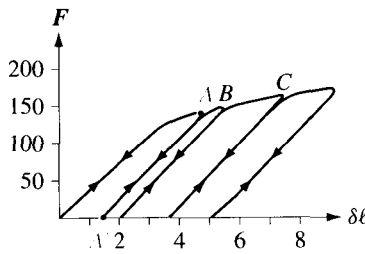
Le concept de « solide » introduit à la section 8.1 est une idéalisation, très utile en mécanique, qui est souvent une approximation suffisante. Cependant, un solide réel est un système composé d'atomes maintenus dans une certaine configuration (moyenne) grâce aux interactions interatomiques ; sous l'effet de forces extérieures, la position des atomes se modifie et le solide subit une déformation. Effectuons les expériences suivantes et observons les résultats.

#### Expérience 1. Traction

On mesure l'élongation  $\delta \ell$  d'un élastique, puis d'un ressort, en fonction de la force appliquée  $F$  (fig. 12.44).

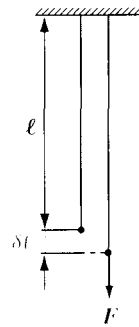


(a)

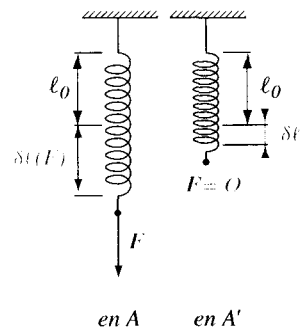


(b)

**Fig. 12.44** Expérience de traction : (a) un élastique ; (b) un ressort : les courbes successives sont obtenues en diminuant la force à partir des points A, B, C.



(a) Déformation réversible d'un élastique



(b) Déformation irréversible d'un ressort

#### Expérience 2. Fléchissement

On mesure le fléchissement  $h$  d'une lame métallique en fonction de la force appliquée  $F$  (fig. 12.45).

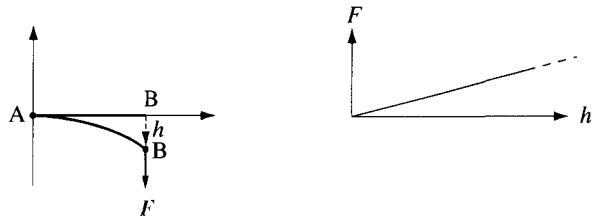


Fig. 12.45 Fléchissement.

Expérience 3. Cisaillement

Un rectangle de caoutchouc est soumis à une force  $F$  appliquée au milieu d'un des côtés ; on observe l'angle  $\theta$  que font des droites initialement horizontales en fonction de  $F$  (fig. 12.46).

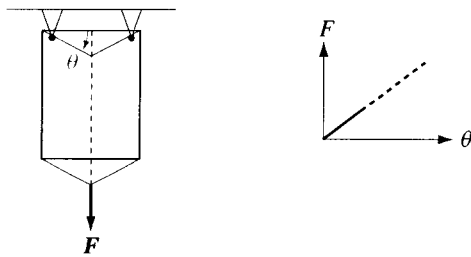


Fig. 12.46 Cisaillement pur.

Expérience 4. Torsion

Un cylindre est soumis à un couple  $Fd$  on observe l'angle de rotation  $\theta$  d'une section en fonction de  $F$  (fig. 12.47).

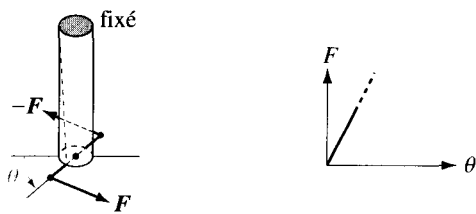


Fig. 12.47 Torsion.

HOOKE Robert  
Astronome anglais  
1635-1703

Des observations similaires conduisirent Hooke à énoncer une loi qu'il exprima sous forme d'anagramme, « ceiiinossttuv », dont l'énoncé en clair fut donné deux ans plus tard, soit « ut tensio sic vis », et que l'on exprime aujourd'hui sous la forme suivante.

Loi de Hooke (1676)

Pour de faibles déformations, la déformation est proportionnelle à la tension.

### 12.7.4 Déformations élastiques et plastiques

Considérons l'expérience simple de la traction et regardons plus en détail ce qui se passe lorsque nous augmentons *lentement* la force (fig. 12.48).

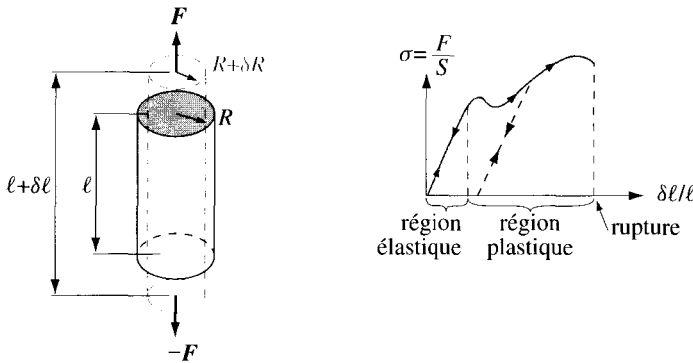


Fig. 12.48 Cylindre homogène soumis à deux forces égales et opposées.

Nous voyons que dans une première partie la loi de Hooke est bien vérifiée. Nous observons par ailleurs que pour des tensions inférieures à une certaine valeur critique, le solide reprend sa forme initiale lorsque la tension est supprimée ; dans ce cas, la transformation est réversible et de telles déformations sont dites *élastiques*. Pour des tensions supérieures, il apparaît une déformation permanente lorsque la tension est supprimée et la déformation est dite *plastique*. De plus, nous constatons que même dans le domaine élastique, il apparaît un temps de retard : immédiatement après l'application de la tension, le solide subit une première déformation, mais il n'atteint la déformation finale qu'après un temps assez long.

Déformation  
plastique

Un phénomène intéressant se manifeste lorsque l'on applique une *tension périodique* de moyenne  $\sigma_m$  ; on observe en effet que la rupture apparaît pour une valeur  $\sigma_m$  beaucoup plus faible que la tension de rupture dans le cas statique : c'est le phénomène de *fatigue*. Nous observons aussi que lorsque la tension qui cause la rupture a été appliquée lentement, la surface de fracture est irrégulière. Au contraire, dans le cas de rupture due à une tension périodique, une partie de la surface de rupture est lisse, le reste étant comme dans le cas statique très irrégulier. On peut ainsi admettre que dans le cas périodique et juste avant rupture, seule une partie de la surface contribue au support de la charge.

Fatigue

### 12.7.5 Traction

Considérons un cylindre en équilibre soumis à l'action de deux forces  $F$  et  $-F$  ayant pour support l'axe du cylindre. Soit  $S$  l'aire de la surface perpendiculaire à  $F$  et  $\sigma = |F|/S$  la *tension*.

Loi de Hooke (Traction)

Pour de faibles tensions, les variations relatives de longueur sont proportionnelles à la tension, c'est-à-dire

δℓ / ℓ = 1 / E σ et δR / R = -ν / E σ (12.120)

où δℓ = ℓ' - ℓ est la variation de longueur d'un segment parallèle à F de longueur initiale ℓ, et δR = R' - R est la variation de longueur d'un segment perpendiculaire à F de longueur initiale R.

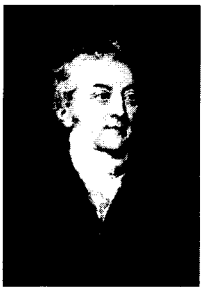
Module d'Young : E

Coefficient de Poisson : ν

Le facteur de proportionnalité E est une grandeur positive, appelée module d'Young, de dimension [E] = [F][L]⁻². Le facteur sans dimension ν est appelé coefficient de Poisson ; comme nous le verrons (§ 12.7.7 et 12.7.13), on peut démontrer que ν est compris entre -1 et 1/2, mais expérimentalement on observe toujours 0 ≤ ν ≤ 1/2.

Nous avons ainsi la relation, appelée loi de Poisson,

δR / R = -ν δℓ / ℓ. (12.121)



YOUNG Thomas  
Physicien et médecin  
anglais  
(1773-1829)

Le tableau (12.50) donne quelques valeurs de E et ν ; les valeurs de la limite d'élasticité et de la charge à la rupture sont indicatives car elles dépendent du traitement qu'a subi le matériau.

Tableau 12.49 Constantes élastiques de quelques solides.

	E N m⁻² = Pa	ν	Limite d'élasticité N m⁻²	Charge de rupture N m⁻²
Al (99,5)	7,06 · 10¹⁰	0,345	11 à 13 · 10⁷	4 à 15 · 10⁷
Acier	21,5 · 10¹⁰	0,283	25 à 80 · 10⁷	40 à 150 · 10⁷
Cuivre	12,98 · 10¹⁰	0,343	3 à 12 · 10⁷	10 à 40 · 10⁷
Verre	6 · 10¹⁰	0,3		
Plomb	1,61 · 10¹⁰	0,44	0,4 à 1 · 10⁷	1 à 2 · 10⁷
Bois	1 à 2 · 10¹⁰			
Nylon	0,3 · 10¹⁰			

10⁷ N/m² ≅ 1 kgf/mm²

12.7.6 Compression

Considérons un solide soumis à une pression p hydrostatique uniforme : p = |ΔF|/ΔS = -σ > 0.



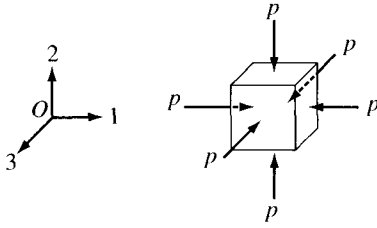


Fig. 12.50 Pression hydrostatique.

### Loi de Hooke (compression)

Pour de faibles pressions, la variation relative de volume est proportionnelle à la pression, soit

$$\frac{\delta V}{V} = -\kappa p \quad (12.122)$$

Coefficient de compressibilité :  $\kappa$

où  $\delta V = V' - V$  ; le facteur de proportionnalité  $\kappa$  est une grandeur positive appelée **coefficient de compressibilité**.

### 12.7.7 Relation entre les coefficients ( $E$ , $\nu$ , $\kappa$ )

Pour un solide isotrope, nous pouvons relier les 3 constantes élastiques ( $E$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$ ) en utilisant le principe de superposition.

« La déformation due à l'action de plusieurs forces est égale à la somme des déformations causées par chacune d'elle agissant séparément. »

Pour cela, faisons agir successivement les forces dans les directions 1, 2 et 3 ; nous avons

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta \ell_1}{\ell_1} + \frac{\delta \ell_2}{\ell_2} + \frac{\delta \ell_3}{\ell_3} = 3 \left( \frac{1}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma \right)$$

d'où

$$\kappa = 3 \frac{1 - 2\nu}{E} \quad (12.123)$$

et la condition  $\kappa$  positif implique  $\nu \leq \frac{1}{2}$ .

La valeur  $\nu = \frac{1}{2}$ , soit  $\kappa = 0$ , caractérise un *solide incompressible*.

### 12.7.8 Cisaillement

Considérons un solide en équilibre, soumis à l'action de forces tangentielles, et introduisons

$$\sigma = |\mathbf{F}|/S.$$

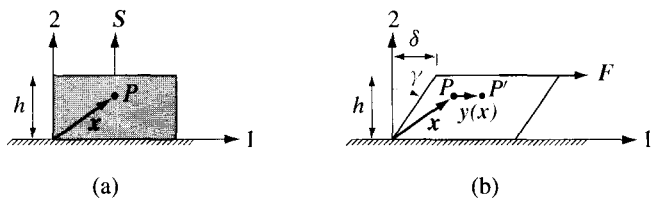


Fig. 12.51 (a) Solide non déformé ; (b) solide déformé.

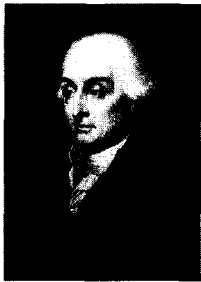
Loi de Hooke (cisaillement)

Pour de petites déformations, l'angle de cisaillement  $\gamma$  est proportionnel à la tension, soit

$$\gamma = \frac{1}{G} \sigma. \tag{12.124}$$

Module de cisaillement :  $G$

Le coefficient de proportionnalité  $G$  est appelé **module de cisaillement** ; c'est une grandeur positive, de dimension égale à celle de  $E$ , soit  $[G] = [F][L]^{-2}$ .



Comte Louis  
DE LAGRANGE  
Astronome et  
mathématicien français  
(1736-1813)

12.7.9 Tenseur des déformations (formulation de Lagrange)

On considère un solide déformé sous l'action de forces extérieures. Désignons par  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  le déplacement du point  $P$  (du solide) de vecteur-lieu  $\mathbf{x}$  avant la déformation (fig. 12.52). Après la déformation, le vecteur-lieu de  $P$  sera  $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y}(\mathbf{x})$ .

En introduisant le **tenseur des déplacements au point  $P$**  défini par

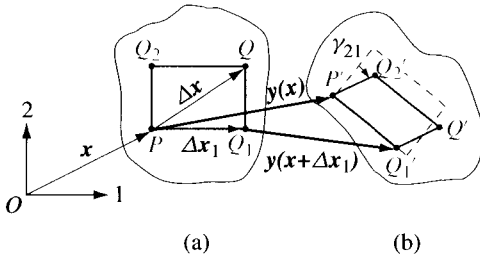
$$D_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial y_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \tag{12.125}$$

nous pouvons exprimer le déplacement  $\mathbf{y}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$  d'un point  $Q$  voisin de  $P$ , sous la forme

$$y_i(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = y_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 D_{ij}(\mathbf{x}) \Delta x_j \quad \Delta \mathbf{x} = \mathbf{PQ}, \quad |\Delta \mathbf{x}| \ll 1$$

soit, sous forme matricielle,

$$\mathbf{y}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{D} \Delta \mathbf{x}. \tag{12.126}$$



**Fig. 12.52** (a) Système non déformé ; (b) système déformé.

Pour donner l'interprétation du tenseur  $\{D_{ij}\}$ , décomposons-le en ses parties antisymétrique et symétrique

$$D_{ij} = R_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

avec

$$R_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} - D_{ji}) = -R_{ji} \quad (12.127)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) = +\varepsilon_{ji} \quad (12.128)$$

Nous avons ainsi

$$\mathbf{D}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{R}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{\varepsilon}\Delta\mathbf{x}$$

- Le tenseur antisymétrique  $\mathbf{R}$  est de la forme

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotation}$$

où  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  est un pseudo-vecteur. Par conséquent,  $\mathbf{R}\Delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \Delta\mathbf{x}$ , et le déplacement  $\mathbf{R}\Delta\mathbf{x}$  est une **rotation** d'angle  $|\boldsymbol{\alpha}|$  autour de l'axe  $\boldsymbol{\alpha}$  passant par  $P$  (§ 8.2.2).

- Par définition, le tenseur symétrique  $\mathbf{\varepsilon}$  est le **tenseur des déformations**. Nous donnons sans démonstration les propriétés de ce tenseur. Déformation

### 12.7.10 Propriétés du tenseur des déformations

- La variation relative de longueur du segment  $PQ = \Delta\mathbf{x}$  est donnée par

$$\frac{\delta |PQ|}{|PQ|} = \frac{1}{|\Delta\mathbf{x}|^2} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \quad \text{si } |\Delta\mathbf{x}| \ll 1. \quad (12.129)$$

En particulier,  $\varepsilon_{ii}$  représente la variation relative de longueur d'un segment parallèle à l'axe  $\mathbf{e}_i$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\delta \ell_i}{\ell_i}. \quad (12.130) \quad \text{Allongement}$$

- Pour  $i \neq j$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \tag{12.131}$$

où  $\gamma_{ij}$  est la variation de l'angle entre deux droites issues de  $P$ , initialement parallèles aux axes  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$  ;  $\gamma_{ij}$  est positif si l'angle final est aigu, négatif si l'angle final est obtus.

- La variation relative de volume d'un parallélépipède centré en  $P$  est donnée par la trace du tenseur  $\mathbf{\mathfrak{E}}$ , c'est-à-dire

$$\frac{\delta V}{V} = \sum_i \varepsilon_{ii} = \text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}}. \tag{12.132}$$

- Décomposons le tenseur  $\mathbf{\mathfrak{E}}$  en une partie proportionnelle à l'identité et une partie  $\mathbf{\mathfrak{E}}^{(0)}$  à trace nulle

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\delta_{ij} + \left[ \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\delta_{ij} \right] = \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{(0)}. \tag{12.133}$$

Nous aurons alors

$$\mathbf{\mathfrak{E}}\Delta\mathbf{x} = \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{\mathfrak{E}}^{(0)}\Delta\mathbf{x}.$$

Dilatation      Le terme  $\frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\Delta\mathbf{x}$  représente une déformation isotrope : c'est une **dilatation**  
Compression      si  $\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}} > 0$ , une **compression** si  $\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}} < 0$ . Le terme  $\mathbf{\mathfrak{E}}^{(0)}\Delta\mathbf{x}$  représente une  
Cisaillement pur      déformation sans variation de volume (car  $\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}}^{(0)} = 0$ ) : c'est un **cisaillement pur**. En conclusion, nous avons le résultat suivant.

### Théorème de Helmholtz (1858)

Le déplacement de tout point  $Q$  voisin de  $P$  est la superposition d'une translation  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ , d'une rotation  $\mathbf{R}\Delta\mathbf{x}$ , et d'une déformation  $\mathbf{\mathfrak{E}}\Delta\mathbf{x}$ . De plus, la déformation est la superposition d'une dilatation ou compression et d'un cisaillement pur

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{\mathfrak{E}}\Delta\mathbf{x} = \\ &= \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{3}(\text{Tr } \mathbf{\mathfrak{E}})\Delta\mathbf{x} + \mathbf{\mathfrak{E}}^{(0)}\Delta\mathbf{x}. \end{aligned}$$



Hermann VON  
HELMOLTZ  
Physicien et  
physiologiste allemand  
(1821-1894)

### 12.7.11 Exemples de tenseur des déformations

Les tenseurs des déformations dans les cas simples discutés plus haut sont les suivants.

- Pour un cylindre homogène et isotrope soumis à une *force de traction* parallèle à l'axe  $\mathbf{e}_3$  (§ 12.7.5) :

Traction      
$$\mathbf{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\delta R}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta R}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta \ell}{\ell} \end{pmatrix}$$

- Pour un solide homogène et isotrope soumis à une *pression hydrostatique* (§ 12.7.6) :

$$\mathbf{\epsilon} = \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \frac{\delta V}{V} \mathbb{1}$$

Pression  
hydrostatique

- Pour un solide homogène et isotrope soumis à des *forces tangentielles* (§ 12.7.8) : de  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \gamma x_2 \mathbf{e}_1$  (fig. 12.51), valable pour de petites déformations, on a

Forces tangentielles

$$\{D_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déplacement est la superposition d'une rotation d'angle  $\alpha = -\frac{1}{2}\gamma$  et d'un cisaillement pur d'angle  $\gamma = -2\alpha$  (fig. 12.53).

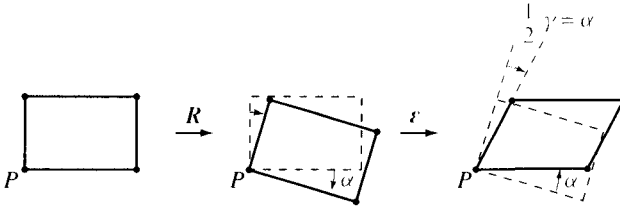


Fig. 12.53 Solide soumis à des forces tangentielles.

### 12.7.12 Formulation générale

#### Loi de Hooke

Pour de petites déformations, le tenseur des déformations d'un *solide homogène et isotrope* est proportionnel au tenseur des tensions, c'est-à-dire

$$\sigma_{ij} = 2\mu^* \epsilon_{ij} + \lambda(\text{Tr } \mathbf{\epsilon}) \delta_{ij}. \quad (12.134) \quad \text{Coefficients de Lamé}$$

Les coefficients de proportionnalité  $\mu^*$  et  $\lambda$  sont appelés **coefficients de Lamé**.

### 12.7.13 Relations entre les coefficients élastiques

Considérons un repère qui diagonalise  $\sigma_{ij}$ . Nous avons

$$\sigma_i = 2\mu^* \varepsilon_i + \lambda(\text{Tr } \mathbf{E}) \quad (12.135)$$

et

$$\text{Tr } \boldsymbol{\sigma} = (2\mu^* + 3\lambda)\text{Tr } \mathbf{E}$$

En appliquant la loi de Hooke (§ 12.7.5) à un parallélépipède de côtés parallèles à  $\mathbf{e}_i$ , on a

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta \ell_1}{\ell_1} = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\text{Tr } \boldsymbol{\sigma}$$

d'où

$$\sigma_1 = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1+\nu}\text{Tr } \boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_1 + \frac{\nu}{1+\nu}(2\mu^* + 3\lambda)\text{Tr } \mathbf{E}.$$

En comparant cette équation avec (12.135), nous obtenons finalement

$$\mu^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (12.136)$$

Par ailleurs, dans le cas de cisaillement pur, nous avons (§ 12.7.8)

$$\sigma_{21} = 2\mu^* \varepsilon_{21} = G\gamma_{21},$$

d'où

$$G = \mu^* \quad (12.137)$$

et les conditions  $G = \mu^* > 0$  et  $\kappa > 0$  impliquent

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (12.138)$$

### 12.7.14 Conclusion

Les constantes élastiques  $E$  et  $\nu$  caractérisent entièrement le comportement élastique d'un solide *homogène* et *isotrope*. Elles dépendent de la température et de la manière dont s'effectue la déformation (isotherme, adiabatique), mais elles ne dépendent pas de la forme du solide étudié.

## 12.8 PROBLÈMES

Swiss métro **12.8.1** Un tunnel rectiligne est creusé entre deux villes. Calculer le temps mis par un corps pour aller d'une ville à l'autre, sous l'action du seul champ de gravitation :

1. s'il se déplace dans le tunnel ;
2. s'il se déplace sur une orbite circulaire autour de la Terre.

Négliger les frottements. Vérifier que si les villes sont diamétralement opposées les temps sont les mêmes.

**12.8.2** Évaluer la masse de la Voie Lactée sachant que la période de révolution du Soleil autour du centre de la Voie Lactée est 250 millions d'années. A quelle vitesse (par rapport à la Terre) doit-on lancer un satellite pour qu'il puisse s'échapper de notre Galaxie ? On admettra que toute la masse de la Galaxie est répartie de manière homogène à l'intérieur d'une sphère.

Notre Galaxie

**12.8.3** Dans le modèle de Thomson, l'atome d'hydrogène est constitué d'une charge positive (= proton) uniformément distribuée à l'intérieur d'une sphère de rayon  $r_B$ , et d'un électron ponctuel se déplaçant à l'intérieur de cette sphère. Au contraire, dans le modèle de Bohr, le proton est une particule ponctuelle. On suppose le proton immobile et l'on admet la condition de quantification de Bohr : les seuls mouvements circulaires possibles de l'électron sont ceux pour lesquels  $pr = n\hbar$  où  $n$  est un entier,  $\hbar$  est la constante de Planck ( $r$  est le rayon de la trajectoire,  $p$  la quantité de mouvement). Trouver les rayons des mouvements circulaires possibles dans les deux modèles (l'expérience confirmera le modèle de Bohr).

Atome d'hydrogène

**12.8.4** On dispose d'un jet de 1 mm de diamètre constitué de  $H_2^+$  et  $D_2^+$ , ayant une vitesse  $v_0 = 10^3$  m/s. Calculer l'intensité du champ magnétique homogène  $B_0$ , et le diamètre de l'ouverture, pour obtenir un jet contenant du  $D_2^+$  uniquement dans l'expérience de la figure 12.54. Est-ce que l'intensité du jet de  $D_2^+$  sera diminuée ?

Séparation isotopique

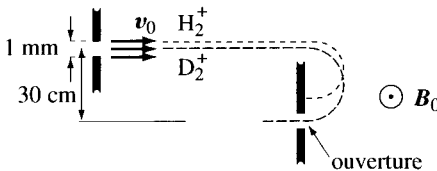


Fig. 12.54

**12.8.5** Trouver l'évolution d'une particule de masse  $m$ , charge  $q$ , se déplaçant sur un cercle de rayon  $R$  sous l'action du champ électrique oscillant  $E = E_0 \sin \gamma t e_\theta$  où  $E_0$  et  $\gamma$  sont des constantes. Montrer que la grandeur

Champ électrique

$$p = \dot{\theta} + \frac{qE_0}{mR} \frac{1}{\gamma} \cos \gamma t$$

est une intégrale première ; dans quels cas le mouvement est-il périodique ?

**12.8.6** Donner une analyse qualitative du mouvement d'un électron en présence du champ magnétique créé par un courant (§ 12.2.3) dans le cas où  $C \neq 0$ . Montrer qu'il existe un mouvement hélicoïdal.

Champ magnétique

**Bateau 12.8.7** Un bateau de 1000 kg a une vitesse maximale de 25 km/h. On admet que l'eau exerce une force de frottement  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda \mathbf{v}$  avec  $\lambda = 30 \text{ N m}^{-1} \text{ s}$ . Calculer la force  $F_0$  exercée par l'hélice lorsque le bateau avance à vitesse maximale. Le bateau est parti du port sous l'action de cette force  $F_0$ ; calculer le temps nécessaire pour atteindre 18 km/h et la distance parcourue. A cet instant, le moteur tombe en panne; calculer la distance d'arrêt.

**Largage des premiers secours 12.8.8** Un avion volant horizontalement à la vitesse  $v$  doit larguer un colis pour un village  $h$  mètres au-dessous de la trajectoire de l'avion. Calculer à quelle distance horizontale  $d$  il faut larguer le colis si l'on admet que la force de frottement est linéaire en la vitesse. En introduisant l'approximation  $\lambda d_0 \ll mv$ , où  $d_0$  est la distance en l'absence de frottement et  $m$  la masse du colis, vérifier la relation

$$d \cong d_0 \left( 1 - \frac{\lambda d_0}{3mv} \right).$$

**Balle de fusil 12.8.9** Une balle de fusil a une vitesse initiale de 430 m/s; quelle est la vitesse de la balle lorsqu'elle atteint une cible située à 300 m? On prendra  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda v^2 \hat{\mathbf{v}}$  avec  $\lambda = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N m}^{-2} \text{ s}^2$  et  $m = 5 \text{ g}$ .

**Parachutiste 12.8.10** Un parachutiste pesant 80 kg, en chute libre, est soumis à une force de frottement  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda v^2 \hat{\mathbf{v}}$ . Trouver  $\lambda$  et le coefficient  $C_x$  sachant que la vitesse maximale qu'il est possible d'atteindre est 190 km/h ( $S \cong 0,7 \text{ m}^2$ ). Le parachutiste saute d'un hélicoptère immobile et décide d'ouvrir son parachute après 1000 m de chute. Calculer le temps de chute et la vitesse atteinte.

**Galilée 12.8.11** En admettant que Galilée ait lâché deux sphères de même rayon  $R = 10 \text{ cm}$ , l'une en bois, l'autre en fer, depuis la tour de Pise, à une hauteur de 45 m, quelle aurait été la différence des temps de chute?

$$\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg/m}^3; \quad \rho_{\text{bois}} = 0,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3; \quad \rho_{\text{fer}} = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

**Accélération d'une voiture 12.8.12** Les roues motrices d'une voiture de 500 kg supportent un poids de 300 kg; le coefficient de frottement entre les roues et la route est 0,6. Montrer que la vitesse après 10 s (départ arrêté) sera inférieure à 130 km/h. Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h.

**Looping 12.8.13** Un motocycliste dans une foire désire effectuer une boucle verticale de 2 m de rayon à vitesse constante (looping). Calculer la vitesse minimale nécessaire sachant que  $\mu_s = 1$ . Quelle est la vitesse minimale nécessaire au bas de la boucle pour effectuer le looping en roue libre (= sans moteur)?

$$(\sin \theta \pm \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta \pm \pi/4)).$$

**Accélération d'une moto 12.8.14** Une moto Cagiva 650 a les données techniques suivantes :

- Puissance : 58 CV  $\cong 43 \text{ kW}$
- Vitesse maximale : 210 km/h



- Empattement : 1460 mm
- Poids : 188 kg + 20 l + conducteur  $\cong 280$  kg
- Centre de masse (fig. 12.30) :  $\ell_A \cong \ell_B$ ,  $h \cong 70$  cm
- Coefficient de frottement :  $\mu_s = 0,8$

Calculer la réaction normale sur la roue arrière et l'accélération maximale.

**12.8.15** Calculer l'accélération de freinage maximale pour la moto du problème précédent si l'on freine : Freinage d'une moto

1. sur la roue arrière ;
2. sur la roue avant ;
3. sur les deux roues ;
4. en bloquant la roue arrière.

**12.8.16** Quelle est la force nécessaire pour mettre en mouvement une voiture de 500 kg si les roues sont : Démarrage d'une voiture

1. bloquées ;
2. libres.

( $\mu_s = 0,8$ ;  $\delta_s/R = 0,04$ ).

**12.8.17** Calculer la force minimale pour faire monter la caisse du problème 4.10.11 sachant que le coefficient de frottement de la caisse sur le plan incliné est  $\mu_c$ . Entre quelles hauteurs peut-on placer la corde ? Caisse sur plan incliné

**12.8.18** Un point matériel se déplace à l'intérieur d'un tube horizontal tournant à vitesse  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical (fig. 12.36). Esquisser les orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$  lorsqu'il y a des frottements secs entre le point et le tube, de coefficient  $\mu_s$  et  $\mu_c$  (on se limitera à  $|\dot{r}| \ll g/\Omega$ ). Centrifugeuse

**12.8.19** On pose une sphère homogène (masse  $m$ , rayon  $R$ ) sur un tapis roulant se déplaçant à la vitesse  $u$ . Trouver l'évolution (coefficients de frottement  $\mu_c$  et  $\mu_s$ ). Calculer le temps  $t_0$  à partir duquel le mouvement devient uniforme, et calculer les vitesses finales ( $v^{(0)} = 0$ ;  $\omega^{(0)} = 0$ ). Tapis roulant

**12.8.20** On lance une boule de bowling de manière telle que  $v_G^{(0)} = -\lambda \omega^{(0)}$  ( $\lambda > 0$ ). Calculer l'angle (par rapport à  $v_G^{(0)}$ ) sous lequel la boule frappe les quilles ( $v_G^{(0)} = 4$  m/s,  $\omega^{(0)} = 1$  t/s,  $R = 15$  cm,  $\mu_c = 0,2$ ), et le déplacement perpendiculaire à  $v_G^{(0)}$  pour un déplacement parallèle à  $v_G^{(0)}$  de 10 m. Bowling

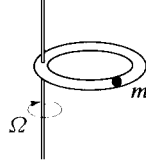
**12.8.21** Un cylindre homogène de rayon  $R = 50$  mm est posé sur un plan faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale. On demande pour quels angles  $\theta$  : Cylindre sur plan incliné

1. le cylindre reste immobile ;
  2. le cylindre roule sans glisser ;
  3. il y a toujours roulement avec glissement.
- ( $\delta_s = \delta_c = 0,5$  mm ;  $\mu_c = 0,3$  ;  $\mu_s = 0,5$ ).

Cylindre sur plan  
horizontal

**12.8.22** Le cylindre du problème précédent se trouve sur un plan horizontal avec une vitesse initiale  $v(0) \neq 0$ ,  $\omega(0) = 0$ . Décrire l'évolution.

**12.8.23** Un point matériel se déplace sans frottement à l'intérieur d'un anneau circulaire horizontal. L'anneau tourne à vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour d'un axe perpendiculaire à son plan (fig. 12.55). Montrer que le mouvement du point est similaire au mouvement d'un pendule mathématique dont on trouvera la longueur.



**Fig. 12.55**

## CHAPITRE 13

# PUISSANCE – TRAVAIL – ÉNERGIE

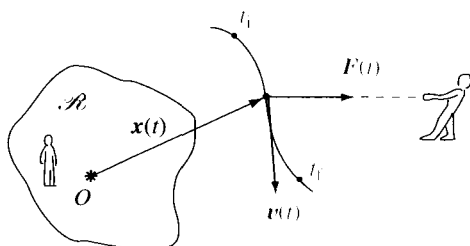
Les équations décrivant l'évolution temporelle sont en général très difficiles à résoudre et dans bien des problèmes il est préférable de commencer par chercher des constantes du mouvement. Nous avons déjà vu que pour les systèmes isolés, la quantité de mouvement et le moment cinétique sont des constantes du mouvement. Dans ce chapitre, nous trouverons une nouvelle constante du mouvement, l'énergie, grandeur fondamentale associée à l'homogénéité du temps. Pour ce faire, nous devons d'abord définir les notions de puissance et de travail.

Après avoir montré l'aspect tout à fait général du théorème de l'énergie cinétique, nous verrons par contre que l'énergie mécanique n'est conservée que dans des systèmes conservatifs, c'est-à-dire des systèmes où toutes les forces internes et externes sont conservatives : ce concept est donc une notion clé de ce chapitre.

### 13.1 PUISSANCE ET TRAVAIL

#### 13.1.1 Définitions

Considérons une force  $\mathbf{F}$  dont le point d'application  $\mathbf{x}$  se déplace au cours du temps, c'est-à-dire  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  (fig. 13.1).



**Fig. 13.1** Puissance  $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  et travail  $\Delta W = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt$ .

**Puissance** La **puissance** développée par la force  $F$  à l'instant  $t$  est la grandeur

$$P = F \cdot v \quad (13.1)$$

où  $v = \dot{x}$  est la vitesse du point d'application. C'est un scalaire de dimension  $[M][L]^2[T]^{-3}$  dont l'unité dans le système international est le **watt**,  $1 \text{ W} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

**Travail** Le **travail** effectué par la force  $F$  pendant l'intervalle de temps  $[t_i, t_f]$  est défini par

$$\Delta W(t_i, t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt P(t) = \int_{t_i}^{t_f} dt F(t) \cdot v(t). \quad (13.2)$$

**Unité** C'est un scalaire de dimension  $[M][L]^2[T]^{-2}$  dont l'unité dans le système international est le **joule**,  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 1 \text{ W s}$ . Le kilowatt-heure est l'unité qui correspond au travail effectué pendant une heure par une machine qui développe une puissance de 1 kW, d'où  $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ .

**Extensivité** Par définition, la puissance développée par un ensemble de forces à l'instant  $t$  est la somme des puissances développées par chacune d'elles ; le travail effectué par un ensemble de forces pendant l'intervalle de temps  $[t_i, t_f]$  est la somme des travaux effectués par chacune d'elles.

On introduit finalement le **travail élémentaire**  $\delta W$  effectué par la force  $F$  lors du déplacement infinitésimal  $\delta x$ ,

$$\delta W = F \cdot \delta x. \quad (13.3)$$

Il découle de ces définitions que la puissance représente le travail effectué par unité de temps :

$$P(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} F(t) \cdot \frac{\delta x}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta t}. \quad (13.4)$$

La notation  $W$  vient de l'anglais « *work* ».

### 13.1.2 Travail et forme différentielle

**Notation** En (13.2) et (13.3) nous avons introduit la notation  $\Delta W$  et  $\delta W$ . D'une manière générale, le symbole  $\Delta A$  représente une grandeur *associée à une courbe* orientée. Par exemple en (13.2),  $\Delta W$  représente le travail effectué de  $t_i$  à  $t_f$  suivant la ligne d'univers. Ci-dessous, dans l'équation (13.5), le travail est calculé le long de la trajectoire. En thermodynamique, on utilise la même notation pour calculer le travail associé à une courbe de l'espace des états.

Au contraire la notation  $\Delta A$  représente la variation de la grandeur  $A$  entre un état « initial » et un état « final », soit  $\Delta A = A_f - A_i$ . De même, les

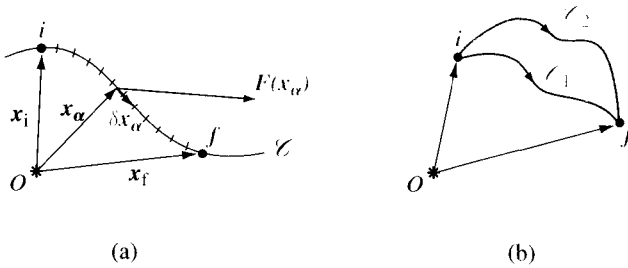
symboles  $\delta A$  et  $\delta A$  (ou  $dA$ ) seront utilisés lorsque les grandeurs en question sont infinitésimales.

Si la force est définie à partir d'un **champ de force**  $F(x)$ , c'est-à-dire si  $F(t) = F(x(t))$ , le travail ne dépend que de la trajectoire  $\mathcal{C}$  et l'on a (fig. 13.2)

$$\Delta W(t_i, t_f) = \Delta W_{\mathcal{C}}(x_i, x_f) = \int_{\mathcal{C}_{i \rightarrow f}} F(x) \cdot dx. \quad (13.5)$$

En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \Delta W(t_i, t_f) &= \int_{t_i}^{t_f} F(x(t)) \cdot v(t) dt = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \sum_{\alpha} F(x(t_{\alpha})) \cdot v(t_{\alpha}) \delta t = \\ &= \lim_{|\delta x_{\alpha}| \rightarrow 0} \sum_{\alpha} F(x_{\alpha}) \cdot \delta x_{\alpha} = \int_{\mathcal{C}_{i \rightarrow f}} F(x) \cdot dx. \end{aligned}$$



**Fig. 13.2** (a) Travail de  $F(x)$  le long de  $\mathcal{C}$  ; (b)  $\Delta W_{\mathcal{C}_1} \neq \Delta W_{\mathcal{C}_2}$  : le travail dépend du chemin parcouru.

Du point de vue mathématique, le travail élémentaire associé à un champ de force, soit  $\delta W = F \cdot \delta x$ , est une **forme différentielle**.

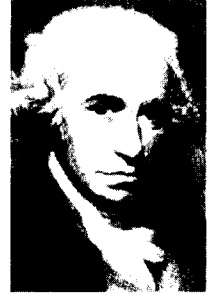
Pour un chemin  $\mathcal{C}$  fixé, nous avons les propriétés suivantes (fig. 13.3) :

$$\Delta W_{\mathcal{C}}(x_i, x_f) = \Delta W_{\mathcal{C}}(x_i, x_0) + \Delta W_{\mathcal{C}}(x_0, x_f); \quad (13.6)$$

$$\Delta W_{\mathcal{C}}(x_i, x_f) = -\Delta W_{\mathcal{C}}(x_f, x_i). \quad (13.7)$$

Par contre, pour des chemins  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  différents (fig. 13.2 b), nous avons en général  $\Delta W_{\mathcal{C}_1}(x_i, x_f) \neq \Delta W_{\mathcal{C}_2}(x_i, x_f)$  et (fig. 13.3 c)

$$\Delta W_{\mathcal{C}_1}(x_i, x_f) + \Delta W_{\mathcal{C}_2}(x_f, x_i) \neq 0.$$

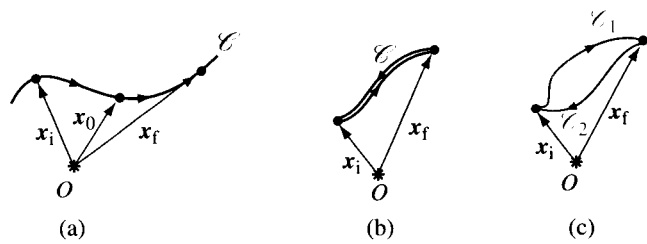


**WATT James**  
Ingénieur écossais  
(1736-1819)



**JOULE James Prescott**  
Physicien anglais  
(1818-1889)

Le travail d'une force sur un chemin fermé peut être différent de zéro



**Fig. 13.3** Travail d’une force : (a) propriété (13.6) ; (b) propriété (13.7) ; (c)  $\Delta W_{C_1} + \Delta W_{C_2} \neq 0$ .

**13.1.3 Forces centrales, actives et passives. Travail des forces de liaison**

Force centrale	<p>Si le champ de force est tel que</p> $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F(x)\mathbf{e}_r, \quad \text{où } \mathbf{x} = \mathbf{OP} = r\mathbf{e}_r,$ <p>on dit que la force est <b>centrale</b> (de centre <math>O</math>).</p>
Force passive	<p>Une force est dite <b>passive</b> si elle ne fournit aucun travail au cours de l'évolution ; elle est dite <b>active</b> dans le cas contraire.</p> <p>Par exemple, la force magnétique <math>q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}</math>, toujours perpendiculaire à la vitesse <math>\mathbf{v}</math>, est passive. De même, la réaction normale (force de liaison) exercée par une surface immobile sur un solide est toujours perpendiculaire à la vitesse ; cette force est donc passive.</p>
Forces de liaison passives	<p>D'une manière générale, si les liaisons sont <b>holonomes, indépendantes du temps</b> et <b>parfaites</b> (sect 12.6), alors le travail des forces de liaison est nul pour toute évolution.</p> <p>En effet, pour de telles liaisons, tout déplacement réel infinitésimal est un déplacement virtuel compatible et par définition (12.103) le travail élémentaire est nul.</p> <p>Le cas du roulement sans glissement est particulièrement intéressant. La force de frottement sec est passive, car la vitesse du point d'application est nulle ; la force de frottement s'identifie alors à une force de liaison que l'on peut déterminer par les équations du mouvement. Par contre, dans le cas du glissement, cette force de frottement sec est active : ce n'est plus une force de liaison, on doit la considérer comme une force appliquée.</p>
Forces de liaison actives	<p>Lorsque les liaisons dépendent du temps, les forces de liaison sont actives (§ 12.6.3).</p>

### 13.1.4 Travail d'une force : exemples

1. Travail d'une force constante, par exemple  $F = mg$ .

$$\Delta W = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{F} \int_{x_i}^{x_f} d\mathbf{x} = \Delta (\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}). \quad (13.8)$$

Le travail d'une force constante ne dépend pas du chemin parcouru.

Force constante

2. Travail d'une force centrale dépendant de  $r$  et  $\theta$ , par exemple

$$\mathbf{F} = -\frac{A \cos \theta}{r^2} \mathbf{r}. \quad (13.9)$$

Considérons les deux chemins  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  définis sur la figure 13.4.

$$\int_{\mathcal{C}_1(x_i, x_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{car} \quad \mathbf{F} \perp d\mathbf{x} \text{ sur } \mathcal{C}_1$$

par contre,

$$\int_{\mathcal{C}_2(x_i, x_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_R^r -\frac{A}{r} dr + 0 + 0 = A \ln \frac{R}{r} \neq 0.$$

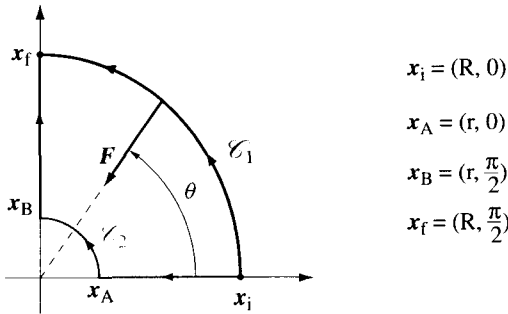


Fig. 13.4 Travail de la force  $\mathbf{F} = -\frac{A \cos \theta}{r^2} \mathbf{r}$  le long des chemins  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .

En général, le travail d'une force centrale dépend du chemin parcouru.

Force centrale

3. Travail d'une force centrale ne dépendant que de  $r$  :  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$ .

Comme  $F = F(r)$ , il existe une fonction  $U = U(r)$  telle que

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_{\mathcal{C}(x_i, x_f)} \mathbf{F}(r) \cdot d\mathbf{x} = \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr = \\ &= -[U(r_f) - U(r_i)] = -\Delta U\end{aligned}\quad (13.10)$$

car  $d\mathbf{x} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{e}_\varphi$  (sect. 9.6).

Force centrale  
conservative

Le travail d'une force centrale  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$  ne dépend pas du chemin parcouru.

4. Travail de la force de frottement sec, par exemple  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mu_c mg \hat{\mathbf{v}}$ .  
Comme  $\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|$ ,

$$\Delta W = -\mu_c mg \int_{t_i}^{t_f} dt |\mathbf{v}| = -\mu_c mgs < 0 \quad (13.11)$$

où  $s$  est la longueur du chemin parcouru par le solide.

Force de frottement  
sec

Le travail d'une force de frottement sec dépend de la trajectoire, mais pas de l'équation horaire. Il est toujours négatif lorsqu'il y a glissement ; on dit qu'il est *dissipatif*.

5. Travail de la force de frottement visqueux,  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda v^n \hat{\mathbf{v}}$ .

$$\Delta W = -\lambda \int_{t_i}^{t_f} |\mathbf{v}|^{n+1} dt < 0. \quad (13.12)$$

Force de frottement  
visqueux

Le travail d'une force de frottement visqueux est dissipatif ; il dépend de la trajectoire et de l'équation horaire.

En outre

$$|\Delta W(t_i, t_f)| \leq \lambda v_{\max}^n s \quad \text{où} \quad v_{\max} = \max_{t \in (t_i, t_f)} |\mathbf{v}(t)|$$

et  $s$  est la longueur du chemin parcouru.

Par conséquent, on peut rendre le travail de ces forces négligeable en effectuant le déplacement infiniment lentement ; au contraire, le travail des frottements secs ne dépend pas de la vitesse avec laquelle on déplace le solide.

Évolution quasi  
statique

En thermodynamique, on exprime ce résultat en disant qu'une transformation « quasi statique » est réversible en présence de frottement visqueux, mais irréversible s'il y a des frottements secs.



## Ordres de grandeur

Puissance pour monter 1 étage en 10 secondes	: $\sim 200 \text{ W}$
Voiture	: $20\text{-}220 \text{ kW}$
Centrale solaire	: $2\text{-}10 \text{ MW}$
Centrale nucléaire	: $1000 \text{ MW} = 1 \text{ GW}$
Centrale hydroélectrique (Tarbela, Pakistan)	: $5000 \text{ MW} = 5 \text{ GW}$
Combustion du charbon	: $4 \text{ eV}$ (par molécule)
Travail d'extraction de l'électron d'un atome d'hydrogène	: $13,6 \text{ eV}$
Travail d'extraction d'un nucléon du noyau	: $8 \text{ MeV}$
Fission de l'uranium	: $200 \text{ MeV}$ (par atome)

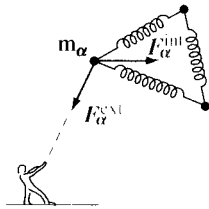
## 13.2 ÉNERGIE CINÉTIQUE

### 13.2.1 Définitions

Considérons un système formé de  $N$  points matériels de masse  $m_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , sur lesquels agissent des forces que nous décomposons en forces extérieures et forces intérieures (fig. 13.5) :

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}.$$

( $\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}}$  est la résultante des forces extérieures et  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{int}}$  la résultante des forces intérieures agissant sur le point  $P_\alpha$ .)



**Fig. 13.5** Décomposition des forces appliquées sur un système matériel ( $m_\alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, N$ ) en forces intérieures et forces extérieures.

En *mécanique newtonienne*, pour chaque point matériel nous avons :

$$\frac{d\mathbf{p}_\alpha}{dt} = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}} \quad (2^{\text{e}} \text{ loi de Newton})$$

avec  $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  (loi zéro § 10.2.2).

En multipliant à gauche et à droite l'équation de Newton par  $\mathbf{v}_\alpha$ , on a :

$$\mathbf{v}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{v}_\alpha \cdot (\mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{int}})$$

soit

$$\text{Puissance des forces extérieures et intérieures} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) = P_{\alpha}^{\text{ext}} + P_{\alpha}^{\text{int}}. \quad (13.13)$$

avec  $P_{\alpha}^{\text{ext}}$  et  $P_{\alpha}^{\text{int}}$  les puissances développées par  $F_{\alpha}^{\text{ext}}$  et  $F_{\alpha}^{\text{int}}$ .

Point matériel

En mécanique newtonienne, l'**énergie cinétique** du point matériel  $\alpha$  est définie par

$$T_{\alpha} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2. \quad (13.14)$$

Avec cette définition, (13.13) devient

$$\frac{d}{dt} T_{\alpha} = P_{\alpha}^{\text{ext}} + P_{\alpha}^{\text{int}}. \quad (13.15)$$

En sommant (13.13) sur  $\alpha$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) = P^{\text{ext}} + P^{\text{int}} \quad (13.16)$$

où

$$P^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{\text{ext}} \quad \text{et} \quad P^{\text{int}} = \sum_{\alpha} P_{\alpha}^{\text{int}} \quad (13.17)$$

sont les puissances développées par toutes les forces extérieures et toutes les forces intérieures au système.

Système matériel

L'**énergie cinétique** d'un système matériel est la grandeur positive, extensive, définie dans le cas discret par

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \quad (13.18)$$

et, dans le cas continu, par

$$T = \frac{1}{2} \int dm v^2. \quad (13.19)$$

C'est un scalaire de dimension  $[T] = [M][L]^2[T]^{-2}$ , c'est-à-dire que l'**énergie cinétique** a la dimension du travail.

### 13.2.2 Théorème de l'énergie cinétique

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la somme des puissances développées par toutes les forces extérieures et intérieures :

$$\frac{d}{dt}T = P^{\text{ext}} + P^{\text{int}}. \quad (13.20)$$

La variation d'énergie cinétique pendant l'intervalle de temps  $[t_i, t_f]$  est égale à la somme des travaux effectués par toutes les forces extérieures et intérieures :

$$\Delta T = T(t_f) - T(t_i) = \Delta W^{\text{ext}}(t_i, t_f) + \Delta W^{\text{int}}(t_i, t_f). \quad (13.21)$$

**DÉMONSTRATION.** L'équation (13.20) procède de la définition de l'énergie cinétique (13.18) et de l'équation (13.16); la deuxième partie du théorème s'obtient en intégrant (13.20) de  $t_i$  à  $t_f$ .

#### Remarques

• *Il est très important de souligner que, contrairement aux équations générales de la dynamique où les forces intérieures n'apparaissent pas, les forces intérieures jouent un rôle essentiel dans le théorème de l'énergie cinétique.*

Il suffit de considérer une voiture qui accélère sur une route horizontale. Les forces extérieures sont la force gravifique, les forces exercées par la route sur les roues et les frottements de l'air. Le travail des forces extérieures (dû uniquement aux forces de frottement de l'air) est donc négatif et la variation positive de l'énergie cinétique est entièrement due au travail des forces intérieures (le travail du moteur). Paradoxalement les forces de frottement sec (les forces de liaison entre les roues et le sol), qui sont responsables du mouvement dans les équations de Newton, ne travaillent pas (car la vitesse du point de contact est nulle) et par conséquent elles n'apparaissent pas dans le théorème de l'énergie cinétique (13.21).

Rôle des forces  
intérieures

• Le théorème de l'énergie cinétique est toujours applicable, quelle que soit la nature des forces. Au contraire, le théorème de conservation de l'énergie mécanique, que nous établirons dans la section suivante, ne s'appliquera que si toutes les forces actives sont « conservatives », concept qui sera défini ci-dessous.

• D'une manière plus générale, en particulier si l'hypothèse newtonienne  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  (loi zéro) n'est pas valable, on pourra définir l'énergie cinétique  $T$  à partir du théorème de l'énergie cinétique (13.20), avec  $T = 0$  si tous les points du système ont une vitesse nulle. Comme nous l'avons vu ci-dessus, en mécanique newtonienne la loi zéro associée à (13.20) conduit à la définition (13.18). Au contraire, en mécanique relativiste, la relation relativiste entre  $\mathbf{p}_\alpha$ ,  $m_\alpha$  et  $\mathbf{v}_\alpha$  conduit à une autre expression pour  $T$  (§ 21.6.4).

### 13.2.3 Théorèmes de König

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , de vitesse  $\mathbf{v}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \mathbf{v}_e$ . Nous avons établi au paragraphe 11.5.2 le premier théorème de König que nous rappelons ici sous une forme un peu plus générale.

#### Premier théorème de König

$\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$

Les moments cinétiques évalués dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont reliés par la relation

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{v}_e + \mathbf{L}'_A.$$

Moment cinétique

En particulier, si  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$  est le référentiel du centre de masse,

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{L}'_G.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &= \sum_{\alpha} \mathbf{AP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha}(\mathbf{v}'_{\alpha} + \mathbf{v}_e) = \\ &= \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{AP}_{\alpha} \right) \wedge \mathbf{v}_e + \mathbf{L}'_A = \\ &= M\mathbf{AG} \wedge \mathbf{v}_e + \mathbf{L}'_A. \end{aligned}$$

#### Second théorème de König

$\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$

Les énergies cinétiques évaluées dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont reliées par la relation

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_e^2 + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}_e + T'. \quad (13.22)$$

Énergie cinétique

En particulier, l'énergie cinétique  $T$  est égale à la somme de l'énergie cinétique de la masse totale concentrée en  $G$  et de l'énergie cinétique  $T'_G$  évaluée dans le référentiel du centre de masse :

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + T'_G. \quad (13.23)$$

En effet, de la définition de  $T$  et de la condition  $\mathbf{v}_e^{(P_{\alpha})} = \mathbf{v}_e$ , on tire

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\mathbf{v}'_{\alpha} + \mathbf{v}_e)^2 = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}'^2 + \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}'_{\alpha} \right) \mathbf{v}_e + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_e^2 = \\ &= T' + \mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}_e + \frac{1}{2} M \mathbf{v}_e^2. \end{aligned} \quad (13.24)$$

Finalement, si  $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_G$ , on a  $\mathbf{p}' = 0$ , ce qui conclut la démonstration.

## 13.3 FORCES CONSERVATIVES ET POTENTIEL

## 13.3.1 Forces conservatives

Le champ de force  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , ou plus simplement la force, est **conservative** si le travail (13.5) ne dépend que des extrémités  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_f$  et non de la forme du chemin, c'est-à-dire si

Forces conservatives

$$\Delta W_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) = \Delta W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) \text{ indépendant de } \mathcal{C}. \quad (13.25)$$

Par exemple, il découle des équations (13.8) et (13.10) qu'une force constante, ainsi que les forces centrales ne dépendant que de  $r$  (§ 13.1.3), sont des forces conservatives.

**Propriétés**

Les conditions suivantes sont toutes équivalentes (nécessaires et suffisantes pour que la force soit conservative).

1. Le travail de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  ne dépend que des extrémités  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_f$  et non du chemin parcouru (13.25).
2. Le travail de  $\mathbf{F}$  est nul le long de toute courbe fermée, ce que l'on écrit

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (13.26)$$

3. Il existe une fonction  $U = U(\mathbf{x})$ , telle que

$$\Delta W_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) = -[U(\mathbf{x}_f) - U(\mathbf{x}_i)]$$

c'est-à-dire

$$\Delta W = -\Delta U. \quad (13.27)$$

4. Il existe une fonction  $U = U(\mathbf{x})$  telle que  $F_i(\mathbf{x}) = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ . On écrit alors

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}U \quad (13.28)$$

et  $\mathbf{grad}U$  est appelé gradient de  $U$ .

5. Le rotationnel de  $\mathbf{F}$  est nul, c'est-à-dire

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \text{ou} \quad \mathbf{rot} \mathbf{F} = 0 \quad (13.29)$$

5 conditions  
nécessaires et  
suffisantes pour  
qu'une force soit  
conservative

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{rot} \mathbf{F}$$

et on dit alors que le champ est irrotationnel.

Cette dernière relation (13.29) est importante car elle permet de vérifier directement si un champ de force est conservatif ou non (irrotationnel ou non). En outre,  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  peut également s'exprimer dans d'autres systèmes de coordonnées (cf. ouvrages d'analyse vectorielle).

#### DÉMONSTRATION

**1  $\iff$  2** La condition 1 implique

$$\Delta W_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) = \Delta W_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f)$$

et de (13.6) et (13.7) on obtient

$$\Delta W_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) + \Delta W_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}_i) = 0$$

c'est-à-dire (13.26) (fig. 13.2 b). Inversement, si la condition 2 est satisfaite, il suffit de considérer la courbe fermée définie par deux chemins reliant  $\mathbf{x}_i$  à  $\mathbf{x}_f$  pour déduire (13.25) des mêmes relations (13.6), (13.7).

**1  $\iff$  3** La condition 3 implique trivialement la condition 1. Inversement supposons la condition 1 satisfaite ; soit  $\mathbf{x}_0$  un point arbitrairement choisi et  $U(\mathbf{x})$  la fonction définie par

$$U(\mathbf{x}) = -\Delta W(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}). \quad (13.30)$$

L'équation (13.27) est alors une conséquence de (13.6) et (13.7).

**3  $\iff$  4** La condition 4 implique

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

$$d'où \quad \Delta W_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_f) = - \int_{\mathcal{C}_{i \rightarrow f}} dU = -[U(\mathbf{x}_f) - U(\mathbf{x}_i)].$$

Pour établir la réciproque, considérons le chemin rectiligne parallèle à l'axe  $j$ , c'est-à-dire  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + s\mathbf{e}_j$ .

Nous avons ainsi

$$\Delta W_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{x_j}^{x_j+s} F_j dx_j = -[U(\mathbf{x} + s\mathbf{e}_j) - U(\mathbf{x})]$$

et par conséquent

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \Delta W_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}.$$

**4  $\iff$  5** La condition 4,  $F_j = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$ , implique

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_j - \frac{\partial}{\partial x_j} F_i = 0.$$

Pour la réciproque le lecteur est renvoyé à un ouvrage d'analyse vectorielle.

### 13.3.2 Potentiel

La fonction  $U(\mathbf{x})$  associée à une force conservative est appelée **potentiel**.  
On dit alors que la force  $\mathbf{F}$  dérive du potentiel  $U$ .

Potentiel

**Remarques.** Le potentiel  $U(\mathbf{x})$  est pour l'instant une grandeur extérieure au système (car associé à une force appliquée).

Cette grandeur a la *dimension du travail* et elle n'est définie qu'à une constante additive près : les fonctions  $U(\mathbf{x})$  et  $\tilde{U}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) + C$  définissent la même force. La constante sera choisie en imposant que le potentiel s'annule en un certain point  $\mathbf{x}_0$ , par exemple l'origine ou l'infini.

Nous voyons de (13.27) que le travail effectué par une force conservative est l'opposé de la variation du potentiel associé.

Mentionnons encore que mathématiquement on dit que la force est conservative si le travail est une *forme différentielle exacte*, et l'on écrit  $\delta W = -dU$ .

#### Propriétés

Considérons un point d'évolution  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  soumis à l'action des forces conservatives  $\{\mathbf{F}_\alpha = -\mathbf{grad} U_\alpha\}$ , ainsi qu'à d'autres forces ; alors :

Force conservative et puissance

- la résultante  $\mathbf{F}$  des forces conservatives est conservative et le potentiel  $U$  associé est la somme des potentiels  $U_\alpha$  ;
- la puissance développée par les forces conservatives est

Extensivité

$$P = -\frac{d}{dt}U \quad \text{où} \quad U = \sum_{\alpha} U_{\alpha}. \quad (13.31)$$

DÉMONSTRATION.  $F_{\alpha,i} = -\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_i}$  implique

$$F_i = \sum_{\alpha} F_{\alpha,i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{\alpha} U_{\alpha} \right)$$

d'où  $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U$  avec  $U = \sum_{\alpha} U_{\alpha}$

$$\text{et} \quad P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

### 13.4 ÉNERGIE POTENTIELLE ET ÉNERGIE MÉCANIQUE D'UN POINT MATÉRIEL

#### 13.4.1 Définitions et théorèmes fondamentaux

Considérons l'évolution  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  d'un point matériel soumis à l'action des forces conservatives  $\mathbf{F}_\alpha = -\mathbf{grad}U_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , ainsi qu'à d'autres forces, et désignons par  $\mathbf{F}^{(nc)}$  la résultante de ces autres forces (en général  $\mathbf{F}^{(nc)}$  sera la résultante des forces non conservatives). Du théorème de l'énergie cinétique (13.20) et de l'équation (13.31) on obtient

$$\frac{d}{dt}T = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha}U_{\alpha}\right) + P^{(nc)} \quad (13.32)$$

où

$$P^{(nc)} = \mathbf{F}^{(nc)} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (13.33)$$

est la puissance développée par les forces autres que les forces conservatives  $\mathbf{F}_\alpha$ . Nous avons ainsi

$$\frac{d}{dt}\left(T + \sum_{\alpha}U_{\alpha}\right) = P^{(nc)}. \quad (13.34)$$

Énergie potentielle      On appelle **énergie potentielle** du point matériel la grandeur

$$E^{\text{pot}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha}U_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (13.35)$$

Énergie mécanique      et **énergie mécanique** du point matériel la grandeur

$$E^{\text{méc}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + E^{\text{pot}}(\mathbf{x}). \quad (13.36)$$

Les grandeurs  $T$ ,  $E^{\text{pot}}$ ,  $E^{\text{méc}}$  ont toutes la dimension du travail.

Il découle de la définition (13.35) que l'énergie potentielle du point matériel s'identifie au potentiel des forces conservatives, soit

$$E^{\text{pot}}(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) \quad (13.37)$$

et l'on écrira

$$E^{\text{méc}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + U(\mathbf{x}). \quad (13.38)$$

L'équation (13.34) conduit alors aux résultats suivants.



### Théorème de l'énergie (point matériel)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance développée par toutes les forces qui ne contribuent pas à l'énergie potentielle :

Cas général

$$\frac{d}{dt}E^{\text{méc}} = P^{(\text{nc})} \quad (13.39)$$

et, par intégration de  $t_i$  à  $t_f$ , la variation d'énergie mécanique est égale au travail effectué par toutes les forces qui ne contribuent pas à l'énergie potentielle

$$\Delta E^{\text{méc}} = \Delta W^{(\text{nc})}. \quad (13.40)$$

### Théorème de conservation de l'énergie (point matériel)

Si toutes les forces actives sont conservatives, l'énergie mécanique est une constante du mouvement :

Forces conservatives

$$E^{\text{méc}}(t) = E^{\text{méc}}(t_0) = T + U. \quad (13.41)$$

Dans ce cas, la variation d'énergie cinétique est l'opposé de la variation d'énergie potentielle

$$\Delta T = -\Delta U. \quad (13.42)$$

On dit alors qu'il y a conservation de l'énergie, ou encore qu'il y a conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique (et réciproquement).

**DÉMONSTRATION.** En introduisant toutes les forces actives dans la définition de l'énergie potentielle, la puissance  $P^{(\text{nc})}$  développée par les autres forces (passives) est nulle, d'où

$$\frac{d}{dt}E^{\text{méc}} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta E^{\text{méc}} = 0.$$

### 13.4.2 Remarques

• La différence d'énergie potentielle entre les positions  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{x}$  est parfois définie par le travail qu'il faut fournir au point matériel pour le déplacer de l'état  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0 = 0)$  à l'état  $(\mathbf{x}, \mathbf{v} = 0)$  (fig. 13.6).

Autre définition de l'énergie potentielle

En effet,  $\Delta T = 0$  entraîne  $\Delta E^{\text{pot}} = \Delta W^{(\text{nc})}$ , où la force non conservative est la force appliquée nécessaire pour effectuer le déplacement.

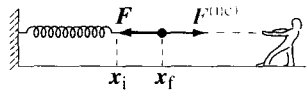


Fig. 13.6 Autre définition de l'énergie potentielle :  $E^{\text{pot}}(x_f) - E^{\text{pot}}(x_i) = \Delta W^{(\text{nc})}$ .

- Les grandeurs énergie potentielle et énergie mécanique sont des scalaires qui ne dépendent que de l'état du point matériel  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Précédemment (§ 13.3.2), nous avons introduit les potentiels  $U_\alpha$  comme des grandeurs associées à des forces extérieures au système. Or, en passant l'expression  $\sum_\alpha U_\alpha$  du membre de droite (13.32) au membre de gauche (13.34), on a transformé une propriété « de l'extérieur » en une propriété du point matériel. Ainsi, les théorèmes ci-dessus conduisent à considérer l'énergie potentielle et l'énergie mécanique comme des grandeurs physiques associées au point matériel en présence des forces conservatives  $\{\mathbf{F}_\alpha = -\text{grad}U_\alpha\}$ . Remarquons en outre que la variation de l'énergie potentielle du point matériel est l'opposé du travail effectué par les forces conservatives  $\{\mathbf{F}_\alpha\}$ .
- Dans la partie cinématique (chap. 6), nous avons introduit une constante du mouvement  $G(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  conséquence du lemme fondamental. Pour un point matériel, cette constante correspond ainsi à l'énergie mécanique divisée par la masse.
- En présence de forces actives non conservatives, il n'y a pas conservation de l'énergie mécanique ; au contraire, la variation d'énergie mécanique sera égale au travail effectué par ces forces. Ce sera en particulier le cas lorsqu'il y a des forces exercées par des machines ou des hommes ( $\Delta E^{\text{méc}} \geq 0$ ), ainsi que dans le cas de frottement. Le travail des forces de frottement étant toujours négatif (ou nul), *les frottements conduisent à une diminution de l'énergie mécanique* (sauf dans les cas tels que le roulement sans glissement). Des forces dont le travail est toujours négatif sont dites *dissipatives* et l'on appelle *puissance dissipée*  $P^{\text{diss}}$  l'opposé de la puissance développée par les forces dissipatives :  $P^{\text{diss}} \geq 0$ . Mentionnons que si la variation d'énergie mécanique est positive, on dit que le point matériel reçoit du travail de l'extérieur ; dans le cas contraire ( $\Delta E^{\text{méc}} < 0$ ), le point matériel fournit du travail à l'extérieur ou/et il « dissipe » de l'énergie.
- On écrira simplement  $E(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  au lieu de  $E^{\text{méc}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible.

13.4.3 Exemples d'énergie potentielle

Le tableau 13.7, obtenu à partir du paragraphe 13.1.4, donne quelques exemples d'énergie potentielle.

Puissance dissipée

Tableau 13.7

	Force	Énergie potentielle
Pesanteur	$mg$	$-mg \cdot \mathbf{x}$
Champ électrique constant	$q\mathbf{E}$	$-q\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}$
Champ électrique $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi(\mathbf{x}, t)$	$q\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$	$q\Phi(\mathbf{x}, t)$
Force élastique	$-k( \mathbf{x}  - \ell)\mathbf{e}_r$	$\frac{1}{2}k( \mathbf{x}  - \ell)^2$
Force gravifique	$-G \frac{Mm}{ \mathbf{x} ^3} \mathbf{x}$	$-G \frac{Mm}{ \mathbf{x} }$
Force électrique	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{ \mathbf{x} ^3} \mathbf{x}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{ \mathbf{x} }$

### 13.5 ILLUSTRATIONS : FORCES CONSERVATIVES

#### 13.5.1 Mouvement linéaire conservatif

Considérons un point matériel astreint à se déplacer sans frottement sur la courbe  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ , paramétrisée par l'abscisse curviligne  $s$ , et soumis à l'action d'un champ de force  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  arbitraire. En projetant l'équation de Newton sur les axes  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}$  (§ 5.1.6 et 5.2.5), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{s} = F_r(s) \end{array} \right. \quad \text{où} \quad F_r(s) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}(s) \quad (13.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\dot{s}^2}{R} = F_n(s) + N \end{array} \right. \quad \text{où} \quad F_n(s) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}(s), \quad (13.44)$$

avec  $R$  le rayon de courbure et  $N$  la force de contrainte.

De la première équation on trouve l'évolution  $s = s(t)$  et de la seconde on obtient la force de liaison  $N$ .

On appelle **mouvement linéaire conservatif** le mouvement d'un système à 1 degré de liberté dont l'évolution est définie par

$$m\ddot{x} = f(x) \quad (13.45)$$

Dans ce cas, l'énergie mécanique

Constante du mouvement

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x), \quad \text{où} \quad f(x) = -U'(x), \quad (13.46)$$

est conservée (c'est également l'expression du lemme fondamental). On commence par étudier les différents mouvements possibles en appliquant l'analyse qualitative du chapitre 7. On peut ensuite essayer d'intégrer l'équation

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))} \quad (13.47)$$

pour trouver l'évolution  $x = x(t)$  de manière explicite ( $E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0)$  et le signe de  $v$  est celui de  $v_0$  jusqu'à l'instant  $t$  où  $v(t) = 0$ ).

Comme nous l'avons déjà vu à plusieurs reprises dans les chapitres précédents, l'équation (13.46) apparaît souvent comme l'une des intégrales premières d'un système à plusieurs degrés de liberté avec  $f(x)$  une fonction de  $x$  et des autres constantes du mouvement. Cette remarque sera illustrée par les exemples de cette section.

13.5.2 Point matériel pesant sur une surface immobile

Considérons un point matériel de masse  $m$  se déplaçant sous l'action de la pesanteur sur une courbe, ou une surface, *immobile* et *en l'absence de tout frottement*. Dans ce cas, la force de liaison non conservative est passive et la seule force active est la force de pesanteur  $mg$  qui est conservative. Nous avons ainsi le résultat suivant.

Surface immobile      L'énergie mécanique du point matériel ci-dessus

$E(x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - mg \cdot x$  (13.48)

est une constante du mouvement.

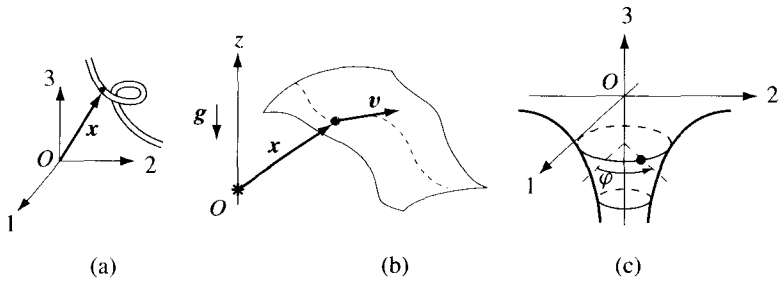


Fig. 13.8 Mouvement d'un point matériel pesant : (a) sur une courbe ; (b) sur une surface quelconque ; (c) sur une surface de révolution d'axe parallèle à  $g$ .

Il faut souligner que (13.48) n'est pas une constante du mouvement si la surface est mobile, ou s'il y a des frottements, car dans ces cas, les forces non conservatives (liaison ou frottement) sont actives.

Dans le cas d'un *point matériel sur une courbe* (§ 13.5.1), on a un système à un *degré de liberté* pour lequel (13.48) donne une *constante du mouvement* : c'est un *système intégrable*. La recherche de l'évolution se ramène à une quadrature :

$\frac{1}{2}ms'^2 + mgz(s) = E \quad (s = \text{abscisse curviligne})$

entraîne

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{s_0}^{s(t)} \frac{ds}{\sqrt{E - mgz(s)}}.$$

Pour illustrer le mouvement d'un point matériel sur une surface, analysons le mouvement d'un point sur la surface de révolution d'axe parallèle à  $\mathbf{g}$ , d'équation (en coordonnées cylindriques) :

$$z = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad (13.49)$$

où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes positives (fig. 13.8 c).

Cet exemple, relativement long, est intéressant pour deux raisons : il met en évidence l'existence d'une valeur critique du paramètre  $\alpha$  et nous verrons que l'analyse qualitative est plus complexe car le coefficient de  $\dot{\rho}^2$  est une fonction de  $\rho$  (et non une constante comme dans (13.46)).

La résultante des forces (liaison et pesanteur) agissant sur le point étant dans le plan vertical défini par  $\mathbf{x}$  et l'axe  $O3$ , on a  $\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{x} \wedge \mathbf{F}) = 0$  et, par conséquent,  $L_{O,3}$  est une constante du mouvement. On a ainsi deux constantes du mouvement pour un système à deux degrés de liberté : c'est un système intégrable. De

$$L_{O,3} = m\rho^2\dot{\varphi} = L \quad (= \text{cste}) \quad (13.50)$$

et

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + mgz = E \quad (= \text{cste}) \quad (13.51)$$

avec la contrainte (13.49) qui entraîne

$$\dot{z} = \alpha \frac{A}{\rho^{\alpha+1}} \dot{\rho}, \quad (13.52)$$

on obtient

$$\frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{\alpha^2 A^2}{\rho^{2\alpha+2}} \right) \dot{\rho}^2 + \frac{L^2}{2m\rho^2} - mg \frac{A}{\rho^\alpha} = E. \quad (13.53)$$

- Si  $\dot{\varphi}_0 = 0$ , alors  $L = 0$ , ce qui entraîne  $\varphi(t) = \varphi_0$  et dans ce cas la trajectoire est une génératrice.
- Si  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ , alors  $L \neq 0$  et la particule tourne toujours dans le même sens autour de l'axe  $O3$  ( $\text{sign}\dot{\varphi} = \text{sign}\dot{\varphi}_0$ ).

En introduisant le potentiel effectif (13.62)

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - mg \frac{A}{\rho^\alpha}; \quad (13.54)$$

l'équation (13.53) devient

$$\frac{1}{2}m \left( 1 + \frac{\alpha^2 A^2}{\rho^{2\alpha+2}} \right) \dot{\rho}^2 = E - U_{\text{eff}}(\rho). \quad (13.55)$$

Attention ! Ici le coefficient de  $\dot{\rho}$  est une fonction de  $\rho$ . Toutefois de (13.55) nous avons toujours la relation

$$E - U_{\text{eff}}(\rho) \geq 0 \quad \text{avec} \quad E = U_{\text{eff}}(\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} = 0.$$

Plusieurs cas à considérer Nous pouvons ainsi esquisser l’allure qualitative des orbites, en distinguant les différents cas  $0 < \alpha < 2$ ,  $\alpha = 2$ , et  $\alpha > 2$ .

Cas I

Si  $0 < \alpha < 2$  (fig. 13.9), le mouvement du point est tel que  $\rho \geq \rho^{\min}$  où  $\rho^{\min} > 0$  est solution de  $U_{\text{eff}}(\rho^{\min}) = E$ .

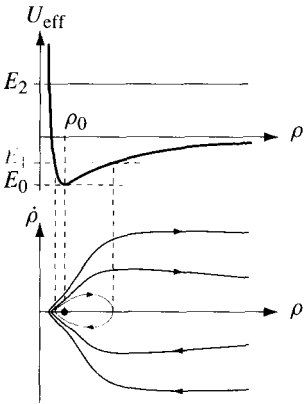


Fig. 13.9 Allure qualitative des orbites pour  $L$  fixé et  $0 < \alpha < 2$ .

Pour  $L$  fixé, la valeur minimale de  $E$ , soit  $E_0 = \min U_{\text{eff}}(\rho)$ , correspond au mouvement circulaire uniforme :

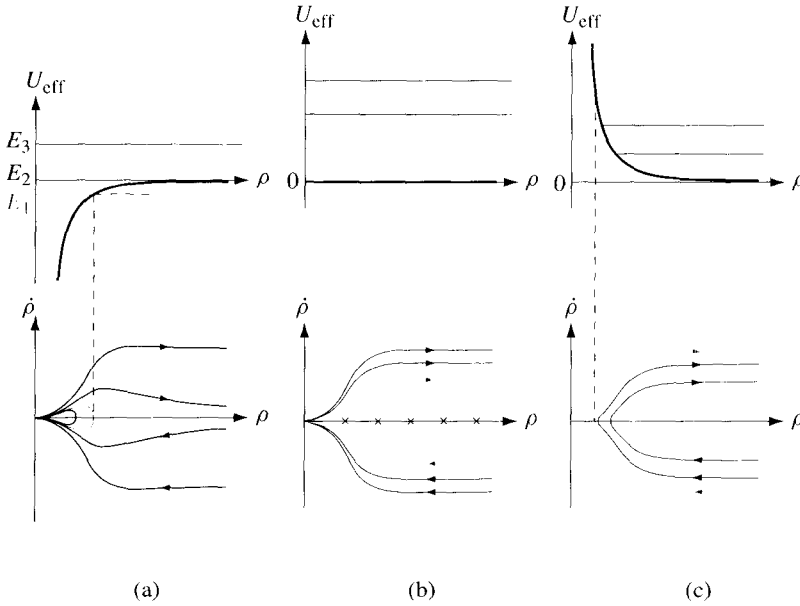
$$\frac{dU_{\text{eff}}}{d\rho} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \rho_0^{\alpha-2} = \alpha \frac{m^2 g A}{L^2}, \quad \text{et de (13.50)}$$
$$\dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{\alpha g A}{\rho_0^{\alpha+2}}} = \omega_0. \tag{13.56}$$

Cette relation exprime la vitesse angulaire  $\omega_0$  du mouvement circulaire de rayon  $\rho_0$ . Dans ce cas, le mouvement circulaire est stable (fig. 13.9).

$0 < \alpha < 2$  Pour  $E_0 < E < \infty$ , le mouvement est tel que  $\rho$  oscille entre  $\rho_{\min}$  et  $\rho_{\max}$  et, par conséquent, de (13.49)  $z$  oscille entre  $z_{\min}$  et  $z_{\max}$  : c’est un état lié. Au contraire, pour  $E \geq 0$ , la particule part à l’infini ( $\rho \rightarrow \infty$  et  $z \rightarrow 0$ ) : c’est un état de diffusion.

Cas II

Si  $\alpha = 2$  (fig. 13.10),  $U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{2m\rho^2} (L^2 - 2m^2 g A).$



**Fig. 13.10** Allure qualitative des orbites pour  $\alpha = 2$  : (a)  $L^2 < 2m^2gA$  ; (b)  $L^2 = 2m^2gA$  ; (c)  $L^2 > 2m^2gA$ .

L'analyse qualitative donne les résultats suivants.

- Si  $L^2 < 2m^2gA$  et  $E < 0$ , le point tombe finalement au fond du puits ( $z \rightarrow -\infty$ ) ; pour  $\rho \rightarrow 0$  (soit  $z \rightarrow -\infty$ ) on a, de (13.55) et (13.52),

$$\dot{\rho} \cong -\frac{\rho^3}{2A} \sqrt{-\frac{2}{m} U_{\text{eff}}(\rho)} = -\frac{\rho^2}{2mA} \sqrt{2m^2gA - L^2}$$

$$\dot{z} \cong -\frac{1}{\rho} \frac{1}{m} \sqrt{2m^2gA - L^2}, \quad \text{d'où} \quad \ddot{z} \cong -g \left( 1 - \frac{L^2}{2m^2gA} \right).$$

Le mouvement vertical tend vers un mouvement uniformément accéléré,  $\alpha = 2$   
d'accélération inférieure à  $g$ , et  $|\dot{\varphi}|$  tend vers l'infini ( $mg^2\dot{\varphi} = L$ ).

- Si  $L^2 = 2m^2gA$ , alors  $U_{\text{eff}}(\rho) = 0$  et soit il y a des *mouvements circulaires uniformes instables* ( $E = 0$ ), de vitesse angulaire

$$\omega_0 = \dot{\varphi}_0 = \frac{1}{\rho_0^2} \sqrt{2gA} \quad (13.57)$$

soit la particule part à l'infini, soit elle tombe au fond du puits. Dans ce dernier cas on a pour  $\rho \rightarrow 0$

$$\dot{\rho} = -\frac{\rho^3}{A} \sqrt{\frac{E}{2m}} \quad \text{et} \quad \dot{z} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

$\alpha = 2$       Le mouvement vertical tend vers un mouvement uniforme.

- Si  $L^2 > 2m^2gA$ , la particule descend jusqu'à une profondeur  $z_{\min}$  (soit  $\rho = \rho_{\min}$ ) puis remonte jusqu'à  $z = 0$  (soit  $\rho \rightarrow \infty$ ).

Cas III

Si  $\alpha > 2$  (fig. 13.11), le maximum  $E_0$  de  $U(\rho)$  caractérise un *mouvement circulaire uniforme instable* de rayon  $\rho_0$  et de vitesse angulaire  $\dot{\phi}_0$  (13.56).

Par ailleurs, au voisinage de  $\rho=0$ , nous aurons de (13.55), (13.54) et (13.52)

$$\dot{\rho} \cong \pm \frac{\rho^{\alpha+1}}{\alpha A} \sqrt{-\frac{2}{m} U_{\text{eff}}(\rho)} \cong \pm \sqrt{\frac{2g}{A}} \frac{1}{\alpha} \rho^{1+\frac{\alpha}{2}}$$
$$\dot{z} \cong \pm \sqrt{2gA} \rho^{-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{d'où} \quad \ddot{z} \cong -g.$$

$\alpha > 2$       Au voisinage de l'axe 3, le mouvement vertical tend vers un mouvement uniformément accéléré, d'accélération égale à  $g$ .

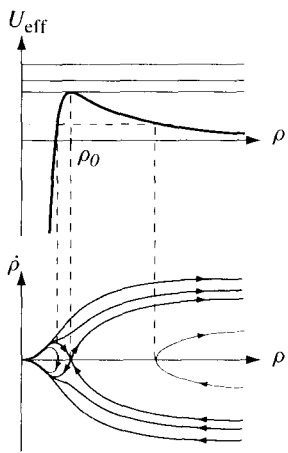


Fig. 13.11 Allure qualitative des orbites pour  $\alpha > 2$ .

En conclusion, on voit que le mouvement du point est très différent selon que  $0 < \alpha < 2$ ,  $\alpha = 2$  ou  $\alpha > 2$ . En particulier, les mouvements circulaires sont *stables* si  $\alpha < 2$ , *instables* si  $\alpha \geq 2$ .

Valeur critique

De plus, si  $\alpha \neq 2$ , les différents mouvements circulaires correspondent à différentes valeurs du moment cinétique  $L$  et  $E = E_0(L)$ . Au contraire, pour  $\alpha = 2$ , tous les mouvements circulaires ont les mêmes constantes du mouvement  $L^2 = 2m^2gA$  et  $E = 0$ .

Ainsi  $\alpha = 2$  est une *valeur critique* de ce problème.



### 13.5.3 Mouvement central conservatif

Au chapitre 6 nous avons dit que le mouvement d'un point est central si le support du vecteur accélération passe constamment par un point  $O$  fixé. Il suit de la loi de Newton que le mouvement d'un point  $P$  est central de centre  $O$  si et seulement si la force agissant sur ce point est une force centrale (§ 13.1.3), c'est-à-dire de la forme

Mouvement central

$$\mathbf{F} = F(\mathbf{x}) \mathbf{e}_r \quad \text{où} \quad \mathbf{x} = \mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r.$$

De plus, comme nous l'avons vu (§ 13.3.1), si  $F(\mathbf{x})$  ne dépend que de  $r$ , la force centrale est conservative, et  $\mathbf{F}$  dérive du potentiel

$$U(\mathbf{x}) = U(r) \quad \text{où} \quad F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}.$$

On appelle **mouvement central conservatif** le mouvement d'un point  $P$  soumis à une **force centrale conservative**, c'est-à-dire une force centrale qui ne dépend que de  $r = |\mathbf{OP}|$  :

Mouvement central conservatif

$$\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r. \quad (13.58)$$

#### Théorème

Il existe deux constantes du mouvement associées à l'évolution d'un point matériel soumis à une force centrale conservative de centre  $O$  : le **moment cinétique**  $L_O = \mathbf{x} \wedge m\mathbf{v}$  et l'**énergie mécanique**

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{x}) \quad \text{où} \quad U(\mathbf{x}) = -\int_{\rho}^{|\mathbf{x}|} dr F(r) = U(r) \quad (13.59)$$

et  $\rho$  est un nombre arbitrairement choisi. (En général on prendra  $\rho = 0$  ou  $\rho = \infty$ .)

En particulier, le mouvement sera plan et

$$\left\{ \begin{array}{l} mr^2\dot{\theta} = L_0 \quad (= m r_0^2 \dot{\theta}_0) \end{array} \right. \quad (13.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} + U(r) = E \quad (= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + U(\mathbf{x}_0)). \end{array} \right. \quad (13.61)$$

En effet, de  $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{e}_r$ , on obtient

$$\frac{d}{dt}L_O = \mathbf{M}_O = \mathbf{x} \wedge \mathbf{F} = 0$$

et par conséquent  $L_0$  est un vecteur constant. On retrouve ainsi les propriétés du mouvement central (§ 6.5.3) : le mouvement est plan et  $mr^2\dot{\theta}$  est une constante du mouvement. Par ailleurs, la force étant conservative, l'énergie mécanique est une constante du mouvement. Finalement en coordonnées polaires, nous obtenons à partir de (13.60)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2r^2}$$

ce qui conduit de (13.59) à (13.61).

La barrière  
centrifuge empêche  
le point de tomber  
sur l'origine

La fonction  $L_0^2/2mr^2$  est appelée **barrière centrifuge** et la fonction

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L_0^2}{2mr^2} \tag{13.62}$$

est le **potentiel effectif**.

L'équation (13.61) s'écrit alors

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E. \tag{13.63}$$

Évolution et trajectoire

Méthode de  
résolution

Pour étudier l'évolution d'un point matériel soumis à une force centrale conservative, on procède comme dans l'exemple du paragraphe précédent. Ayant choisi une valeur  $L_0$ , on commence par une analyse qualitative du mouvement défini par (13.63). On essaie ensuite d'intégrer analytiquement ou numériquement (13.63) pour obtenir  $t = t(r)$  puis, en inversant,  $r = r(t)$  ; et enfin  $\theta(t)$  par intégration de (13.60) :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{L_0}{mr^2} \tag{13.64}$$

d'où

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \tag{13.65}$$

$$\theta - \theta_0 = \pm \frac{L_0}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt}{r^2(t)}. \tag{13.66}$$

Finalement, l'équation de la trajectoire s'obtient à partir de

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \pm \frac{L_0}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}})}} \tag{13.67}$$

d'où

$$\theta - \theta_0 = \pm L_0 \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (13.68)$$

En conclusion, la résolution du problème d'un point matériel soumis à une force centrale se ramène à des quadratures. (Nous reviendrons sur l'analyse qualitative du mouvement au paragraphe 18.2.2.)

### 13.6 ÉNERGIE POTENTIELLE ET ÉNERGIE MÉCANIQUE D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

#### 13.6.1 Définitions et théorèmes fondamentaux

Considérons un système formé de  $N$  points matériels de masse  $m_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ , et décomposons toutes les forces actives en forces « conservatives » et « non conservatives » (les forces passives n'apparaissent pas dans le théorème de l'énergie cinétique).

Le théorème de l'énergie cinétique (§ 13.2.2) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}T = P^{(c)} + P^{(nc)} \quad \text{où} \quad P^{(c)} = P^{\text{ext}(c)} + P^{\text{int}(c)} \quad (13.69)$$

$$\Delta T = \Delta W^{(c)} + \Delta W^{(nc)}; \quad \Delta W^{(c)} = \Delta W^{\text{ext}(c)} + \Delta W^{\text{int}(c)}. \quad (13.70)$$

En ce qui concerne les forces non conservatives, il n'est pas nécessaire de décomposer entre contributions intérieures et extérieures.

Pour les *forces extérieures conservatives*, l'équation (13.31) implique

Forces extérieures

$$P^{\text{ext}(c)} = -\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^N U_\alpha \right)$$

où  $U_\alpha = U_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$  est le potentiel associé à la résultante des forces extérieures conservatives agissant sur le point  $\alpha$ .

On appelle **énergie potentielle extérieure** du système la somme des énergies potentielles associées aux forces extérieures conservatives :

Énergie potentielle  
extérieure

$$U^{\text{ext}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{\alpha=1}^N U_\alpha(\mathbf{x}_\alpha). \quad (13.71)$$

Nous avons ainsi

$$P^{\text{ext}(c)} = -\frac{d}{dt}U^{\text{ext}}. \quad (13.72)$$

Forces intérieures      Considérons ensuite la contribution  $P^{\text{int(c)}}$  des *forces intérieures conservatives*. Nous supposons que ces forces sont centrales conservatives, c'est-à-dire que la force  $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$  exercée par  $\beta$  sur  $\alpha$  est parallèle à  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta$ , et ne dépend que de  $r = |\mathbf{x}|$ ,

$$\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}(\mathbf{x}) = - \left( \frac{d}{dr} U_{\alpha\beta}(r) \right) \frac{\mathbf{x}}{r} = -\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \quad (13.73)$$

où

Potentiel d'interaction       $U_{\alpha\beta}(r) = U_{\beta\alpha}(r) = U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta)$  (13.74)

est le *potentiel* dont dérive la force  $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$ .

Nous avons par exemple (tab. 13.7) :

- pour la force gravifique  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -G \frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{x}|};$  (13.75)

- pour la force électrique  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_\alpha q_\beta}{|\mathbf{x}|};$  (13.76)

- pour une force harmonique  $U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} k_{\alpha\beta} (|\mathbf{x}| - \ell_{\alpha\beta})^2.$  (13.77)

Avec la condition (13.73), et en introduisant  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) = \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \mathbf{v} \\ &= F_r^{\beta \rightarrow \alpha} \frac{dr}{dt} = - \left( \frac{d}{dr} U_{\alpha\beta}(r) \right) \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \mathbf{v}_\beta = - \frac{d}{dt} U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \quad (13.78)$$

et

$$\begin{aligned} P^{\text{int(c)}} &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \mathbf{v}_\alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \cdot \mathbf{v}_\alpha + \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \cdot \mathbf{v}_\beta \right\} = \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{d}{dt} U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) = \\ &= - \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \right\}. \end{aligned}$$

On appelle **énergie potentielle d'interaction** du système la grandeur définie par

Énergie potentielle d'interaction

$$U^{\text{int}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} U_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta) \quad (13.79)$$

Avec cette définition, nous avons finalement

$$P^{\text{int(c)}} = -\frac{d}{dt} U^{\text{int}} \quad (13.80)$$

En introduisant les expressions (13.72) pour  $P^{\text{ext(c)}}$  et (13.80) pour  $P^{\text{int(c)}}$  dans l'équation (13.69) on obtient

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{d}{dt} U^{\text{ext}} - \frac{d}{dt} U^{\text{int}} + P^{(\text{nc})}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} (T + U^{\text{ext}} + U^{\text{int}}) = P^{(\text{nc})}$$

On appelle **énergie mécanique** du système la grandeur définie par

Énergie mécanique

$$E^{\text{méc}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = T + U^{\text{ext}} + U^{\text{int}}. \quad (13.81)$$

En conclusion, nous avons établi les théorèmes de l'énergie suivants.

### Théorème de l'énergie (Cas général)

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un système matériel est égale à la puissance développée par toutes les forces qui ne contribuent pas à l'énergie potentielle, soit

$$\frac{d}{dt} E^{\text{méc}} = P^{(\text{nc})} \quad (13.82)$$

ou encore, par intégration de  $t_i$  à  $t_f$ , la variation de l'énergie mécanique est égale au travail effectué par toutes les forces qui ne contribuent pas à l'énergie potentielle

$$\Delta E^{\text{méc}} = \Delta W^{(\text{nc})}.$$

**Théorème de conservation de l'énergie**

Super-loi de la physique

Si toutes les forces actives sont conservatives, l'énergie mécanique est une constante du mouvement,

$$T + U^{ext} + U^{int} = E = cste \tag{13.83}$$

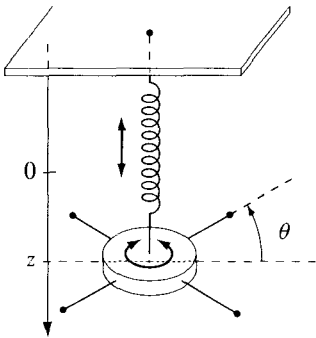
ce que l'on écrit aussi sous la forme

$$\Delta T + \sum_{\alpha=1}^N \Delta U_{\alpha} + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \Delta U_{\alpha\beta} = 0. \tag{13.84}$$

**13.6.2 Illustration expérimentale : Pendule de Wilberforce**

WILBERFORCE Lionel  
Robert  
Préparateur en  
physique à Cambridge  
(1861-1944)

En lâchant le pendule de Wilberforce (fig. 13.12) sans vitesse initiale, on observe que l'énergie potentielle gravifique se transforme en énergie potentielle élastique et en énergie cinétique ; par ailleurs, l'énergie cinétique se transforme périodiquement en énergie cinétique de translation (le système oscille verticalement sans rotation), puis en énergie cinétique de rotation (les oscillations verticales cessent et le pendule oscille autour de l'axe du ressort).



**Fig. 13.12** Pendule de Wilberforce :  $E^{mec} = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - mgz + \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + \lambda z\theta$   
où  $k$  = constante du ressort ;  
 $C$  = constante de torsion ;  
 $\lambda$  = constante de couplage.

**13.6.3 Conclusions**

L'énergie mécanique apparaît comme une somme de diverses formes d'énergie. Au cours de l'évolution, il y a transformation d'une forme d'énergie en une autre, mais, si toutes les forces actives sont conservatives, l'énergie totale est conservée. Par contre, la présence de forces de frottement (intérieures ou extérieures) conduit à une diminution de l'énergie mécanique : on parle de dissipation de l'énergie mécanique.

L'intérêt pratique du théorème de conservation de l'énergie est qu'il fournit immédiatement une intégrale première des équations du mouvement.

Toutefois, l'importance du théorème de conservation de l'énergie mécanique réside dans le fait qu'au niveau des particules élémentaires toutes les forces sont conservatives. Par conséquent, si nous considérons le système matériel au niveau microscopique, nous arrivons au résultat fondamental que l'énergie d'un système isolé est toujours conservée.

Du point de vue conceptuel, la notion d'énergie est fondamentale. En effet, si toutes les forces dérivent du potentiel  $U = U(x_1, \dots, x_N)$ , alors il découle des équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_\alpha = \frac{\mathbf{p}_\alpha}{m_\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}_\alpha = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}_\alpha} U, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

que pour toute solution  $\{\mathbf{x}_\alpha(t), \mathbf{p}_\alpha(t)\}$  de conditions initiales  $\{\mathbf{x}_\alpha^{(0)}, \mathbf{p}_\alpha^{(0)}\}$  les fonctions  $\{\mathbf{x}'_\alpha(t) = \mathbf{x}_\alpha(t - t_1), \mathbf{p}'_\alpha(t) = \mathbf{p}_\alpha(t - t_1)\}$  sont les solutions de ces équations associées aux conditions initiales  $\{\mathbf{x}'_\alpha(t_1) = \mathbf{x}_\alpha^{(0)}, \mathbf{p}'_\alpha(t_1) = \mathbf{p}_\alpha^{(0)}\}$  à l'instant  $t_1$ .

En effet, nous avons  $\mathbf{p}'_\alpha(t) = \mathbf{p}_\alpha(t - t_1) = m_\alpha \frac{d}{dt} \mathbf{x}_\alpha(t - t_1) = m_\alpha \frac{d}{dt} \mathbf{x}'_\alpha$ , et

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{p}'_\alpha(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{p}_\alpha(t - t_1) = \\ &= -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}_\alpha} U(\{\mathbf{x}_\beta(t - t_1)\}) = \\ &= -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}_\alpha} U(\{\mathbf{x}'_\beta(t)\}). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}'_\alpha = \frac{\mathbf{p}'_\alpha}{m_\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}'_\alpha = -\mathbf{grad}_{\mathbf{x}_\alpha} U.$$

Ainsi, en répétant l'expérience à l'instant  $t_1$  sous les mêmes conditions qu'à l'instant  $t = 0$ , on observera la même évolution : c'est l'homogénéité du temps, concept intrinsèquement lié à celui de conservation de l'énergie.

Homogénéité du temps

## 13.7 ILLUSTRATIONS : FORCES ACTIVES CONSERVATIVES

### 13.7.1 Modèle d'un choc élastique, inélastique et mou (à une dimension)

On considère le système mécanique de masse  $m_2$  décrit sur la figure 13.13 : le butoir sous l'effet d'un choc, peut se bloquer à l'une des positions  $\ell_n$ .

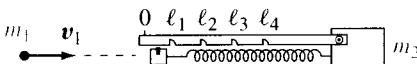


Fig. 13.13 Butoir à cran d'arrêt.

Le système de masse  $m_2$  étant au repos, une particule de masse  $m_1$  et de vitesse initiale  $v_1$  provoque un choc sur le butoir. Comme le système est isolé, la quantité de mouvement est conservée

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (13.85)$$

où  $v'_1$ ,  $v'_2$  sont les vitesses après le choc.

Par ailleurs, la force élastique étant conservative et le butoir de masse négligeable, l'énergie mécanique est conservée

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 + U_n \quad (13.86)$$

où  $U_n$  est le travail nécessaire pour comprimer le ressort d'une distance  $\ell_n$  ( $U_0 = 0$ ).

Si les deux masses ont même vitesse après le choc – on parle alors de **choc mou** (§ 19.1.2) – la condition  $v'_1 = v'_2$  associée à (13.85) entraîne

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

et de (13.86) le butoir se bloquera à la position  $\ell_n$  si la vitesse initiale  $v_1$  est égale à

$$v^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{\mu} U_n} \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (13.87)$$

Si  $v_1$  est inférieure à  $v^{(1)} = \sqrt{2U_1/\mu}$ , le ressort reviendra à sa position initiale ; on a alors  $T_f = T_i$  et le choc est dit **élastique** ; dans ce cas, on obtient

$$v'_1 = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Finalement, si la vitesse initiale est telle que

$$v^{(n)} < v_1 < v^{(n+1)} \quad (13.88)$$

le ressort restera bloqué à la position  $\ell_n$  ; nous aurons  $T_f - T_i = -U_n < 0$  et le choc est dit **inélastique** (le choc mou est un cas particulier de choc inélastique). On obtient alors

$$v'_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} \left( m_1 - m_2 \sqrt{1 - \frac{2U_n}{\mu v_1^2}} \right) v_1$$

$$v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2U_n}{\mu v_1^2}} \right) v_1.$$

En conclusion, la vitesse  $v^{(1)}$  représente une vitesse seuil pour qu'il y ait collision inélastique.



### 13.7.2 Diffusion élastique de particules identiques

Considérons la diffusion d'une particule de vitesse  $\mathbf{v}$  par une particule identique initialement au repos (fig. 13.14) (les deux particules sont assimilables à des points matériels).

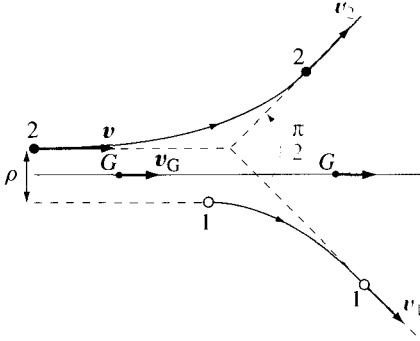


Fig. 13.14 Diffusion élastique de deux particules identiques.

Supposons que l'interaction entre les particules soit centrale conservative et de portée finie, c'est-à-dire  $\mathbf{F} = 0$  si  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > r_0$ . Le système étant isolé et les forces intérieures conservatives, il y a conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie. Par conséquent, si la distance initiale entre les particules est supérieure à  $r_0$  nous avons

Constantes  
du mouvement

$$\begin{cases} m\mathbf{v} = m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 \end{cases} \quad (13.89)$$

$$\begin{cases} m\mathbf{x} \wedge \mathbf{v} = m\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{v}_1 + m\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{v}_2 \end{cases} \quad (13.90)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 \end{cases} \quad (13.91)$$

où  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont les vitesses finales des particules 1 et 2 lorsqu'elles sont séparées d'une distance supérieure à  $r_0$ .

De (13.89) et (13.90), on constate que le torseur  $(-\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  est équivalent à zéro ; ainsi les trois vecteurs sont coplanaires (§ 4.7.1) et le mouvement a lieu dans un plan. D'autre part, de (13.89) et (13.91), on obtient :

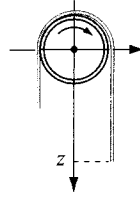
$$\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2 = \mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 \quad \text{donc} \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

En conclusion, il y a soit diffusion dans la direction de la particule incidente ( $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 = 0$ ), soit les vitesses finales  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont perpendiculaires.

Particules identiques

### 13.7.3 Mouvement d'une corde pesante

Étudions le mouvement d'une corde pesante souple (§ 16.4.1) posée sans vitesse initiale sur une roue mobile sans frottement autour d'un axe horizontal (fig. 13.15). On admettra qu'il n'y a pas de glissement de la corde par rapport à la roue.



**Fig. 13.15** Mouvement d'une corde de longueur  $\ell$  sur une roue en rotation libre autour de son axe.

Soit  $m$  la masse de la corde,  $\ell$  sa longueur,  $M$  la masse de la roue et  $R$  son rayon.

Toutes les forces extérieures actives (= poids) sont conservatives et le travail des forces intérieures est nul (car il n'y a pas de glissement de la corde sur la roue, la corde n'est pas élastique, et la roue est un solide). Par conséquent, l'énergie est une constante du mouvement et comme tous les points de la roue ont même vitesse  $v = \omega R = \dot{z}$  (fig. 13.15), on a

$$T = \frac{1}{2}(m + M)\dot{z}^2$$

$$U = -\left(\frac{m}{\ell}z\right)g\frac{z}{2} - \left[\frac{m}{\ell}(\ell - \pi R - z)\right]g\left(\frac{\ell - \pi R - z}{2}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}(m + M)\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}gz^2 - \frac{1}{2}\frac{m}{\ell}g(\ell - \pi R - z)^2 = E. \quad (13.92)$$

Ainsi, en dérivant (13.92) par rapport à  $t$ , on obtient

$$(m + M)\ddot{z} - \frac{m}{\ell}g(2z - \ell + \pi R) = 0.$$

Introduisant la variable  $\xi = z - \frac{\ell - \pi R}{2}$ , on obtient  $\ddot{\xi} = \frac{2m}{m + M}\frac{g}{\ell}\xi$

d'où  $\xi(t) = \xi_0 \cosh \Omega t$  avec  $\Omega = \sqrt{\frac{2m}{m + M}\frac{g}{\ell}}$ .

En conclusion, l'évolution du système est donnée par

Évolution exponentielle 
$$z(t) = \frac{\ell - \pi R}{2} + \left(z_0 - \frac{\ell - \pi R}{2}\right) \cosh \Omega t. \quad (13.93)$$

## 13.8 ILLUSTRATIONS : FORCES ACTIVES NON CONSERVATIVES

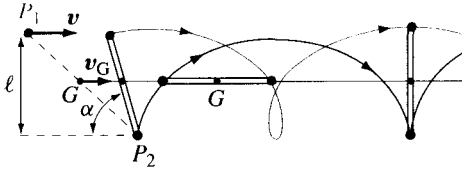
### 13.8.1 Patineurs

Un patineur ayant une vitesse  $v$  saisit la perche de longueur  $\ell$  que lui tend un autre patineur initialement immobile (fig. 13.16). Puis les deux patineurs

se tirent l'un vers l'autre. Cherchons l'évolution et le travail effectué par les patineurs. On supposera que la masse de la perche est négligeable et que les patineurs peuvent être assimilés à des points matériels.

A l'instant où le patineur saisit la perche, nous avons

$$|GP_1| = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell.$$



**Fig. 13.16** Mouvement de la barre avant que les patineurs se rapprochent.

En négligeant les forces de frottement, il y a conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Par conséquent, le mouvement de  $G$  est rectiligne uniforme, de vitesse

Constantes  
du mouvement

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}$$

et les deux patineurs auront un mouvement autour de  $G$  de vitesse angulaire  $\omega'$  où

$$\begin{aligned} |L_G^i| &= m_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell v \sin \alpha = |L_G^f| = |L_G^f)_{\mathcal{R}_G}| = \\ &= \left[ m_1 \left( \frac{m_2 \ell}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 \ell}{m_1 + m_2} \right)^2 \right] \omega' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ell^2 \omega' \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\omega' = \frac{v}{\ell} \sin \alpha$ .

On peut facilement calculer la variation d'énergie lors du choc et l'on trouve

Énergie dissipée  
lors du choc

$$\Delta E^{\text{choc}} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \cos^2 \alpha$$

En conclusion, il y a conservation de l'énergie lors du choc si et seulement si  $\alpha = \pi/2$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{v}$  est perpendiculaire à la perche.

Au fur et à mesure que les patineurs se tirent l'un vers l'autre, la conservation du moment cinétique implique  $\omega(t) = \omega'(\ell/\ell(t))^2$ , et le travail effectué par les patineurs s'obtient à partir du théorème de l'énergie

$$\Delta E = \Delta W^{\text{int}} = E(t) - E_i = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 \sin^2 \alpha \left[ \left( \frac{\ell}{\ell(t)} \right)^2 - 1 \right].$$

### 13.8.2 Temps nécessaire à une moto pour atteindre la vitesse $v$

Évaluons le temps minimal nécessaire à une moto Cagiva 650 (§ 12.8.14) pour atteindre les 100 km/h sur une route horizontale rectiligne.

Pour cette évaluation, nous négligeons la masse des roues et les frottements de l'air. Nous supposons de plus qu'il est possible d'utiliser la puissance maximale du moteur à tout régime.

Pour cette moto, l'accélération maximale est limitée par la perte d'adhérence et l'on a (§ 12.8.14)  $a_G^{\max} = \mu_s N_B / M (= 6,4 \text{ m s}^{-2})$ . De

$$\frac{dT}{dt} = P(t) \leq P^{\text{mot}}$$

où  $P^{\text{mot}}$  est la puissance du moteur (= 43 kW), il vient

$$M v_G \frac{dv_G}{dt} = v_G F_B = P(t) \leq P^{\text{mot}}$$

(avec  $F_B$  la force de frottement exercée par la route sur la roue arrière).

De la condition d'adhérence,  $F_B \leq \mu_s N_B$ , on doit ainsi avoir

$$v_G F_B = P \leq v_G \mu_s N_B.$$

Aussi longtemps que  $v_G \mu_s N_B$  est inférieur à  $P^{\text{mot}}$ , il n'est pas possible d'utiliser toute la puissance du moteur sans perdre l'adhérence, mais l'accélération peut être maximale ( $= \mu_s N_B / M$ ).

Ainsi, dans un premier temps, le mouvement est uniformément accéléré et

$$v_G(t) = \mu_s \frac{N_B}{M} t.$$

A l'instant  $t_1$  tel que

$$v_G(t_1) = \frac{P^{\text{mot}}}{\mu_s N_B} = \tilde{v} \quad \text{soit} \quad t_1 = \frac{M P^{\text{mot}}}{(\mu_s N_B)^2}$$

le moteur n'est plus assez puissant pour pouvoir utiliser la force de frottement maximale.

Pour  $t$  supérieur à  $t_1$ , on utilisera la puissance maximale du moteur et de

$$\frac{dT}{dt} = P^{\text{mot}} \quad (= \text{cste})$$

$$\text{on a} \quad \frac{1}{2} M [v_G^2(t) - v_G^2(t_1)] = P^{\text{mot}} \cdot (t - t_1)$$

$$\text{soit} \quad v_G^2(t) = \frac{2 P^{\text{mot}}}{M} t - \left( \frac{P^{\text{mot}}}{\mu_s N_B} \right)^2.$$

En conclusion, le temps minimal pour atteindre la vitesse  $v$  (sans tenir compte du frottement de l'air) est donné par

$$\begin{cases} t = \frac{M}{\mu_s N_B} v & \text{si } v \leq \frac{P^{\text{mot}}}{\mu_s N_B} = \tilde{v}; \\ t = \frac{M}{2P^{\text{mot}}} \left[ v^2 + \left( \frac{P^{\text{mot}}}{\mu_s N_B} \right)^2 \right] & \text{si } v \geq \frac{P^{\text{mot}}}{\mu_s N_B} = \tilde{v}. \end{cases}$$

Avec les données numériques de la moto Cagiva, on trouve  $\tilde{v} = 87 \text{ km/h}$  et  $t = 4,4 \text{ s}$ . Remarquons pour terminer que lorsque la moto roule à vitesse maximale, on a

$$\frac{dT}{dt} = 0 = P^{\text{mot}} - P_{\text{max}}^{\text{fr}}$$

où  $P_{\text{max}}^{\text{fr}}$  est la puissance dissipée par les frottements de l'air :

$$P_{\text{max}}^{\text{fr}} = -\mathbf{F}^{\text{fr}} \cdot \mathbf{v}_{\text{max}} = \lambda v_{\text{max}}^3.$$

Dissipation par les frottements de l'air

Par ailleurs, à la vitesse  $v$ , la puissance dissipée par les frottements de l'air est  $P^{\text{fr}} = \lambda v^3$ , d'où

$$\frac{P^{\text{fr}}}{P^{\text{mot}}} = \left( \frac{v}{v_{\text{max}}} \right)^3.$$

Par conséquent, dans l'exemple considéré, la puissance dissipée entre 0 et 100 km/h par les frottements de l'air est inférieure aux 11% de la puissance du moteur, ce qui justifie notre approximation. Au contraire, avec une moto dont la vitesse maximale est 150 km/h, la puissance dissipée à 100 km/h représente les 30% de la puissance du moteur et il faudra tenir compte des frottements dans les calculs précédents.

## 13.9 AU-DELÀ DE LA MÉCANIQUE

Dans cette section,  $P_W^{\text{ext}}$  et  $\Delta W^{\text{ext}}$  désignent la puissance et le travail des forces extérieures (appliquées) qui n'ont pas été introduites dans l'énergie potentielle du système ; ce sont en général des forces non conservatives (moteur). On considérera que *les forces de frottement sont des forces intérieures*.

### 13.9.1 De la mécanique à la thermodynamique

Ayant remarqué qu'au niveau microscopique toutes les forces sont conservatives, et ayant réalisé l'importance conceptuelle du théorème de conservation de l'énergie, nous aimerions conclure que l'énergie  $E$  d'un système macroscopique isolé est toujours conservée. Dans ce cas, une variation de l'énergie du système est nécessairement associée à une action extérieure et l'on devrait avoir

Méthodologie

ce que l'on souhaite  $\frac{d}{dt} E = P_W^{\text{ext}}$  soit  $\Delta E = \Delta W^{\text{ext}}$  : (13.94)

c'est le *premier principe de la thermodynamique pour les systèmes adiabatiquement fermés* (c'est-à-dire que la seule action de l'extérieur s'effectue par des forces).

ce que l'on a obtenu Cependant, nous avons obtenu

$$\frac{d}{dt} E^{\text{méc}} = P_W^{\text{ext}} + P^{\text{int(nc)}}. \tag{13.95}$$

Première conséquence Pour que (13.94) puisse être valable, on doit *postuler* qu'il existe une nouvelle grandeur physique, *fonction d'état du système*, appelée **énergie interne**, telle que

$$\frac{d}{dt} E^{\text{int}} = -P^{\text{int(nc)}}. \tag{13.96}$$

En effet, dans ce cas seulement nous aurons

$$\frac{d}{dt} E = P_W^{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad E = E^{\text{méc}} + E^{\text{int}}. \tag{13.97}$$

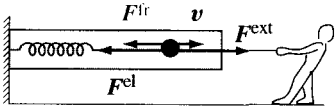
*L'énergie totale du système isolé sera alors conservée et il y aura simplement transformation d'énergie mécanique en énergie interne.*

Deuxième conséquence L'introduction du postulat (13.96) nous oblige ensuite à admettre que l'état du système n'est pas entièrement décrit par les variables mécaniques. En effet, considérons un solide que nous déplaçons le long d'une trajectoire fermée (par exemple un piston dans un cylindre) ; les états mécaniques initial et final sont identiques mais la variation d'énergie interne,  $\Delta E^{\text{int}} = -\Delta W^{\text{fr}}$ , est positive.

En postulant que l'énergie interne est une fonction d'état, nous sommes forcés d'introduire des variables non mécaniques (qui distinguent les états initial et final) : ce sont les **variables thermodynamiques**.

**Exemple. Oscillateur amorti [56]**

A titre d'illustration, considérons un point matériel soumis à une force élastique  $F^{\text{él}}$ , une force de frottement visqueux  $F^{\text{fr}}$  et une force extérieure  $F^{\text{ext}}$  (fig. 13.17).



**Fig. 13.17** Oscillateur amorti.

Le postulat de conservation de l'énergie (13.94) nous oblige à introduire au moins une variable non mécanique pour définir l'état du système. Nous appellerons cette variable **entropie** et la désignerons par  $S$  ; l'état du système est ainsi

défini par les variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, S)$ . Nous admettrons ensuite que l'énergie  $E$  est une fonction d'état, c'est-à-dire

$$E = E(\mathbf{x}, \mathbf{v}, S) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{x}, S) \quad (13.98)$$

où  $U(\mathbf{x}, S) = E^{\text{pot}} + E^{\text{int}}$ , telle que

$$\frac{d}{dt}E = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}. \quad (13.99)$$

Nous obtenons de (13.98) et (13.99)

$$\mathbf{v} \cdot \left[ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{grad}U \right] + \frac{\partial U}{\partial S} \frac{dS}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} \quad (13.100)$$

et, par comparaison avec la deuxième loi de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{él}} + \mathbf{F}^{\text{fr}} + \mathbf{F}^{\text{ext}}, \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{\text{él}} = -\mathbf{grad}U \quad (13.101)$$

on tire

$$\frac{\partial U}{\partial S} \dot{S} = -\mathbf{F}^{\text{fr}} \cdot \mathbf{v}. \quad (13.102)$$

(Par exemple, si la force du ressort est proportionnelle à l'élongation  $\mathbf{x}$ , on aura  $\mathbf{F}^{\text{él}} = -k(S)\mathbf{x}$  et  $U(\mathbf{x}, S) = \frac{1}{2}k(S)\mathbf{x}^2 + E^{\text{int}}(S)$ .)

Dans le cas de frottement visqueux, on admet que la force de frottement est une fonction d'état et l'on peut toujours écrire  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda\mathbf{v}$ , où  $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}, S)$  est une fonction d'état positive. Par définition, l'observable  $\Theta = \partial U / \partial S$  est appelée **température absolue**.

Température  $\Theta$

Nous avons ainsi les équations du mouvement du point matériel.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{m} [\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{grad}U - \lambda\mathbf{v}] \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\lambda}{\Theta} \mathbf{v}^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Équations de la mécanique;} \\ \text{Équation de la thermodynamique.} \end{array}$$

La constante  $m$  et les fonctions d'état  $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{v}, S)$  et  $U(\mathbf{x}, S)$  caractérisent le système considéré et sont trouvées à partir des résultats expérimentaux.

Finalement, le coefficient de frottement  $\lambda$  étant positif, nous avons (si la température absolue est positive)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\Theta} P^{\text{diss}} \geq 0 : \quad (13.103)$$

c'est le **deuxième principe de la thermodynamique** pour les systèmes adiabatiquement fermés.

En conclusion, dès qu'il y a des frottements, les équations du mouvement de la mécanique et de la thermodynamique sont couplées. Cependant, on voit que dans les cas où  $\lambda$  et  $U$  ne dépendent pas fortement de la variable thermodynamique  $S$  ou  $\Theta$ , les équations de la mécanique se découplent de l'équation thermodynamique, ce qui explique le fait qu'il est possible d'étudier l'effet des frottements en mécanique.

Troisième  
conséquence  
Chaleur  $\Delta Q$

Ayant réalisé que l'état du système est caractérisé par une variable non mécanique, nous sommes naturellement conduits à considérer qu'il peut y avoir une action directe de l'extérieur sur cette variable : c'est la **chaleur**. Nous arrivons de cette manière aux deux principes de la thermodynamique pour les *systèmes fermés*.

### 1<sup>er</sup> Principe de la thermodynamique

$$\frac{dE}{dt} = P_W^{\text{ext}} + P_Q^{\text{ext}} \quad \text{soit} \quad \Delta E = \Delta W^{\text{ext}} + \Delta Q \quad (13.104)$$

Systèmes fermés

où  $P_Q^{\text{ext}}$  et  $\Delta Q = \int_{t_i}^{t_f} dt P_Q^{\text{ext}}(t)$  représentent la puissance et l'énergie fournies par l'extérieur sur le système sous forme de chaleur.

### 2<sup>e</sup> Principe de la thermodynamique

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{\Theta} \left[ P_W^{\text{diss}} + P_Q^{\text{ext}} \right] \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\Theta} P_W^{\text{diss}} \geq 0. \quad (13.105)$$

### Remarques

- Pour comprendre l'origine de l'énergie interne et de la chaleur introduite dans l'exemple précédent, il faut remarquer que le point matériel (macroscopique) est, du point de vue microscopique, formé d'un ensemble de molécules et d'atomes en interaction que nous allons considérer dans ce qui suit comme des *particules ponctuelles*. Ainsi, du point de vue microscopique, on écrira

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + T'_G + U^{\text{ext}} + U^{\text{int}}$$

tandis que, du point de vue macroscopique, on a posé

$$E = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + U^{\text{ext}} + E^{\text{int}}.$$

Par conséquent, si nous admettons que la position relative (moyenne) des particules est constante, l'énergie potentielle d'interaction microscopique  $U^{\text{int}}$  est constante (en moyenne) et le travail dissipé par les frottements (au niveau



macroscopique) apparaît au niveau microscopique comme une augmentation de l'énergie cinétique des particules relativement au référentiel du centre de masse  $T'_G$  : c'est ce que l'on appelle **énergie d'agitation thermique**  $E^{\text{th}} = T'_G$ . Si le point matériel se déforme (au niveau microscopique), la variation d'énergie interne est associée à la variation d'énergie d'agitation thermique, ainsi qu'à la variation d'énergie potentielle d'interaction.

Énergie d'agitation thermique

En conclusion, l'énergie interne peut s'interpréter comme une énergie associée à des variables qui ne sont pas observables au niveau macroscopique et la chaleur est une action de l'extérieur sur ces variables.

- La même discussion s'applique au modèle des chocs discuté au paragraphe 13.7.1. Si l'on considère  $m_2$  comme un point matériel, on a  $E^{\text{méc}} = T$  et il n'y a pas conservation de l'énergie. Pour qu'il y ait conservation de l'énergie, il faut introduire la variable supplémentaire  $\ell$  et l'énergie interne est une fonction de  $\ell$ ,  $E^{\text{int}} = U(\ell)$ .
- Remarquons finalement que l'un des buts de la *mécanique statistique* est d'expliquer les propriétés thermodynamiques des systèmes macroscopiques à partir des lois de la mécanique appliquées au niveau microscopique. On montre par exemple que l'énergie d'agitation thermique d'un gaz monoatomique formé de  $N$  atomes est reliée à la température  $\Theta$  par la relation



BOLTZMANN Ludwig  
Physicien autrichien  
(1844-1906)

$$\langle T'_G \rangle = E^{\text{th}} = \frac{3}{2} Nk\Theta \quad (13.106)$$

Interprétation statistique de la température

où  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K} \cong 1/12\,000 \text{ eV/}^\circ\text{K}$  est la **constante de Boltzmann** et  $\langle T'_G \rangle$  signifie « moyenne temporelle de l'énergie cinétique relativement à  $\mathcal{R}_G$  ».

### 13.9.2 Théorème du viriel

Considérons un gaz formé de  $N$  particules assimilables à des points matériels.

On appelle **viriel** la grandeur définie par

Viriel : du latin *vis*, la force

$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha \quad (13.107)$$

où  $\mathbf{F}_\alpha$  est la résultante des forces sur la particule  $\alpha$ .

Des équations de Newton on voit que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\alpha \right) = \sum_{\alpha} \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{p}_\alpha + \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{p}}_\alpha = 2T + \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha. \quad (13.108)$$

Pour toute fonction  $g = g(t)$ , introduisons la moyenne temporelle de  $g$  définie par

$$\langle g \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt g(t) \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} [A(\tau) - A(0)] \quad (13.109)$$

Ainsi, en admettant que les particules restent dans un domaine  $V$  fini de l'espace et en admettant que toutes les vitesses restent bornées ( $\sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{p}_{\alpha}$  est bornée), on obtient de (13.108) le résultat suivant.

### Théorème du viriel

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \right\rangle. \quad (13.110)$$

**Illustration** Pour illustrer ce théorème, considérons le gaz dans une enceinte  $V$  ; dans ce cas

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} + \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \quad (13.111)$$

où  $\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}$  est la force exercée par l'enceinte lors du choc de la molécule sur la paroi. La force  $\mathbf{F}_{\alpha}^{(e)}$  est non nulle uniquement au voisinage de la surface  $\Sigma$  de l'enceinte et

$$\left\langle \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \right\rangle = - \int_{\Sigma} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{S} p(\mathbf{y}) \quad (13.112)$$

avec  $p(\mathbf{y})$  la **pression** exercée par la surface au point  $\mathbf{y}$ . Le signe  $-$  vient du fait que l'élément de surface  $d\mathbf{S}$  est dirigé vers l'extérieur alors que la force de pression est dirigée vers l'intérieur.

Dans le cas d'une enceinte sphérique  $p(\mathbf{y}) = p = \text{cste}$ ,

$$\left\langle \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha}^{(e)} \right\rangle = -p \int_{\Sigma} \mathbf{y} \cdot d\mathbf{S} = -p \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{x} = -p 3V,$$

et l'on obtient du théorème du viriel

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2} pV - \frac{1}{2} \left\langle \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \right\rangle. \quad (13.113)$$

En introduisant la définition de la température (13.106), il vient

Équation d'état  
d'un gaz

$$pV = Nk\Theta + \frac{1}{3} \left\langle \sum_{\alpha < \beta} (\mathbf{x}_{\alpha} - \mathbf{x}_{\beta}) \cdot \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \right\rangle. \quad (13.114)$$

C'est l'équation qui permettra d'obtenir l'équation d'état  $p = p(V, N, \Theta)$  d'un gaz en mécanique statistique. En particulier pour un gaz parfait, on a par définition  $\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = 0$ , et l'on obtient l'**équation d'état des gaz parfaits** :

$$pV = Nk\Theta. \quad (13.115) \quad \text{Gaz parfait}$$

### 13.9.3 Énergie chimique

Considérons une voiture qui accélère sur une route horizontale ; la variation d'énergie mécanique est strictement positive alors que le travail des forces de frottement (de l'air) est négatif.

A nouveau, si nous voulons postuler qu'il existe une grandeur conservée « énergie », nous sommes obligés d'introduire de nouvelles variables non mécaniques. Par exemple, nous savons que la voiture avance grâce à la combustion du carburant (réactions chimiques) et l'état du système devra être caractérisé par les variables chimiques  $N_A$ ,  $N_B$ , ..., nombre de molécules de substance A, B, .... On introduit alors une observable **énergie chimique**, fonction des  $N_A$ ,  $N_B$ , ..., telle que

$$E = E^{\text{méc}} + E^{\text{th}} + E^{\text{ch}}$$

soit une grandeur conservée.

Nous sommes ainsi conduits à considérer qu'il peut y avoir une action de l'extérieur sur les variables chimiques (échanges de molécules entre le système et l'extérieur) et le **premier principe de la thermodynamique** s'écrit

$$\frac{d}{dt}E = P_W^{\text{ext}} + P_Q^{\text{ext}} + P_{\text{ch}}^{\text{ext}} \quad \text{soit} \quad \Delta E = \Delta W^{\text{ext}} + \Delta Q + \Delta C \quad \text{Systèmes ouverts}$$

où  $P_{\text{ch}}^{\text{ext}}$  et  $\Delta C = \int_{t_i}^{t_f} dt P_{\text{ch}}^{\text{ext}}$  représentent la puissance et l'énergie fournies par l'extérieur sous forme chimique.

### 13.9.4 Origine de l'énergie chimique et énergie de liaison

L'énergie chimique est l'énergie qui entre en jeu lors des réactions chimiques. Pour comprendre l'origine de cette énergie, il n'est plus possible d'assimiler les molécules à des particules ponctuelles. Considérons par exemple une molécule diatomique, formée de deux atomes interagissant au moyen d'une force centrale qui dérive du potentiel  $U(r)$ , où  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ , tel que  $U(\infty) = 0$ . Par définition, l'**énergie de liaison** est le travail (ou l'énergie) minimal qu'il faut fournir pour dissocier la molécule ; inversement, c'est l'énergie libérée lors de la formation de la molécule. Si les deux atomes de la molécule sont initialement immobiles, on a  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = r_e$ , où  $(\frac{d}{dr}U)(r_e) = 0$ , et  $E_i^{\text{méc}} = U(r_e)$ . Par conséquent, le travail extérieur  $\Delta W^{\text{ext}}$  pour dissocier la molécule est tel que

$$\Delta W^{\text{ext}} = E_f^{\text{méc}} - E_i^{\text{méc}} \geq -E_i^{\text{méc}} = -U(r_e), \quad \text{d'où}$$

$$E^{\text{liaison}} = U(r_c).$$

Remarquons que l'énergie de liaison est, pour la molécule, l'analogue de l'**énergie de libération**, énergie qu'il faut fournir à un objet gravitant autour de la Terre pour qu'il puisse s'échapper de l'attraction terrestre :

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} + E^{\text{lib}} = E_f^{\text{méc}} = 0. \tag{13.116}$$

Si l'objet est initialement sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , on a, de (6.7.3),

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}}, \quad \text{et} \quad E^{\text{lib}} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{R}. \tag{13.117}$$

De façon similaire, l'**énergie nucléaire** est l'énergie qui entre en jeu lors de la formation ou de la désintégration des noyaux (§ 13.9.5).

Le tableau 13.18 donne quelques ordres de grandeur d'énergie de liaison.

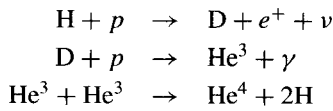
**Tableau 13.18** Quelques énergies de liaison.

Système	Énergie de liaison
Liaison Van der Waals (§ 12.2.5)	0,04 eV
Liaison hydrogène : $\text{H}_2 \rightarrow \text{H} + \text{H}$	4,5 eV
Liaison ionique : $\text{KCl} \rightarrow \text{K}^+ + \text{Cl}^-$	4,4 eV
Hydrogène : $\text{H} \rightarrow p + e$	13,6 eV
Deutéron : $\text{D} \rightarrow p + n$	2,226 MeV

**Remarques.** L'énergie d'agitation thermique à la température ordinaire ( $\Theta \cong 300^\circ\text{K}$ ) est de l'ordre de 0,025 eV par molécule, ce qui correspond à l'énergie de liaison de l'interaction de Van der Waals : à température ordinaire, les molécules liées par de telles interactions vont se dissocier et se reformer de façon aléatoire. Au contraire, la température nécessaire pour qu'une liaison ionique se dissocie sous l'effet de l'agitation thermique est de l'ordre de plusieurs dizaines de milliers de degrés.

**13.9.5 Équivalence de la masse et de l'énergie**

Fusion      A titre d'illustration, considérons la réaction nucléaire de fusion. Dans le Soleil, où la température est de l'ordre de  $20 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ , on pense que la *fusion* de quatre protons pour former un noyau d'hélium  $\text{He}^4$  s'effectue de la manière suivante :



c'est-à-dire que le bilan de la réaction est

$$4p \rightarrow \text{He}^4 + 2e^+ + 2\nu + 2\gamma.$$

Si l'on effectue le bilan des masses, soit  $\Delta m = m_f - m_i$ , on trouve :

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_{\text{He}^4} + 2m_{e^+} - 4m_p = \\ &= (6,647 + 2 \cdot 0,9 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 1,672) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong \\ &\cong -0,0436 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \end{aligned} \quad (13.118)$$

Par conséquent, *il n'y a pas conservation de la masse : la masse de la particule formée est plus faible que la masse de ses constituants. La différence  $\Delta m$  est appelée **défaut de masse***. Dans le cas de la fusion des quatre protons pour former un noyau d'hélium, on observe que

$$\frac{\Delta m}{m_i} = \frac{\Delta m}{4m_p} \cong -6 \cdot 10^{-3}. \quad (13.119)$$

Faisons ensuite le bilan des énergies. En considérant le noyau d'hélium comme une particule ponctuelle et en introduisant toutes les formes d'énergie – y compris l'énergie associée au rayonnement – on remarque qu'il y a une énergie libérée lors de la fusion,

$$\Delta E = E_f - E_i = 4 \cdot 10^{-12} \text{ J}, \quad (13.120)$$

c'est-à-dire que l'énergie n'est pas conservée.

Cependant, si nous comparons (13.118) et (13.120), on constate que l'énergie libérée est liée au défaut de masse par la relation

$$\Delta E = -\Delta mc^2. \quad (13.121)$$

En conclusion, en introduisant une **énergie de repos**

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (13.122)$$

(où  $m_0$  est la masse de la particule au repos) dans la somme des énergies, nous arrivons à nouveau au principe de conservation de l'énergie.

La masse apparaît ainsi comme une nouvelle forme d'énergie et, de même que pour les autres formes d'énergie, il peut y avoir transformation de masse en énergie et réciproquement. Masse = énergie

Cette possibilité est l'une des contributions les plus importantes de la théorie d'Einstein. *L'équivalence de la masse et de l'énergie conduit à admettre qu'un système d'énergie totale  $E$  a une masse  $M = E/c^2$  (chap. 21).*

Comme autre illustration, considérons la *production du Deutéron*

$$p + n = \text{D}.$$

On remarque à nouveau que la masse n'est pas conservée

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_D - m_p - m_n = (3,343 - 1,672 - 1,675) \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong \\ &\cong -4 \cdot 10^{-30} \text{ kg}\end{aligned}$$

soit  $\frac{\Delta m}{m_p + m_p} \cong 10^{-3}$ .

Par ailleurs, l'énergie de liaison du Deutéron est  $2,2 \text{ MeV} = 3,52 \cdot 10^{-13} \text{ J}$ . Nous observons ainsi que l'énergie de liaison est égale à  $-\Delta mc^2$ , c'est-à-dire que *l'énergie de liaison correspond à la perte de masse lors de la formation du noyau*.

Dans le cas de la formation d'un *atome d'hydrogène*,  $p + e \rightarrow H$ , l'énergie de liaison est  $13,6 \text{ eV} = 22 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ , ce qui correspond à un défaut de masse  $|\Delta m| = E_{\text{liaison}}/c^2 \cong 2,4 \cdot 10^{-35} \text{ kg}$ . Dans ce cas,  $\Delta m/m$  est de l'ordre de  $10^{-8}$ , ce qui est négligeable.

De même, les variations de masse sont totalement négligeables lors des réactions chimiques et c'est pour cette raison qu'il est possible d'admettre le *principe de conservation de masse* en chimie.

**Remarque.** Les réactions nucléaires discutées ci-dessus conduisent à la question suivante : que signifie une variation de la masse ? Nous avons vu que cela correspond à une variation d'énergie ; mais encore : est-ce que le « poids » (c'est-à-dire la masse gravifique) a varié ? Est-ce que la masse d'inertie a varié ?

L'équivalence des diverses notions de masse nous oblige à admettre qu'une variation d'énergie implique également une variation de la masse gravifique et de la masse d'inertie. Par exemple, en chauffant de  $4^\circ$  à  $29^\circ$  une piscine de  $25 \times 10 \times 10 \text{ m}^3$ , entièrement fermée par des parois réfléchissantes, il y aura une variation d'énergie  $\Delta E \cong 2,6 \cdot 10^{11} \text{ joules}$ , c'est-à-dire une augmentation de masse  $\Delta m \cong 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$ .

De même, les processus d'annihilation particule-antiparticule et les lois de conservation nous obligent à admettre qu'un photon (= quantum de lumière) de fréquence  $\nu$  a une énergie  $E = h\nu$ , une quantité de mouvement  $p = h\nu/c$  (§ 21.6.6) et, par conséquent, une « masse »  $m = h\nu/c^2$  : il devrait y avoir une *interaction gravifique entre la matière et le rayonnement*. Ce résultat, prévu par la théorie d'Einstein, fut mis en évidence par l'observation de la déviation de la lumière pendant l'éclipse solaire de 1919.

## Conclusion

Pour tout système isolé, l'énergie totale est conservée si l'on considère toutes les formes d'énergie mises en jeu. Contrairement aux grandeurs fondamentales conservées  $p$  et  $L_G$ , l'énergie n'est pas une grandeur extensive : il y a une énergie d'interaction.

## 13.10 PROBLÈMES

**13.10.1** La force exercée par l'atome  $B$  (neutre) sur l'atome  $A$  (neutre) est de la forme

Force de  
Lennard-Jones

$$\mathbf{F}^{B \rightarrow A} = 6 \left( \frac{2a}{r^{13}} - \frac{b}{r^7} \right) \mathbf{e}_r$$

où  $\mathbf{BA} = r\mathbf{e}_r$  et  $a, b$  sont des constantes positives. On admet que  $B$  reste immobile. Analyser le mouvement de  $A$ , c'est-à-dire :

1. Esquisser les orbites dans l'espace  $(r, \dot{r})$  pour  $L_0 = 0$  et différentes valeurs de  $E$  ; trouver la position d'équilibre  $r_e$ , la période des petits mouvements autour de  $r_e$ , la vitesse de dissociation  $v_D$  à partir de  $r_e$  (soit la vitesse minimale pour que  $r(t) \rightarrow \infty$ ).
2. Vérifier que pour toute valeur  $|L_0|$  inférieure à  $L^{(1)} = \sqrt{18ma}(b/5a)^{5/6}$ , il existe deux mouvements circulaires.
3. Esquisser les orbites dans l'espace  $(r, \dot{r})$  pour les trois cas  $0 < L_0 < L^{(1)}$ ,  $L_0 = L^{(1)}$  et  $L_0 > L^{(1)}$ . Pour quelles valeurs de  $R$  existe-t-il un mouvement circulaire de rayon  $R$  stable ?

**13.10.2** Analyser le mouvement d'un point de masse  $m$  soumis à la force centrale  $\mathbf{F} = -kr^{-3}\mathbf{e}_r$  (voir problème 6.10.21) :

Problème de Newton

1. Esquisser les orbites dans l'espace de phase  $(r, \dot{r})$  en considérant les trois cas  $L_0^2 < km$ ,  $L_0^2 = km$ ,  $L_0^2 > km$  ;
2. Trouver l'équation horaire ;
3. Trouver la trajectoire (utiliser la formule de Binet) ;
4. Trouver les différents mouvements possibles ;
5. Vérifier que la vitesse de libération à partir du point  $\mathbf{x}_0$  est égale à la vitesse  $v_0$  du mouvement circulaire de rayon  $|\mathbf{x}_0|$  ;
6. Vérifier que

$$f(r, \dot{r}, t) = m r \dot{r} - 2Et$$

est une intégrale première ; cette intégrale première est associée à l'invariance par rapport aux transformations  $(r, \theta, t) \mapsto (r' = \lambda r, \theta' = \theta, t' = \lambda t^2)$  pour tout  $\lambda$  réel (sect. 22.4).

**13.10.3** Quelle est la puissance minimale nécessaire pour accélérer une voiture de 800 kg de 0 à 100 km/h en 9 s avec une accélération constante ? Avec un tel moteur, quelle est la vitesse maximale ? Quel est le temps minimal pour atteindre les 100 km/h ? (Pour cette dernière estimation, on obtiendra une borne inférieure en négligeant les frottements de l'air et une borne supérieure en prenant une force de frottement constante égale à sa valeur maximale entre 0 et 100 km/h.) On prendra  $C_x = 0,3$ ,  $S = 2 \text{ m}^2$ ,  $\mu_s = 0,9$  et un poids sur les roues arrières égal aux 70% du poids de la voiture.

Accélération d'une  
voiture

**13.10.4** On considère la moto du paragraphe 12.8.14. Calculer le  $C_x$ . Calculer l'intervalle de temps pendant lequel il est possible de maintenir l'accélération maximale ( $= 6,4 \text{ ms}^{-2}$ ) – départ arrêté – sans tenir compte des frottements de l'air ( $S \cong 0,9 \text{ m}^2$ ). Quelle est la puissance dissipée par les frottements de l'air ?

Vitesse maximale d'une voiture **13.10.5** La VW-Polo est livrable en deux modèles, l'un avec un moteur de 29 kW et l'autre avec un moteur de 43 kW. Sachant que le modèle le moins puissant atteint une vitesse maximale de 135 km/h, évaluer la vitesse maximale du modèle le plus puissant (donnée d'usine 153 km/h).

**13.10.6** Quelle est la puissance des moteurs nécessaire pour faire tourner les cylindres des problèmes 14.10.7 et 14.10.8 ?

Puissance hydraulique **13.10.7** Une chute d'eau d'une hauteur  $h = 30 \text{ m}$  est alimentée par une rivière de largeur  $\ell = 40 \text{ m}$ , profondeur  $p = 1 \text{ m}$ , s'écoulant à la vitesse  $u = 3 \text{ m/s}$ . Calculer la puissance maximale qu'il serait possible d'obtenir de cette chute s'il n'y avait pas de dissipation d'énergie.

Trou noir **13.10.8** Calculer la vitesse de libération d'une particule à partir de la surface du Soleil. En supposant que le Soleil s'effondre sur lui-même, quel doit être le rayon final du Soleil pour qu'aucune particule ne puisse s'en échapper ? (On admet qu'il n'est pas possible qu'une particule ait une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.)

Molécule diatomique **13.10.9** Une molécule est formée de deux atomes qui interagissent au moyen d'une force de Lennard-Jones. Calculer l'énergie de liaison, (= énergie minimale qu'il faut fournir pour dissocier la molécule immobile).

Vérifier qu'il existe un état excité dans lequel le centre de masse est immobile et la distance entre les deux atomes reste constante, égale à  $d$ . Calculer le travail minimal qu'il faut fournir pour dissocier la molécule à partir de cet état excité. Est-ce positif, négatif ou nul ? (Comparer ce résultat avec celui concernant la stabilité des trajectoires circulaires du problème 13.10.1.)

Proton **13.10.10** Un proton d'énergie  $E = 4 \text{ MeV}$  est diffusé par un proton initialement immobile. Trouver l'énergie finale du proton incident sachant que l'angle de diffusion est  $30^\circ$ .

Collision élastique **13.10.11** Une particule  $\alpha$  effectue un choc élastique sur un noyau  $N$  immobile (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de variation de l'énergie interne de la particule  $\alpha$  ou du noyau). Trouver la vitesse finale de la particule  $\alpha$  lorsque le paramètre d'impact est nul. Quelle est la masse du noyau si la particule a perdu 75% de son énergie ?

Énergie de dissociation **13.10.12** Une molécule est formée de  $N$  atomes immobiles situés en  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ , qui interagissent au moyen de forces radiales

$$\mathbf{F}^{i \rightarrow j} = -\mathbf{F}^{j \rightarrow i} = f_{ij} \left( \left| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \right| \right) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\left| \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i \right|}.$$



Exprimer le travail minimal qu'il faut fournir pour dissocier la molécule en terme des potentiels

$$U_{ij}(x) = \int_{|x|}^{\infty} dr f_{ij}(r).$$

**13.10.13** Lors d'une collision, une particule de masse  $m_1$  et vitesse  $v_1$  est capturée par un noyau immobile de masse  $m$ . Ce dernier émet alors une particule de masse  $m_2$  avec une vitesse  $v_2$  perpendiculaire à  $v_1$  ; le reste du noyau a une vitesse finale  $v$ . Calculer la variation d'énergie cinétique entre l'état final et initial.

Collision inélastique

**13.10.14** Une particule effectue un mouvement périodique sous l'action d'une force centrale qui dérive du potentiel  $U(r)$ . Établir les résultats suivants :

1. Si  $U(r) = -Ar^{-1}$  alors  $\langle E^{\text{cin}} \rangle = -\frac{1}{2} \langle E^{\text{pot}} \rangle$ .
  2. Si  $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$  alors  $\langle E^{\text{cin}} \rangle = \langle E^{\text{pot}} \rangle$ .
- (où  $\langle E \rangle$  signifie valeur moyenne de  $E$  sur une période).

**13.10.15** Un satellite tourne autour de la Terre sur une trajectoire presque circulaire. Utiliser le résultat du problème précédent pour montrer qu'un frottement très faible de la forme  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda(v)\hat{\mathbf{v}}$  conduit à l'équation du mouvement  $m \frac{d}{dt}v = +\lambda(v)$  (le frottement accélère le satellite !). Calculer  $v(t)$  et  $r(t)$  dans le cas  $\lambda(v) = \lambda v$  où  $\lambda$  est une constante.

Satellite

**13.10.16** Un point matériel de masse  $m$  est attaché à un ressort dont l'autre extrémité est reliée par un fil à une masse  $M$  (fig. 13.19). Le ressort étant initialement détendu – et le fil tendu – on laisse tomber  $m$  sans vitesse initiale. Pour quelles valeurs de  $m$  est-il possible de soulever  $M$  ?

Divertissement

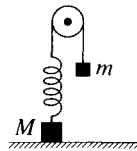


Fig. 13.19

**13.10.17** Un yo-yo est constitué de deux disques (masse  $M$ , rayon  $R$ ) reliés par un axe cylindrique (masse  $m$ , rayon  $r$ ). Trouver l'évolution temporelle et la tension dans le fil lorsque le yo-yo est lâché sans vitesse initiale (fig. 13.20).

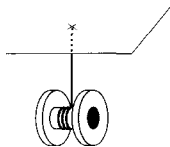


Fig. 13.20

**13.10.18** On dispose de deux cylindres homogènes de masses différentes  $M_1$  et  $M_2$  et de même rayon  $R$ , chacun constitué de deux cylindres emboîtés

Mouvements de cylindres homogènes et inhomogènes

avec  $R_1 = R/\sqrt{2}$ . Calculer l'accélération lorsque les cylindres roulent sans glisser sur un plan incliné. Même question après avoir échangé la partie centrale des cylindres (qui ont alors des masses identiques) (fig. 13.21). Quelle sera l'accélération du centre de gravité s'il y a roulement avec glissement ?

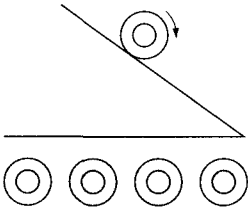


Fig. 13.21

**13.10.19** Une masse  $m_1$  est reliée à une masse  $m_2$  par un câble pesant enroulé autour d'une poulie (fig. 13.22). Trouver l'évolution temporelle en l'absence de frottement entre l'axe et la poulie, et en admettant qu'il n'y a pas de glissement du câble sur la poulie (poulie de masse  $M$ , rayon  $R$  ; câble de longueur  $\ell$  et masse spécifique linéaire  $\mu$ ).



Fig. 13.22

Choc **13.10.20** Un pendule mathématique (masse  $m$ , longueur  $\ell$ ) est lâché d'une position horizontale. Lorsqu'il est vertical, le fil est bloqué par un clou fixé en  $A$  et le point  $P$  continue sur une trajectoire circulaire de rayon  $R$  (fig. 13.23). Calculer la vitesse et la tension dans le fil juste avant le choc. Quelle est la tension dans le fil juste après le choc ? Trouver  $R_0$  tel que pour tout  $R \leq R_0$  le point  $P$  ait par la suite un mouvement circulaire.

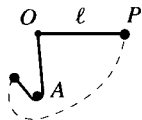


Fig. 13.23

Skieur **13.10.21** Un skieur (assimilable à un point !) part de  $A$  et dévale la pente de la figure 13.24. Calculer la force exercée par le sol au point  $B$ . Est-ce que le skieur revient en arrière sans passer la bosse, passe la bosse sans décoller, ou décolle ? S'il décolle, où est-ce que cela se produit ? (On néglige tout frottement.)

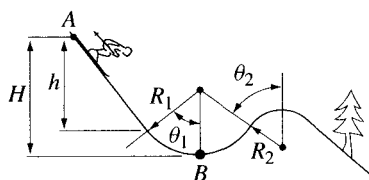


Fig. 13.24

**13.10.22** Un bloc est lâché sans vitesse initiale sur le plan incliné de la figure 13.25. On suppose qu'il n'y a pas de frottement et que la force exercée par le ressort (de masse négligeable) est donnée par  $F(x) = -(kx + qx^3)$  où  $k$  et  $q$  sont des constantes positives. Calculer la déformation maximale du ressort. En admettant que le bloc reste accroché au ressort, calculer l'amplitude du mouvement.

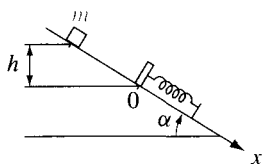


Fig. 13.25



## CHAPITRE 14

# DYNAMIQUE DU SOLIDE

La cinématique du solide a été décrite au chapitre 8. Rappelons ici qu'un solide est un système matériel idéal formé d'un ensemble de points dont les distances mutuelles restent constantes au cours de l'évolution. De plus, nous avons montré que la vitesse d'un point  $P$  du solide est donnée par le théorème de distribution des vitesses (8.13)

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AP} \quad (14.1)$$

où  $A$  est un point quelconque du solide et  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur vitesse de rotation.

La dynamique du solide est un cas particulier de la dynamique des systèmes matériels pour lesquels nous avons établi les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (14.2)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad \text{O fixé dans } \mathcal{R} \quad (14.3) \quad \text{Équations du mouvement}$$

$$\frac{d}{dt}T = P^{\text{ext}} + P^{\text{int}}. \quad (14.4)$$

Le but de ce chapitre est de montrer comment calculer le moment cinétique  $\mathbf{L}_O$  et l'énergie cinétique  $T$  d'un solide, puis d'étudier les solutions des équations du mouvement.

Par définition

$$\mathbf{p} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad \mathbf{L}_O = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \quad \text{et} \quad T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \quad (14.5)$$

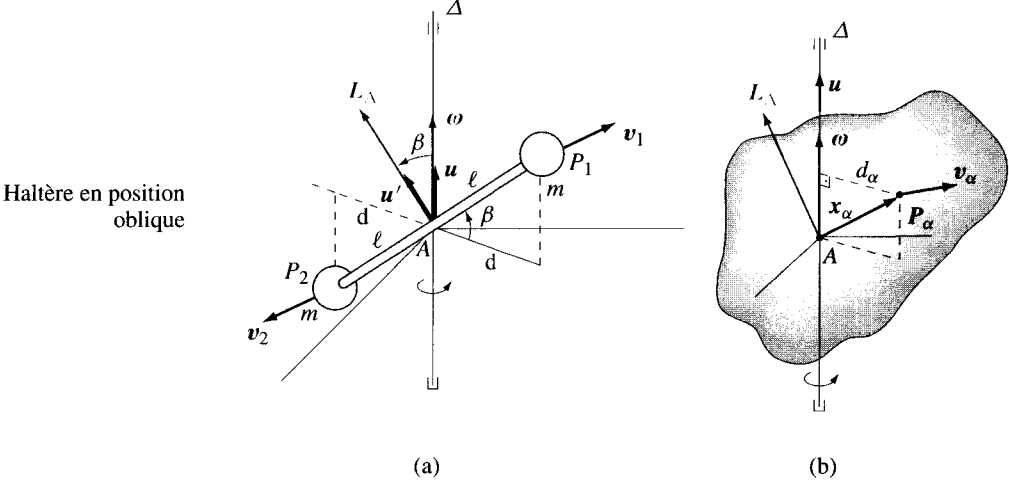
mais comment évaluer ces sommes lorsque l'on a  $10^2$  ou  $10^{25}$  points matériels ? Pour la quantité de mouvement nous avons obtenu une expression simple, soit  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G$ , où la masse d'inertie  $M$  est indépendante de l'état et  $\mathbf{v}_G$  est associé au mouvement. L'équation (14.2) s'écrit alors

$$M\mathbf{a}_G = \mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (14.6) \quad \text{Théorème du centre de masse}$$

Dans ce chapitre, nous allons montrer qu'il est également possible d'exprimer le moment cinétique et l'énergie cinétique d'un solide au moyen d'une matrice, indépendante de l'état, appelée tenseur d'inertie, et de la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  du solide.

## 14.1 SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

## 14.1.1 Moment d'inertie par rapport à un axe



**Fig. 14.1** (a) Haltère, en position oblique, tournant autour d'un axe fixe  $\Delta$  ; (b) solide quelconque tournant autour d'un axe fixe  $\Delta$ .

Considérons le solide de la figure 14.1 (a) en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$  passant par le point A et parallèle au vecteur unité  $\mathbf{u}$ . Ce solide est constitué de deux masses égales  $m$ , soudées aux extrémités d'une barre de longueur  $2\ell$  et de masse négligeable (par rapport à  $m$ ). Cette barre est soudée en son milieu A à l'axe  $\Delta$ .

Le moment cinétique est donné par

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{x}_1 \wedge m\mathbf{v}_1 + \mathbf{x}_2 \wedge m\mathbf{v}_2 \quad (14.7)$$

où  $\mathbf{x}_i = A\mathbf{P}_i$ ,  $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_i$  et  $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{u}$ .

Par conséquent

$$\mathbf{L}_A = 2m\ell d\omega\mathbf{u}' \quad (14.8)$$

où  $\mathbf{u}'$  est le vecteur unité perpendiculaire à  $P_1P_2$  dans le plan vertical défini par  $P_1P_2$  et l'axe  $\Delta$ . On constate sur cet exemple simple que le moment cinétique n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ .

$$\mathbf{L}_A \neq \lambda\boldsymbol{\omega}$$

Si l'on calcule la projection  $L_{A,\Delta}$  de  $\mathbf{L}_A$  sur l'axe  $\Delta$ , on trouve

$$L_{A,\Delta} = 2m\ell d\omega\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} = 2md^2\omega \quad (14.9)$$

car  $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} = \cos\beta$  et  $\ell\cos\beta = d$  où  $d$  est la distance de  $P_i$  à l'axe.

Ce dernier résultat est généralisable à un solide quelconque (fig. 14.1 b). En effet, soit A un point de l'axe de rotation  $\Delta$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$  le vecteur unité parallèle à  $\Delta$ . Nous avons ainsi  $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{u}$  et, comme A est sur  $\Delta$ ,  $\mathbf{v}_A = 0$ . Par conséquent,

pour tout point  $P_\alpha$  du solide, le théorème de distribution des vitesses (14.1) Cas général donne

$$\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_\alpha, \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_\alpha = A\mathbf{P}_\alpha, \quad (14.10)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_A &= \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \wedge m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_\alpha) = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_\alpha|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (14.11)$$

En projetant cette dernière équation sur l'axe  $\Delta$ , on obtient

$$L_{A, \Delta} = \mathbf{L}_A \cdot \mathbf{u} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_\alpha|^2 - (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 \right] \cdot \omega = I_{\Delta} \omega \quad (14.12)$$

avec

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_\alpha|^2 - (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 \right] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2. \quad (14.13)$$

On appelle **moment d'inertie par rapport à l'axe  $\Delta$**  la grandeur définie par

$I_{\Delta}$  = moment  
d'inertie par rapport  
à l'axe  $\Delta$

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \quad (14.14)$$

où  $d_{\alpha}$  est la distance du point  $P_{\alpha}$  du solide à l'axe  $\Delta$ .

En conclusion, nous avons établi le théorème suivant.

**Théorème.** Soit  $A$  un point de l'axe de rotation  $\Delta$ . La projection  $L_{A, \Delta}(t)$  du moment cinétique  $\mathbf{L}_A(t)$  sur l'axe  $\Delta$  est donnée par

$$L_{A, \Delta}(t) = \left( \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \right) \omega(t) \quad (14.15)$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{L}_A \cdot \mathbf{u} = I_{\Delta} \omega \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}. \quad (14.16)$$

Dans le cas d'un système continu, il suffit de remplacer les sommes par des intégrales et nous obtenons (14.16) avec

$$I_{\Delta} = \int dm \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 - (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2 \right] = \int dm d^2(x). \quad (14.17)$$

Dans le cas particulier d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ , passant par  $A$  et parallèle au vecteur unité  $\mathbf{u}$ , on a pour tout  $t$

$$\mathbf{L}_{A, \Delta} = I_{\Delta} \boldsymbol{\omega},$$

où  $I_{\Delta}$  est indépendant de  $t$ .

#### Propriétés du moment d'inertie $I_{\Delta}$

1.  $I_{\Delta}$  est une grandeur qui dépend uniquement de la distribution des masses par rapport à l'axe  $\Delta$ ; en particulier,  $I_{\Delta}$  ne dépend pas du mouvement.
2.  $I_{\Delta}$  est un scalaire, positif ou nul, d'unité  $[I_{\Delta}] = [M][L]^2$ , soit  $[I_{\Delta}] = \text{kg m}^2$  dans le système international.
3.  $I_{\Delta}$  est nul si et seulement si la distribution de masse est concentrée sur l'axe  $\Delta$  et dans ce cas on dit que le solide est un **rotateur**.
4.  $I_{\Delta}$  est une grandeur extensive : le moment d'inertie d'un système formé de plusieurs parties est la somme des moments d'inertie de chacune des parties.

**Le rayon de giration par rapport à l'axe  $\Delta$**  est la longueur  $R_{\Delta}$  définie par

$$I_{\Delta} = M R_{\Delta}^2. \quad (14.18)$$

C'est la distance à l'axe à laquelle il faudrait concentrer toute la masse pour que le point matériel ainsi obtenu ait le même moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  que le système matériel. C'est la grandeur que l'on trouve dans les tables pour caractériser le moment d'inertie d'un solide.

### 14.1.2 Dynamique du solide en rotation autour d'un axe fixe

**Théorème.** Un solide en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixé, passant par  $A$ , obéit à l'équation du mouvement

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{A, \Delta}^{\text{ext}} \quad (14.19)$$

où  $M_{A, \Delta}^{\text{ext}}$  est la projection du moment des forces extérieures  $\mathbf{M}_A^{\text{ext}}$  sur  $\Delta$ .

**DÉMONSTRATION.** La condition  $\mathbf{u} = \text{cste}$ , associée à l'équation du mouvement  $\frac{d}{dt} \mathbf{L}_A = \mathbf{M}_A^{\text{ext}}$  et au résultat (14.16)  $\mathbf{L}_A \cdot \mathbf{u} = I_{\Delta} \omega$ , implique

$$M_{A, \Delta}^{\text{ext}} = \mathbf{M}_A^{\text{ext}} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_A \cdot \mathbf{u}) = I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}.$$



### Remarques

• L'équation du mouvement (14.19) permet de trouver l'évolution ( $\theta = \theta(t)$ ) d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  connaissant la composante selon  $\Delta$  du moment résultant des forces extérieures. En particulier, la vitesse de rotation est constante si et seulement si cette composante est égale à zéro : c'est l'analogie de la *Lex Prima* de Newton.

• Considérons l'action d'un couple  $\mathbf{M}^{\text{ext}} = M^{\text{ext}} \hat{\mathbf{u}}$  constant agissant pendant  $\Delta t$  sur un solide qui, initialement, tournait à vitesse  $\omega_i$  constante. De (14.19) nous aurons  $\omega_f - \omega_i = (M^{\text{ext}}/I_\Delta) \Delta t$ . Cette relation montre que pour éviter de brusques variations de la vitesse, il est nécessaire d'avoir un grand moment d'inertie (introduction de « volant d'inertie »).

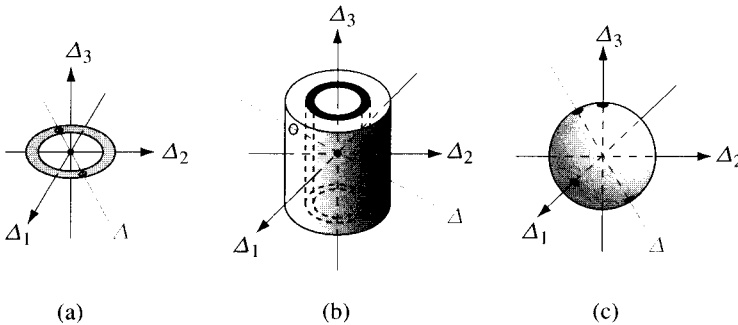
Volant d'inertie

• Lorsqu'un solide est en rotation autour d'un axe fixé, alors, soit  $\mathbf{L}_A$  est parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ , soit  $\mathbf{L}_A$  n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ , et ceci quelle que soit l'évolution  $\theta = \theta(t)$ . Si  $\mathbf{L}_A$  n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$  (fig. 14.1), la composante de  $\mathbf{L}_A$  dans le plan perpendiculaire à l'axe est responsable de l'apparition de forces de réaction sur les paliers. Ces forces ne modifient pas l'évolution. Si  $\mathbf{L}_A$  est parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ , le solide est équilibré dynamiquement (§ 11.6.2).

Équilibrage dynamique

### 14.1.3 Exemples de calcul du moment d'inertie

Calculons les moments d'inertie des solides homogènes de la figure 14.2 par rapport aux axes de symétrie.



Solides homogènes

**Fig. 14.2** Solides homogènes : (a) anneau de rayon  $R$  ; (b) cylindre de rayon  $R$ , longueur  $L$  ; (c) sphère ;  $G \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$  axes orthogonaux.

#### Anneau

Par rapport à l'axe de symétrie  $\Delta_3$  perpendiculaire au plan de l'anneau, on a immédiatement

$$I_{\Delta_3} = MR^2. \quad (14.20)$$

Pour obtenir le moment d'inertie  $I_\Delta$  par rapport à l'un des diamètres, on utilise la symétrie de l'anneau :

$$I_\Delta = I_{\Delta_1} = I_{\Delta_2} = \frac{1}{2} (I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2}) = \frac{1}{2} \int dm (y^2 + x^2) = \frac{1}{2} MR^2. \quad (14.21)$$

### Cylindre

Pour trouver le moment d'inertie  $I_{\Delta_3}$  par rapport à l'axe du cylindre, on décompose le cylindre en tubes de rayon  $r_\alpha$ , d'épaisseur  $\Delta r$  et de masse

$$\Delta m_\alpha = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r_\alpha \Delta r = 2 \frac{M}{R^2} r_\alpha \Delta r.$$

On obtient par extensivité

Moment d'inertie  
par rapport à l'axe  
d'un cylindre

$$I_{\Delta_3} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_\alpha \Delta m_\alpha r_\alpha^2 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R dr r^3 = \frac{1}{2} M R^2. \quad (14.22)$$

Pour calculer le moment d'inertie  $I_\Delta$  par rapport à un axe de symétrie perpendiculaire à l'axe du cylindre, on utilise à nouveau la symétrie :

$$\begin{aligned} I_{\Delta_1} = I_{\Delta_2} &= \frac{1}{2} (I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2}) = \frac{1}{2} \int dm (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) = \\ &= \frac{1}{2} I_{\Delta_3} + \int dm z^2 = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{M}{\pi R^2 L} \int_{-L/2}^{L/2} dz \pi R^2 z^2 \end{aligned}$$

d'où

$$I_\Delta = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2. \quad (14.23)$$

Pour un disque, on pose  $L = 0$  dans (14.23) et pour une tige mince, on pose  $R = 0$  dans (14.22) et (14.23).

### Sphère

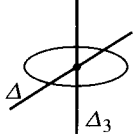
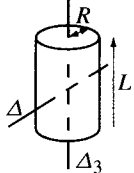

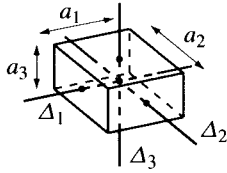
Par symétrie

$$\begin{aligned} I_\Delta = I_{\Delta_1} = I_{\Delta_2} = I_{\Delta_3} &= \frac{1}{3} (I_{\Delta_1} + I_{\Delta_2} + I_{\Delta_3}) = \\ &= \frac{1}{3} \int dm (y^2 + z^2 + x^2 + z^2 + x^2 + y^2) = \\ &= \frac{2}{3} \int dm |x|^2 = \frac{2}{3} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R 4\pi r^2 dr r^2 \end{aligned}$$

Moment d'inertie par  
rapport à un axe de  
symétrie d'une  
sphère

$$I_\Delta = \frac{2}{5} M R^2. \quad (14.24)$$

**Tableau 14.3** Moment d'inertie de quelques solides homogènes.

anneau		$I_{\Delta_3} = MR^2,$ $I_{\Delta} = \frac{1}{2}MR^2.$
cylindre disque : $L = 0$ tige : $R = 0$		$I_{\Delta_3} = \frac{1}{2}MR^2,$ $I_{\Delta} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2.$
sphère		$I_{\Delta} = \frac{2}{5}MR^2$ (sphère pleine) ; $I_{\Delta} = \frac{2}{3}MR^2$ (sphère creuse).
parallélépipède		$I_{\Delta_1} = \frac{1}{12}M(a_2^2 + a_3^2)$

## 14.2 DYNAMIQUE DU SOLIDE : CAS GÉNÉRAL

### 14.2.1 Moment cinétique et tenseur d'inertie

Soit  $C$  un point du solide. La vitesse  $\mathbf{v}_{\alpha}$  du point  $P_{\alpha}$  du solide est donnée par le théorème de distribution des vitesses

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_{\alpha} = C\mathbf{P}_{\alpha},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
 L_C &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge [\mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha}] = \\
 &= \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \right) \wedge \mathbf{v}_C + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_{\alpha} \right].
 \end{aligned}
 \tag{14.25}$$

Moment cinétique

Comme  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} = M\mathbf{CG}$ , nous avons la propriété suivante.

Le moment cinétique d'un solide par rapport à l'un de ses points peut s'exprimer comme la somme de deux termes :

- le **moment cinétique de translation**

$$\mathbf{L}_C^{\text{transl}} = M \mathbf{C} \mathbf{G} \wedge \mathbf{v}_C \quad (14.26)$$

qui est nul si  $C \equiv G$  ou si  $C$  est un point de vitesse nulle.

Attention !  $\mathbf{v}_C$  est la vitesse du point  $C$  du solide, à ne pas confondre avec la vitesse  $\mathbf{v}_A$  qui apparaît dans (11.17) ;

- le **moment cinétique de rotation**

$$\mathbf{L}_C^{\text{rot}} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}_{\alpha} \right]. \quad (14.27)$$

Pour avoir une expression plus simple du moment cinétique de rotation, introduisons un repère orthonormé quelconque  $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié au point  $C$  (par la suite on prendra souvent un repère lié au solide, mais cela n'est pas nécessaire). Nous obtenons

Moment cinétique de rotation

$$\begin{aligned} L_{C,i}^{\text{rot}} &= \mathbf{L}_C^{\text{rot}} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \omega_i - (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega}) x_{\alpha,i} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \delta_{ij} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \omega_j \end{aligned} \quad (14.28)$$

où  $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_i$  et  $x_{\alpha,i} = \mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_i$ . Par conséquent

$$L_{C,i}^{\text{rot}} = \sum_{j=1}^3 I_{C,ij} \omega_j. \quad (14.29)$$

On appelle **tenseur d'inertie au point  $C$**  la matrice  $\{I_{C,ij}\}$  définie par

Repère orthonormé  
lié au solide

$$I_{C,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \delta_{ij} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right]. \quad (14.30)$$

Dans le cas continu, (14.30) s'écrit

$$I_{C,ij} = \int dm \left[ |\mathbf{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right]. \quad (14.31)$$

Nous tirons ainsi de (14.29)

$$\mathbf{L}_C^{\text{rot}} = \sum_i L_{C,i}^{\text{rot}} \mathbf{e}_i = \sum_{i,j} I_{C,ij} \omega_j \mathbf{e}_i \quad (14.32)$$

que nous pouvons aussi écrire

$$\begin{pmatrix} L_{C,1}^{\text{rot}} \\ L_{C,2}^{\text{rot}} \\ L_{C,3}^{\text{rot}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{C,11} & I_{C,12} & I_{C,13} \\ I_{C,21} & I_{C,22} & I_{C,23} \\ I_{C,31} & I_{C,32} & I_{C,33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (14.33)$$

ou encore

$$\mathbf{L}_C^{\text{rot}} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} \quad (14.34)$$

en se souvenant que  $\mathbf{I}_C$  est une matrice et non un scalaire (en général  $\mathbf{L}_C$  n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$ ).

De (14.31) on déduit les diverses composantes de la matrice d'inertie (14.33) :

$$\mathbf{I}_C = \{I_{C,ij}\} = \begin{pmatrix} \int dm(x_2^2 + x_3^2) & -\int dm x_1 x_2 & -\int dm x_1 x_3 \\ -\int dm x_1 x_2 & \int dm(x_1^2 + x_3^2) & -\int dm x_2 x_3 \\ -\int dm x_1 x_3 & -\int dm x_2 x_3 & \int dm(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix} \quad \text{Matrice d'inertie} \quad (14.35)$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{CP} = (x_1, x_2, x_3)$ .

**Conclusion :** le moment cinétique d'un solide par rapport à un point  $C$  appartenant au solide est donné par

$$\mathbf{L}_C = \mathbf{MCG} \wedge \mathbf{v}_C + \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}. \quad (14.36) \quad \mathbf{I}_C \text{ est une matrice}$$

En particulier :

- si le solide est en rotation autour d'un point fixe  $O$ , alors

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}; \quad (14.37) \quad \text{Moment cinétique par rapport à un point fixe}$$

- le moment cinétique par rapport au centre de gravité  $G$  est toujours donné par

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}. \quad (14.38) \quad \text{Moment cinétique par rapport à } G$$

#### 14.2.2 Moment d'inertie par rapport à un axe et tenseur d'inertie

Introduisons la notation matricielle usuelle

$$(\mathbf{u}, \mathbf{I}_C \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 u_i I_{C,ij} v_j$$

ce qui permet d'écrire

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_k, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\varepsilon}_\ell) = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ki} I_{C,ij} \delta_{\ell j} = I_{C,k\ell}. \quad (14.39)$$

Moment d'inertie par rapport à un axe et tenseur d'inertie

**Théorème.** Soit  $\Delta$  un axe de direction  $\hat{u}$  passant par le point  $C$ . Le moment d'inertie par rapport à  $\Delta$  s'exprime par la formule

$$I_{\Delta} = \sum_{i,j=1}^3 I_{C,ij} u_i u_j \quad C \in \Delta, \quad |\hat{u}| = 1, \quad (14.40)$$

c'est-à-dire

$$I_{\Delta} = (\hat{u}, \mathbf{I}_C \hat{u}). \quad (14.41)$$

DÉMONSTRATION. De (14.30), (14.13) et  $|\hat{u}| = 1$ , on tire

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} I_{C,ij} u_i u_j &= \sum_{i,j} \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} (|\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \delta_{ij} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) \right] u_i u_j = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [|\mathbf{x}_{\alpha}|^2 - (\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2] = I_{\Delta}. \end{aligned}$$

### 14.2.3 Propriétés du tenseur d'inertie $\mathbf{I}_C$

$\mathbf{I}_C$  est un tenseur d'ordre 2, symétrique, positif, extensif

1. Le tenseur d'inertie est une grandeur extensive, c'est-à-dire que pour tout solide  $S$  formé de plusieurs parties  $S'$ , nous avons

$$I_{C,ij}^{(S)} = \sum_r I_{C,ij}^{(S')}.$$

(Conséquence de la définition (14.30).)

2.  $\{I_{C,ij}\}$  est une matrice réelle et symétrique. (Conséquence de la définition (14.30)).

3.  $\mathbf{I}_C$  est un tenseur covariant d'ordre 2, positif. Cela signifie que par rapport à tout autre repère orthonormé défini par la transformation

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^3 A^k_i \mathbf{e}_k \quad (14.42)$$

nous avons

Changement d'axes

$$I'_{C,ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{\ell=1}^3 A^k_i A^{\ell}_j I_{C,k\ell} \quad (14.43)$$

et

$$L'^{\text{rot}}_{C,i} = \sum_{j=1}^3 I'_{C,ij} \omega'_j$$

où  $L_{C,i}^{\text{rot}}$  et  $\omega_i'$  sont les composantes des vecteurs  $\mathbf{L}_C^{\text{rot}}$  et  $\boldsymbol{\omega}$  relativement au nouveau repère.

En effet, la relation  $(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_C \hat{\mathbf{u}}) = I_\Delta$ , pour tout  $\hat{\mathbf{u}}$ , où  $I_\Delta$  est un scalaire, est une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice symétrique  $\{I_{C,ij}\}$  soit un tenseur covariant d'ordre 2 (Appendice B). De plus, ce tenseur est positif car  $(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_C \hat{\mathbf{u}}) = I_\Delta \geq 0$  pour tout  $\hat{\mathbf{u}}$ .  $\mathbf{I}_C$  est un tenseur

4. Les éléments diagonaux  $I_{C,ii}$  sont les moments d'inertie par rapport aux axes  $C\mathbf{e}_i$ .

En effet, de (14.39) et (14.41),  $I_{C,ii} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{I}_C \mathbf{e}_i) = I_{C,\mathbf{e}_i}$ .

5. La trace du tenseur d'inertie

$$\begin{aligned} \text{Tr } \mathbf{I}_C &= \sum_{i=1}^3 I_{C,ii} = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) = \\ &= 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \end{aligned} \quad (14.44)$$

est un scalaire. La grandeur  $\sum_{\alpha} m_{\alpha} |\mathbf{x}_{\alpha}|^2$  est appelé **moment d'inertie par rapport au point C**. Moment d'inertie par rapport à un point

#### 14.2.4 Axes principaux d'inertie

La relation (14.34) montre que  $\mathbf{L}_C^{\text{rot}}$  est parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$  si et seulement si

$$\mathbf{L}_C^{\text{rot}} = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega} \quad (14.45)$$

c'est-à-dire si  $\boldsymbol{\omega}$  est un vecteur propre du tenseur d'inertie  $\mathbf{I}_C$ .

On appelle **axe principal d'inertie du solide au point C**, tout axe contenant C défini par un vecteur propre de  $\mathbf{I}_C$ . Axe principal d'inertie

En algèbre linéaire, on montre que toute matrice réelle et symétrique possède trois valeurs propres réelles et que l'on peut toujours trouver trois vecteurs propres orthogonaux. Ainsi, quelle que soit la forme du solide, il existe toujours au moins un repère orthonormé dont les trois axes sont principaux d'inertie au point C. Ce repère est appelé **repère d'inertie au point C**. (Rappelons que le repère d'inertie au point C n'est pas unique si les valeurs propres de  $\mathbf{I}_C$  ne sont pas toutes différentes.) Repère d'inertie au point C

#### Propriété 1

Le tenseur d'inertie  $\{I_{C,ij}\}$  est diagonal si et seulement si  $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  est un repère d'inertie au point C.

DÉMONSTRATION. Si  $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$  est un repère d'inertie, on a par définition d'un axe principal d'inertie

$$\mathbf{I}_C = \begin{pmatrix} I_{C,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{C,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{C,3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_C \boldsymbol{\varepsilon}_j = I_{C,j} \boldsymbol{\varepsilon}_j$$

où  $I_{C,j}$  est la valeur propre associée au vecteur propre  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ . En outre, de (14.39),

$$I_{C,ij} = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\varepsilon}_j) = I_{C,j} \delta_{ij}.$$

Par conséquent, la matrice est diagonale.

Inversement, si  $I_{C,ij} = I_{C,j} \delta_{ij}$ , on a  $\mathbf{I}_C \boldsymbol{\varepsilon}_j = I_{C,j} \boldsymbol{\varepsilon}_j$  et le support de  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  est un axe principal.

On appelle **moments d'inertie principaux** les éléments diagonaux  $I_{C,i}$ , qui sont aussi les valeurs propres de  $\mathbf{I}_C$ . Ce sont les moments d'inertie par rapport aux axes d'un repère d'inertie.

Finalement, (14.32) conduit à la propriété suivante.

$$\begin{aligned} L_C^{\text{rot}} = & I_{C,1} \omega_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \\ & I_{C,2} \omega_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \\ & I_{C,3} \omega_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

Propriété 2

Par rapport à un **repère d'inertie**  $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$ , on a

$$L_C^{\text{rot}} = \sum_{i=1}^3 I_{C,i} \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

(14.46)

où  $I_{C,i}$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  est la vitesse de rotation du solide, et  $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i$ .

14.2.5 Remarques importantes

• Le tenseur *d'inertie* est le « tenseur de proportionnalité » entre le moment cinétique de rotation et la vitesse angulaire, de même que la masse *d'inertie* est le facteur de proportionnalité entre la quantité de mouvement et la vitesse de translation. Nous avons l'analogie suivante :

Translation	Rotation
$v_G$	$\boldsymbol{\omega}$
$m$	$\mathbf{I}_G = \{I_{G,ij}\}$
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}_G$	$\boldsymbol{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$

- Comme  $\mathbf{I}_G$  est une matrice et non un scalaire, le moment cinétique  $\boldsymbol{L}_G$  ne sera en général pas parallèle au vecteur vitesse angulaire, contrairement à la quantité de mouvement qui est toujours parallèle à la vitesse du centre de masse. Cette remarque a des conséquences technologiques importantes (§ 11.6.2).
- Ayant choisi un point  $C$  lié au solide, le tenseur d'inertie est un concept qui ne dépend que du solide et non du mouvement ou du repère.



### 14.2.6 Théorème de Huygens-Steiner

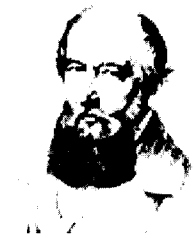
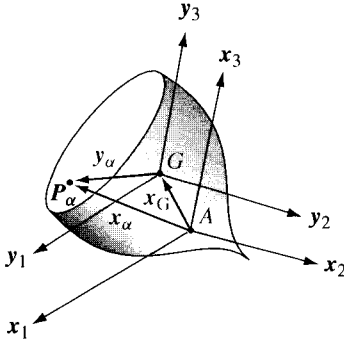
Connaissant le tenseur d'inertie d'un solide par rapport à son centre de masse (pour des solides simples on le trouve dans les tables), le théorème de Huygens-Steiner permet alors d'obtenir le tenseur d'inertie relativement à n'importe quel point du solide.

#### Théorème de Huygens-Steiner

Soit  $G$  le centre de masse d'un solide et  $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  un repère orthonormé. Pour tout point  $A$  du solide, on a la relation

$$I_{A,ij} = I_{G,ij} + M \left[ x_G^2 \delta_{ij} - x_{G,i} x_{G,j} \right] \quad (14.47)$$

où  $\mathbf{x}_G = \mathbf{AG}$  et  $I_{A,ij}$  est exprimé par rapport au repère centré en  $A$ , parallèle à  $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ .



STEINER Jakob  
Mathématicien suisse  
spécialiste de géométrie  
(1796-1863)

**Fig. 14.4** Théorème de Huygens-Steiner : transfert du tenseur d'inertie de  $G$  en  $A$ .

DÉMONSTRATION. Par définition (14.30)

$$I_{A,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ |\mathbf{x}_{\alpha}|^2 \delta_{ij} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \right] \quad (14.48)$$

où  $\mathbf{x}_{\alpha} = \mathbf{AP}_{\alpha}$ . Posons (fig. 14.4)

$$\mathbf{x}_{\alpha} = \mathbf{AG} + \mathbf{GP}_{\alpha} = \mathbf{x}_G + \mathbf{y}_{\alpha} \quad \text{où} \quad \mathbf{y}_{\alpha} = \mathbf{GP}_{\alpha}.$$

En remplaçant dans (14.48), on obtient

$$I_{A,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (\mathbf{x}_G^2 + \mathbf{y}_{\alpha}^2 + 2\mathbf{x}_G \mathbf{y}_{\alpha}) \delta_{ij} - (x_{G,i} + y_{\alpha,i})(x_{G,j} + y_{\alpha,j}) \right]. \quad (14.49)$$

Or par définition du centre de masse, on a

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{y}_{\alpha} = 0$$

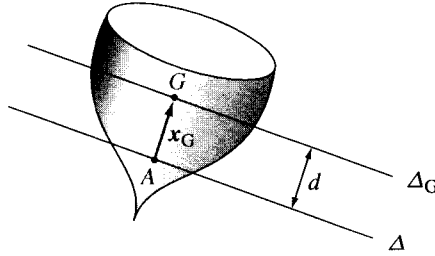
d'où

$$\begin{aligned} I_{A,ij} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[ (x_G^2 + y_{\alpha}^2) \delta_{ij} - x_{G,i} x_{G,j} - y_{\alpha,i} y_{\alpha,j} \right] = \\ &= I_{G,ij} + M \left[ x_G^2 - x_{G,i} x_{G,j} \right]. \end{aligned}$$

**Corollaire.** Soit  $G$  le centre de masse d'un solide. Pour tout axe  $\Delta$

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + M d^2 \quad (14.50)$$

où  $\Delta_G$  est l'axe parallèle à  $\Delta$  passant par  $G$  et  $d$  la distance entre  $\Delta$  et  $\Delta_G$ .



**Fig. 14.5** Corollaire du théorème de Huygens-Steiner : transfert du moment d'inertie de l'axe  $\Delta_G$  à l'axe  $\Delta$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A$  un point de  $\Delta$  (fig. 14.5); de (14.40)

$$I_{\Delta} = \sum_{ij} I_{A,ij} u_i u_j$$

d'où, en utilisant (14.47), il vient

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \sum_{ij} \left[ I_{G,ij} + M \left( x_G^2 \delta_{ij} - x_{G,i} x_{G,j} \right) \right] u_i u_j = \\ &= I_{\Delta_G} + M \left[ x_G^2 - (x_G \cdot u)^2 \right] = I_{\Delta_G} + M d^2. \end{aligned}$$

### Remarques

- Le moment d'inertie par rapport à l'axe contenant  $G$  est minimum par rapport à l'ensemble des axes parallèles à une direction donnée.
- Le tenseur d'inertie par rapport au point  $A$  est égal à la somme du tenseur d'inertie par rapport à  $G$  et du tenseur d'inertie par rapport à  $A$  d'un point matériel de masse  $M$  situé en  $G$ . La même remarque s'applique au moment d'inertie par rapport à un axe.
- Si le tenseur est diagonal par rapport à  $G\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , il ne l'est en général pas par rapport à  $A\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  sauf si  $A$  est sur l'un des axes  $G\mathbf{e}_i$ .

### 14.2.7 Exemples de calcul du tenseur d'inertie

Considérons les solides homogènes du paragraphe 14.1.3 (fig. 14.2).

#### Sphère

Par symétrie, tout repère centré en  $G$  est un repère d'inertie et (14.24) implique

$$\mathbf{I}_G = \frac{2}{5}MR^2\mathbb{1} \quad \text{où} \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.51)$$

et

$$\mathbf{L}_G = \frac{2}{5}MR^2\boldsymbol{\omega}. \quad (14.52)$$

#### Cylindre d'axe $\varepsilon_3$ (disque ; tige mince)

Par symétrie  $G\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$  est un repère d'inertie et de (14.22), (14.23), on tire :

$$I_{G,11} = I_{G,22} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2, \quad I_{G,33} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (14.53)$$

$$I_{G,ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Nous avons par conséquent

$$\mathbf{L}_G = \frac{M}{4} \left( R^2 + \frac{L^2}{3} \right) \boldsymbol{\omega}_\perp + \frac{1}{2}MR^2\boldsymbol{\omega}_\parallel \quad (14.54)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_\perp$  et  $\boldsymbol{\omega}_\parallel$  sont les composantes de  $\boldsymbol{\omega}$  perpendiculaire et parallèle à l'axe du cylindre.

L'équation (14.54) montre que le moment cinétique  $\mathbf{L}_G$  d'un cylindre en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  contenant  $G$  n'est pas parallèle à  $\boldsymbol{\omega}$  (fig. 14.6), sauf si l'axe de rotation est parallèle ou perpendiculaire à l'axe du cylindre, ou si  $L = R\sqrt{3}$ .

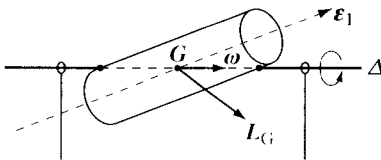


Fig. 14.6 Cylindre en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixe ( $G \in \Delta$ ) quelconque.

#### Tenseur d'inertie d'une tige mince par rapport à une extrémité

Soit  $O$  l'extrémité de la tige et  $O\varepsilon_3$  l'axe défini par la tige (fig. 14.7). Le théorème de Huygens et (14.53) impliquent :

$$I_{O,11} = I_{O,22} = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2, \quad I_{O,33} = 0, \\ I_{O,ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \quad (14.55)$$

Lorsque la tige mince est en rotation autour du point fixe  $O$ , on a (fig. 14.7)

$$L_O = \frac{1}{3}ML^2\omega_{\perp}. \quad (14.56)$$

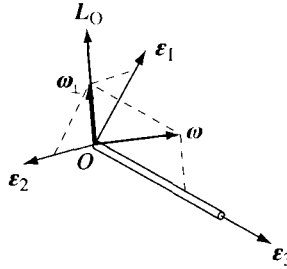


Fig. 14.7 Tige mince en rotation ( $\omega$  quelconque) autour de son extrémité fixe  $O$ .

### 14.3 APPLICATIONS

#### 14.3.1 Problème de la meule et effet gyroscopique

Nous voulons calculer les forces s'exerçant sur une meule entraînée par un axe vertical tournant à la vitesse  $\Omega$  constante ; nous supposons que la roue roule sans glisser sur le sol (fig. 14.8) et que l'axe horizontal est de masse négligeable.

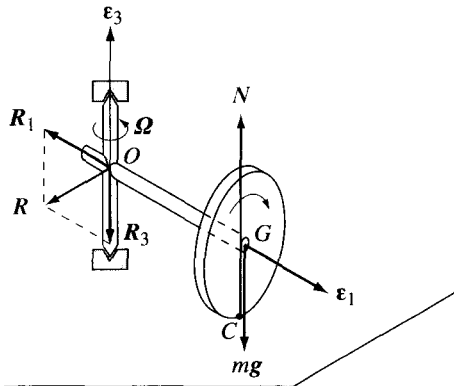


Fig. 14.8 Meule de masse  $m$ , rayon  $R$  ; axe de longueur  $d$  et masse négligeable.

Le système considéré est défini par la meule et l'axe horizontal. Les forces extérieures sont le poids, la réaction normale du sol et la force  $\mathbf{R}$  exercée par l'axe vertical. Nous avons par ailleurs une contrainte imposée par la condition de roulement sans glissement, c'est-à-dire  $\mathbf{v}_C = 0$ , qui entraîne

$$\Omega d = -\omega_{pr}R \quad \text{où} \quad \omega = \omega_{pr}\mathbf{e}_1 + \Omega\mathbf{e}_3. \quad (14.57)$$

Les équations du mouvement de la meule sont :

$$\begin{cases} m\dot{\mathbf{v}}_G = \mathbf{R} + N + m\mathbf{g} \\ \frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \end{cases}$$

(Nous avons écrit l'équation du moment cinétique par rapport au point  $O$  afin d'éliminer la force inconnue  $\mathbf{R}$  de cette équation.)

Projetons les équations du mouvement sur le repère d'inertie  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  (qui n'est pas lié à la meule !) défini par l'axe vertical et l'axe de la meule ; on obtient :

$$\begin{cases} -m\Omega^2 d = R_1 \\ 0 = R_2 \\ 0 = R_3 + N - mg. \end{cases} \quad (14.58)$$

Par ailleurs,

$$\mathbf{L}_O = I_1\omega_{\text{pr}}\mathbf{e}_1 + I_3\Omega\mathbf{e}_3$$

et la formule de Poisson donne

$$\dot{\mathbf{L}}_O = I_1\omega_{\text{pr}}\dot{\mathbf{e}}_1 = I_1\omega_{\text{pr}}\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{e}_1 = I_1\omega_{\text{pr}}\Omega\mathbf{e}_2.$$

Nous avons alors

$$I_1\omega_{\text{pr}}\Omega\mathbf{e}_2 = (mg - N)d\mathbf{e}_2.$$

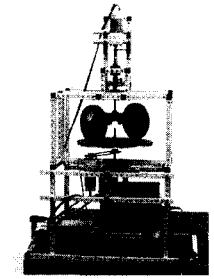
Par conséquent

$$N = mg - I_1\frac{\omega_{\text{pr}}\Omega}{d} \quad (14.59)$$

et (14.57) implique :

$$N = mg + I_1\frac{\Omega^2}{R}. \quad (14.60)$$

En conclusion, la force exercée par la meule sur le sol est supérieure au poids de la meule.



Moulin  
gyroscopique

En prenant  $I_1 = \frac{1}{2}mR^2$ , nous obtenons finalement

$$N = m(g + \frac{1}{2}R\Omega^2). \quad (14.61)$$

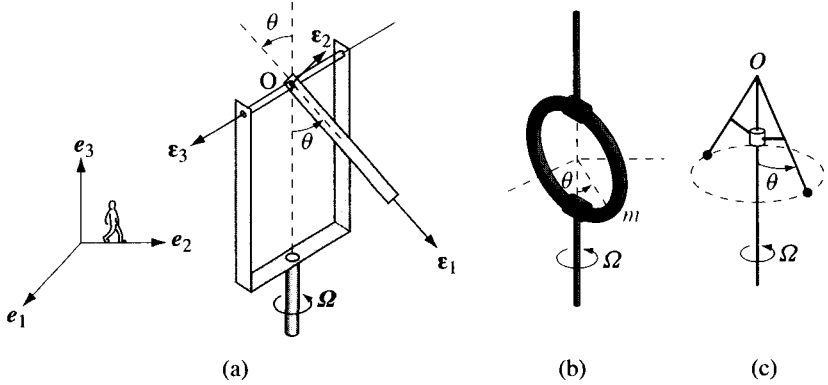
A titre d'illustration, considérons le cas  $R = 50$  cm et  $\Omega = 1$  t/s ; la réaction du sol sera alors le double du poids.

Mentionnons pour terminer que dans le cas d'un virage effectué sur une moto, cet effet gyroscopique s'additionne à l'effet centrifuge et contribue à la stabilité du mouvement [37].

Effet gyroscopique

### 14.3.2 Pendule en rotation et effet centrifuge

Analysons le mouvement d'une tige (pendule en rotation) lorsque le support tourne à vitesse  $\Omega$  constante (fig. 14.9 a).



**Fig. 14.9** (a) Pendule en rotation et systèmes similaires ; (b) bille dans un tube circulaire ; (c) régulateur de Watt.

Prenons le laboratoire comme *référentiel*, l'angle  $\theta$  avec la verticale comme *variable*, et le repère  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  lié à la tige. La condition d'absence de frottement s'exprime par la relation

$$\mathbf{M}_O^{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \quad (14.62)$$

De  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \mathbf{e}_3 + \Omega \mathbf{e}_3$ , du théorème de Poisson

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_i,$$

et du théorème du moment cinétique par rapport à  $O$  (avec  $I_1 = 0$ ),

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{3} m \ell^2 (\dot{\theta} \mathbf{e}_3 + \Omega \sin \theta \mathbf{e}_2) \right] = \mathbf{OG} \wedge m \mathbf{g} + \mathbf{M}_O^{\text{ext}}, \quad (14.63)$$

on obtient en projetant (14.63) sur l'axe d'oscillation  $\mathbf{e}_3$ , avec (14.62),

$$-\frac{1}{3} m \ell^2 (\ddot{\theta} - \Omega^2 \cos \theta \sin \theta) = \frac{1}{2} m g \ell \sin \theta.$$

Équation du mouvement  
Par conséquent

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta + \Omega^2 \cos \theta \sin \theta \quad (14.64)$$

et le lemme fondamental (§ 6.3.4) fournit la constante du mouvement

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \cos \theta + \frac{1}{2} \Omega^2 \cos^2 \theta = K. \quad (14.65)$$

Nous pouvons alors analyser qualitativement le mouvement en suivant la méthode de la section 7.4.

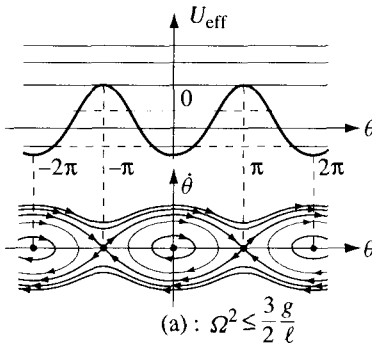
Introduisons

$$U^{\text{eff}}(\theta) = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\theta + \frac{1}{2}\Omega^2\cos^2\theta. \quad (14.66)$$

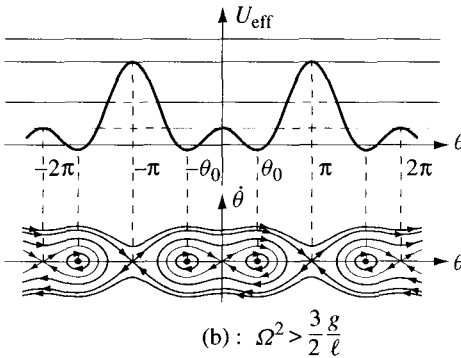
De (14.65), l'évolution du système est caractérisée par

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = K - U^{\text{eff}}(\theta) \geq 0. \quad (14.67)$$

Analyse qualitative



$$\Omega^2 \leq \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$



$$\Omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$$

**Fig. 14.10** Potentiel effectif et orbites.

La figure 14.10 montre qu'il y aura des mouvements qualitativement différents selon que

$$\Omega^2 \leq \frac{3}{2}\frac{g}{\ell} \quad \text{ou} \quad \Omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}. \quad (14.68)$$

1. Si  $\Omega^2 \leq \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$ , le point  $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$  est un « point d'équilibre stable » ; le point  $(\theta = \pi, \dot{\theta} = 0)$  est un « point d'équilibre instable ». Remarquons que « point d'équilibre » signifie ici *point d'équilibre relativement au référentiel tournant défini par le support*.
2. Si  $\Omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$ , les points  $(\theta = k\pi, \dot{\theta} = 0)$  sont des « points d'équilibre instables ». Les points d'équilibre stables sont  $(\theta_0, \dot{\theta} = 0)$  où l'équation (14.64) montre que  $\ddot{\theta} = 0$  implique

Point d'équilibre  
pour  $\Omega$  petit

Point d'équilibre  
pour  $\Omega$  grand

$$\cos\theta_0 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell\Omega^2}; \quad (14.69)$$

c'est l'*effet centrifuge*.

Nous remarquerons que  $\theta_0$  tend vers zéro lorsque  $\Omega^2$  tend vers  $\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}$  (fig. 14.13).

### Mouvements au voisinage des positions d'équilibre

- *Au voisinage de  $\theta = 0$* , l'équation (14.64) linéarisée devient

$$\ddot{\theta} = - \left( \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} - \Omega^2 \right) \theta.$$

Par conséquent, si  $\Omega^2 < \frac{3}{2} \frac{g}{\ell}$  on obtient

$$\begin{cases} \theta(t) = A \cos(\omega t + \delta) \\ \omega^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} - \Omega^2. \end{cases} \quad (14.70)$$

C'est un mouvement oscillatoire harmonique de période  $T = 2\pi/\omega$ .

Au contraire, si  $\Omega^2 > \frac{3}{2} \frac{g}{\ell}$ , on a

$$\begin{cases} \theta(t) = A \cosh(\tilde{\omega} t + \delta) \\ \tilde{\omega}^2 = \Omega^2 - \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \end{cases} \quad (14.71)$$

et la tige s'éloigne exponentiellement vite de la position d'équilibre.

- *Au voisinage de  $\theta = \pi$* , nous posons  $\psi = \theta - \pi$  et l'équation (14.64) linéarisée devient

$$\ddot{\psi} = \left( \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} + \Omega^2 \right) \psi \quad (14.72)$$

d'où

$$\begin{cases} \theta(t) = \pi + A \cosh(\tilde{\omega} t + \delta) \\ \tilde{\omega}^2 = \Omega^2 + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \end{cases} \quad (14.73)$$

et la tige s'éloigne exponentiellement vite de la position d'équilibre.

- *Au voisinage de  $\theta_0$  défini par (14.69)*, l'équation (14.64) linéarisée est

$$\ddot{\theta} = - \left[ \Omega^2 - \left( \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2} \right] (\theta - \theta_0) \quad (14.74)$$

d'où

$$\begin{cases} \theta(t) = \theta_0 + A \cos(\omega t + \delta) \\ \omega^2 = \Omega^2 - \left( \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \right)^2 \frac{1}{\Omega^2}. \end{cases} \quad (14.75)$$

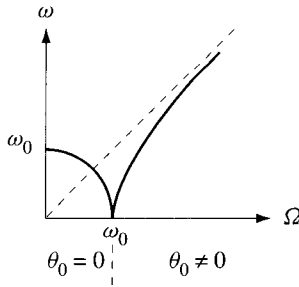
C'est un mouvement oscillatoire harmonique de période  $T = 2\pi/\omega$ .



Nous avons représenté sur la figure 14.11 la relation entre la vitesse de rotation  $\Omega$  du support et la pulsation  $\omega$  des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

En conclusion, de même que dans le paragraphe 12.6.5, cet exemple met en évidence une **vitesse de rotation critique**  $\Omega_{cr} = \sqrt{3g/2\ell}$ , à partir de laquelle le mouvement devient qualitativement différent. En particulier la position d'équilibre  $\theta = 0$  devient instable, et il apparaît une nouvelle position d'équilibre stable  $\theta_0 \neq 0$  (fig. 14.13). Cette valeur critique correspond à la pulsation propre, c'est-à-dire à la pulsation du pendule lorsque le support est immobile.

Vitesse critique



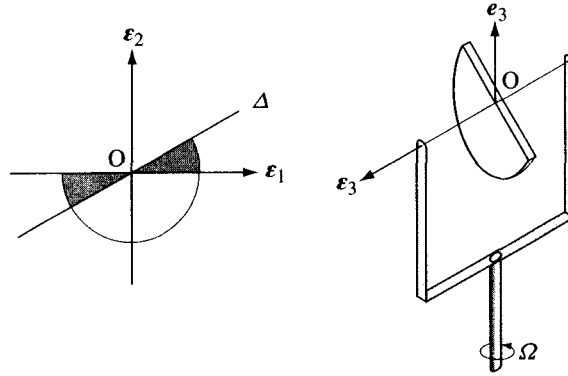
**Fig. 14.11** Pulsation  $\omega$  des petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre stable.

Les autres composantes de l'équation du moment cinétique, combinées avec les équations du centre de masse, donnent la force de réaction et le moment extérieur. Ces résultats sont nécessaires à l'ingénieur qui doit construire l'appareil et choisir le moteur approprié.

Dans le cas d'un pendule constitué d'un demi-disque (fig. 14.12), le tenseur d'inertie est tel que  $I_{e_1} = I_{e_2} = I_{\Delta}$ . Dans ce cas,  $L_O = I_{e_3} \dot{\theta} e_3 + I_{\Delta} \Omega e_3$  et l'équation du mouvement (14.64) devient

$$\ddot{\theta} = -\frac{6g}{3\pi R} \sin \theta.$$

On voit que le mouvement du demi-disque n'est pas influencé par la rotation du support.



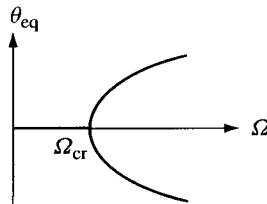
**Fig. 14.12** Pendule constitué d'un demi-disque en rotation  $\Omega$  autour de  $e_3$ . Par symétrie  $I_{e_1} = I_{e_2} = I_\Delta$  quel que soit  $\Delta$ .

### 14.3.3 Pendule en rotation amorti. Hystérèse [66]

Si, dans l'exemple du paragraphe précédent, on introduit des frottements visqueux, l'équation du mouvement du pendule (14.64) devient

$$\ddot{\theta} + \gamma \dot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{g}{\ell} \sin \theta - \Omega^2 \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (14.76)$$

Lorsque  $\Omega < \Omega_{cr} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{\ell}}$ , la position  $\theta = 0$  est stable. Au contraire, lorsque  $\Omega > \Omega_{cr}$ , la position  $\theta = 0$  devient instable et, comme précédemment, deux nouveaux états d'équilibre symétriques stables  $\pm \theta_{eq}(\Omega)$  apparaissent (fig. 14.13). On dit qu'il y a une **bifurcation** de la position d'équilibre  $\theta = 0$  en  $\Omega = \Omega_{cr}$ .

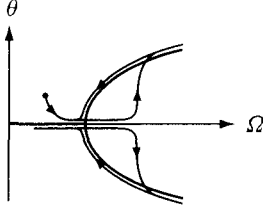


**Fig. 14.13** Position d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  du support.

Il est intéressant d'étudier alors ce qui se passe lorsque l'on fait varier lentement et périodiquement  $\Omega$  au cours du temps, autour de la valeur critique.

Si initialement  $\Omega < \Omega_{cr}$ , sous l'effet du frottement le pendule retourne alors rapidement au voisinage de  $\theta = 0$ . Lorsque l'on augmente  $\Omega$  au-delà de sa valeur critique, on observe que le pendule ne réagit pas instantanément : il reste un certain temps au voisinage de  $\theta = 0$  avant de rejoindre l'une des deux

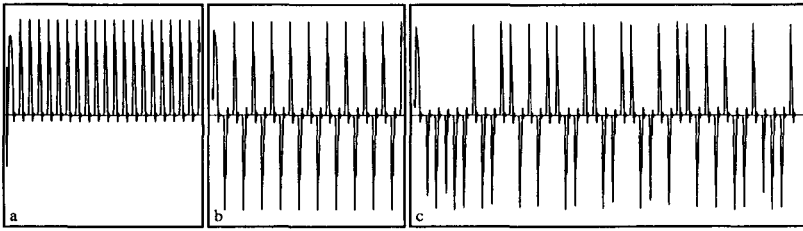
nouvelles positions d'équilibre. Lorsqu'ensuite  $\Omega$  diminue, le pendule reste dans la position d'équilibre (fig. 14.13) jusqu'à ce que  $\theta = 0$  pour  $\Omega = \Omega_{cr}$ . L'évolution de  $\theta$  n'est pas la même lorsque  $\Omega$  augmente ou diminue : on dit alors qu'il y a un effet d'*hystérèse* (fig. 14.14).



**Fig. 14.14** Évolution du pendule pour une variation lente de  $\Omega$ : hystérèse.

Une question intéressante se pose ici lorsque l'on fait varier  $\Omega$  de façon périodique : laquelle des deux positions d'équilibre le pendule va-t-il choisir à chaque cycle de  $\Omega$  ?

Lorsque le frottement est fort, on constate que le pendule choisit toujours la même position d'équilibre. A faible frottement, la réponse est plus surprenante : selon la vitesse avec laquelle  $\Omega$  varie, le pendule choisit soit toujours la même position, soit alternativement une position puis l'autre, soit il choisit sa position de manière aléatoire, c'est-à-dire chaotique (fig. 14.15).



**Fig. 14.15** Position du pendule en fonction du temps. Chaque pic correspond à l'instant dans le cycle où le pendule quitte l'origine  $\theta = 0$ . Selon la fréquence de variation (lente) de  $\Omega$ , on observe: (a) un mouvement de même période que  $\Omega$ ; (b) un mouvement de période double, où le pendule choisit alternativement un équilibre puis l'autre; (c) un mouvement sans période apparente.

L'explication de ce phénomène est que pour un frottement faible, le pendule peut osciller plusieurs fois autour de  $\theta = 0$ . Le nombre de ces oscillations dépend de la vitesse de la variation de  $\Omega$ . Si ce nombre est entier, le même équilibre est choisi ; s'il est demi-entier, c'est l'autre équilibre qui sera choisi ; les mouvements chaotiques apparaissent dans la situation intermédiaire.

## 14.4 ÉNERGIE CINÉTIQUE DES SOLIDES

## 14.4.1 Théorème de l'énergie cinétique

**Théorème.** Quel que soit le mouvement d'un solide, la puissance des forces intérieures est égale à zéro (donc les forces intérieures ne travaillent pas) et

$$\frac{d}{dt}T = \mathbf{F}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}_A + \mathbf{M}_A^{\text{ext}} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

où A est un point du solide.

DÉMONSTRATION. Soit A un point du solide, la vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$  du point  $P_\alpha$  du solide est donnée par le théorème de distribution des vitesses

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_\alpha \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_\alpha = A P_\alpha. \quad (14.77)$$

La puissance totale est définie par

$$\begin{aligned} P &= \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_\alpha) = \\ &= \left( \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha \right) \cdot \mathbf{v}_A + \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha) \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Mais en vertu de la troisième loi de Newton (sect. 10.3)

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (14.78)$$

et

$$\sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \wedge \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} = \mathbf{M}_A^{\text{ext}}, \quad (14.79)$$

ce qui conclut la démonstration.

Nous aurons en particulier

$$\Delta T = \Delta W^{\text{ext}}. \quad (14.80)$$

#### 14.4.2 Calcul de l'énergie cinétique d'un solide

**Théorème.** L'énergie cinétique d'un solide, de vitesse définie par  $\mathbf{v}_A$  et  $\boldsymbol{\omega}$ , est donnée par la relation Cas général

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + M \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}). \quad (14.81)$$

En particulier, en prenant  $A = G$

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_G. \quad (14.82)$$

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A$  un point du solide et  $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{AP}_\alpha$  ; par définition

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2, \quad \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} = M \mathbf{AG},$$

d'où

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha}) \right] \cdot \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha})^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge M \mathbf{AG}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x}_{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + M \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_A^{\text{rot}}. \end{aligned} \quad (14.83)$$

De (14.34) on obtient par conséquent

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_A^2 + M \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega})$$

ou encore en prenant  $A = G$ ,

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_G.$$

**Corollaire.** Pour un solide

- en translation :

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 \quad (14.84)$$

Translation

- en rotation autour d'un point  $A$  fixé :

$$T = \frac{1}{2} M (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_A \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_A \quad (14.85)$$

Rotation autour  
d'un point

- en rotation autour d'un axe  $\Delta$  fixé :

$$T = \frac{1}{2} I_{\Delta} \omega^2 \quad (14.86)$$

Rotation autour  
d'un axe

DÉMONSTRATION. En prenant  $A$  sur l'axe  $\Delta$ , l'équation (14.85) est une conséquence de (14.81); l'équation (14.86) est une conséquence de (14.85) et (14.41) car  $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{u}}$  où  $\hat{\mathbf{u}}$  est parallèle à  $\Delta$ .

Extensivité

Rappelons pour terminer que l'énergie cinétique d'un système formé de plusieurs solides est égale à la somme des énergies cinétiques de chacun d'eux.

14.4.3 Illustration 1. Pendule elliptique

Considérons un pendule physique de masse  $m$  dont l'axe de suspension est lié à une masse  $M$  pouvant se déplacer sur un rail horizontal (fig. 14.16 a). On suppose qu'il n'y a pas de frottement et qu'initialement le système est au repos.

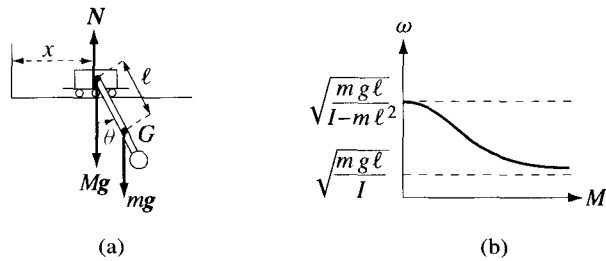


Fig. 14.16 (a) Pendule elliptique ; (b) pulsation du mouvement.

Description

Le système est holonôme à deux degrés de liberté ; nous prenons comme coordonnées la position  $x$  de la masse  $M$  et l'angle  $\theta$  de  $CG$  avec la verticale ( $G$  = centre de masse du pendule).

Constantes  
du mouvement

La somme des forces extérieures au système (pendule + masse) étant perpendiculaire au rail, la composante de la quantité de mouvement parallèle au rail est conservée. Ainsi, avec les conditions initiales ( $\dot{x}_0 = 0, \dot{\theta}_0 = 0$ ) et  $\mathbf{v}_G = (\dot{x} + \ell \cos \theta \dot{\theta} ; \ell \sin \theta \dot{\theta})$ , où  $\ell = |CG|$ , nous avons

$$(M + m)\dot{x} + m\ell \cos \theta \dot{\theta} = 0 \tag{14.87}$$

et, par intégration,

$$(M + m)x = -m\ell \sin \theta + C. \tag{14.88}$$

Par ailleurs, toutes les forces actives étant conservatives, l'énergie mécanique est conservée où

$$E^{\text{méc}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + T'_G - mg\ell \cos \theta = -mg\ell \cos \theta_0. \tag{14.89}$$

Du théorème de Huygens (14.50) et (14.86),

$$T'_G = \frac{1}{2}(I_A - m\ell^2)\dot{\theta}^2 \tag{14.90}$$

où la constante  $I_A$  est le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension.

Nous obtenons ainsi de (14.89) et (14.90)

$$-mg\ell \cos \theta_0 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + \ell \cos \theta \dot{\theta})^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2] \\ + \frac{1}{2}(I - m\ell^2)\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

et, en remplaçant  $\dot{x}$  par son expression en fonction de  $\dot{\theta}$  (14.87),

$$\frac{1}{2}\left(I - \frac{m^2}{m+M}\ell^2 \cos^2 \theta\right)\dot{\theta}^2 = mg\ell(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (14.91)$$

Nous pouvons alors effectuer à partir de (14.91) une analyse qualitative de l'évolution.

Au voisinage de la position d'équilibre  $\theta = 0$ , on a

Approximation des  
petits mouvements

$$\left(I - \frac{m^2\ell^2}{m+M}\right)\ddot{\theta} \cong -mg\ell\theta \quad (14.92)$$

et les petits mouvements ont une pulsation représentée sur la figure 14.16 (b)

$$\omega = \sqrt{\frac{mg\ell}{I - \frac{m^2\ell^2}{m+M}}}. \quad (14.93)$$

Remarquons pour terminer que pour tout point  $P$  du pendule sur la droite  $CG$ , la relation (14.88) implique

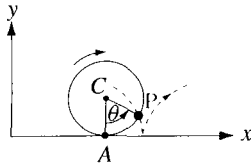
$$x_p = (x + \lambda \sin \theta, -\lambda \cos \theta) = \left(\left(\lambda - \frac{m}{m+M}\ell\right) \sin \theta + C', -\lambda \cos \theta\right)$$

où  $\lambda = |CP|$  :

la trajectoire de  $P$  est une portion d'ellipse, ce qui justifie le nom de pendule elliptique.

#### 14.4.4 Illustration 2. Isochronisme et non-isochronisme des petites oscillations [38]

Un point matériel  $P$  de masse  $m$  est fixé sur la circonférence d'un disque de masse  $M$  et rayon  $R$ . Étudions l'évolution en admettant que le mouvement est plan et que le disque roule sans glisser sur un plan horizontal (fig. 14.17).



**Fig. 14.17** Mouvement d'un point matériel  $P$  fixé sur un disque roulant sans glisser sur un plan horizontal.

Description Comme il y a roulement sans glissement, le système est holonôme à 1 degré de liberté ; nous choisissons l'angle  $\theta$  comme coordonnée. Toutes les forces actives étant conservatives (car  $\mathbf{v}_A = 0$ ), l'énergie est une constante du mouvement et de la condition  $\mathbf{v}_A = 0$ , on tire (§ 14.4.2)

$$T_{\text{disque}} = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 \quad \text{où} \quad I_A = \frac{3}{2} M R^2,$$

Constantes du mouvement et  $\frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^2 + \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = E$ .

En exprimant  $\mathbf{v}_P$  en terme de  $\dot{\theta}$ , soit

$$\mathbf{v}_P^2 = |\mathbf{AP}|^2 \dot{\theta}^2 = 4R^2 \sin^2(\theta/2) \dot{\theta}^2 = 2R^2(1 - \cos \theta) \dot{\theta}^2,$$

on obtient

$$\left[ mR^2(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} I_A \right] \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos \theta) = E. \quad (14.94)$$

Pour esquisser les orbites, posons  $u = 1 - \cos \theta$  ; nous avons ainsi

$$\dot{\theta}^2 = \frac{E - mgRu}{mR^2u + \frac{1}{2} I_A}, \quad (14.95)$$

ce qui permet d'obtenir l'allure qualitative des orbites (fig. 14.18). Nous voyons que si la masse du disque est nulle,  $I_A = 0$  et il y a une singularité en  $\theta = 0$  ( $\dot{\theta} = \pm\infty$ ).

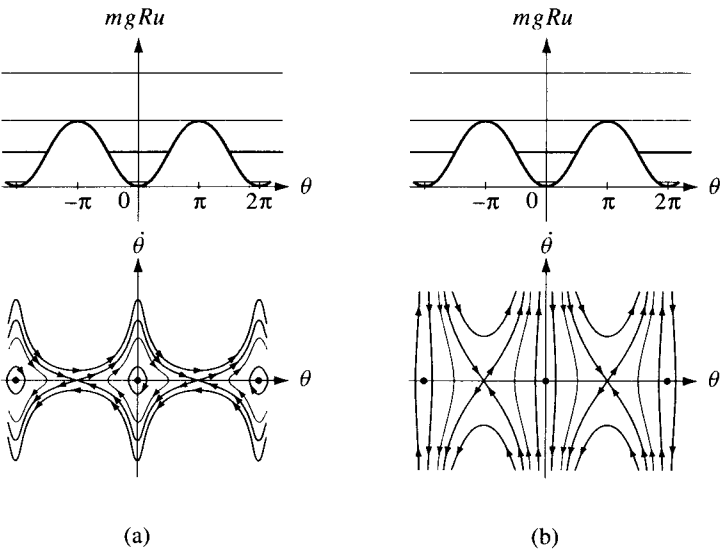


Fig. 14.18 Orbites : (a)  $M \ll m$  ; (b)  $M = 0$ .

Petits mouvements Étudions alors les petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre stable  $\theta = 0$ . En posant  $1 - \cos \theta \cong \frac{1}{2} \theta^2$ , l'équation (14.94) devient

$$(mR^2\theta^2 + I_A) \dot{\theta}^2 + mgR\theta^2 = mgR\theta_{\text{max}}^2. \quad (14.96)$$



Par conséquent, si  $I_A \neq 0$  et  $\theta \ll 1$ , le mouvement est oscillatoire harmonique avec

$$\omega^2 = \frac{mgR}{I_A} \quad \text{et la période} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgR}}.$$

Si la masse du disque est non nulle, la période des petits mouvements est indépendante de l'amplitude ( $= \theta_{\max}$ ) : il y a isochronisme des petites oscillations.

Isochronisme des petites oscillations

Au contraire, si la masse du disque est nulle,  $I_A = 0$  et l'on a de (14.96)

$$\theta^2 \dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} \theta^2 = \frac{g}{R} \theta_{\max}^2.$$

Nous obtenons ainsi la période  $T$  des petites oscillations, soit

$$T = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \int_{\theta_{\max}}^{\theta} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\theta_{\max}^2 - \theta^2}} = 4 \sqrt{\frac{R}{g}} \theta_{\max}. \quad (14.97)$$

Si la masse du disque est nulle, la période des petits mouvements est proportionnelle à l'amplitude : il n'y a pas isochronisme des petites oscillations.

Non isochronisme des petites oscillations

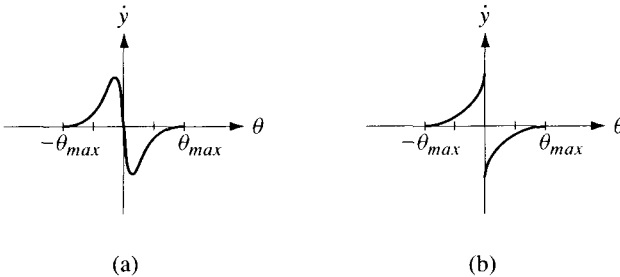
Pour comprendre ce dernier résultat, étudions le mouvement vertical de  $P$  ; en prenant  $I_A = 0$ , nous avons

$$y = R(1 - \cos \theta) \cong \frac{R}{2} \theta^2 \quad \text{si} \quad \theta \ll 1$$

$$\dot{y} = R \sin \theta \dot{\theta} \cong R \theta \dot{\theta} = \pm [Rg(\theta_{\max}^2 - \theta^2)]^{1/2} = \pm [2g(y_{\max} - y)]^{1/2}$$

d'où  $\ddot{y} = -g$ .

Par conséquent, dans le cas  $I_A = 0$ , le mouvement de  $P$  est approximativement celui d'une chute libre, avec « choc » (c'est-à-dire « discontinuité de la vitesse ») sur le plan horizontal (fig. 14.19).



**Fig. 14.19** Vitesse verticale : (a)  $M \ll m$  ; (b)  $M = 0$ .

14.5 ELLIPSOÏDE D'INERTIE ET AXES PRINCIPAUX

14.5.1 Définition

De même que l'on représente un vecteur par une flèche, on représente géométriquement le tenseur d'inertie  $I_C$  au moyen de la surface d'équation

$$\sum_{i,j=1}^3 I_{C,ij} x_i x_j = 1$$

(14.98)

où  $x$  est un rayon-vecteur d'origine  $C$ .

Ellipsoïde d'inertie  
au point  $C$

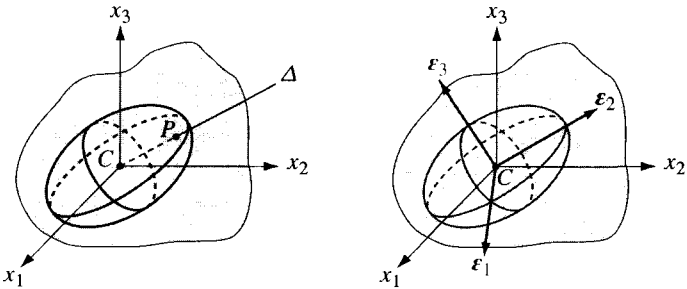
La surface définie par (14.98) est un ellipsoïde appelé, dans le cas du tenseur d'inertie, **ellipsoïde d'inertie au point  $C$**  (fig. 14.20).

En écrivant (14.98) sous la forme

$$(x, I_C x) = 1,$$

(14.99)

on conclut que la surface (14.98) ne dépend pas du repère orthonormé choisi pour définir la matrice  $\{I_{C,ij}\}$ . L'ellipsoïde d'inertie est une surface *liée au solide*, indépendante du système d'axes choisi. Il dépend par contre du point  $C$  sur le solide (fig. 14.21).



**Fig. 14.20** (a) Solide et ellipsoïde d'inertie au point  $C$  ; (b) axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie  $\equiv$  repère d'inertie en  $C$ .

14.5.2 Propriétés géométriques

L'ellipsoïde d'inertie permet de visualiser les propriétés suivantes :

**Propriété 1.** Le moment d'inertie  $I_\Delta$  par rapport à un axe  $\Delta$  contenant  $C$  est égal à

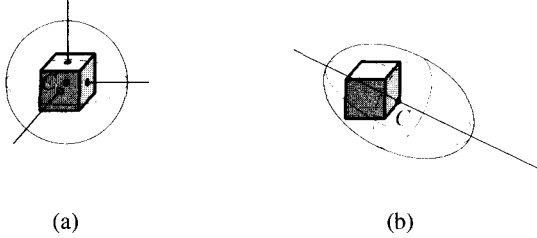
$$I_\Delta = \frac{1}{|CP|^2}$$

(14.100)

où  $P$  est l'intersection de  $\Delta$  avec l'ellipsoïde au point  $C$  (fig. 14.20 a).

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{x} = \mathbf{CP}$  et  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$  le vecteur unité d'origine  $C$ , parallèle à  $\Delta$ . De (14.41) et (14.99), on obtient

$$I_{\Delta} = (\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{I}_C \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} (\mathbf{x}, \mathbf{I}_C \mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{CP}|^2}.$$



**Fig. 14.21** Ellipsoïde d'inertie d'un cube par rapport à (a) son centre de gravité ; (b) un de ses sommets.

**Propriété 2.** Les axes principaux d'inertie du solide au point  $C$  coïncident avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie (fig. 14.20 b).

Axes principaux  
d'inertie  $\equiv$  axes de  
l'ellipsoïde

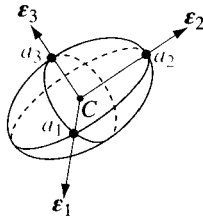
En effet, par rapport à un repère d'inertie  $C\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$ , le tenseur d'inertie est diagonal et l'équation de l'ellipsoïde d'inertie devient

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1.$$

Par conséquent,

$$I_i = \frac{1}{a_i^2} \quad (14.101)$$

où  $a_i$  est le demi-axe de l'ellipsoïde dans la direction  $\epsilon_i$  (fig. 14.22).



**Fig. 14.22** Axes de l'ellipsoïde.

On constate une certaine congruence entre la forme du solide et celle de l'ellipsoïde d'inertie construit en son centre de gravité. Toutefois, il faut faire attention ! L'axe le plus court de l'ellipsoïde d'inertie correspond au moment d'inertie le plus grand (14.101).

On appelle **symétrie** une transformation qui applique le solide sur lui-même. Par conséquent, toute symétrie qui laisse  $C$  invariant est une symétrie de l'ellipsoïde.

Symétrie



CURIE Pierre  
Physicien français  
(1859-1906)  
Prix Nobel 1903

De cette définition et de la propriété 2, nous déduisons les propriétés suivantes.

### Propriété 3

- L'axe perpendiculaire à un plan de symétrie contenant  $C$  est un axe principal de  $I_C$  ;
- Tout axe de symétrie contenant  $C$  est un axe principal ;
- Si le solide possède un axe de symétrie d'ordre  $n \geq 3$  contenant  $C$ , l'ellipsoïde au point  $C$  est de révolution autour de cet axe.

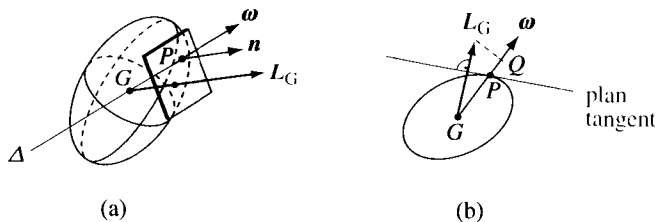
Remarquons que la réciproque, « le groupe de symétrie de l'ellipsoïde contient le groupe de symétrie du solide comme sous-groupe », est une illustration du **principe de Curie** (1894) suivant : « le groupe de symétrie d'un phénomène contient comme sous-groupe le groupe de symétrie de la cause de ce phénomène ».

**Propriété 4.** Le moment cinétique  $L_G$  (ou  $L_C$  si  $C$  est un point fixe) est perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point  $P$  défini par l'intersection du vecteur  $\omega$  avec l'ellipsoïde au point  $G$  (fig. 14.23).

**DÉMONSTRATION.** Soit  $x_p = CP$ , où  $P$  est un point de l'ellipsoïde d'inertie au point  $C$ , et  $x = x(\lambda)$  une courbe sur cet ellipsoïde, telle que  $x(\lambda = 0) = x_p$ . Le vecteur  $\tau = \frac{d}{d\lambda} x(\lambda = 0)$  est tangent à la courbe au point  $P$  (§ 5.1.6). D'autre part  $(x(\lambda), I_C x(\lambda)) = 1$  entraîne

$$\frac{d}{d\lambda} (x(\lambda), I_C x(\lambda)) = 0 = 2 \left( \frac{dx}{d\lambda}(\lambda), I_C x(\lambda) \right).$$

Par conséquent, le vecteur  $I_C x_p$  est perpendiculaire à la tangente en  $P$  à n'importe quelle courbe sur l'ellipsoïde passant par  $P$  :  $I_C x_p$  est donc perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point  $P$ . Posons  $\omega = \lambda CP = \lambda x_p$ . Ayant pris  $C = G$ , ou  $C$  un point du solide de vitesse nulle, nous avons  $L_C = I_C \omega = \lambda I_C x_p$  et  $L_C$  est donc perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde au point  $P$ .



**Fig. 14.23**  $L_G$  est perpendiculaire au plan tangent au point  $P$  de l'ellipsoïde.

## 14.6 CLASSIFICATION DES SOLIDES

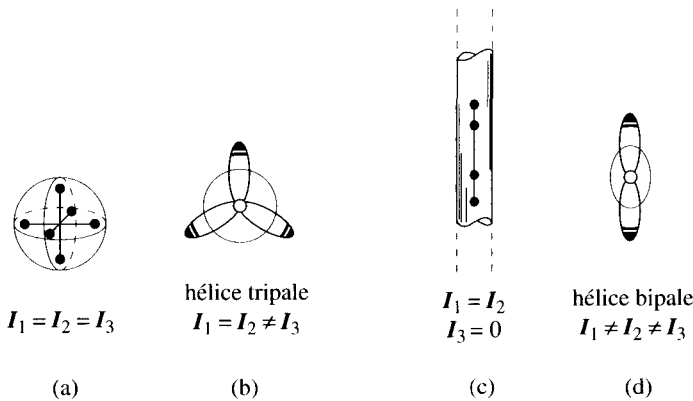
## 14.6.1 Définitions

Soulignons que, quel que soit le solide, ses propriétés dynamiques sont caractérisées par un point (le centre de masse  $G$ ), une surface (l'ellipsoïde d'inertie au point  $G$ ) et un scalaire (la masse).

L'ellipsoïde lui-même est caractérisé par trois grandeurs  $I_{G,i}$  où  $i = 1, 2, 3$ . Par conséquent, on a 3 cas possibles (fig. 14.24) :

1.  $I_{G,1} = I_{G,2} = I_{G,3}$  ; on parle de **toupie sphérique**. L'ellipsoïde d'inertie au point  $G$  est une sphère et  $L_G$  sera toujours parallèle à  $\omega$ . Toupie sphérique
2.  $I_{G,1} = I_{G,2} \neq I_{G,3}$  ; on parle de **toupie symétrique** par rapport à  $G\epsilon_3$ . L'ellipsoïde d'inertie au point  $G$  est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe  $\epsilon_3$  et  $L_G$  sera parallèle à  $\omega$  si  $\omega$  est parallèle – ou perpendiculaire – à  $\epsilon_3$ . En particulier, tout solide ayant un axe de symétrie d'ordre  $n \geq 3$  est une toupie symétrique. Toupie symétrique
3.  $I_{G,1} \neq I_{G,2} \neq I_{G,3}$  ; si un solide a ses trois moments d'inertie principaux  $I_{G,i}$  différents, on parle de **toupie asymétrique**. Toupie asymétrique

Le **rotateur** défini au paragraphe 14.1.1 est une toupie symétrique, avec  $I_{G,1} = I_{G,2}$  et  $I_{G,3} = 0$ . C'est par exemple le cas d'une molécule linéaire rigide.



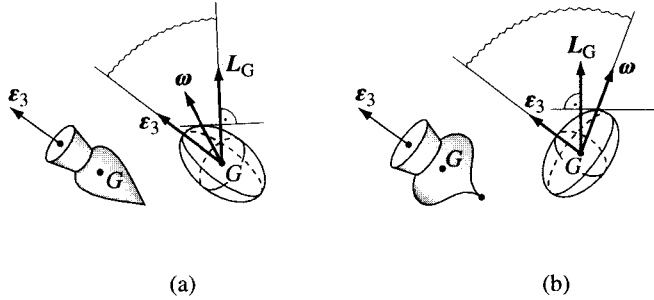
**Fig. 14.24** Solide et ellipsoïde d'inertie : (a) toupie sphérique ; (b) toupie symétrique ; (c) rotateur ; (d) toupie asymétrique.

## 14.6.2 Propriété des toupies symétriques

**Théorème.** Pour une toupie symétrique d'axe  $G\epsilon_3$  les trois vecteurs  $\epsilon_3$ ,  $\omega$  et  $L_G$  sont toujours coplanaires (fig. 14.25).

DÉMONSTRATION.

$$(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_3) \cdot \mathbf{L}_G = (-\omega_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \omega_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \left( \sum_i I_i \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) = -\omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = 0. \quad (14.102)$$



**Fig. 14.25**  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$  est choisi de telle sorte que l'angle entre  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$  et  $\mathbf{L}_G$  soit aigu ; (a)  $I_3 < I_1 = I_2$  ; (b)  $I_3 > I_1 = I_2$ .

## 14.7 ÉQUATIONS D'EULER

$C = G$  ou  
 $\mathbf{v}_C = 0$

Soit  $C$  un point du solide et  $C\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$  un repère d'inertie lié au solide. Dans la suite de ce chapitre, le point  $C$  sera soit le centre de masse  $G$ , soit un point de vitesse nulle. Pour simplifier la notation, on écrira  $I_{ij}$  au lieu de  $I_{C,ij}$  et

$$\mathbf{L}_C = \sum_i I_i \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i.$$

L'équation du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_C = \mathbf{M}_C^{\text{ext}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (14.103)$$

implique

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_i I_i \omega_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \right) = \mathbf{M}_C^{\text{ext}}, \quad (14.104)$$

soit

$$\sum_i (I_i \dot{\omega}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + I_i \omega_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) = \mathbf{M}_C^{\text{ext}}. \quad (14.105)$$

Mais  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  étant lié au solide, nous avons la formule de Poisson

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i = \sum_j \omega_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i$$

et l'on obtient

$$\sum_{i=1}^3 I_i \left[ \dot{\omega}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \omega_i \sum_{j=1}^3 \omega_j \boldsymbol{\varepsilon}_j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i \right] = \mathbf{M}_C^{\text{ext}}. \quad (14.106)$$

C'est l'**équation d'Euler** sous forme vectorielle.

En projetant cette équation sur les axes d'inertie  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ , nous obtenons :

### Équation d'Euler en composantes

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= M_{C,1}^{\text{ext}} \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= M_{C,2}^{\text{ext}} \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= M_{C,3}^{\text{ext}} \end{aligned} \right\} \quad (14.107)$$

Équations d'Euler  
avec  $C = G$   
ou  $\mathbf{v}_C = 0$

## 14.8 MOUVEMENT D'UN SOLIDE ISOLÉ

### 14.8.1 Propriétés générales

Dans le cas d'un solide isolé, le torseur des forces extérieures étant nul, les équations du mouvement prennent la forme de lois de conservation :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) & \text{d'où} \quad \mathbf{v}_G(t) = \mathbf{v}_G(0) \end{array} \right. \quad (14.108)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_G(t) = L_G(0) & \text{d'où} \quad |L_G|^2 = \sum_{i=1}^3 I_i^2 \omega_i^2 = \text{cste} \end{array} \right. \quad (14.109) \quad \text{Constantes du mouvement}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} T(t) = T(0) = E & \text{d'où} \quad \frac{1}{2} L_G \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_i \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = E' = \text{cste} \end{array} \right. \quad (14.110)$$

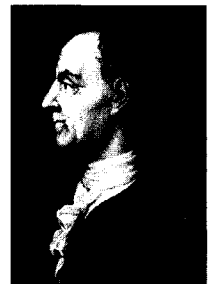
avec  $E' = E - \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2$ , et l'on considère les composantes par rapport à un repère d'inertie.

Par conséquent, de (14.109) et (14.110) on voit que l'extrémité du vecteur  $\boldsymbol{\omega}$ , lié à  $G$ , évolue sur l'intersection de deux ellipsoïdes de demi-axes

$$\left\{ \frac{1}{I_i} |L_G| \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \sqrt{\frac{2E'}{I_i}} \right\}, \quad (14.111)$$

parallèles aux axes d'inertie (fig. 14.31).

Remarquons que  $L_G \cdot \boldsymbol{\omega} \geq 0$  et, par conséquent, l'angle  $\gamma$  entre  $L_G$  et  $\boldsymbol{\omega}$  est toujours compris entre 0 et  $\pi/2$ .

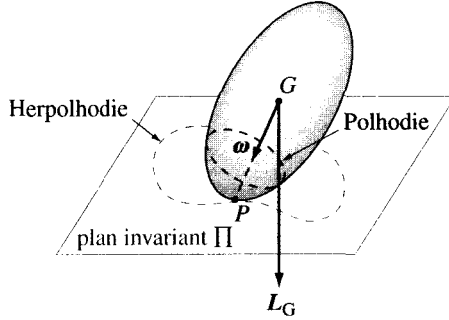


EULER Leonhard  
Mathématicien suisse  
(1707-1783)

Description du  
mouvement d'un  
solide isolé

**Théorème.** Dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$  du centre de masse, le mouvement d'un solide isolé correspond au roulement sans glissement de l'ellipsoïde d'inertie en  $G$  sur un plan immobile perpendiculaire à  $L_G$  (fig. 14.26).

Plan invariant



**Fig. 14.26** Roulement sans glissement de l'ellipsoïde d'inertie sur le plan invariant. Polhodie et herpolhodie.

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\Pi$  le plan perpendiculaire à  $L_G$ , tangent à l'ellipsoïde en un point  $P$  (à l'instant  $t$ ). Comme nous l'avons déjà vu,  $\omega$  est parallèle à  $GP$ , d'où  $\omega = \lambda GP$ . De plus, de (14.110) la projection de  $\omega$  sur  $L_G$  est constante et l'extrémité du vecteur  $\omega$  (d'origine  $G$ ) est dans un plan  $\Pi'$  immobile, perpendiculaire à  $L_G$ . Finalement de (14.99) et (14.110), on tire

$$\begin{aligned} GP \cdot L_G &= (x_P, I_G \omega) = \lambda (x_P, I_G x_P) = \lambda = \\ &= \frac{1}{\lambda} \omega \cdot L_G = \frac{1}{\lambda} 2E', \end{aligned}$$

d'où  $\lambda^2 = 2E'$  et  $\omega = \sqrt{2E'} GP$ . Par conséquent,  $\Pi$  est immobile et, comme  $v_P)_{\mathcal{R}_G} = \omega \wedge GP = 0$ , l'ellipsoïde roule sans glisser sur le plan  $\Pi$ .

Polhodie  
Herpolhodie

Le lieu des points  $P$  sur l'ellipsoïde est appelé **polhodie** (fig. 14.26), alors que le lieu des points sur le plan  $\Pi$  est appelé **herpolhodie**.

Dans le cas d'une toupie sphérique isolée,  $L_G = I\omega$  et les vecteurs  $v_G$  et  $\omega$  sont constants.

### 14.8.2 Toupie symétrique

**Propriété.** L'évolution d'une toupie symétrique isolée, d'axe  $G\epsilon_3$ , est telle que  $|\omega|$ ,  $\omega_3 = \omega \cdot \epsilon_3$ , et l'angle  $\gamma$  entre  $L_G$  et  $\omega$  restent constants. De plus,

$$\cos \gamma = \frac{2E'}{|\omega| \cdot |L_G|}.$$



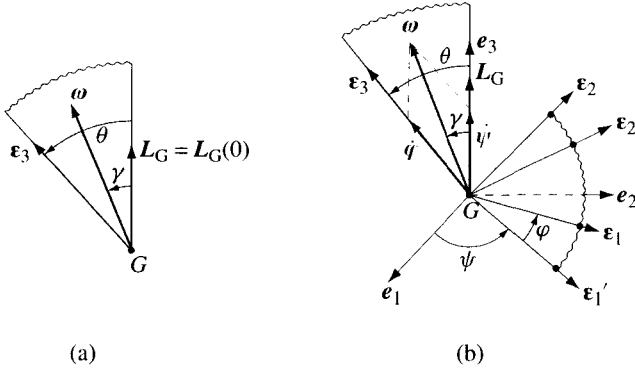
**DÉMONSTRATION.** Nous savons que  $(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{L}_G, \boldsymbol{\omega})$  sont coplanaires (§ 14.6.2). Soit  $G\boldsymbol{\varepsilon}_1\boldsymbol{\varepsilon}_2\boldsymbol{\varepsilon}_3$  le repère d'inertie tel que l'angle entre  $\mathbf{L}_G$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$  soit aigu (fig. 14.27). De l'équation d'Euler avec  $M_G^{\text{ext}} = 0$  et  $I_1 = I_2$ , on tire

$$I_3 \dot{\omega}_3(t) = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega_3(t) = \omega_3(0). \quad (14.112)$$

Par ailleurs,  $\mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\omega} = 2E' = I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2$  et, par conséquent,  $|\boldsymbol{\omega}|$  et  $\gamma$  sont constants.

**Corollaire.** La composante  $L_3 = \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3$  du moment cinétique, et l'angle  $\theta$  entre  $\mathbf{L}_G$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ , sont constants. De plus,  $\cos \theta = I_3 \omega_3 / |\mathbf{L}_G|$ .

En effet :  $L_3 = I_3 \omega_3 = \mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_3 = |\mathbf{L}_G| \cos \theta$ .



**Fig. 14.27** (a) Dans le plan  $(\boldsymbol{\varepsilon}_3, \mathbf{L}_G, \boldsymbol{\omega})$   $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{L}_G$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  sont constants ; (b) décomposition de  $\boldsymbol{\omega}$  en une rotation propre  $\dot{\varphi}$  et une précession  $\dot{\psi}$  (angles d'Euler).

En introduisant les angles d'Euler relativement à l'axe  $G\boldsymbol{\varepsilon}_3$  défini par le vecteur constant  $\mathbf{L}_G$ , la vitesse instantanée de rotation  $\boldsymbol{\omega}$  se décompose en une vitesse de précession  $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}$  selon  $\mathbf{L}_G$  et une vitesse de rotation propre  $\boldsymbol{\omega}_p = \dot{\varphi}$  selon  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$ .

Comme  $|\boldsymbol{\omega}|$ ,  $\theta$  et  $\gamma$  sont constants, les composantes  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\varphi}$  sont également constantes, et l'on a

$$\dot{\psi} = \frac{|\mathbf{L}_G|}{I_1} \quad \text{et} \quad \dot{\varphi} = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \omega_3. \quad (14.113)$$

En effet, la condition  $I_1 = I_2$  entraîne

$$\mathbf{L}_G = I_1 (\omega_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \omega_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2) + I_3 \omega_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3 = I_1 \boldsymbol{\omega}_\perp + I_3 \omega_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

où  $\boldsymbol{\omega}_\perp$  est la composante de  $\boldsymbol{\omega}$  perpendiculaire à  $\mathbf{L}_G$ .

Par conséquent

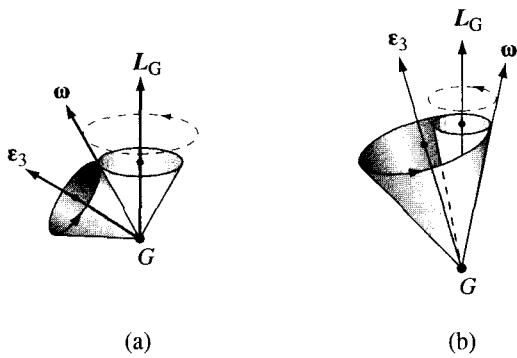
$$\mathbf{L}_G \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = |\mathbf{L}_G| \sin \theta = I_1 \boldsymbol{\omega}_\perp \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = I_1 \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}'_2 = I_1 \dot{\psi} \sin \theta$$

d'où  $\dot{\psi} = \frac{|L_G|}{I_1}$ .

De plus

$$\dot{\phi} = \omega_3 - \dot{\psi} \cos \theta = \omega_3 - \frac{|L_G|}{I_1} \cos \theta = \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \omega_3.$$

**Remarque.** Nous avons vu que le mouvement d'un solide isolé se décrit par le roulement sans glissement de l'ellipsoïde d'inertie sur un plan invariant. Dans le cas particulier d'une toupie symétrique isolée, les angles entre les vecteurs coplanaires  $\omega$ ,  $L_G$  et  $\epsilon_3$  étant constants, la polhodie et l'herpolhodie sont des cercles. Le mouvement correspond aussi au roulement sans glissement d'un cône sur un autre, en contact le long de l'axe de rotation instantané. Les angles au sommet des cônes, et le mouvement, sont déterminés par les conditions initiales et le facteur  $1 - I_3/I_1$  (fig.14.28).



**Fig. 14.28** Mouvement d'une toupie symétrique isolée : roulement sans glissement d'un cône sur un autre. (a)  $I_3 < I_1 = I_2$  ; (b)  $I_3 > I_1 = I_2$ .

**Évolution de  $\omega$  par rapport au repère lié au solide**

On constate que par rapport à ce repère, le vecteur  $\omega$  tourne autour de  $\epsilon_3$ . Pour étudier ce mouvement on utilise les équations d'Euler (14.107) qui décrivent le mouvement dans le repère  $G\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3$ . Avec la condition (14.112), on obtient

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right) \omega_3^{(0)} \omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = -\left(\frac{I_1 - I_3}{I_1}\right) \omega_3^{(0)} \omega_1 \end{cases} \quad \text{où} \quad \omega_3(t) = \omega_3^{(0)}. \tag{14.114}$$

Par ailleurs,  $|\omega_\perp|$  étant constant (fig. 14.29)

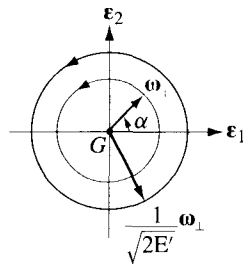
$$\begin{cases} \omega_1 = |\omega_\perp| \cos \alpha \\ \omega_2 = |\omega_\perp| \sin \alpha \end{cases}$$

d'où l'on tire de (14.114)

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -|\boldsymbol{\omega}_\perp| \sin \alpha \dot{\alpha} = \\ &= \left( \frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) \omega_3^{(0)} |\boldsymbol{\omega}_\perp| \sin \alpha.\end{aligned}$$

Ainsi le vecteur  $\boldsymbol{\omega}$  tourne autour de  $\boldsymbol{\varepsilon}_3$  (dans le repère lié au solide) avec une vitesse angulaire (fig. 14.29)

$$\dot{\alpha} = \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \omega_3^{(0)}. \quad (14.115)$$



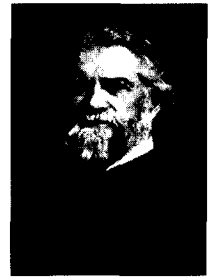
**Fig. 14.29** Projection de  $\boldsymbol{\omega}$  sur un plan fixé au solide perpendiculaire à  $L_G$  et polhoïde pour le mouvement d'une toupie symétrique.

### 14.8.3 Application au mouvement de l'axe de la Terre : période de Chandler

En première approximation, nous pouvons considérer que le torseur des forces exercées par le Soleil sur la Terre est équivalent à un vecteur lié au centre de la Terre de sorte que, par rapport au référentiel géocentrique, la Terre est un solide isolé. (Nous reviendrons sur cette approximation au paragraphe 14.9.4.) Du fait de l'aplatissement de la Terre,  $I_1 = I_2$  est différent de  $I_3$ , ce qui provoque un mouvement de rotation de  $\boldsymbol{\omega}$  par rapport à l'axe des pôles, à la vitesse angulaire (14.115)

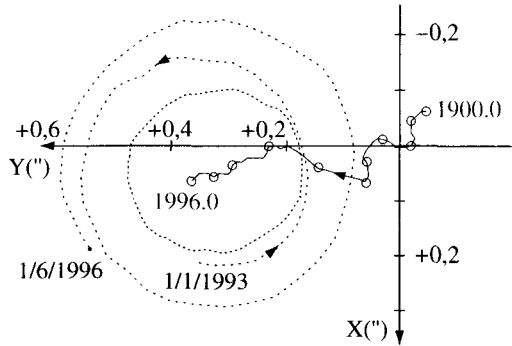
$$\dot{\alpha} = \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \omega_3^{(0)} \quad \text{où} \quad \left( \frac{I_3 - I_1}{I_1} \right) \cong \frac{1}{300}. \quad (14.116)$$

Cet effet, prédit par Euler, fut observé pour la première fois en 1891 par Chandler. La relation (14.116) donne une période de 305 jours, alors que l'observation montre une période de 433 jours, appelée **période de Chandler**. A la fin du siècle dernier, Newcomb expliqua cet allongement de la période comme étant dû à la déformation de la Terre sous l'effet du changement de direction de la « force centrifuge » ; ceci permit d'obtenir l'une des premières estimations de la rigidité de la Terre.



NEWCOMB Simon  
Mathématicien et  
astronome américain  
(1835-1909)

S.C.Chandler



**Fig. 14.30** Mouvement de l'axe de rotation pendant la période 1993-1996 exprimé en seconde d'arc. 0,1'' correspond à 3 mètres à la surface de la Terre. La partie la plus importante du mouvement du pôle de rotation à la surface de la Terre est le battement entre une oscillation annuelle forcée par les déplacements saisonniers des couches fluides de la Terre et une oscillation libre de période environ 14 mois, le mouvement de Chandler. La figure montre ce mouvement (la polhodie) de janvier 1993 à juillet 1996 à intervalles de 5 jours. Les petites irrégularités de la polhodie sont l'effet des variations infrasaisonnières de la répartition planétaire de la pression atmosphérique. Le graphe en trait continu représente la dérive lente du centre de la polhodie, attribué au rebond post-glaciaire et à des variations climatiques de la pression atmosphérique. Crédit : 1995 IERS Annual Report, Observatoire de Paris.

#### 14.8.4 Toupie asymétrique : stabilité du mouvement uniforme

Dans le cas d'une toupie asymétrique isolée, la solution générale de (14.107) (avec  $\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = 0$ ) est très compliquée, mais présente de nombreux intérêts, en particulier dans le guidage des véhicules spatiaux.

Dans cette section, nous considérons uniquement le problème de la stabilité du mouvement uniforme. Remarquons pour commencer qu'il suit de (14.107) que si  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ , alors  $\boldsymbol{\omega}$  est nécessairement parallèle à un axe principal. Considérons par exemple le mouvement uniforme autour de l'axe  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ , c'est-à-dire  $\omega_1 = \bar{\omega}_1$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 0$ .

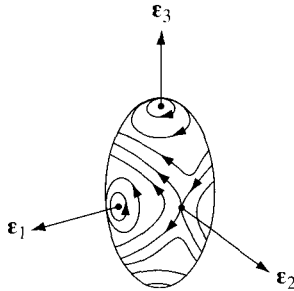
Pour étudier le mouvement au voisinage de ce mouvement uniforme, soit  $|\omega_2| \ll 1$ ,  $|\omega_3| \ll 1$ , nous linéarisons (14.107) autour de  $(\bar{\omega}_1, 0, 0)$ , et l'on obtient

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \bar{\omega}_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_2 \bar{\omega}_1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \omega_1(t) = \bar{\omega}_1 \\ I_2 \ddot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \frac{(I_1 - I_2)}{I_3} \bar{\omega}_1^2 \omega_2 \\ I_3 \ddot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \frac{(I_3 - I_1)}{I_2} \bar{\omega}_1^2 \omega_3. \end{cases}$$

Par conséquent, le mouvement autour de  $\boldsymbol{\varepsilon}_1$  est stable si

$$(I_1 - I_3)(I_1 - I_2) > 0. \quad (14.117)$$

En conclusion, si l'on choisit les axes de sorte que  $I_1 > I_2 > I_3$ , alors le mouvement autour des axes  $G\epsilon_1$  et  $G\epsilon_3$  est stable, mais il est instable autour de  $G\epsilon_2$ , comme on le voit géométriquement sur la figure 14.31.



**Fig. 14.31** Polhodies correspondant au mouvement d'une toupie asymétrique isolée. Elles sont obtenues par l'intersection des ellipsoïdes (14.109) et (14.110).

Expérimentalement, ce résultat est mis en évidence de manière très simple ; il suffit de lancer en l'air un parallélépipède en lui imprimant un mouvement de rotation autour d'un des axes de symétrie : il est facile de réaliser une rotation uniforme autour du petit ou du grand axe, mais difficile autour de l'axe moyen (le solide se retourne, montrant tantôt une face, tantôt l'autre à l'observateur). En effet, bien que dans ce cas le solide ne soit pas isolé, nous avons

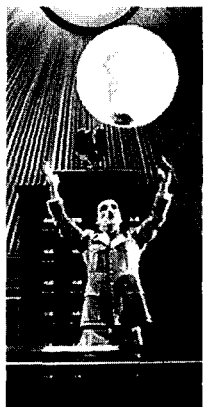
$$M_G^{\text{ext}} = 0, \quad L_G = \text{cste}, \quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_G = E - \frac{1}{2} M v_G^2 - Mgz = E' = \text{cste}$$

et les conclusions (14.117) ci-dessus ne sont pas modifiées.

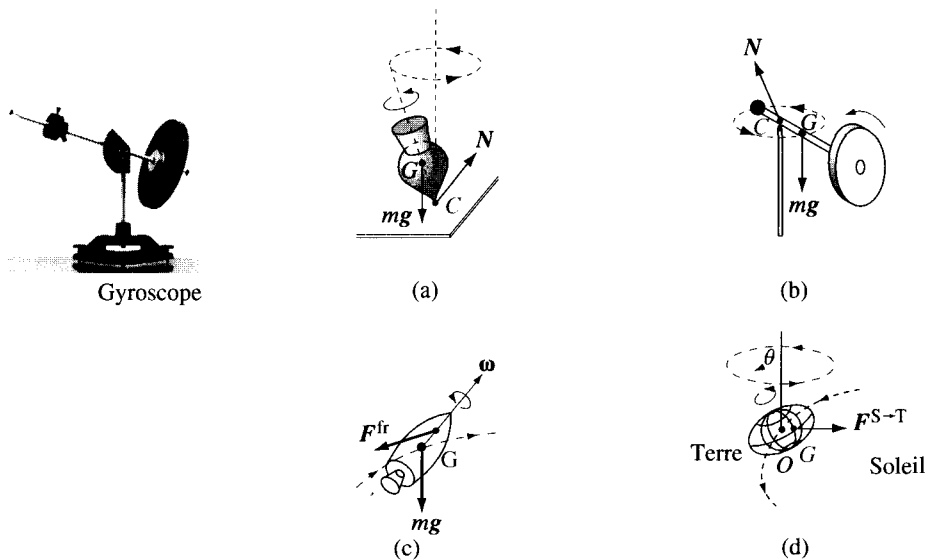
## 14.9 SOLIDE AVEC POINT FIXE : GYROSCOPE

### 14.9.1 Observations

Comme nous l'avons observé expérimentalement à la section 11.4, si l'on essaie de changer la direction de l'axe de rotation d'une toupie en appliquant une force  $\mathbf{F}$ , on n'obtient pas le résultat auquel on s'attend : la toupie s'échappe dans une direction perpendiculaire à  $\mathbf{F}$ . C'est l'*effet gyroscopique* que nous allons discuter dans cette section et qui est une conséquence de l'équation du moment cinétique. Pour ce faire, nous étudierons le mouvement d'une toupie symétrique ayant un point  $C$  fixé, soumise à l'action de forces extérieures (fig. 14.32). Remarquons cependant que dans le cas général (mouvement sans point fixe), il sera toujours possible de se replacer dans le cas du solide avec point fixe en se plaçant dans le référentiel du centre de masse.



Avec une toupie sphérique, c'est plus simple !  
(Le dictateur.  
Ch. CHAPLIN, 1941)



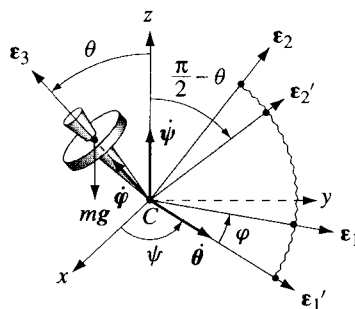
**Fig. 14.32** Mouvement d'un solide avec point fixe : (a) toupie avec un point fixe en C ; (b) gyroscopie avec un point fixe en C ; (c) satellite avec le point fixe G dans le référentiel  $\mathcal{R}_G$  ; (d) la Terre avec le point fixe G dans  $\mathcal{R}_G$ .

### 14.9.2 Équation du mouvement pour une toupie symétrique

Dans cette section, on considère le problème d'une toupie symétrique ( $I_1 = I_2$ ), soumise à l'action de son propre poids, et dont l'axe est fixé en un point. Nous choisissons un repère d'inertie dont l'origine est le point fixé et nous utilisons les angles d'Euler comme variables (fig. 14.33).



CHARDIN J.B.  
Peintre français  
(1699-1779)  
Détail du « Jeune  
homme au toton »  
(vers 1738)



**Fig. 14.33** Toupie symétrique, en rotation autour du point fixe C, repérée par les angles d'Euler.

Le problème a trois degrés de liberté et on trouve trois constantes du mouvement. En effet, des équations d'Euler (14.107), avec  $I_1 = I_2$  et  $M_{C,3}^{\text{ext}} = 0$ , on tire que

$$L_C \cdot \epsilon_3 = L_3 = I_3 \omega_3 = \text{cste.} \quad (14.118)$$

Constantes du  
mouvement

Par ailleurs, l'équation du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_C = \mathbf{CG} \wedge m\mathbf{g} \quad (14.119)$$

fournit une deuxième constante du mouvement, soit

$$L_z = \mathbf{L}_C \cdot \mathbf{e}_3 = \text{cste.} \quad (14.120)$$

Finalement, l'énergie mécanique étant conservée, nous avons une troisième constante du mouvement

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) + mg\ell \cos \theta = E = \text{cste}, \quad \text{où } \ell = |\mathbf{CG}|. \quad (14.121)$$

Ayant trois constantes du mouvement pour un problème à trois degrés de liberté, le problème est résoluble par des quadratures. Exprimons alors ces constantes du mouvement en fonction des angles d'Euler. On obtient après quelques calculs :

Le problème est intégrable

$$I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = L_3 \quad (14.122)$$

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + L_3 \cos \theta = L_z \quad \text{où } I_1 = I_2 = I_{G,1} + m\ell^2 \quad (14.123)$$

$$\frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mg\ell \cos \theta = E$$

ce qui donne les équations du mouvement

$$\dot{\psi} = \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (14.124)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (14.125)$$

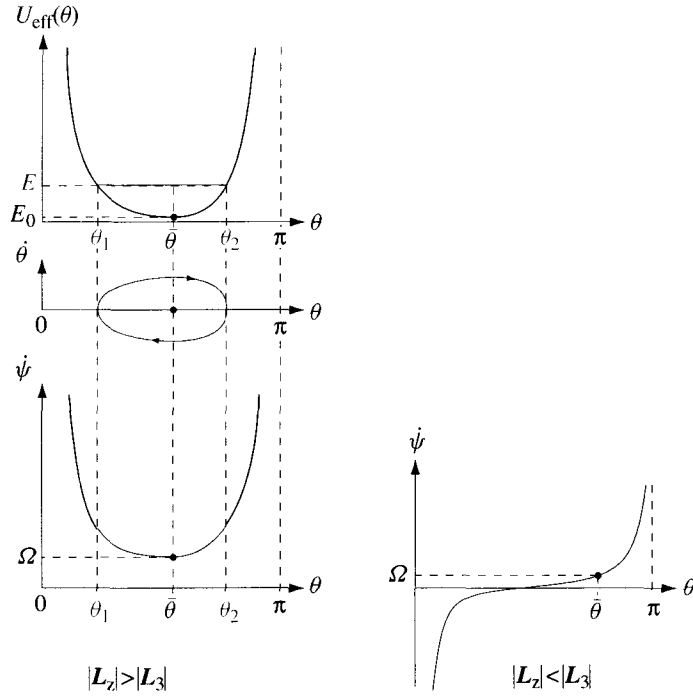
$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) = E \quad (14.126)$$

avec

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{L_3^2}{I_3} + mg\ell \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{I_1 \sin^2 \theta}. \quad (14.127)$$

### 14.9.3 Analyse qualitative du mouvement

Nous pouvons ainsi effectuer une analyse qualitative (fig. 14.34), puis résoudre le problème par des quadratures.



**Fig. 14.34** Analyse qualitative du mouvement de la toupie.

Nous voyons qu'il existe un *mouvement de précession sans nutation*,

$$\theta(t) = \bar{\theta} \quad \text{d'où} \quad \dot{\psi}(t) = \Omega = \text{cste} \quad \text{et} \quad \dot{\phi}(t) = \omega_p = \text{cste} \quad (14.128)$$

défini par le minimum de  $U_{\text{eff}}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dU_{\text{eff}}}{d\theta} = 0 = & -mg\ell \sin \bar{\theta} + \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}} L_3 \sin \bar{\theta} - \\ & - \frac{(L_z - L_3 \cos \bar{\theta})^2}{I_1 \sin^3 \bar{\theta}} \cos \bar{\theta}. \end{aligned} \quad (14.129)$$

On remarquera que les équations (14.122) et (14.124) entraînent

$$\omega_p + \Omega \cos \bar{\theta} = \frac{L_3}{I_3} = \bar{\omega}_3 = \text{cste} \quad (14.130)$$

$$\Omega = \frac{L_z - L_3 \cos \bar{\theta}}{I_1 \sin^2 \bar{\theta}} \quad (14.131)$$

et (14.129) montre que le mouvement sans nutation est défini par

$$\left[ -mg\ell + \Omega I_3 (\omega_p + \Omega \cos \bar{\theta}) - \Omega^2 I_1 \cos \bar{\theta} \right] \sin \bar{\theta} = 0. \quad (14.132)$$



Les solutions de cette équation sont les suivantes :

- $\bar{\theta} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi ;$  (14.133)

- $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{mg\ell}{I_3\omega_p}.$  (14.134) Solutions sans nutation

Cette dernière équation relie les vitesses de précession  $\Omega$  et de rotation propre  $\omega_p$  lorsque l'axe  $\mathbf{e}_3$  est perpendiculaire à la force.

Le sens de précession est l'opposé de celui d'une roue qui roulerait sur le sol.

- Si  $\bar{\theta} \neq k\frac{\pi}{2}$  l'équation (14.132) implique :

$$\Omega_{\pm} = \frac{1}{2(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \left[ I_3 \omega_p \pm \sqrt{I_3^2 \omega_p^2 - 4mg\ell(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} \right]. \quad (14.135)$$

Pour  $\bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$ , un tel mouvement existe seulement si

$$I_3 \omega_p \geq \sqrt{4mg\ell(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}} = I_3 \omega_p^{\min} \quad (14.136)$$

et, dans ce cas, on a deux solutions possibles.

En conclusion, ayant choisi  $\theta(0), \dot{\theta}(0) = 0$  et  $\omega_3(0)$  supérieur à  $\omega_p^{\min}$ , on trouve la **vitesse de précession**  $\Omega$  associée au mouvement sans nutation. En particulier, pour une rotation rapide de la toupie, soit  $\omega_p \gg \omega_p^{\min}$ , nous avons les deux solutions suivantes :

- une précession rapide  $\Omega_+ \cong \frac{I_3 \omega_p}{(I_1 - I_3) \cos \bar{\theta}}$
- une précession lente indépendante de  $\bar{\theta}$   $\Omega_- \cong \frac{mg\ell}{I_3 \omega_p}.$  (14.137)

En général, c'est le mouvement de précession lente qui est observé.

Pour  $E > E_0$ , il y a un **mouvement de nutation** qui se superpose au mouvement de précession :  $\theta(t)$  varie entre deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et, suivant que  $\psi$  garde un signe constant ou change de signe, nous obtiendrons les figures 14.35 (a) ou (b).

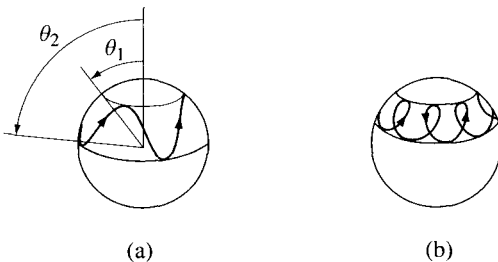


Fig. 14.35 Mouvement avec nutation de la toupie.

14.9.4 Mouvement de la Terre : précession des équinoxes

Le torseur des forces exercées par le Soleil sur la Terre est un vecteur lié à un point  $O$  distinct du centre de masse et  $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$  n'est pas nul. Ce moment engendre une précession de l'axe de rotation de la Terre, appelée *précession des équinoxes*, caractérisée par une période de 25 800 ans ( $\theta = 23^\circ 17'$ ), à laquelle se superposent le mouvement de précession discuté au paragraphe 14.8.3, et un mouvement de précession dû au moment exercé par la Lune de période  $18\frac{2}{3}$  ans.

14.10 PROBLÈMES

Cylindre **14.10.1** Calculer le tenseur d'inertie par rapport à  $G$  d'un cylindre homogène, creux, de rayon intérieur  $R_i$ , extérieur  $R_e$ , et longueur  $L$ .

Cube **14.10.2** Vérifier que le tenseur d'inertie par rapport à  $G$  d'un cube homogène de côté  $a$  est  $I_{ij} = \frac{1}{6}Ma^2\delta_{ij}$  et que celui d'une plaque est  $I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 = \frac{1}{12}Ma^2$ .

**14.10.3** Calculer le moment d'inertie d'un cylindre homogène par rapport à un axe passant par son centre et faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe du cylindre (fig. 14.36).

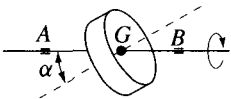


Fig. 14.36

Demi-disque **14.10.4** Connaissant le tenseur d'inertie d'un disque par rapport à son centre, trouver le tenseur d'inertie d'un demi-disque par rapport à son centre.

Plaque **14.10.5** Calculer le tenseur d'inertie, par rapport au centre, d'une plaque carrée homogène de côté  $a$ , percée de quatre trous de rayon  $R$ , centrés sur la diagonale à une distance  $d$  du centre.

Hélice bipale et tripale **14.10.6** Soit  $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$  le tenseur d'inertie d'une pale d'une hélice par rapport à l'axe de rotation. Trouver le tenseur d'inertie d'une hélice à 2, 3,  $n$  pales.

Indication : si  $n \geq 3$ , on a 
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(k\frac{2\pi}{n}\right).$$

Forces de réaction **14.10.7** On fait tourner un cylindre homogène autour d'un axe  $AB$  horizontal, passant par  $G$ , et faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe du cylindre (fig. 14.36). Le cylindre tourne à vitesse  $\omega$  constante. Est-ce qu'il est nécessaire d'appliquer un couple – pour maintenir  $\omega$  constant – s'il n'y a pas de frottement ? Calculer les forces de réaction additionnelles exercées en  $A$  et  $B$  ;  $m = 10\text{ kg}$  ;  $R = 30\text{ cm}$  ;  $\ell = 10\text{ cm}$  ;  $|AG| = |GB| = 15\text{ cm}$  ;  $\omega = 20\text{ t/s}$  ;  $\alpha = 2^\circ$ .

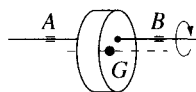


Fig. 14.37

**14.10.8** Reprendre le problème précédent dans le cas où l'axe  $AB$  est parallèle à l'axe du cylindre à une distance  $d = 1$  mm de celui-ci (fig. 14.37). Forces de réaction

**14.10.9** Une plaque rectangulaire homogène ayant un côté 3 fois plus long que l'autre est suspendue au moyen de deux cordes fixées à deux blocs posés sur le sol (fig. 14.38). Chaque bloc a une masse  $M$  égale au double de la masse  $m$  de la plaque. Une corde se casse. Calculer la force exercée en  $A$  immédiatement après la rupture ; pour quelle inclinaison de la plaque le bloc se soulève-t-il ? ; quelle doit être la masse du bloc pour ne pas être soulevé ?

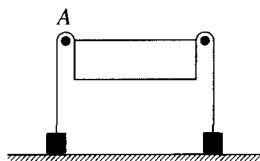
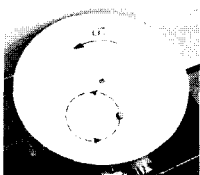


Fig. 14.38

**14.10.10** Une sphère roule sans glisser sur un plateau horizontal tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante autour de son axe. Montrer que la trajectoire du centre de la sphère est un cercle, centré au point  $\mathbf{x}^{(0)} + \frac{7}{2}\Omega^{-1}\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{v}^{(0)}$ , de rayon  $r = \frac{7}{2}\Omega^{-1}|\mathbf{v}^{(0)}|$ , où  $\mathbf{x}^{(0)}$  et  $\mathbf{v}^{(0)}$  sont les conditions initiales et  $\mathbf{e}_3$  la normale au plateau ( $\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ ). Trajectoire



**14.10.11** Un avion a une hélice à  $n$  pales ( $n = 2$  ou  $3$ ) tournant à 2400 t/min. Calculer le moment des forces exercées par l'hélice sur l'avion quand celui-ci effectue un virage de 250 m de rayon à 180 km/h. On assimilera les pales à des tiges minces de longueur  $\ell = 60$  cm et de masse  $m = 5$  kg. Vérifier que dans le cas d'une hélice bipale ce moment conduit à des vibrations et que cet inconvénient disparaît avec une hélice tripale. Avion

**14.10.12** Une remorque ayant un seul essieu est tirée par une voiture roulant à vitesse  $v$  constante (fig. 14.39). Trouver les forces exercées par la route sur les roues dans un virage (horizontal) de rayon  $R (\gg d)$ . La masse totale de la remorque est  $M$  et le centre de masse se trouve au-dessus de l'essieu à une hauteur  $h$  au-dessus du sol. En déduire la vitesse maximale pour que les roues restent en contact avec la route. (Moment d'inertie des roues  $I_2 = I_3 = \frac{1}{2}I_1$ .) Remorque

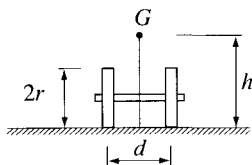


Fig. 14.39

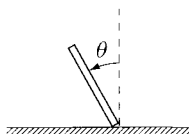


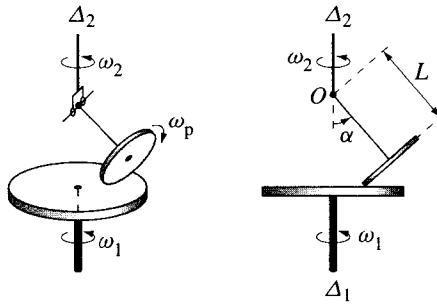
Fig. 14.40

**Inclinaison d'une roue** **14.10.13** Une roue roule sans glisser sur une route horizontale et son centre décrit un mouvement circulaire de rayon  $\rho$  à la vitesse  $v$ . Montrer que l'inclinaison  $\theta$  de la roue (fig. 14.40) est donnée par l'équation

$$g \sin \theta = \cos \theta \frac{v^2}{\rho} \left\{ 1 + \frac{I}{mR^2} \left( 1 + \frac{R}{2\rho} \sin \theta \right) \right\}$$

où  $I$  est le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de symétrie ( $I_2 = I_3 = \frac{1}{2}I_1$ ).

**Effet gyroscopique** **14.10.14** On considère le système représenté sur la figure 14.41 : le plateau tourne à la vitesse  $\omega_1$  constante ; l'axe vertical  $\Delta_2$  tourne à vitesse  $\omega_2$  constante ; le disque, relié à l'axe vertical par un axe qui pivote sans frottement au point  $O$ , roule sans glisser sur le plateau.



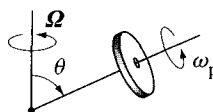
**Fig. 14.41**

Montrer que la force exercée par le plateau sur le disque est donnée par

$$N = \frac{1}{1 - R/(L \tan \alpha)} \left\{ mg + \omega_2 \left[ I_1(\omega_2 - \omega_1) \frac{\sin \alpha}{R} + (I_1\omega_1 - I_2\omega_2) \frac{\cos \alpha}{L} \right] \right\}$$

où  $I_1$  est le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de symétrie et  $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + mL^2$ .

**Gyroscope** **14.10.15** Un gyroscope (fig. 14.42) est constitué d'un disque (de masse  $M$ , rayon  $R$ ), tournant à vitesse  $\omega_p$  constante autour de son axe, relié à un point  $O$  par une tige mince (de masse  $m$ , longueur  $\ell$ ). Trouver la vitesse de précession  $\Omega$  dans le cas où il n'y a pas de nutation ( $\dot{\theta} = 0$ ). Montrer qu'il y a deux solutions (si  $\theta \neq \pi/2$ ) et que si la vitesse de rotation  $\omega_p$  est très élevée, la vitesse de précession « normale » (= lente) est indépendante de  $\theta$ .



**Fig. 14.42**

**14.10.16** De quelle hauteur  $h$  faut-il lâcher la sphère de rayon  $r$  pour qu'elle puisse effectuer le looping représenté sur la figure 14.43 ? Considérer les deux cas : 1. pas de frottement, et 2. roulement sans glissement le long de la trajectoire ( $\mu_s = 0,5$ ).

Looping

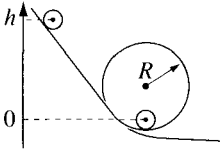


Fig. 14.43

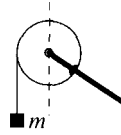


Fig. 14.44

**14.10.17** Donner une analyse qualitative de l'évolution du système représenté sur la figure 14.44. La tige de longueur  $\ell$  et de masse  $m_1$  est solidaire de la poulie (masse  $m_2$ , rayon  $R$ ) qui tourne sans frottement autour de son axe. Le fil est de masse négligeable.

Il faudra distinguer les trois cas  $2mR < m_1\ell$ ,  $2mR = m_1\ell$  et  $2mR > m_1\ell$ .

**14.10.18** Un cylindre de rayon  $R$  est percé d'un trou parallèlement à l'axe du cylindre. Le centre de masse  $G$  se trouve à une distance  $\delta$  de l'axe du cylindre et le moment d'inertie par rapport à l'axe du cylindre est  $I$ . On pose le cylindre sur un plan incliné avec  $CG$  perpendiculaire au plan, où  $C$  est le centre du cylindre (fig. 14.45). Trouver la vitesse et la réaction normale du plan après un roulement sans glissement de  $n$  tours.

Mouvement d'un cylindre inhomogène.

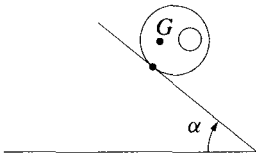


Fig. 14.45

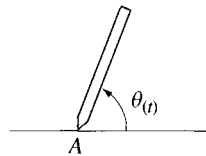


Fig. 14.46

**14.10.19** Une tige homogène est posée presque verticalement et sans vitesse initiale sur un plan horizontal (fig. 14.46). On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Exprimer la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$  lorsque l'extrémité  $A$  de la tige reste en contact avec le sol. Est-ce que  $A$  quitte le sol avant que  $\theta = 0$  ?

Mouvement d'une tige.

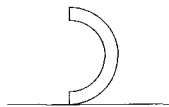
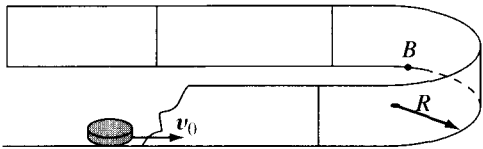


Fig. 14.47

**14.10.20** Un demi-cylindre creux (masse  $m$ , rayon  $R$ ) est lâché sans vitesse initiale de la position indiquée sur la figure 14.47. Trouver le coefficient de frottement statique nécessaire pour avoir roulement sans glissement au début du mouvement.

Mouvement d'un demi-cylindre.

**14.10.21** Un puck de rayon  $r$  est lancé avec une vitesse initiale  $v_0$  (et  $\omega_0 = 0$ ) le long d'un côté d'une table à air en forme de stade (fig. 14.48). Quelle sera la vitesse  $v$  et la vitesse angulaire  $\Omega$  au point  $B$  ?



**Fig. 14.48**

## CHAPITRE 15

# DYNAMIQUE DANS LES RÉFÉRENTIELS EN MOUVEMENT

### 15.1 DYNAMIQUE NEWTONIENNE DANS LES RÉFÉRENTIELS EN MOUVEMENT : FORCES D'INERTIE ET FORCES DE CORIOLIS

Supposons que les lois de Newton soient valables par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Pour tout point matériel  $P_\alpha$ , nous avons

$$\mathbf{p}_\alpha(t) = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t) \quad \text{et} \quad m_\alpha \mathbf{a}_\alpha(t) = \mathbf{F}_\alpha(t). \quad (15.1)$$

Considérons ensuite un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ . Ayant introduit les axiomes non relativistes 1 et 2, nous avons établi au chapitre 9 la relation entre la vitesse et l'accélération du point  $P_\alpha$  mesurées relativement aux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\alpha &= \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{v}_\alpha^{(c)} \\ \mathbf{a}_\alpha &= \mathbf{a}'_\alpha + \mathbf{a}_\alpha^{(c)} + \mathbf{a}_\alpha^{(e)}, \quad \mathbf{a}_\alpha^{(c)} = 2\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{v}'_\alpha \end{aligned} \quad (15.2)$$

Composition  
des vitesses  
et des accélérations

$\mathbf{v}_\alpha^{(e)}$  et  $\mathbf{a}_\alpha^{(e)}$  sont la vitesse et l'accélération d'entraînement de  $P_\alpha$ ;  $\boldsymbol{\omega}_c$  est la vitesse de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . En conséquence, les équations (15.1) et (15.2) impliquent

$$\begin{cases} m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha(t') = \mathbf{F}_\alpha(t') - m_\alpha \mathbf{a}_\alpha^{(e)}(t') - 2m_\alpha \boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{v}'_\alpha(t') \\ t' = t - s_0. \end{cases} \quad (15.3)$$

Cette équation nous amène à introduire les définitions suivantes.

On appelle **force d'inertie**  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{in}}$  et **force de Coriolis**  $\mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}}$  les forces agissant sur le point matériel  $P_\alpha$ , définies dans  $\mathcal{R}'$  par

Force d'inertie  
Force de Coriolis

$$\mathbf{F}_\alpha^{\text{in}} = -m_\alpha \mathbf{a}_\alpha^{(e)} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}} = -2m_\alpha \boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{v}'_\alpha. \quad (15.4)$$

Invariance des lois  
de Newton

En conclusion, si les lois de Newton sont valables dans le référentiel  $\mathcal{R}$  elles seront alors aussi valables dans tout référentiel  $\mathcal{R}'$ , et la masse d'inertie est indépendante du référentiel. Cependant, à la résultante  $F_\alpha$  des forces sur  $P_\alpha$  mesurées dans  $\mathcal{R}$ , il faudra ajouter dans  $\mathcal{R}'$  deux forces supplémentaires, la force d'inertie et la force de Coriolis, c'est-à-dire

$$m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \mathbf{F}'_\alpha \quad \text{avec} \quad \mathbf{F}'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha^{\text{in}} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}}. \quad (15.5)$$

### Remarques importantes

- Les forces d'inertie et de Coriolis sont des forces observées dans les référentiels  $\mathcal{R}'$  accélérés par rapport à  $\mathcal{R}$ ; elles dépendent du mouvement relatif de  $\mathcal{R}'$ .
- Ces nouvelles forces sont proportionnelles à la masse d'inertie de  $P_\alpha$ . Ainsi, en distinguant la force d'origine gravifique  $m_\alpha^* \mathbf{g}(\mathbf{x}_\alpha)$  des autres forces agissant sur  $P_\alpha$ , nous avons

$$m_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + m_\alpha^* \mathbf{g}(\mathbf{x}_\alpha) \quad \text{dans } \mathcal{R}$$

$$m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + m_\alpha^* \mathbf{g}(\mathbf{x}'_\alpha) - m_\alpha \mathbf{a}_\alpha^{(e)} + \mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}} \quad \text{dans } \mathcal{R}' \quad (15.6)$$

Principe  
d'équivalence

Par conséquent, en admettant le principe d'équivalence de la masse gravifique  $m^*$  et de la masse d'inertie  $m$ , principe sur lequel nous reviendrons à la section 15.6, l'équation du mouvement dans  $\mathcal{R}'$  (15.6) devient

$$m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + m_\alpha \mathbf{g}' + \mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}} \quad (15.7)$$

où

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \mathbf{g}(\mathbf{x}') - \mathbf{a}^{(e)}(\mathbf{x}'). \quad (15.8)$$

Inertie ou  
gravitation ?

Le champ  $\mathbf{g}'$  peut être considéré comme le champ de gravitation qui sera observé dans  $\mathcal{R}'$ ; par définition,  $\mathbf{g}'$  est le **champ de gravitation apparent**. Nous voyons ainsi que la force d'inertie peut s'interpréter comme une force de gravitation supplémentaire, associée au mouvement accéléré des masses de l'Univers par rapport à  $\mathcal{R}'$ .

- La force de Coriolis dépend de la vitesse relative  $\mathbf{v}'_\alpha$  (mesurée dans  $\mathcal{R}'$ ). On remarquera qu'elle a la forme d'une force magnétique, exercée par un champ  $\mathbf{B}$  sur une charge électrique  $q_\alpha$ , où  $q_\alpha \mathbf{B} = 2m_\alpha \boldsymbol{\omega}_e$  : c'est une *force passive*.
- Si la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\omega}_e$  est constante, on vérifie facilement que la force d'inertie est conservative et dérive du potentiel

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}') &= m \left[ \mathbf{a}_{O'} \cdot \mathbf{x}' - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_e \wedge \mathbf{x}')^2 \right] = \\ &= m \left[ \mathbf{a}_{O'} \cdot \mathbf{x}' - \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}_e|^2 |\mathbf{x}'|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_e \cdot \mathbf{x}'^2 \right]. \end{aligned} \quad (15.9)$$



Par conséquent, si  $\mathbf{a}_O$  et  $\boldsymbol{\omega}_e$  ne dépendent pas du temps, et si toutes les forces actives par rapport à  $\mathcal{R}'$  sont conservatives, il y a conservation de l'énergie mécanique dans  $\mathcal{R}'$  (exemple, § 15.4.2).

## 15.2 RÉFÉRENTIELS EN TRANSLATION UNIFORME ET PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ DE GALILÉE

### 15.2.1 Référentiels en translation uniforme

Remarquons pour commencer que l'observation des forces ne permet pas de distinguer entre deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en *translation uniforme* l'un par rapport à l'autre. En effet, les conditions  $\mathbf{v}_\alpha^{(e)}(t) = \mathbf{u}_0$  et  $\boldsymbol{\omega}_e = 0$  entraînent  $\mathbf{F}'_\alpha \equiv \mathbf{F}_\alpha$  pour tout point  $P_\alpha$ .

En particulier, si  $\mathbf{F}_\alpha \equiv 0$  par rapport à  $\mathcal{R}$ , alors  $\mathbf{F}'_\alpha \equiv 0$  par rapport à  $\mathcal{R}'$ . Par conséquent, si le mouvement d'un corps isolé est rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , il sera également rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}'$ . Nous retrouvons ainsi le résultat énoncé au chapitre 10 : *tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie*.

Comme nous l'avons vu dans notre recherche d'un référentiel d'inertie, nous pouvons admettre comme principe fondamental qu'il existe des référentiels particuliers par rapport auxquels l'espace est homogène-isotrope et le temps homogène. Ces référentiels particuliers définissent alors les référentiels d'inertie. Ayant accepté ce principe fondamental, on déduit des lois de Newton le résultat suivant.

Référentiel d'inertie

#### **Théorème. Symétrie de la mécanique newtonienne**

Si l'espace-temps est homogène, la transformation de Galilée est une symétrie de la mécanique newtonienne.

Pour établir ce théorème, il suffit de considérer le cas de deux particules isolées. Si l'espace-temps est homogène, la force entre les particules est invariante par rapport aux translations dans l'espace et dans le temps ; cette condition signifie que la force  $\mathbf{F}_\alpha$  sur la particule  $P_\alpha$  doit être de la forme

$$\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Espace-temps  
homogène

Soit  $\mathbf{x}_\alpha(t)$  la solution des équations du mouvement

$$m_\alpha \ddot{\mathbf{x}}_\alpha(t) = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \quad \alpha = 1, 2 \quad (15.10)$$

de conditions initiales  $\{\mathbf{x}_\alpha(0), \mathbf{v}_\alpha(0)\}$ .

Considérons la transformation active définie par la transformation de Galilée (§ 9.4.1). L'image de l'évolution est donnée par les fonctions

$$\begin{array}{l} \text{Transformation} \\ \text{de Galilée} \end{array} \quad \mathbf{x}'_{\alpha}(t) = \mathbf{x}_{\alpha}(t' + s_0) - (t' + s_0)\mathbf{u} - \mathbf{s} \quad \text{avec} \quad t = t' + s_0 \quad (15.11)$$

( $s_0, \mathbf{s}, \mathbf{u}$  sont des constantes de la transformation de Galilée).

Ces fonctions satisfont les équations différentielles

$$\begin{aligned} m_{\alpha} \frac{d^2 \mathbf{x}'_{\alpha}}{dt^2} &= m_{\alpha} \frac{d^2 \mathbf{x}_{\alpha}}{dt^2}(t' + s_0) = \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}_1(t' + s_0) - \mathbf{x}_2(t' + s_0)) = \\ &= \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m_{\alpha} \ddot{\mathbf{x}}'_{\alpha}(t) = \mathbf{F}_{\alpha}(\mathbf{x}'_1(t) - \mathbf{x}'_2(t)).$$

Par conséquent, les fonctions  $\mathbf{x}'_1(t), \mathbf{x}'_2(t)$ , définies par l'évolution des particules observées dans  $\mathcal{R}'$ , sont solutions des équations du mouvement dans  $\mathcal{R}$  (15.10). En conclusion, le mouvement observé par  $\mathcal{R}'$  peut être observé dans  $\mathcal{R}$  en choisissant convenablement les conditions initiales et l'observation de l'évolution temporelle ne permet pas de distinguer deux référentiels en *translation uniforme* l'un par rapport à l'autre. En d'autres mots la transformation de Galilée est une symétrie de la mécanique newtonienne.

### 15.2.2 Principe de la relativité de Galilée

Il est très intéressant de remarquer que les conclusions auxquelles nous sommes arrivés dans le paragraphe précédent étaient connues de Galilée... un demi-siècle avant que Newton découvre les lois de la mécanique : la symétrie des lois était connue avant que les lois ne soient découvertes ! En effet, ces idées ont été énoncées pour la première fois dans l'ouvrage de Galilée [39], dont voici un extrait (2<sup>e</sup> journée).

*« Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en-dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en-dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt... »*

Comme nous l'avons déjà dit, les lois de la mécanique étant les lois du mouvement, elles ne peuvent s'exprimer que par rapport à un référentiel et Newton introduisit le concept d'espace absolu. Il suit de la discussion ci-dessus que les référentiels en *translation uniforme* par rapport à l'espace absolu sont entièrement équivalents pour la description de la mécanique : toute évolution relative à l'espace absolu peut aussi être réalisée dans n'importe quel référentiel d'inertie. En conclusion, l'observation du mouvement des systèmes mécaniques ne permet pas de distinguer entre l'espace absolu et un référentiel d'inertie.

Nous pouvons résumer l'ensemble des réflexions de cette section sous la forme d'un principe très général.

### Principe de la relativité de Galilée

- Il existe des référentiels particuliers, appelés **référentiels d'inertie**, par rapport auxquels l'espace vide (de matière et de rayonnement) est homogène-isotrope et le temps homogène.

En particulier tout corps isolé a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie, et tout référentiel en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie est également un référentiel d'inertie.

- Les lois de la mécanique ont la même forme relativement à n'importe quel référentiel d'inertie. On dira également que les lois de la mécanique sont « invariantes par rapport aux transformations de Galilée », ou aussi que « les transformations de Galilée sont un groupe de symétrie de la mécanique newtonienne ».

Les transformations de Galilée sont un groupe de symétrie de la mécanique newtonienne

## 15.3 RÉFÉRENTIELS $\mathcal{R}'$ EN TRANSLATION NON UNIFORME PAR RAPPORT À $\mathcal{R}$ . PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE D'EINSTEIN

### 15.3.1 Équations du mouvement

Si  $\mathcal{R}'$  est en translation non uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , alors  $\omega_e$  est nul et l'équation du mouvement (15.7) devient

$$m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{\text{ext}} + m_\alpha \mathbf{g}' \quad \text{avec} \quad \mathbf{g}'(\mathbf{x}') = \mathbf{g}(\mathbf{x}') - \mathbf{a}_e. \quad (15.12)$$

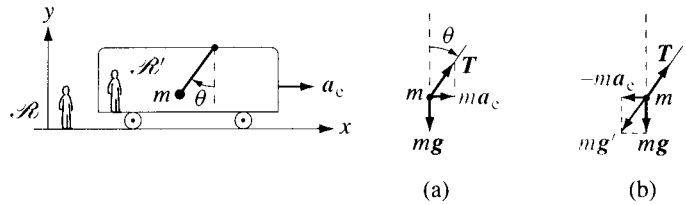
$\mathcal{R}'$  en translation non uniforme  
 $\mathbf{a}_e \neq 0$

La seule distinction entre les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  est une modification du champ de gravitation.

Modification du champ de gravitation

15.3.2 Exemple 1. Train sur une voie horizontale

Considérons un pendule immobile par rapport à un train  $\mathcal{R}'$  ayant un mouvement horizontal d'accélération  $\mathbf{a}_e$  constante relativement au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  (fig. 15.1).



**Fig. 15.1** Pendule immobile dans un train uniformément accéléré. (a) Raisonement dans  $\mathcal{R}$  ; (b) raisonnement dans  $\mathcal{R}'$ .

Raisonnement du chef de gare Pour l'observateur sur la Terre (fig. 15.1 a), le point matériel, immobile dans le train, a une accélération  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_e$  et

$$m\mathbf{a}_e = \mathbf{T} + m\mathbf{g} \tag{15.13}$$

d'où

$$\begin{cases} m\mathbf{a}_e = -T \sin \theta \\ 0 = T \cos \theta - mg \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\tan \theta = -\frac{a_e}{g}. \tag{15.14}$$

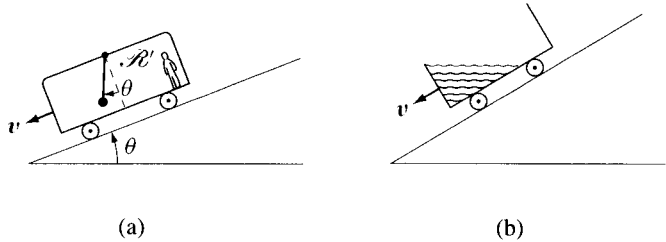
Raisonnement du passager Au contraire, pour l'observateur dans le train (fig. 15.1 b), le point matériel est immobile, ( $\mathbf{a}' = 0$ ) mais il subit une force d'inertie ( $\mathbf{F}^{\text{in}} = -m\mathbf{a}_e$ ), d'où :

$$\begin{cases} 0 = -T \sin \theta - ma_e \\ 0 = T \cos \theta - mg \end{cases} \tag{15.15}$$

et l'on retrouve l'équation (15.14) : *les raisonnements dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont différents mais les conclusions sont identiques.*

15.3.3 Exemple 2. Train en mouvement uniforme sur un plan incliné

Le pendule est à nouveau immobile dans le train qui roule à vitesse constante  $\mathbf{v}$  le long du plan incliné (fig. 15.2).



**Fig. 15.2** (a) Train en mouvement uniforme ( $\mathbf{v} = \text{cste}$ ) sur un plan incliné ; (b) récipient rempli d'eau en mouvement uniforme sur un plan incliné.

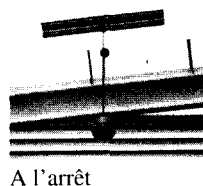
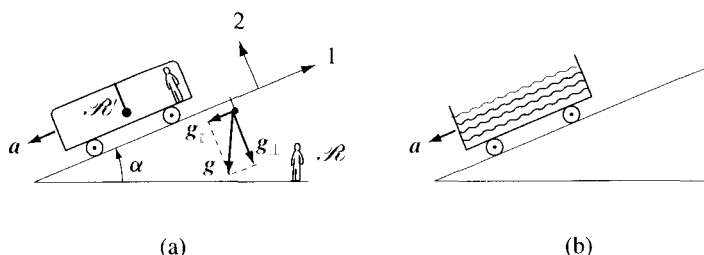
Les passagers dans le train observent la même situation que dans l'exemple 1 : le pendule, immobile, fait un angle  $\theta$  par rapport à la direction des parois.

L'observation de la position du pendule ne permet pas de décider si le train accélère sur une voie horizontale ou si il roule à vitesse constante le long d'un plan incliné.

L'observation d'un verre rempli d'eau sur une table dans le train (fig. 15.2 b) montre que la surface de l'eau n'est pas parallèle à la table, mais perpendiculaire au pendule.

### 15.3.4 Exemple 3. Train en roue libre sur un plan incliné

Considérons à nouveau le pendule immobile dans le train  $\mathcal{R}'$ , mais supposons que le train roule en roue libre le long d'un plan incliné (fig. 15.3). Quelle est alors la direction du fil du pendule ?



A l'arrêt

**Fig. 15.3** (a) Pendule immobile dans un train en roue libre sur un plan incliné ; (b) récipient rempli d'eau glissant librement sur le rail à air incliné.

Soit  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\parallel} + \mathbf{g}_{\perp}$  la décomposition de  $\mathbf{g}$  en ses composantes parallèle et perpendiculaire au plan incliné.

Pour l'observateur sur la Terre, le système (train + pendule) de masse  $M$  obéit à l'équation du mouvement

$$M\mathbf{a}_G = M\mathbf{g} + N \quad (15.16)$$

soit

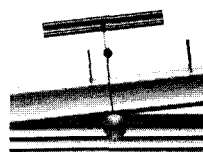
$$\begin{cases} 0 = Mg_{\perp} + N \\ \mathbf{a}_G = \mathbf{g}_{\parallel} \end{cases}$$

D'autre part, pour le pendule, on a

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{T}.$$

Comme le pendule est immobile par rapport au train,  $\mathbf{a}_G = \mathbf{a}$  et, par conséquent,

$$\mathbf{T} = m(\mathbf{g}_{\parallel} - \mathbf{g}) = -m\mathbf{g}_{\perp} \quad (15.17)$$



En glissement libre

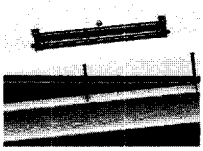
c'est-à-dire que la direction du fil est perpendiculaire au plan incliné.

Pour l'observateur dans le train, le pendule est immobile, soumis au champ apparent  $\mathbf{g}'$  (15.8) et à l'action du fil, d'où

$$0 = T + m\mathbf{g}' \quad (15.18)$$

et, par conséquent,  $T = -m(\mathbf{g} - \mathbf{a}_e) = -m\mathbf{g}_\perp$ . De nouveau, les conclusions dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont les mêmes.

De plus, l'observation de la position du pendule ne permet pas aux voyageurs de décider s'ils sont immobiles sur une voie horizontale ou en chute libre le long d'un plan incliné.



En glissement libre la bille est immobile par rapport au support glissant

Pour illustrer ce résultat, observons l'expérience de la figure 15.3 (b) : un récipient rempli d'eau est lancé sur le rail à air incliné. On constate que la surface de l'eau reste constamment parallèle au rail – en particulier lorsque la vitesse change de sens – comme dans le cas où le récipient est immobile sur un rail horizontal.

#### 15.3.5 Exemple 4. Poids apparent

L'observateur dans un ascenseur  $\mathcal{R}'$  mesure le poids d'un corps au moyen d'un dynamomètre (fig. 15.4). Le corps étant immobile dans l'ascenseur, on a dans  $\mathcal{R}'$

$$0 = \mathbf{F}^{\text{ress}} + m\mathbf{g}' \quad (15.19)$$

Poids apparent Ainsi, le poids  $\mathbf{P}'$  mesuré dans  $\mathcal{R}'$ , aussi appelé **poids apparent**, est donné par

$$|\mathbf{P}'| = |\mathbf{F}^{\text{ress}}| = m|\mathbf{g}'| = m|\mathbf{g} - \mathbf{a}_e|; \quad (15.20)$$

le « poids apparent » est supérieur au « poids réel » si l'ascenseur accélère vers le haut, inférieur si l'ascenseur accélère vers le bas et il est égal à zéro lorsque l'ascenseur tombe en chute libre. Dans ce dernier cas, on dit que le corps est en **état d'apesanteur** : tout se passe comme si l'on avait éliminé le champ de gravitation.

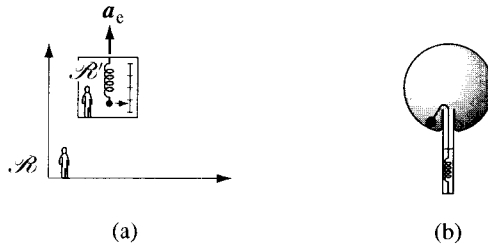


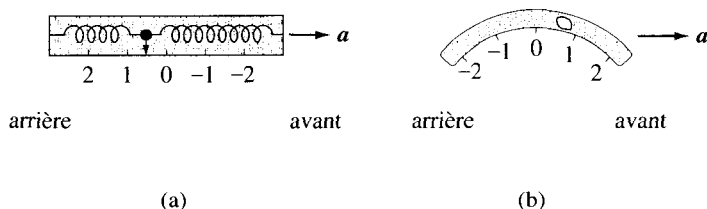
Fig. 15.4 (a) Poids apparent ; (b) jouet d'Einstein.

Pour illustrer l'état d'apesanteur, considérons le bilboquet de la figure 15.4 (b). Lorsqu'on laisse tomber le jouet en chute libre, le poids apparent est nul ( $\mathbf{g}' = 0$ ) et la force du ressort devient alors suffisante pour tirer la bille dans le tube.

### 15.3.6 Conclusions

- Il est possible de mesurer l'accélération d'un train roulant sur une voie horizontale à partir de l'angle  $\theta$  que fait le pendule avec la verticale. Cependant, un tel accéléromètre – ou tout système équivalent (fig. 15.5) – est inutile si il n'y a pas d'instrument pour indiquer la direction du champ de gravitation  $g$ .
- On peut considérer que le champ de gravitation dépend du référentiel et, dans ce cas, on ne parle plus de force d'inertie.
- Il est possible de modifier le champ de gravitation en introduisant des référentiels accélérés.
- Par rapport au référentiel défini par un « solide en chute libre », les corps au voisinage du solide paraissent en mouvement dans un champ de gravitation nul.

Base de la relativité générale



Accéléromètres

**Fig. 15.5** Modèles simplifiés d'accéléromètre : (a) accéléromètre à ressort : la densité de la masse est supérieure à celle du fluide ; (b) accéléromètre à bulle : la bulle d'air est dans un tube courbé rempli d'un fluide.

### 15.3.7 Principe d'équivalence faible d'Einstein (1911)

Les conclusions ci-dessus, associées aux résultats expérimentaux (sect. 15.6), conduisirent Albert Einstein à énoncer le principe d'équivalence suivant.

- La masse d'inertie et la masse gravifique sont des concepts équivalents.
- Il est toujours possible de modifier localement et instantanément les forces de gravitation par des forces d'inertie grâce à un choix convenable du référentiel accéléré.
- En particulier, il est toujours possible de trouver un référentiel tel que dans une région suffisamment petite et pour des temps suffisamment courts, les forces de gravitation ne jouent plus aucun rôle ; ce référentiel est appelé **référentiel inertiel local**.



EINSTEIN Albert  
en 1930  
Physicien allemand,  
naturalisé suisse puis  
américain  
1879-1955

Référentiel inertiel  
local

Ce principe sera le point de départ de la théorie de la gravitation – ou **théorie de la relativité générale** – élaborée par Einstein.

## 15.4 RÉFÉRENTIEL $\mathcal{R}'$ EN ROTATION UNIFORME PAR RAPPORT À $\mathcal{R}$

### 15.4.1 Équation du mouvement

Soit  $\mathcal{R}'$  un référentiel en rotation autour d'un axe  $\mathbf{n}$  passant par  $O$  (fixé), de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{n}$  constante (fig. 15.6). Dans  $\mathcal{R}'$  les équations du mouvement (15.3) s'écrivent

$$m_\alpha \mathbf{a}'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha - m_\alpha \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}') - 2m_\alpha \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}'_\alpha \quad (15.21)$$

où  $\mathbf{F}_\alpha$  est la résultante des forces appliquées sur le point  $P_\alpha$  observées dans  $\mathcal{R}$ .

### 15.4.2 Centrifugeuse 1

Reprenons l'exemple (§ 10.5.2) d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant sans frottement à l'intérieur d'un tube tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante, autour d'un axe vertical avec lequel il fait un angle  $\alpha$  constant (fig. 15.6 a). Choisissons le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation lié au tube et à l'axe de rotation. Dans  $\mathcal{R}'$  la force de Coriolis et la force de liaison sont des forces passives. Les seules forces actives (pesanteur et force d'inertie) sont conservatives et il y a conservation de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= T + U^{\text{grav}} + U^{\text{inertie}} = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx \cos \alpha - \frac{1}{2} m x^2 \Omega^2 \sin^2 \alpha = \text{cste.} \end{aligned}$$

On obtient ainsi immédiatement l'équation (10.49).

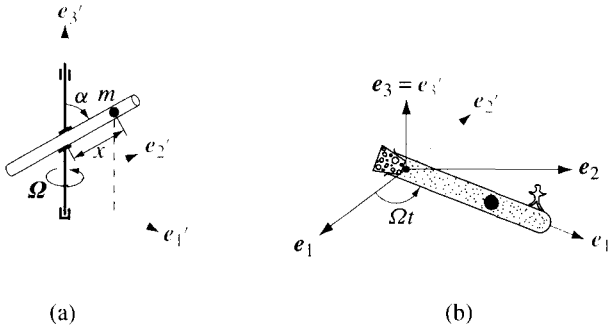
Conservation de  
l'énergie dans  $\mathcal{R}'$

En conclusion, par rapport au référentiel tournant il y a conservation de l'énergie, mais il n'y a pas conservation de l'énergie par rapport au référentiel du laboratoire.

### 15.4.3 Centrifugeuse 2

On considère un point matériel (masse  $m$ , volume  $V$ ) dans un tube horizontal rempli d'un fluide de masse spécifique  $\rho_f$ , tournant à vitesse  $\Omega$  constante autour d'un axe vertical (fig. 15.6 b).





**Fig. 15.6** Référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe : (a) centrifugeuse 1 ; (b) centrifugeuse 2,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Analysons le mouvement du point en nous plaçant dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au tube. Dans  $\mathcal{R}'$  nous avons la contrainte  $\mathbf{x}' = x' \mathbf{e}_1'$  et les équations du mouvement

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{F}^{\text{fr}} + \mathbf{F}^{\text{A}} + \mathbf{F}^{\text{in}} + \mathbf{F}^{\text{cor}}. \quad (15.22)$$

En admettant que le fluide est au repos dans le tube, la force d'Archimède  $\mathbf{F}^{\text{A}}$  – force exercée par le fluide sur une portion de fluide de volume  $V$  à une distance  $x'$  de  $O$  – est donnée par l'équation d'équilibre du fluide dans  $\mathcal{R}'$  Force d'Archimède

$$0 = \mathbf{F}^{\text{A}} + \rho_{\text{fl}} V \mathbf{g} + \rho_{\text{fl}} V \Omega^2 x' \mathbf{e}_1'. \quad (15.23) \quad \text{Équilibre du fluide}$$

(Remarquons que dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\mathbf{F}^{\text{A}}$  possède une composante selon  $\mathbf{e}_1'$  et  $\mathbf{e}_3'$ .)

Par ailleurs,  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1' = 0$  (pas de frottement sec),

$$\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\lambda \dot{x}' \mathbf{e}_1', \quad \mathbf{F}^{\text{in}} = m \Omega^2 x' \mathbf{e}_1', \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^{\text{cor}} = -2m \Omega \dot{x}' \mathbf{e}_2'.$$

Ainsi, en projetant (15.22) sur les axes  $O\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ , et en introduisant  $m = \rho V$  avec  $\rho$  la masse spécifique du point matériel, on obtient l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \rho V \ddot{x}' = -\lambda \dot{x}' + (\rho - \rho_{\text{fl}}) V \Omega^2 x' \\ 0 = R_2' - 2\rho V \Omega \dot{x}' \\ 0 = -(\rho - \rho_{\text{fl}}) V g + R_3'. \end{cases} \quad (15.24) \quad \text{Évolution du point matériel}$$

Le sens de la « force centrifuge » dépend du signe de  $(\rho - \rho_{\text{fl}})$ .

Si les frottements visqueux sont négligeables, nous obtenons dans le cas où  $\rho > \rho_{\text{fl}}$

$$\begin{cases} x'(t) = x_0' \cosh \omega t + \frac{v_0'}{\omega} \sinh \omega t \\ \omega = \Omega \sqrt{1 - \rho_{\text{fl}}/\rho}. \end{cases}$$

Au contraire, si  $\rho < \rho_{\text{fl}}$ , on a un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation  $\omega = \Omega \sqrt{\rho_{\text{fl}}/\rho - 1}$ .

En présence de frottements et dans le cas  $\rho > \rho_{\text{fl}}$ , l'évolution est qualitativement la même ; au contraire, dans le cas  $\rho < \rho_{\text{fl}}$ , l'évolution est un mouvement oscillant amorti et  $x'(t)$  tend vers 0 (sect. 17.3).

Mentionnons que l'on a réalisé des *ultra-centrifugeuses* qui produisent des champs de gravitation apparents de  $10^6$  g et même  $10^9$  g sur de très petits objets (de l'ordre de quelques dizaines de microns). Ces techniques permettent de mesurer des masses moléculaires avec une grande précision.

#### 15.4.4 Pendule en rotation

Considérons l'exemple du pendule physique en rotation étudié au paragraphe 14.3.2 et choisissons comme référentiel  $\mathcal{R}'$  le support du pendule (fig. 15.7).

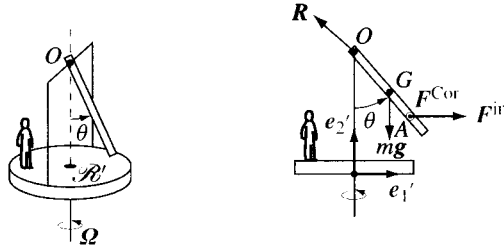


Fig. 15.7 Pendule sur un support tournant avec une vitesse  $\Omega$  constante.

Dans  $\mathcal{R}'$ , les forces extérieures agissant sur le pendule sont la réaction  $R$  et le moment  $M_O$  au point  $O$  dus à l'axe, la force de pesanteur  $mg$ , le torseur des forces d'inertie  $\{F_{\alpha}^{\text{in}} = m_{\alpha} \Omega^2 x'_{\alpha} \sin \theta e_1'\}$  et le torseur des forces de Coriolis.

Les seules forces actives (pesanteur et inertie) dans  $\mathcal{R}'$  étant conservatives, il y a conservation de l'énergie par rapport à  $\mathcal{R}'$  et on tire de (15.9)

$$\begin{aligned} E^{\text{méc}} &= \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg \frac{1}{2} \ell \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{m}{\ell} \Omega^2 \int_0^{\ell} dx \sin^2 \theta x^2 = \\ &= \frac{1}{6} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg \frac{1}{2} \ell \cos \theta - \frac{1}{6} m \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

On a ainsi immédiatement l'équation (14.65) obtenue au paragraphe 14.3.2 par intégration des équations du mouvement (en posant  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ ).

Remarquons que le torseur des forces d'inertie est équivalent à un seul vecteur

$$F^{\text{in}} = \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} dx \Omega^2 x \sin \theta e_1' = \frac{1}{2} m \ell \Omega^2 \sin \theta e_1' \quad (15.25)$$

lié au point  $A$  (§ 4.7.3), avec

$$OA = \frac{1}{F^{\text{in}}} \frac{m}{\ell} \int_0^{\ell} dx \Omega^2 x^2 \sin \theta e_1' = \frac{2}{3} \ell e_1'. \quad (15.26)$$

Conservation de  
l'énergie dans  $\mathcal{R}'$

Résultante du  
torseur des  
forces d'inertie

A l'équilibre, le torseur des forces extérieures étant nul, nous obtenons de la condition  $\mathbf{M}_O^{\text{ext}})_{\mathcal{R}'} = 0$ ,

$$mg \frac{1}{2} \ell \sin \theta_0 = \Omega^2 \frac{1}{3} m \ell^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad (15.27)$$

et nous retrouvons les solutions obtenues au paragraphe 14.3.2

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_0 = \pi \quad \text{et} \quad \cos \theta_0 = \frac{3g}{2\ell\Omega^2}.$$

Par ailleurs, on peut vérifier que le torseur des forces de Coriolis

$$\{\mathbf{F}_\alpha^{\text{cor}} = -2m_\alpha \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}'_\alpha = m_\alpha \Omega \dot{\theta} x'_\alpha \sin 2\theta \mathbf{e}'_3\}$$

est équivalent à un seul vecteur lié au même point A (15.26), égal à

$$\mathbf{F}^{\text{cor}} = \frac{1}{2} m \ell \Omega \dot{\theta} \sin 2\theta \mathbf{e}'_3,$$

Résultante du torseur  
des forces de  
Coriolis

ce qui nous permet de trouver  $\mathbf{R}$ , à partir de

$$\mathbf{R} + m\mathbf{g} + \mathbf{F}^{\text{in}} + \mathbf{F}^{\text{cor}} = 0.$$

## 15.5 DYNAMIQUE TERRESTRE

### 15.5.1 Champ de pesanteur terrestre

Dans cette section, nous analysons quelques effets dus à la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Pour ce faire nous considérons le *référentiel lié à la Terre* et nous négligeons les effets dus à la présence du Soleil, de la Lune et des autres astres. Ces effets seront étudiés dans les sections 15.6 et 15.7.

Dans le référentiel terrestre, l'équation du mouvement (15.7) s'écrit en prenant le centre de la Terre C comme origine,

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + m\mathbf{g}^{\text{app}} - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} \quad (15.28)$$

avec

$$\mathbf{g}^{\text{app}}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}), \quad (15.29)$$

$$|\boldsymbol{\Omega}| = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (15.30)$$

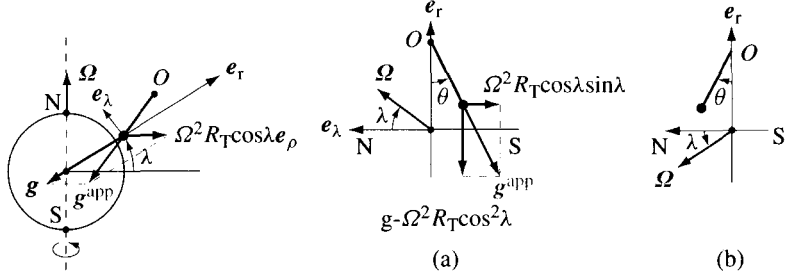
où  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , champ de gravitation dû à la masse de la Terre, est supposé radial,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -g(r)\mathbf{e}_r$ ;  $\boldsymbol{\Omega}$  est la vitesse de rotation de la Terre relativement aux étoiles fixes.

$\mathbf{g}^{\text{app}}(\mathbf{x})$  est appelé *champ de pesanteur terrestre*.

### 15.5.2 Effets statiques des forces d'inertie : direction du fil à plomb et variation du champ de pesanteur terrestre

Considérons un point matériel de masse  $m$ , suspendu à un fil, immobile en un point de la surface de la Terre de latitude  $\lambda$  (fil à plomb, fig. 15.8).

« Si vous voyez un jour un fil à plomb oblique, dites-vous bien qu'il se passe QUELQUE CHOSE QUELQUE PART. »  
M. Pagnol, tiré du *Temps des amours*



**Fig. 15.8** Direction du fil à plomb : (a) hémisphère Nord ; (b) hémisphère Sud.

Dans le référentiel terrestre, on tire de (15.28)

$$0 = T + m g^{\text{app}}. \quad (15.31)$$

La direction du fil à plomb détermine ainsi la direction du champ de pesanteur terrestre et la tension  $|T|$  détermine l'intensité.

Par définition,  $P = -T = m g^{\text{app}}$  est le **poide** du point matériel.

L'équation (15.29), avec  $-\Omega \wedge (\Omega \wedge x) = -(\Omega R_T \sin \lambda) \Omega + \Omega^2 x$ , et  $\Omega = \Omega \sin \lambda e_r + \Omega \cos \lambda e_\lambda$ , implique

$$g^{\text{app}}(x) = g(x) + \Omega^2 R_T (\cos^2 \lambda e_r - \sin \lambda \cos \lambda e_\lambda) \quad (15.32)$$

où  $\Omega^2 R_T \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ .

Ayant supposé  $g(x)$  radial, on voit de (15.32) que la direction du champ de pesanteur s'écarte légèrement de la direction radiale ; à la latitude  $\lambda$ , l'angle  $\theta$  entre la « verticale » et la direction du fil à plomb est donné par (fig.15.8)

$$\tan \theta = \frac{\Omega^2 R_T \sin \lambda \cos \lambda}{g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda} \cong 1,7 \cdot 10^{-3} \sin(2\lambda). \quad (15.33)$$

On obtient de même l'intensité du champ de pesanteur,

$$|g^{\text{app}}| = g \sqrt{1 - 2 \frac{\Omega^2 R_T}{g} \cos^2 \lambda + \left( \frac{\Omega^2 R_T}{g} \right)^2 \cos^2 \lambda} \cong$$

$$\cong g \left( 1 - \frac{\Omega^2 R_T}{g} \cos^2 \lambda \right)$$

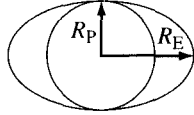
d'où

$$g^{\text{app}}(\lambda) \cong g_{\text{eq}} (1 + 0,0035 \sin^2 \lambda). \quad (15.34)$$

Variation de  $g$  avec  
la latitude

Il faut remarquer que la Terre n'est pas une sphère mais un ellipsoïde (fig. 15.9) avec

$$\frac{R_E - R_P}{R_E} \cong \frac{1}{298}. \quad (15.35)$$



**Fig. 15.9** Aplatissement de la Terre.

Cet aplatissement – dû à la force « centrifuge » (= force d'inertie) – a pour conséquence que les points à l'équateur sont plus éloignés du centre de la Terre et que, de plus, il y a une « masse additionnelle » autour de l'équateur. Ces deux effets modifient la relation (15.34) qui devient

$$g^{\text{app}}(\lambda) \cong g_{\text{eq}}(1 + 0,0053 \sin^2 \lambda) \quad \text{avec} \quad g_{\text{eq}} \cong 9,78 \text{ m s}^{-2}. \quad (15.36)$$

Évaluons encore la *variation de pesanteur avec l'altitude*.

Variation de  $g$  avec  
l'altitude

$$g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad \text{implique} \quad \frac{dg}{dh} = -2G \frac{M_T}{(R_T + h)^3} = -\frac{2g}{R_T + h}$$

soit

$$g(h) \cong g \left( 1 - \frac{2h}{R_T} \right) \cong g(1 - 3,1 \cdot 10^{-7} h) \quad [h] = \text{m}, \quad (15.37)$$

c'est-à-dire que pour une dénivellation de 1000 m, la variation relative de  $g$  est de  $3 \cdot 10^{-4}$ .

Il existe également des *variations locales de  $g^{\text{app}}$*  qui peuvent être de l'ordre de  $10^{-4}$  suivant les endroits. Ces variations sont dues aux inhomogénéités du sol dont la masse spécifique varie d'un point à l'autre. L'observation des variations de  $g^{\text{app}}$  permet d'étudier la structure de l'écorce terrestre ; c'est une application importante de la *gravimétrie* ou mesure du champ de gravitation terrestre.

Autres causes de  
variation de  $g$

Il faut mentionner, pour terminer, les variations de  $g^{\text{app}}$  dues au mouvement de la Lune, du Soleil, ..., variations responsables en particulier du phénomène des marées (sect. 15.7) et du ralentissement de la vitesse de rotation de la Terre.

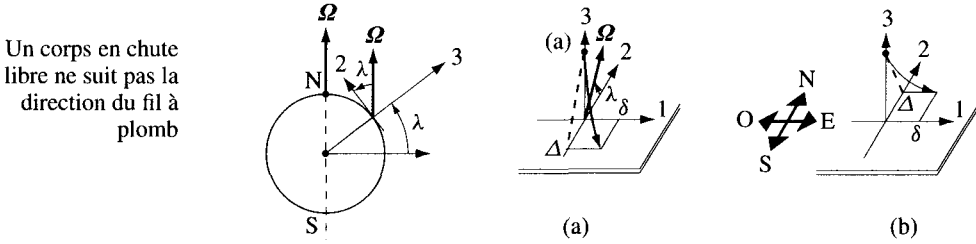
**Remarque.** Il découle de l'équation (15.31) que *le poids d'un corps est la résultante d'une force de gravitation  $m^*g(\mathbf{x})$  et d'une force d'inertie  $-ma_c(\mathbf{x})$*

$$\mathbf{P} = m^*g(\mathbf{x}) - ma_c(\mathbf{x}) = m^* \left( g(\mathbf{x}) - \frac{m}{m^*} a_c(\mathbf{x}) \right). \quad (15.38)$$

L'équivalence de  $m$  et  $m^*$  implique également l'équivalence de la masse pesante et de la masse d'inertie.

### 15.5.3 Effet des forces de Coriolis : déviation vers l'Est

Étudions le mouvement d'un corps en chute libre à la surface de la Terre. L'introduction de la force de Coriolis dans l'équation du mouvement a pour conséquence que la trajectoire du corps ne correspond pas à la direction du fil à plomb.



**Fig. 15.10** — — — Direction du fil à plomb. —> Trajectoire du corps en chute libre. (a) Hémisphère Nord ; (b) hémisphère Sud.

Relativement au système d'axes  $O123$  de la figure 15.10, on a

$$\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \cos \lambda, \Omega \sin \lambda) \quad (15.39)$$

$$\mathbf{g}^{\text{app}} = (0, -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda, -g + \Omega^2 R_T \cos \lambda^2) \quad (15.40)$$

$$\mathbf{F}^{\text{cor}} = -2m(\Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2, \Omega_3 v_1, -\Omega_2 v_1) \quad (15.41)$$

où  $\Omega^2 R_T \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ ,  $\Omega \cong 7 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

L'équation (15.28) s'écrit en composantes

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -2\Omega (\cos \lambda v_3 - \sin \lambda v_2) \\ \dot{v}_2 = -\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda - 2\Omega \sin \lambda v_1 \\ \dot{v}_3 = -g + \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda + 2\Omega \cos \lambda v_1. \end{cases} \quad (15.42)$$

Avec les conditions initiales  $\mathbf{x}_0 = h\mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{v}_0 = 0$ , on obtient pour commencer  $v_2, v_3$ ; puis, en introduisant ces expressions dans  $\dot{v}_1$  (15.42), on a

$$\begin{cases} v_2 = -(\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda)t - (2\Omega \sin \lambda)x_1 \\ v_3 = -(g - \Omega^2 R_T \cos^2 \lambda)t + (2\Omega \cos \lambda)x_1 \\ \dot{v}_1 = 2\Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T)t - 4\Omega^2 x_1. \end{cases} \quad (15.43)$$

A l'approximation d'ordre zéro ( $\Omega = 0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 & v_2 &= 0 & v_3 &= -gt \\ x_1 &= 0 & x_2 &= 0 & x_3 &= h - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

A l'approximation d'ordre 1 ( $\Omega \neq 0$  et  $\Omega^2 R_T \neq 0$ , mais  $\Omega^2 \approx 0$ ), on trouve

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{3}\Omega \cos \lambda (g - \Omega^2 R_T) t^3 \\ x_2(t) = -\frac{1}{2}\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda t^2 \\ x_3(t) = h - \frac{1}{2}(g - \Omega^2 R_T \cos \lambda) t^2. \end{cases} \quad (15.44)$$

Par conséquent,  $x_1(t)$  est positif et la déviation du corps par rapport à la direction du fil à plomb a toujours lieu vers l'Est, que ce soit dans l'hémisphère Nord ( $\lambda > 0$ ) ou Sud ( $\lambda < 0$ ).

La déviation a lieu vers l'Est

De plus, connaissant la durée de chute  $t \cong \sqrt{\frac{2h}{g'}}$ ,  $g' = g - \Omega^2 R_T \cos \lambda$ , on obtient

$$\text{la déviation vers l'Est} \quad \delta \cong \frac{2}{3}\Omega h \sqrt{\frac{2h}{g'}} \cos \lambda \quad (15.45)$$

et

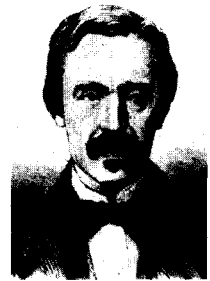
$$\text{la déviation Nord-Sud} \quad \Delta \cong -\Omega^2 R_T \frac{h}{g'} \cos \lambda \sin \lambda. \quad (15.46)$$

La déviation Nord-Sud correspond à la direction du fil à plomb.

L'expérience fut réalisée en 1833 par Reich; en laissant tomber une bille d'une hauteur  $h = 158$  m, à la latitude  $\lambda = 51^\circ$ , il observa un déplacement vers l'Est de 2,8 cm.

#### 15.5.4 Pendule de Foucault

La démonstration expérimentale du mouvement de rotation de la Terre fut réalisée par Foucault en 1851 au moyen d'un pendule de 67 m de long suspendu sous la coupole du Panthéon.



FOUCAULT Léon  
Physicien français  
(1819-1868)

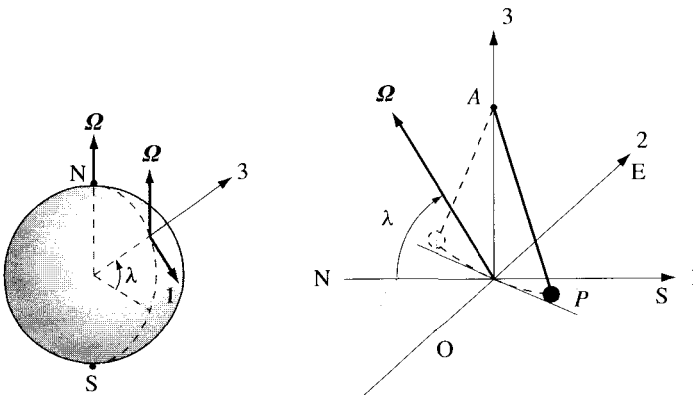


Fig. 15.11 Pendule de Foucault.

Description Soit  $\ell$  la longueur du fil. En négligeant les frottements de l'air et en introduisant le système d'axes  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$  (fig. 15.11), les forces agissant sur le point  $P$  de coordonnées  $(x, y, z)$  sont

- la tension  $T$ , parallèle à  $PA$  :

$$\mathbf{T} \cong \frac{T}{\ell}(-x, -y, \ell - z);$$

- la force de gravitation :

$$\mathbf{F}^{\text{gr}} = (0, 0, -mg);$$

- la force de Coriolis :

$$\mathbf{F}^{\text{cor}} = 2m\Omega(\sin \lambda \dot{y}, -\cos \lambda \dot{z} - \sin \lambda \dot{x}, \cos \lambda \dot{y});$$

- la force d'inertie que nous négligeons.

En projetant l'équation de Newton sur  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ , on a ainsi

$$\text{Évolution} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{T}{m\ell}x + 2\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{T}{m\ell}y - 2\Omega(\cos \lambda \dot{z} + \sin \lambda \dot{x}) \\ \ddot{z} = \frac{T}{m\ell}(\ell - z) - g + 2\Omega \cos \lambda \dot{y}. \end{cases} \quad (15.47)$$

Si l'on considère un mouvement de faible amplitude par rapport à  $\ell$ , on peut admettre en première approximation que le mouvement de  $P$  a lieu dans le plan  $z = 0$  et que  $T = mg$ . Les équations (15.47) en  $x$  et  $y$  deviennent ainsi

$$\text{Petits mouvements} \quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{\ell}x + 2\Omega \sin \lambda \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{g}{\ell}y - 2\Omega \sin \lambda \dot{x} \end{cases} \quad (15.48)$$

Pour résoudre ce système d'équations, on introduit la variable  $\xi = x + iy$  et (15.48) est équivalent à

$$\ddot{\xi} = -\frac{g}{\ell}\xi - i2\Omega \sin \lambda \dot{\xi}. \quad (15.49)$$

Cherchons alors une solution de la forme  $\xi(t) = e^{-i\alpha t}\xi_0$ . De l'équation (15.49) nous devons avoir

$$\alpha^2 - 2\Omega \sin \lambda \alpha - \frac{g}{\ell} = 0$$

d'où

$$\alpha = \Omega \sin \lambda \pm \sqrt{\frac{g}{\ell} + \Omega^2 \sin^2 \lambda} \cong \Omega \sin \lambda \pm \omega_0 \quad (15.50)$$



avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .

Nous obtenons ainsi

$$\xi(t) = e^{-i\Omega \sin \lambda \cdot t} (A \cos \omega_0 t + i B \sin \omega_0 t). \quad (15.51)$$

En particulier, en prenant les conditions initiales  $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$ , on trouve

$$\xi(t) = e^{-i\Omega \sin \lambda \cdot t} x_0 \left( \cos \omega_0 t + i \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \lambda \sin \omega_0 t \right). \quad (15.52)$$

L'équation

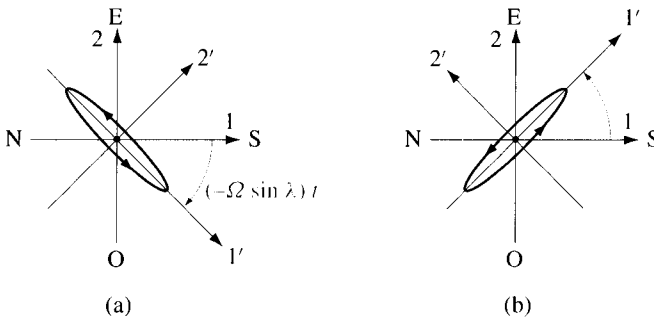
$$\eta(t) = x_0 \left( \cos \omega_0 t + i \frac{\Omega}{\omega_0} \sin \lambda \sin \omega_0 t \right) = x'(t) + i y'(t)$$

est celle d'une ellipse très aplatie (fig. 15.12) dont le rapport des axes est

$$\frac{b}{a} = \frac{\Omega \sin \lambda}{\omega_0} \cong 2,3 \cdot 10^{-4} \sqrt{\ell} \sin \lambda.$$

Par conséquent, l'équation (15.52) représente l'équation d'une *ellipse dont les axes tournent à la vitesse angulaire  $(-\Omega \sin \lambda)$* .

Rotation du plan  
du pendule



**Fig. 15.12** Rotation du plan d'un pendule : (a) dans l'hémisphère Nord ; (b) dans l'hémisphère Sud.

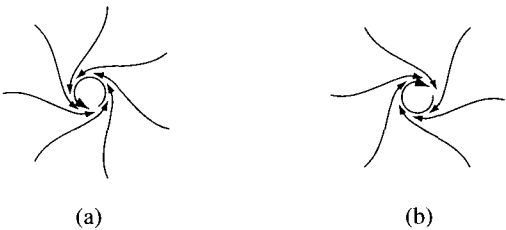
### Remarques

- Le calcul de la rotation du plan d'oscillation du pendule par rapport à la Terre peut être effectué plus simplement, en calculant directement les équations du mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}''$  en rotation de vitesse  $-\Omega \sin \lambda$  autour de l'axe  $\mathbf{e}_3$ . On introduit ainsi un nouveau terme de Coriolis qui annule le précédent ; l'équation du pendule (15.48) devient dans  $\mathcal{R}''$

$$\ddot{x} = -\frac{g}{\ell} x \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\frac{g}{\ell} y$$

dont la solution peut être donnée sous la forme  $\xi(t) = A \cos \omega_0 t + i B \sin \omega_0 t$  (15.51) où  $\xi = x + iy$  et  $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ .

- La vitesse de rotation du plan d'oscillation est donc  $-\Omega \sin \lambda$ , soit une rotation d'un angle de  $360^\circ \cdot \sin \lambda$  en un jour ou de  $15^\circ \cdot \sin \lambda$  en une heure. A la latitude de Lausanne ( $\lambda = 46,5^\circ$ ), le plan d'oscillation tourne de  $11^\circ$  par heure.
- Si l'on considère un point matériel astreint à se déplacer dans un plan horizontal, la force de Coriolis est dirigée vers la droite par rapport à la direction du mouvement dans l'hémisphère Nord et elle est dirigée vers la gauche dans l'hémisphère Sud. C'est cette force de Coriolis qui est responsable de l'érosion de la berge des grands fleuves, de la déviation des courants atmosphériques et du mouvement de tourbillon des cyclones (fig. 15.13).



**Fig. 15.13** Formation d'un cyclone : (a) il tourne en sens contraire des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère Nord ; (b) le cyclone tourne dans le sens opposé dans l'hémisphère Sud.

- Remarquons encore que l'observateur lié au fusil tournant ou à la table tournante (§ 4.1.1) interprétera la courbure de la trajectoire comme une manifestation des forces d'inertie et de Coriolis.

### 15.6 ÉQUIVALENCE DE LA MASSE D'INERTIE ET DE LA MASSE GRAVIFIQUE

Nous avons déjà mentionné (§. 10.6.1) que les expériences de Galilée sur la chute des corps, puis celles de Newton sur des pendules de même longueur mais de masses différentes, avaient conduit Newton à identifier la masse d'inertie  $m$  et la masse gravifique  $m^*$ , avec une précision relative de  $10^{-3}$ .

$$m = m^*$$

Des expériences pour confirmer cette équivalence de  $m$  et  $m^*$  furent entreprises en 1888 par R. Eötvös, puis répétées à plusieurs reprises avec divers perfectionnements en collaboration avec D. Pekàr et E. Fekete [40]. Ces expériences étaient basées sur le fait que la force exercée par la Terre sur un corps est proportionnelle à la masse gravifique  $m^*$ , tandis que la force d'inertie est proportionnelle à la masse d'inertie  $m$ . Comme nous l'avons vu dans l'exemple du fil à plomb (fig. 15.8), le poids d'un corps est

$$\mathbf{P} = -\mathbf{T} = m^* \left[ \mathbf{g} - \frac{m}{m^*} \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{x}) \right]. \tag{15.53}$$

Baron  
von EÖTVÖS Roland  
Physicien hongrois  
1848-1919

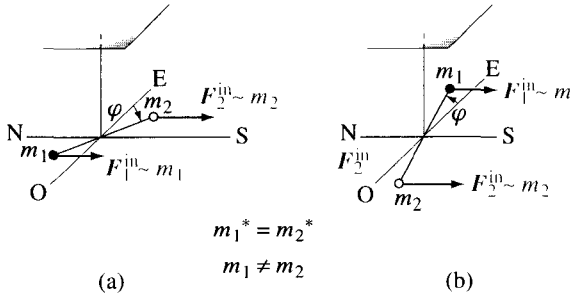
Par conséquent, la composante horizontale de  $P$ , soit

$$P_\lambda = m\Omega^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda,$$

sera différente pour différents corps de même poids ( $=|P|$ ), si le rapport  $m/m^*$  n'est pas une constante.

Pour mettre en évidence une variation de  $m/m^*$ , Eötvös utilisa un pendule de torsion dont le principe est le suivant. Considérons un pendule de torsion dont la partie mobile est formée de deux sphères  $A$  et  $B$  de même poids, mais de substances différentes (fig. 15.14). Si le rapport  $m/m^*$  n'est pas le même pour les deux substances, les forces horizontales qui agissent sur les deux sphères devront être équilibrées par une torsion du fil, et une rotation du fil devrait être observée. L'expérience est réalisée deux fois en échangeant les sphères  $A$  et  $B$ . Cela permet, d'une part, d'obtenir une position de référence pour le pendule et, d'autre part, d'améliorer la précision en mesurant une rotation double du pendule. (L'appareil utilisé par Eötvös avait une forme curieuse due au fait que c'était un instrument utilisé en géophysique.)

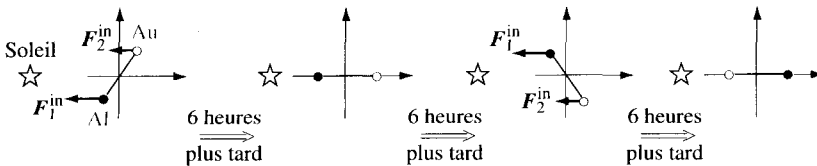
Expérience  
de Eötvös



**Fig. 15.14** Principe du pendule de torsion pour mesurer un écart entre masse gravifique et masse d'inertie.  $P_1$  et  $P_2$  sont deux objets différents de même poids. En supposant  $m_1 < m_2$  on aurait la situation observée en (a) et en intervertissant les objets, la rotation inverse en (b).

De cette manière, Eötvös a montré que  $m/m^*$  est une constante avec une précision de  $10^{-8}$ .

Ces expériences furent ensuite reprises en 1961 par Dicke [41], puis en 1972 par Braginskii et Parov [42], en utilisant le champ de gravitation du Soleil sur un pendule de torsion. Pour comprendre le principe de ces nouvelles expériences, étudions le mouvement du pendule de torsion dans le référentiel géocentrique (fig. 15.15). Par rapport à ce référentiel, la Terre – et le pendule – font un tour en 24 heures et il y a une force d'inertie égale à  $m|a_c| = m \cdot 3,4 \cos \lambda \text{ cm s}^{-2}$  (§ 10.4.4).



**Fig. 15.15** Analyse du pendule de torsion de Dicke relativement au référentiel géocentrique.

Si le rapport  $m/m^*$  n'est pas le même pour les deux sphères, la rotation de la Terre en 24 heures devrait conduire à un mouvement oscillant périodique, de période 24 heures, du pendule. Ces expériences confirmèrent celles de Eötvös et la précision fut améliorée à  $10^{-11}$  puis  $10^{-12}$ . Pour plus de détails, on pourra consulter l'ouvrage de R. Hakim [65].

Relativité générale

Le principe d'équivalence, ainsi confirmé avec une précision relative de  $10^{-12}$ , est l'un des principes fondamentaux de la physique. Il est à la base de la théorie de la relativité générale d'Einstein, c'est-à-dire de la **théorie de la gravitation**.

Étant donné l'importance de ce principe, l'ESA (European Space Agency) a donné son accord en décembre 1994 à un projet d'expérience spatiale qui devrait permettre d'atteindre une précision de  $10^{-17}$ , et même de  $10^{-20}$  !

## 15.7 MARÉES

L'explication du phénomène des marées, en particulier le fait qu'il y ait deux marées par jour, fut l'un des succès de la mécanique newtonienne.

Ce phénomène est dû en grande partie à l'action gravifique de la Lune, plus précisément à la non-uniformité, à la surface de la Terre, du champ de gravitation dû à la Lune. Nous allons par conséquent considérer pour commencer le système formé uniquement de la Terre et de la Lune. De plus, pour simplifier, nous supposons que la Terre et la Lune sont de symétrie sphérique.

Par rapport au référentiel des étoiles fixes, les équations du mouvement de la Terre et de la Lune

$$\begin{cases} m_T \ddot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{F}^{L \rightarrow T} \\ m_L \ddot{\mathbf{x}}_L = -\mathbf{F}^{L \rightarrow T} \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^{L \rightarrow T} = G m_T m_L \frac{\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_T}{|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_T|^3} \quad (15.54)$$

impliquent (fig. 15.16)

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_{G_0} = 0 \\ \ddot{\mathbf{x}} = -GM \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{G_0} = \frac{1}{M} (m_T \mathbf{x}_T + m_L \mathbf{x}_L) \\ \begin{cases} M = m_T + m_L \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_T - \mathbf{x}_L \end{cases} \end{cases} \quad (15.55)$$

La distance  $d = |\mathbf{x}|$  entre la Terre et la Lune étant approximativement constante ( $e \cong 0,05$ ;  $d \cong 3,8 \cdot 10^8$  m), le centre  $C$  de la Terre a un mouvement circulaire uniforme autour de  $G_0$  (= centre de masse du système Terre-Lune), de vitesse angulaire  $\omega$  et rayon  $r_T = |CG_0|$  où

$$\omega^2 = G \frac{M}{d^3}, \quad r_T = \frac{m_L}{M} d \cong 0,74 R_T, \quad R_T \cong 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}, \quad (15.56)$$

c'est-à-dire d'accélération

$$\mathbf{a}_C = \omega^2 \mathbf{C} \mathbf{G}_0 = G \frac{m_L}{d^2} \widehat{\mathbf{CL}} \quad (15.57)$$

(période du mouvement  $T = 2\pi/\omega \approx 27,3$  jours).

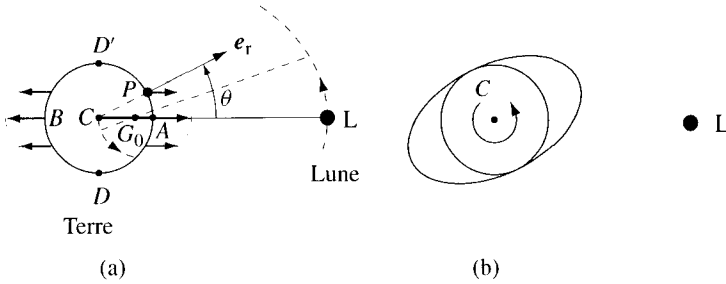
Soit  $\mathcal{R}_T$  le référentiel géocentrique, référentiel lié au centre de la Terre en translation par rapport aux étoiles fixes. Par rapport à  $\mathcal{R}_T$ , le mouvement d'un point  $P$  de masse  $m$  à la surface de la Terre satisfait l'équation du mouvement

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{T \rightarrow m} + \mathbf{F}^{L \rightarrow m} + \mathbf{F}^{\text{in}} \quad (15.58)$$

où  $\mathbf{F}$  est la résultante des forces non gravifiques,

$$\mathbf{F}^{L \rightarrow m} = G \frac{m_L m}{|\mathbf{PL}|^3} \mathbf{PL}, \quad (15.59)$$

$$\mathbf{F}^{\text{in}} = m\omega^2 \mathbf{G}_0 \mathbf{C} = -G \frac{mm_L}{d^2} \widehat{\mathbf{CL}}. \quad (15.60)$$



**Fig. 15.16** Marées. (a) Force (deuxième terme de (15.62)) agissant sur un point  $P$  de la surface de la Terre ; (b) effet des frottements.

En utilisant le fait que  $\frac{R_T}{d} \cong 1,7 \cdot 10^{-2} \ll 1$ , on a

$$|\mathbf{PL}|^{-3} = [d^2 - 2R_T d \cos \theta + R_T^2]^{-3/2} \cong d^{-3} \left( 1 + 3 \frac{R_T}{d} \cos \theta \right)$$

et

$$\frac{\mathbf{PL}}{|\mathbf{PL}|^3} \cong d^{-2} \left( 1 + 3 \frac{R_T}{d} \cos \theta \right) \left[ \widehat{\mathbf{CL}} - \frac{R_T}{d} \mathbf{e}_r \right]. \quad (15.61)$$

Par conséquent, on obtient de (15.59), (15.60) et (15.61)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{L \rightarrow m} + \mathbf{F}^{\text{in}} &\cong G \frac{m_L m}{d^2} \left( \frac{R_T}{d} \right) [-\mathbf{e}_r + 3 \cos \theta \widehat{\mathbf{CL}}] = \\ &= f_L [-\mathbf{e}_r + 3 \cos \theta \widehat{\mathbf{CL}}]. \end{aligned} \quad (15.62)$$

Deux marées par  
jour

Le premier terme est une contribution radiale, indépendante du point  $P$ , qui s'ajoute au champ de gravitation dû à la Terre. Le second terme – responsable des marées – est parallèle à la direction Terre-Lune et varie en  $\cos \theta$  : *les forces aux points le plus proche et le plus éloigné de la Lune sont maximales, égales et opposées, tandis que les forces aux points  $D$  et  $D'$  sont nulles*, ce qui explique l'apparition de marées hautes aux points le plus proche et le plus éloigné de la Lune, et de marées basses en  $D$  et  $D'$  (fig. 15.16).

Par rapport au référentiel terrestre, la Lune tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire  $\omega_L = \Omega - \omega$ , où  $\Omega = 2\pi/86\,164\text{ s}^{-1}$ , et la période de révolution de la Lune est

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L} = \frac{1}{1 - \frac{1}{27,3}} \text{ j.sid.} = 1,038 \text{ j.sid.} = 24 \text{ h } 50 \text{ min.}$$

Par conséquent, en un point  $P$  de la surface de la Terre, la force est maximale et il y a marée haute toutes les 12 h 25 min. Mentionnons finalement que la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles entraîne la masse d'eau et que les marées hautes ne correspondent pas exactement à  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  (fig. 15.16 b).

Si nous évaluons de façon analogue la contribution due au Soleil, nous obtenons une équation similaire à (15.62) avec

$$\frac{f_S}{f_L} = \frac{m_S}{m_L} \left( \frac{d_{TS}}{d_{TL}} \right)^3 = 0,465$$

c'est-à-dire que la contribution de la Lune est 2,15 fois plus importante que celle du Soleil.

Lorsque le Soleil, la Lune et la Terre sont alignés, soit environ toutes les deux semaines (pleine Lune et nouvelle Lune), ces contributions s'additionnent et l'effet global est environ 1,5 fois celui de la Lune (marées de vive-eau); au contraire, au premier et dernier quartier, ils s'opposent et l'effet global est 0,5 fois celui de la Lune (marées de morte-eau). Par ailleurs, la contribution du Soleil est plus ou moins importante au cours de l'année; elle est maximale lorsque le Soleil traverse le plan équatorial (marées d'équinoxes).

Pour terminer, remarquons que l'importance des marées varie beaucoup d'un endroit à un autre, et ceci s'explique par le phénomène de résonance (sect. 17.4) entre la période  $T_L$  de la Lune et la période du mouvement propre de l'eau sur les fonds marins.

## 15.8 PROBLÈMES

Référentiels  
accélérés de  
translation

**15.8.1** Un point matériel est attaché à un ressort exerçant une force  $F = -k(x - \ell)$ . Le ressort est fixé dans un ascenseur ayant un mouvement uniformément accéléré (fig.15.17). Trouver la position d'équilibre et la période des oscillations.

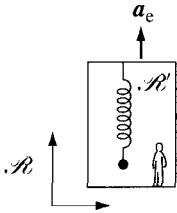


Fig. 15.17

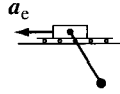


Fig. 15.18

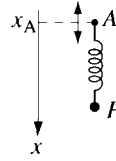


Fig. 15.19

**15.8.2** Un pendule est fixé à un pont roulant ayant un mouvement uniformément accéléré (fig. 15.18). Trouver la position d'équilibre et la période des petits mouvements.

**15.8.3** Écrire les équations du mouvement d'un point matériel suspendu à un ressort ( $F = -k(x - \ell)$ ) dont le point de suspension a un mouvement oscillatoire  $x_A = h \cos \gamma t$ , en se plaçant dans le référentiel lié au point A (fig. 15.19).

**15.8.4** Le chauffeur d'un camion démarre avec une accélération  $a = 0,05g$  sans avoir attaché la cuve sphérique (masse  $M$ , rayon  $R$ ) qu'il doit transporter (fig. 15.20). Calculer la vitesse  $v$  du centre de la cuve et la vitesse angulaire  $\omega$  lorsque la cuve touche le sol ; quelle sera la distance entre l'extrémité du camion et la cuve à l'instant du choc sur le sol ? (On admettra que la cuve roule sans glisser sur le camion.)

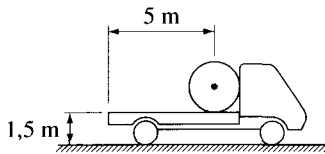


Fig. 15.20

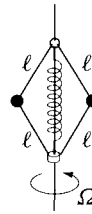


Fig. 15.21

**15.8.5** Écrire les équations du mouvement, puis trouver la position d'équilibre et la période des petits mouvements, du système de la figure 15.21 (régulateur de Watt) lorsque l'axe tourne à vitesse angulaire  $\Omega$  constante ( $F^{\text{ress}} = -k(x - 2\ell)$ ).

Régulateur de Watt

**15.8.6** Résoudre les problèmes 9.9.2, 10.7.8 à 10.7.10 et 12.8.23 en se plaçant dans le référentiel tournant. Même question pour l'exemple du paragraphe 12.6.5.

**15.8.7** Une particule de charge  $q$  est soumise à l'action d'une force  $F_1$  et à un champ magnétique homogène  $B$ . Montrer que, relativement à un référentiel tournant à la vitesse angulaire  $\Omega = -qB/2m$ , la force magnétique est remplacée par la force élastique  $-m\rho\Omega^2 e_\rho$ . Vérifier que si  $F_1 = -\text{grad}U_1$ , alors  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + \frac{1}{2}\rho^2\Omega^2 + U_1$  est une constante du mouvement.

Force de Coriolis et force magnétique

**Force de Coriolis 15.8.8** Calculer la force exercée sur les rails — perpendiculairement au mouvement — par un TGV roulant entre Paris et Lyon à 260 km/h, sachant que la masse totale est 425 tonnes.

**15.8.9** Une moto de 300 kg roule Nord-Sud sur l'autoroute du Soleil (latitude  $\lambda \cong 45^\circ$ ) à 230 km/h. Calculer la force de Coriolis et l'inclinaison de la moto que cela implique.

**Déviations vers l'Est 15.8.10** Calculer le déplacement  $d$  d'un fil à plomb de 100 m de longueur par rapport à la verticale. Calculer la déviation vers l'Est  $\delta$  d'un corps qui tombe en chute libre d'une hauteur  $h = 100$  m. (Les expériences sont effectuées à Lausanne,  $\lambda \cong 46,5^\circ$ .)

**Inclinaison des voies 15.8.11** Un train roulant à 120 km/h effectue un virage de 1 km de rayon. Calculer l'inclinaison de la voie pour que les passagers ne soient pas déportés. Un passager laisse tomber un objet d'une hauteur de 2 m ; calculer le déplacement horizontal, (on ne tient pas compte de la rotation de la Terre). On montrera que, par rapport au passager, l'évolution est décrite par les équations

$$x' = R(\theta \cos \theta - \sin \theta) \quad \theta = \frac{v}{R}t$$

$$y' = -R(\theta \sin \theta + \cos \theta - 1)$$

$$z' = h - \frac{1}{2}gt^2$$

(où  $R$  est le rayon du virage,  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}'_1$  la vitesse du train, et  $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}'_3$ ).

**15.8.12** Une particule est lancée avec une vitesse  $v$  sur un plan horizontal. Montrer que la trajectoire est approximativement un arc de cercle de rayon  $v/(2\Omega \sin \lambda)$  où  $\lambda$  est la latitude et  $\Omega$  la vitesse de rotation de la Terre (les frottements sont négligeables).



## ÉQUILIBRE ET STATIQUE

### 16.1 ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA STATIQUE

La statique est l'étude des états de repos – ou *états d'équilibre* – relativement à un référentiel  $\mathcal{R}$ . Ayant introduit les coordonnées généralisées  $\{q_i\}$ , les états d'équilibre sont définis par la condition  $q_i(t) = \bar{q}_i$  pour tout  $t$ .

Les problèmes sont alors de trois types :

- trouver les forces connaissant la position d'équilibre ;
- trouver la position d'équilibre connaissant les forces ;
- trouver les forces et la position d'équilibre connaissant certaines forces et certaines contraintes.

Dans tout ce chapitre, nous supposons que les forces sont indépendantes du temps et que les liaisons sont parfaites, c'est-à-dire qu'elles satisfont la condition des travaux virtuels (12.103) :

$$\sum_{\alpha} \mathbf{R}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{x}_{\alpha} = 0 \quad (16.1)$$

Condition des  
travaux virtuels

où  $\mathbf{R}_{\alpha}$  sont les forces de liaison et  $\delta \mathbf{x}_{\alpha}$  un déplacement virtuel compatible avec les liaisons (12.101).

#### 16.1.1 Lois de la statique

Nous avons établi au chapitre 11 les lois de la statique.

Un système  $S$  reste en équilibre si et seulement si pour tout sous-système  $S'$  de  $S$ , le torseur des forces extérieures à  $S'$  est équivalent à zéro :

Équilibre  
d'un système

$$\forall S' \subset S \quad \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = 0. \quad (16.2)$$

Dans le cas particulier des solides, il découle du théorème de distribution des vitesses qu'un solide est en équilibre si et seulement si  $\mathbf{v}_G = 0$  et  $\boldsymbol{\omega} = 0$ , et l'on arrive aux lois suivantes.

Lois de la statique des solides

Un solide  $S$  reste en équilibre si et seulement si le torseur des forces extérieures à  $S$  est équivalent à zéro :

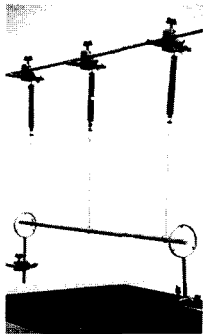
Équilibre d'un solide

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S} = 0.$$

(16.3)

16.1.2 Hyperstatique

La recherche des états d'équilibre – ou des forces responsables d'un équilibre donné – se ramène à la recherche des solutions de l'équation (16.2). S'il y a plusieurs distributions de forces compatibles avec une position d'équilibre, le problème est indéterminé et l'on dit que le système est *hyperstatique* (fig. 16.1). Dans ce cas, il faudra faire appel à la mécanique des corps déformables pour trouver la répartition réelle des forces (sect. 16.4 et 16.5).



Une barre est soutenue par trois câbles : solution au problème hyperstatique

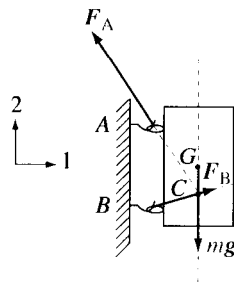


Fig. 16.1 Système hyperstatique. Les équations d'équilibre (16.3) possèdent une infinité de solutions : le point  $C$  est indéterminé sur l'axe vertical passant par  $G$ .

16.1.3 Propriétés d'un système à l'équilibre

Pour un système à l'équilibre nous avons les propriétés suivantes, conséquences des propriétés des torseurs (sect. 4.7) ;

- La somme des forces agissant en chaque point est nulle.
- Si un système est en équilibre sous l'action de deux forces extérieures, celles-ci sont opposées de même support.

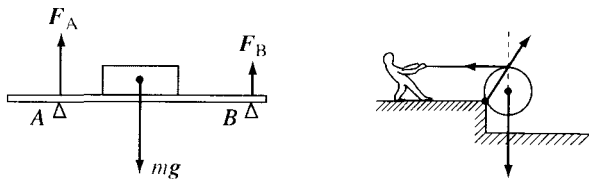
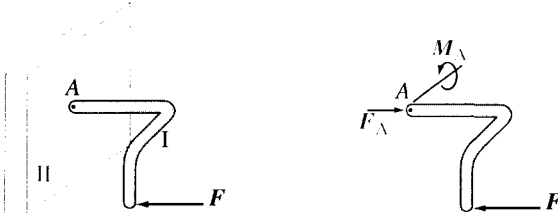


Fig. 16.2 Équilibre d'un système sous l'action de trois forces : (a) supports parallèles ; (b) forces concourantes.

- Si un système est en équilibre sous l'action de trois forces extérieures, celles-ci sont coplanaires, de supports soit parallèles, soit concourants (fig. 16.1 et 16.2).
- Pour trouver l'action exercée par la partie II sur la partie I (tensions), il suffit de remplacer la partie II par un torseur de forces équivalent (fig. 16.3).



**Fig. 16.3** Les forces exercées par II sur I peuvent être remplacées par la force  $F_A$  et le moment  $M_A$ .

## 16.2 CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

### 16.2.1 Principe de travaux virtuels (Jean Bernoulli 1717)

Considérons un système en équilibre sous l'action de forces appliquées  $\{F_\alpha\}$  et de forces de liaison  $\{R_\alpha\}$ . Pour tout point  $P_\alpha$  du système nous avons

$$F_\alpha + R_\alpha = 0 \quad (16.4)$$

et par conséquent

$$\sum_\alpha (F_\alpha + R_\alpha) \cdot \delta x_\alpha = 0 \quad (16.5)$$

pour tout déplacement virtuel compatible (12.101) :

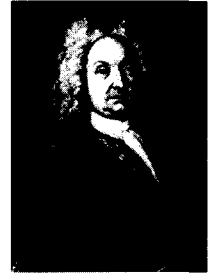
$$\delta x_\alpha = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Les liaisons étant parfaites on déduit de (16.1) et (16.5) le principe suivant.

#### Principe des travaux virtuels

Pour tout déplacement virtuel compatible, la somme des travaux des forces **appliquées** sur un système en équilibre est nulle, c'est-à-dire

$$\delta W = \sum_\alpha F_\alpha \cdot \delta x_\alpha = 0. \quad (16.6)$$



BERNOULLI Jean  
Physicien et  
mathématicien suisse  
Il s'associa à une  
grande partie des  
travaux de son frère  
Jacques  
1667-1748

En utilisant des coordonnées généralisées, (16.6) devient

$$\delta W = \sum_{\alpha} F_{\alpha} \cdot \left( \sum_{j=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^k Q_j \delta q_j = 0 \quad (16.7)$$

où

$$\text{Force généralisée} \quad Q_j = \sum_{\alpha} F_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_j} \quad (16.8)$$

est appelé **force généralisée** associée à la coordonnée  $q_j$ . Attention ! La grandeur  $Q_j$  n'a pas nécessairement la dimension d'une force.

Si le système est holonôme, les  $\delta q_j$  sont indépendants et (16.7) implique

$$Q_j = 0, \quad \text{pour tout } j. \quad (16.9)$$

On a ainsi un système de  $k$  équations pour les  $k$  variables  $q_1, \dots, q_k$ .

### 16.2.2 Conditions d'équilibre

États d'équilibre

**Théorème.** Les états d'équilibre d'un système holonôme sont les solutions  $\bar{q} = \{\bar{q}_i\}$  des équations

$$Q_j(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_k) = 0 \quad j = 1, \dots, k. \quad (16.10)$$

Si les forces appliquées sont conservatives, les états d'équilibre sont les points stationnaires de l'énergie potentielle, c'est-à-dire les solutions des équations

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, \dots, k. \quad (16.11)$$

**DÉMONSTRATION.** La première partie est une conséquence du principe des travaux virtuels (16.9). Par ailleurs, si les forces appliquées sont conservatives, on a

$$\delta W = -\delta U = - \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j. \quad (16.12)$$

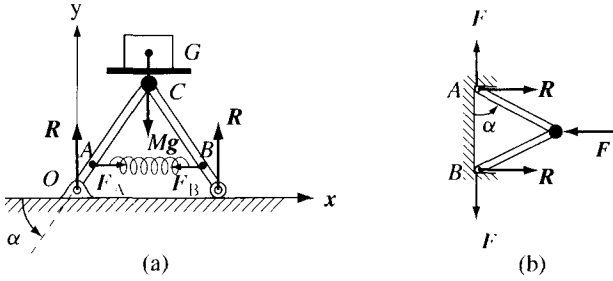
Comme les  $\delta q_j$  sont indépendants pour un système holonôme, on obtient l'expression des forces généralisées

$$Q_j = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (16.13)$$

et (16.11) est une conséquence de (16.10). (On trouvera une démonstration directe de (16.11) au paragraphe 16.3.2.)

### 16.2.3 Exemple 1. Calcul des forces à l'équilibre

Cherchons la force  $F$  exercée par le ressort  $AB$  lorsque le système articulé est en équilibre (fig. 16.4 a).



**Fig. 16.4** Calcul de la force en A et B à l'équilibre  $|OA| = d$ ,  $|OC| = \ell$ .

Le système est holonôme à 1 degré de liberté. Pour tout déplacement virtuel compatible, nous avons (fig. 16.4) :

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_A &= d(-\sin \alpha, \cos \alpha) \delta \alpha \\ \delta \mathbf{x}_B &= (-(2\ell - d) \sin \alpha, d \cos \alpha) \delta \alpha \\ \delta \mathbf{x}_G &= \ell(-\sin \alpha, \cos \alpha) \delta \alpha \\ \text{où } |OA| &= d, \quad |OC| = \ell.\end{aligned}$$

Par ailleurs les forces appliquées étant

$$\mathbf{F}_A = (F, 0), \quad \mathbf{F}_B = (-F, 0), \quad \mathbf{F}_G = (0, -Mg)$$

le principe des travaux virtuels (16.6) entraîne

$$[-Fd \sin \alpha + F(2\ell - d) \sin \alpha - Mg\ell \cos \alpha] \delta \alpha = 0$$

pour tout  $\delta \alpha$ . Par conséquent (16.9)

$$F = \frac{Mg\ell}{2(\ell - d) \tan \alpha}. \quad (16.14)$$

En particulier, dans le cas du système de la figure 16.4 (b), on obtient

$$|F| = \frac{F_1}{2 \tan \alpha}. \quad \text{Résultat}$$

Dans le premier exemple, comme toutes les forces appliquées sont conservatives, nous aurions également pu appliquer les conditions d'équilibre (§ 16.2.2)

$$U = U^{\text{pot}}(y) + U^{\text{el}}(x_B - x_A) \quad \text{où} \quad x_B - x_A = 2(\ell - d) \cos \alpha$$

d'où

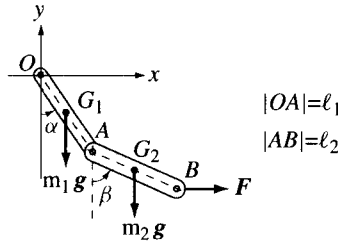
$$U(\alpha) = M g \ell \sin \alpha + U^{\text{el}}(2(\ell - d) \cos \alpha)$$

$$Q_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial \alpha} = -M g \ell \cos \alpha + 2(\ell - d) \sin \alpha F(\alpha) = 0$$

et l'on retrouve (16.14).

### 16.2.4 Exemple 2. Calcul de la position d'équilibre

Cherchons la position d'équilibre du système articulé (fig. 16.5) soumis à une force  $F$  horizontale.



**Fig. 16.5** Calcul de la position d'équilibre d'un système articulé. La force  $F$  est donnée.

**Description** Le système est holonôme à deux degrés de liberté. Pour tout déplacement virtuel compatible, on a

$$\delta \mathbf{x}_{G_1} = \frac{1}{2} \ell_1 (\cos \alpha, \sin \alpha) \delta \alpha$$

$$\delta \mathbf{x}_{G_2} = \ell_1 (\cos \alpha, \sin \alpha) \delta \alpha + \frac{1}{2} \ell_2 (\cos \beta, \sin \beta) \delta \beta$$

$$\delta \mathbf{x}_B = \ell_1 (\cos \alpha, \sin \alpha) \delta \alpha + \ell_2 (\cos \beta, \sin \beta) \delta \beta.$$

Le principe des travaux virtuels implique (16.6)

$$\begin{aligned} -m_1 g \frac{1}{2} \ell_1 \sin \alpha \delta \alpha - m_2 g \ell_1 \sin \alpha \delta \alpha - m_2 g \frac{1}{2} \ell_2 \sin \beta \delta \beta \\ + F \ell_1 \cos \alpha \delta \alpha + F \ell_2 \cos \beta \delta \beta = 0 \end{aligned}$$

pour tout  $\delta \alpha, \delta \beta$ ; d'où

$$Q_\alpha \delta \alpha + Q_\beta \delta \beta = 0$$

$\Downarrow$

$$Q_\alpha = 0 \quad Q_\beta = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{2F}{(m_1 + 2m_2)g} \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{2F}{m_2 g}.$$

## 16.3 ÉQUILIBRE ET STABILITÉ

### 16.3.1 Définition de la stabilité

De façon intuitive, on dit qu'une position d'équilibre est stable si pour toutes conditions initiales voisines de cette position d'équilibre, le mouvement du

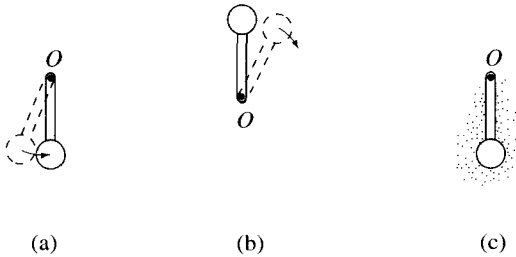
système reste au voisinage du point d'équilibre. La position d'équilibre est instable dans le cas contraire.

De façon plus précise, on introduit la définition suivante.

Un état d'équilibre  $\bar{q}$  est **stable** si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tels que  $|q_i(0) - \bar{q}_i| < \delta_1$  et  $|\dot{q}_i(0)| < \delta_2$ ,  $i = 1, \dots, k$ , entraîne  $|q_i(t) - \bar{q}_i| < \varepsilon$  pour tout  $t$ . Il est **instable** dans le cas contraire. L'état d'équilibre stable  $\bar{q}$  est **asymptotiquement stable** si, de plus,  $q(t)$  tend vers  $\bar{q}$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Équilibres stables  
et instables

Dans le cas du pendule physique (fig. 16.6), l'observation et les équations du mouvement montrent que la position verticale vers le bas est stable alors que la position verticale vers le haut est instable. En présence de frottement visqueux, la position stable est, de plus, asymptotiquement stable.



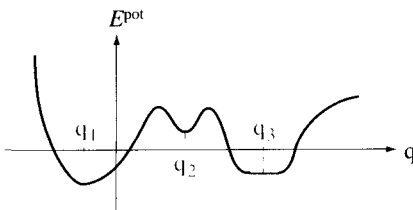
**Fig. 16.6** Pendule physique : (a) la position verticale vers le bas est stable ; (b) vers le haut, la position est instable ; (c) en présence de frottement visqueux, la position stable est asymptotiquement stable.

### 16.3.2 Critères de stabilité

#### Théorème de Lejeune-Dirichlet

Pour un système holonôme à liaisons indépendantes du temps tel que toutes les forces actives sont conservatives, les *minima stricts locaux* de l'énergie potentielle définissent des états d'équilibre *stables*.

LEJEUNE-  
DIRICHLET G.  
Mathématicien  
allemand  
(1805-1859)



**Fig. 16.7** Critère de stabilité :  $q_1$  est le minimum strict ;  $q_2$  est un minimum local, strict ;  $q_3$  est un minimum local qui n'est pas strict.

**DÉMONSTRATION.** Si  $\bar{q} = \{\bar{q}_i\}$  est un *minimum local* de  $U$ , alors l'état de conditions initiales ( $q_0 = \bar{q}$ ,  $\dot{q}_0 = 0$ ) est un *état d'équilibre*; en effet, les inégalités  $T \geq 0$ ,  $U(q) \geq U(\bar{q})$  au voisinage de  $\bar{q}$ , et la conservation de l'énergie

$$E^{\text{méc}}(t) = T(t) + U(t) = E^{\text{méc}}(0) = U(\bar{q}),$$

impliquent  $q(t) = \bar{q}$  (par continuité de  $q(t)$ ).

Si, de plus,  $\bar{q}$  est un *minimum strict local* de  $U$ , alors pour tout état initial voisin de l'état d'équilibre on a

$$E^{\text{méc}}(t) = E^{\text{méc}}(0) = U(\bar{q}) + \varepsilon \quad \text{avec} \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

d'où

$$0 \leq U(q(t)) - U(\bar{q}) = \varepsilon - T(t) \leq \varepsilon$$

et

$$T(t) = U(\bar{q}) - U(t) + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Comme le minimum de  $U$  est strict, ces inégalités impliquent  $|\dot{q}_i| \leq \delta_1$  et  $|q_i - \bar{q}_i| \leq \delta_2$  (où  $\delta_1, \delta_2$  peuvent être aussi petits que l'on veut en choisissant  $\varepsilon$  suffisamment petit) : l'état d'équilibre est stable.

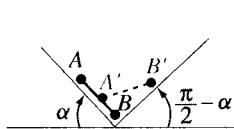
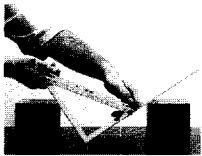


**TORRICELLI**  
Evangelista  
Physicien italien  
Élève de Galilée  
(1608-1647)

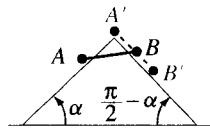
### Corollaire. Principe de Torricelli (1644)

Pour un système matériel pesant, soumis à des liaisons holonômes, les positions définies par les minima de la hauteur du centre de masse sont des positions d'équilibre stables ; les maxima sont des positions d'équilibre instables.

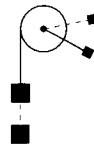
Ce principe est illustré par les exemples de la figure 16.8.



(a)



(b)



(c)

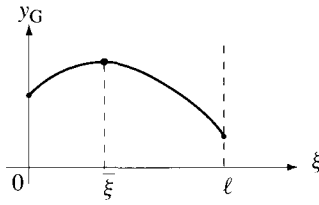
**Fig. 16.8** Positions d'équilibre stables (noir) et instables (rouge).

Dans le cas de l'exemple de la figure 16.8 (a), nous avons

$$y_G = \frac{1}{2}\xi \sin \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - \xi^2} \cos \alpha$$

$$\xi = |OA| \in [0, \ell], \quad \ell = |AB| = \text{cste.}$$





**Fig. 16.9** Hauteur du centre de masse en fonction de la position de l'exemple de la figure 16.8 (a).

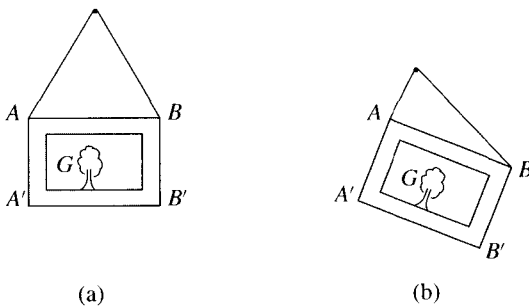
Nous voyons ainsi que les positions  $\xi = 0$  et  $\xi = \ell$  sont stables, et la position  $|OA| = \bar{\xi}$  définie par

$$\frac{\partial}{\partial \xi} y_G = 0 = \frac{1}{2} \sin \alpha \left( \bar{\xi} \tan \alpha - \sqrt{\ell^2 - \xi^2} \right) = 0$$

est une position d'équilibre instable.

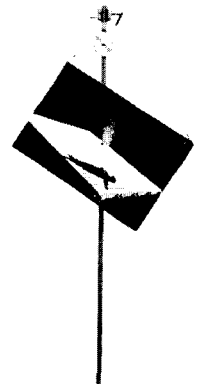
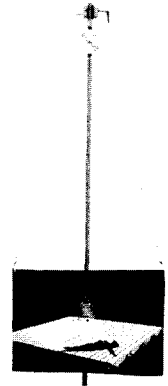
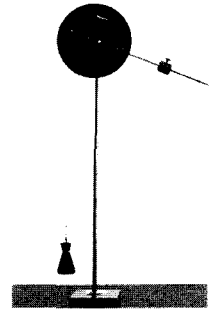
Dans le cas de la figure 16.8 (b) c'est le contraire : il y a une position d'équilibre stable et deux instables. Dans l'exemple du disque de la figure 16.8 (c) il y a un ensemble de positions d'équilibre stables et instables définies à une rotation de  $2\pi$  près du disque.

Un autre exemple intéressant est représenté sur la figure 16.10. Si l'on suspend un tableau au moyen d'un fil de longueur  $\ell$ , on observe que si  $\ell$  est inférieure à une certaine valeur  $\ell_0$ , il y a deux positions d'équilibre stables (penchées) et une position instable (horizontale) ; si  $\ell$  est supérieure à  $\ell_0$ , il y a une seule position d'équilibre stable (horizontale).



**Fig. 16.10** Positions d'équilibre stables d'un tableau suspendu par un fil de longueur  $\ell$  : (a)  $\ell > \ell_0$  ; (b)  $\ell < \ell_0$ .

**Conjecture.** On pense que les points d'équilibre qui ne sont pas des minima de l'énergie potentielle sont instables, mais cette conjecture n'a été démontrée que pour les systèmes à un degré de liberté.

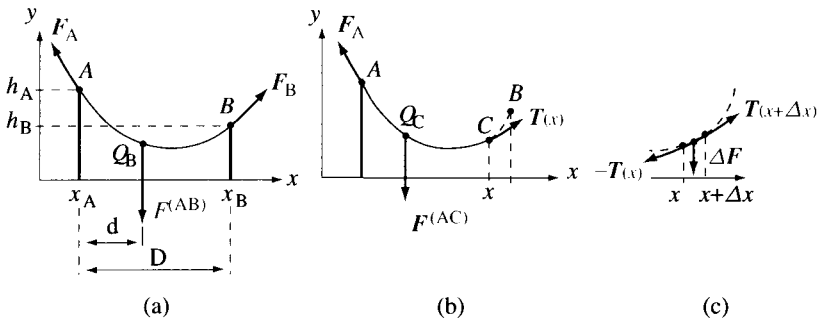


## 16.4 ÉQUILIBRE DES CÂBLES SOUPLES

## 16.4.1 Équation des câbles

Par définition, un **câble souple** (ou-fil) est un système unidimensionnel qui ne supporte aucun moment. Cela signifie que le moment résultant du torseur des forces exercées par une partie du câble sur l'autre est nul.

Le problème consiste alors à trouver la position d'équilibre d'un tel câble suspendu entre deux points fixes  $A$  et  $B$  et soumis à l'action de forces parallèles à  $\mathbf{g}$  (fig. 16.11 a).



**Fig. 16.11** Câble souple suspendu entre  $A$  et  $B$  :

- (a) torseur des forces appliquées au câble  $\sim \{F_A, F_B, F^{(AB)}\}$  ;
- (b) torseur des forces appliquées à la portion  $AC \sim \{F_A, T(x), F^{(AC)}\}$  ;
- (c) torseur des forces appliquées à l'élément  $(x, x+\Delta x) \sim \{-T(x), T(x+\Delta x), \Delta F\}$ .

Pour établir l'équation définissant la position d'équilibre du câble nous procédons en plusieurs étapes.

- Les forces étant parallèles à  $\mathbf{g}$ , le torseur de ces forces sur la portion de câble  $AC$  (fig. 16.11 b) est équivalent à un vecteur  $F^{(AC)}$  lié au point  $Q_C$  ; de la définition d'un câble, et des équations d'équilibre, ce point est dans le plan vertical défini par  $F_A$  et, par conséquent, la *position d'équilibre du câble est plane*.
- Les équations de la statique (16.2) appliquées au câble entier (fig. 16.11 a) déterminent partiellement les forces  $F_A$  et  $F_B$  :

$$\begin{aligned} F_{A,1} + F_{B,1} &= 0 & F_{A,2} + F_{B,2} + |F^{(AB)}| &= 0 \\ |F^{(AB)}| \cdot d &= F_{B,2} \cdot D + F_{B,1}(h_A - h_B). \end{aligned} \quad (16.15)$$

- Considérons ensuite la portion de câble  $AC$  et introduisons  $T(x)$  la force intérieure exercée par la portion  $CB$  sur la portion  $AC$  (où  $x$  est l'abscisse de  $C$ , fig. 16.11 b).

On appelle  $T(x) = |T(x)|$  la **tension** du câble au point  $C$ .

Tension

Des équations d'équilibre de la portion  $AC$  on tire

$$F_{A,1} + T_1(x) = 0 \quad \text{d'où} \quad T_1(x) = F_{B,1} = T_1 = \text{cste.} \quad (16.16) \quad T_1(x) = \text{cste}$$

- Finalement, appliquons les équations d'équilibre au segment de câble d'abscisse  $(x, x + \Delta x)$ . Soit  $\Delta F = -f(x)\Delta x e_2$  la force extérieure sur ce segment (fig. 16.11 c).

$f(x)$  = force  
linéique

Comme  $\Delta F$  tend vers zéro lorsque  $\Delta x$  tend vers zéro, il découle de la *définition d'un câble* et de la condition d'équilibre des moments sur le segment  $(x, x + \Delta x)$  que  $T(x)$  est tangent au câble, ainsi de (16.16) on tire

$T(x)$  tangent au  
câble

$$T_2(x) = T_1 y'(x). \quad (16.17)$$

Par ailleurs, la condition d'équilibre des forces sur l'élément  $(x, x + \Delta x)$  implique

$$T_2(x + \Delta x) - T_2(x) - f(x)\Delta x = 0. \quad (16.18)$$

Par conséquent, de (16.17) et (16.18) on obtient

$$\frac{d}{dx} T_2(x) = f(x) = T_1 y''(x). \quad (16.19)$$

En résumé,  $T(x)$  est tangent au câble et l'**équation des câbles** est donnée par

Équation des câbles

$$y''(x) = \frac{1}{T_1} f(x), \quad \text{où} \quad \begin{cases} T_1 = F_{B,1} = \text{cste}, \\ T_2(x) = T_1 y'(x). \end{cases} \quad (16.20)$$

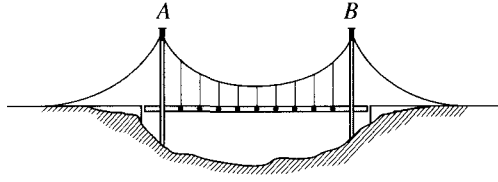
**Remarque.** Ayant déterminé  $y(x)$  par intégration de (16.20), on a de (16.17) :

$$F_{A,2} = F_{A,1} y'(x_A) \quad \text{et} \quad F_{B,2} = F_{B,1} y'(x_B) \quad (16.21)$$

ce qui permet, avec (16.15), de calculer les forces  $F_A$  et  $F_B$ .

#### 16.4.2 Exemple 1. Pont suspendu

Considérons le cas où  $f(x) = f$  est constant. C'est le cas du pont suspendu (fig. 16.12) où l'on néglige le poids des câbles qui est très inférieur à celui du pont et où  $f = P/D$  est le poids du pont par unité de longueur. Connaissant la longueur du câble porteur  $L_{AB}$ , on désire calculer la forme de ce câble pour que la tension soit la même dans chacun des câbles verticaux.



**Fig. 16.12** Pont suspendu. On veut calculer la longueur des câbles verticaux  $y = y(x)$  donc la forme du câble porteur.

En intégrant l'équation des câbles (16.20) avec  $f = \text{cste}$ , on obtient

La forme du câble  
est une parabole

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} \frac{f}{T_1} x^2 \quad (16.22)$$

où les constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $T_1$  sont déterminées par les trois équations

$$y(x_A) = h_A, \quad y(x_B) = h_B, \quad (16.23)$$

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{x_A}^{x_B} dL = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + \left(C_2 + \frac{f}{T_1} x\right)^2}. \end{aligned} \quad (16.24)$$

Finalement, la tension dans le câble porteur est

$$|T(x)| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = T_1 \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (16.25)$$

En conclusion, la forme du câble porteur est une **parabole** ; la tension est minimale au point le plus bas, maximale au point le plus haut, et

$$|F_A| = T_1 \sqrt{1 + y'(x_A)^2} \quad |F_B| = T_1 \sqrt{1 + y'(x_B)^2}. \quad (16.26)$$

### 16.4.3 Exemple 2. Câble pesant homogène

Cherchons la forme d'équilibre d'un câble souple homogène de longueur  $L$  sous l'action de son propre poids (fig. 16.13). Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= g \frac{\delta m}{\delta x} = g \mu \frac{\delta \ell}{\delta x} = g \mu \frac{\sqrt{dx^2 + y'^2 dx^2}}{dx} = \\ &= g \mu \sqrt{1 + y'(x)^2} \end{aligned} \quad (16.27)$$

avec  $\mu = M/L$  la masse spécifique linéique.

L'équation des câbles (16.20) devient dans cet exemple

$$y''(x) = \frac{\mu g}{T_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad (16.28) \quad \text{Équation des câbles pesants homogènes}$$

dont la solution est l'équation de la **chaînette** (fig. 16.13 a)

$$y(x) = \frac{T_1}{\mu g} \left[ \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} x + C_1 \right) + C_2 \right]. \quad (16.29) \quad \text{Chaînette}$$

Pour le vérifier, il suffit de rappeler les relations

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x.$$

Les constantes  $C_1, C_2, T_1$  sont déterminées par les trois équations

$$y(x_A) = h_A, \quad y(x_B) = h_B, \quad \text{et} \\ L = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{1 + y'(x)^2} = \int_{x_A}^{x_B} dx \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} x + C_1 \right)$$

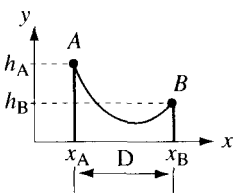
soit

$$L = \frac{T_1}{\mu g} \left[ \sinh \left( \frac{\mu g}{T_1} x_B + C_1 \right) - \sinh \left( \frac{\mu g}{T_1} x_A + C_1 \right) \right]. \quad (16.30)$$

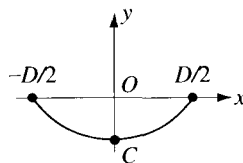
En conclusion la forme d'un câble pesant entre deux points  $A$  et  $B$ , soumis à son seul poids, est une **chaînette** (= cosinus hyperbolique).

C'est la forme d'un câble électrique entre deux poteaux ; c'est également la forme du câble de téléphérique entre deux cabines.

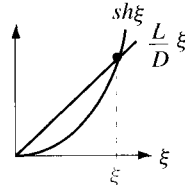
Dans le cas symétrique  $h_A = h_B$  (fig. 16.13 b), nous choisissons des axes tels que  $h_A = h_B = 0$  et  $x_A = -x_B = -\frac{1}{2}D$ . Dans ce cas, les conditions  $y(\pm \frac{1}{2}D) = 0$  et  $y'(0) = 0$  impliquent



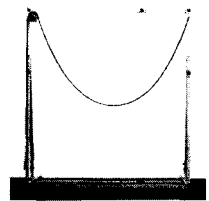
(a)



(b)



(c)



**Fig. 16.13** Câble pesant homogène : chaînette. (a) Cas asymétrique ; (b) cas symétrique ; (c) détermination graphique de  $\xi = \frac{1}{2} \frac{\mu g D}{T_1}$ .

$$\begin{cases} y(x) = \frac{T_1}{\mu g} \left[ \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} x \right) - \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} \frac{D}{2} \right) \right] \\ L = \frac{T_1}{\mu g} 2 \sinh \left( \frac{\mu g}{T_1} \frac{D}{2} \right). \end{cases} \tag{16.31}$$

En introduisant la variable  $\xi = \frac{\mu g}{T_1} \frac{D}{2}$ , l'équation (16.31) devient

$$\frac{L}{D} \xi = \sinh \xi \tag{16.32}$$

ce qui permet de trouver  $\xi$ , puis  $T_1$ , soit graphiquement (fig. 16.13 c), soit par approximations successives.

Flèche On appelle **flèche** la distance  $|OC|$  (fig. 16.13 b); nous avons

$$\text{Flèche} = |y(0)| = \frac{T_1}{\mu g} \left[ \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} \frac{D}{2} \right) - 1 \right]. \tag{16.33}$$

Finalement, la tension est donnée dans le cas symétrique par l'expression

$$|T(x)| = T_1 \sqrt{1 + y'(x)^2} = T_1 \cosh \left( \frac{\mu g}{T_1} x \right) \tag{16.34}$$

soit

$$|T(x)| = T_1 + \mu g[y(x) - y(0)]. \tag{16.35}$$



BERNOULLI Jacques  
Frère de Jean  
Physicien et  
mathématicien suisse  
1654-1705

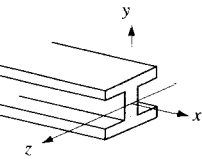
**Remarque historique.** Galilée pensait que la forme d'un câble pesant devait être une parabole ; c'est Jacques Bernoulli qui, le premier, a obtenu la solution de la chaînette (dont la parabole est une première approximation).

### 16.5 ÉQUILIBRE DES POUTRES

Le calcul de la répartition des tensions dans une pièce mécanique ou dans une poutre est essentiel pour assurer la résistance mécanique d'une construction. Ce calcul a été effectué pour la première fois par Daniel Bernoulli dont nous suivons ici la démarche.

Contrairement au cas des câbles souples de la section précédente, les poutres sont des *systèmes qui peuvent supporter des moments considérables, sans se déformer de façon importante*. Par conséquent nous sommes dans le domaine des petites déformations pour lequel la loi de Hooke est applicable.

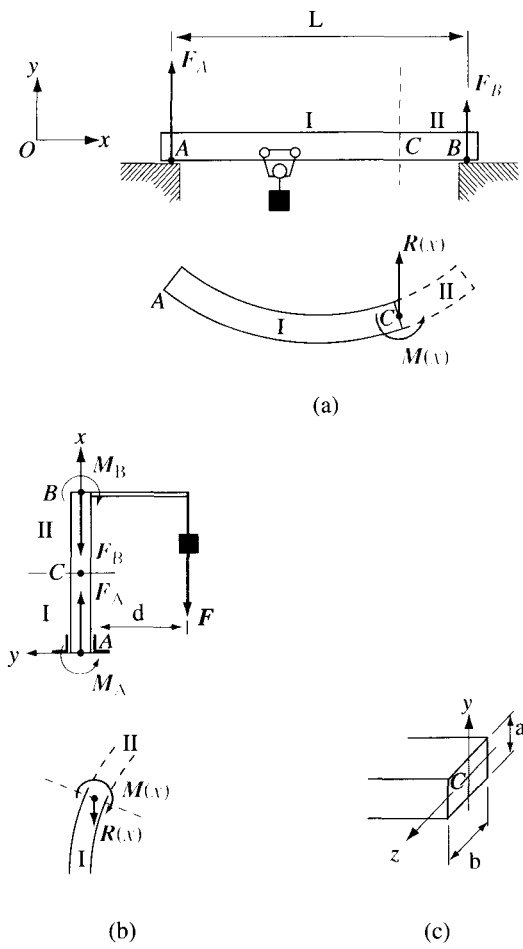
A priori, la section de la poutre pourrait être arbitraire, mais, pour simplifier, nous admettons qu'elle est constante (rectangulaire, circulaire, pleine, vide, en  $T$ , en  $U$ , ...). Nous admettons également que la poutre est homogène et présente un plan de symétrie.



Finalement, suivant en cela D. Bernoulli, nous faisons l'*hypothèse* que des sections planes avant la déformation restent planes après la déformation (hypothèse justifiée par le fait que les déformations sont petites).

La démarche que nous allons suivre est analogue à celle utilisée dans l'étude des câbles.

Considérons une poutre soumise à un ensemble de forces parallèles à  $g$ , ainsi qu'à des forces de soutien  $F_A$  et  $F_B$ , et éventuellement à des moments  $M_A$  et  $M_B$  aux extrémités (fig. 16.14).



**Fig. 16.14** Équilibre des poutres : (a) pont roulant ; (b) grue de chantier ; (c) section  $\Sigma_I$  de la poutre.

- Les conditions d'équilibre (16.2) appliquées au système entier déterminent les réactions aux points  $A$  et  $B$

$$F_A + F_B + F^{(AB)} = 0 \quad M_O^{(A)} + M_O^{(B)} + M_O^{(AB)} = 0 \quad (16.36)$$

où  $\{F_A, M_O^{(A)}\}$ ,  $\{F_B, M_O^{(B)}\}$  sont les éléments de réduction des forces appliquées respectivement aux extrémités  $A$  et  $B$ , et  $\{F^{(AB)}, M_O^{(AB)}\}$  sont les



BERNOULLI Daniel  
Fils de Jean  
Fondateur de l'hydrodynamique et de la théorie cinétique des gaz (1700-1782)

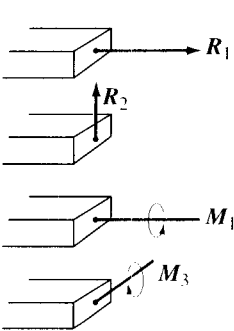
Système entier

éléments de réduction des forces connues appliquées sur la poutre, autres qu'aux extrémités.

Portion AC • On considère ensuite le sous-système I, défini par la portion AC de la poutre (fig. 16.14). Les conditions d'équilibre appliquées à cette portion déterminent les *éléments de réduction*  $\{\mathbf{R}(x), \mathbf{M}(x)\}$ , par rapport à C, des forces intérieures exercées par CB sur AC (où  $x$  est l'abscisse de C), soit

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}^{(AC)} + \mathbf{R}(x) = 0, \quad \mathbf{M}_C^{(A)} + \mathbf{M}_C^{(AC)} + \mathbf{M}(x) = 0. \tag{16.37}$$

En statique on introduit alors les définitions suivantes.



La **force de traction** est la composante longitudinale de  $\mathbf{R}(x)$ , soit  $R_1(x)$ .  
La **force de cisaillement** est la composante transversale de  $\mathbf{R}(x)$ , soit  $R_2(x)$ .  
Le **moment de torsion** est la composante longitudinale de  $\mathbf{M}(x)$ , soit  $M_1(x)$ .  
Le **moment de flexion** est la composante transversale de  $\mathbf{M}(x)$ , soit  $M_3(x)$ .

Par conséquent de (16.37) nous avons obtenu les forces de traction et de cisaillement, ainsi que les moments de torsion et de flexion.

Portion  $\Delta x$  • Pour décrire la déformation de la poutre, on considère la portion de longueur  $\Delta x$ , limitée par les sections planes d'abscisses  $x - \Delta x$  et  $x$ . En vertu de l'hypothèse de D. Bernoulli, ces sections restent planes après déformation et, par conséquent, les fibres parallèles à  $x$  ont une longueur  $\Delta x + \delta(\Delta x)$ , avec (fig. 16.15)

$$\delta(\Delta x) = \delta(x, y) = \delta^m(x) \frac{y}{a_+}. \tag{16.38}$$

( $\delta^m(x)$  est l'élongation maximale, ou minimale, de la fibre de longueur  $\Delta x$ , située en  $(x - \Delta x, x)$ .)

En vertu de la loi de Hooke, la tension  $\sigma_{11}$  au point  $(x, y)$  est proportionnelle à la déformation  $\varepsilon_{11}$  en ce point, c'est-à-dire

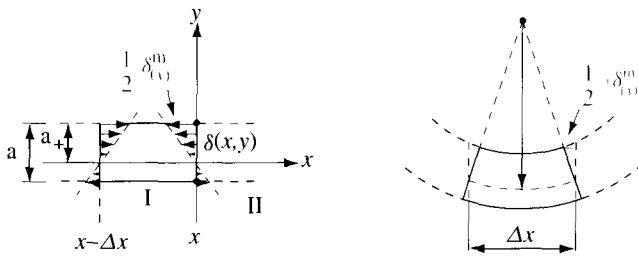
Loi de Hooke

$$\varepsilon_{11}(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{\Delta x} = \varepsilon_{11}^m \frac{y}{a_+}, \quad \varepsilon_{11}^m = \frac{\delta^m(x)}{\Delta x},$$
$$\sigma_{11}(x, y) = E \varepsilon_{11}(x, y) = \sigma^m(x) \frac{y}{a_+} \tag{16.39}$$

où  $E$  est le *module d'élasticité* (§ 12.7.5), et

$$\sigma^m(x) = E \frac{\delta^m(x)}{\Delta x}. \tag{16.40}$$





**Fig. 16.15** Portion de la poutre limitée par les sections planes d'abscisse  $x - \Delta x$  et  $x$  : (a) avant la déformation ; (b) après la déformation. Sur cette figure,  $\delta^m(x)$  est négatif.

De (16.39) nous obtenons les expressions suivantes pour la force de traction et le moment de flexion

$$R_1(x) = \int_{\Sigma_1} \sigma_{11}(x, y) dS_1 = \frac{1}{a_+} \sigma^m(x) \int_{\Sigma_1} y dS_1 \quad (16.41) \quad \text{Force de traction}$$

$$M_3(x) = - \int_{\Sigma_1} \sigma_{11}(x, y) y dS_1 = - \frac{1}{a_+} \sigma^m(x) \int_{\Sigma_1} y^2 dS_1 \quad (16.42) \quad \text{Moment de flexion}$$

où  $\Sigma_1$  est la section plane d'abscisse  $x$ .

Ayant obtenu  $R_1(x)$  et  $M_3(x)$  à partir de (16.37), les équations (16.41) et (16.42) permettent de calculer  $\sigma^m(x)$  et  $a_+$ .

En conclusion nous avons obtenu la relation entre le moment de flexion et la tension maximale sur la section d'abscisse  $x$ ,

$$\sigma^m(x) = - \frac{a_+}{I} M_3(x) \quad (16.43)$$

où

$$I = \int_{\Sigma_1} y^2 dS_1 \quad (16.44) \quad \text{Moment d'inertie d'une section}$$

est appelé **moment d'inertie de la section**  $\Sigma_1$  par rapport à l'axe  $z$ . C'est un scalaire d'unité  $[I] = [L]^4$ .

L'équation différentielle de la forme de la poutre est déduite de l'analyse géométrique de la figure 16.15.

En introduisant le rayon de courbure  $\rho(x)$  de la poutre au point  $x$  (§ 5.2.5), on a (fig. 16.15 b) :

$$\frac{\Delta x}{\rho(x)} = - \frac{\delta^m(x)}{a_+} \quad (16.45)$$

d'où, en vertu de (16.39),

$$\rho(x) = -a_+ \frac{1}{\varepsilon_{11}^m} = -a_+ \frac{E}{\sigma^m(x)} \quad (16.46)$$

et d'après (16.43)

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_3(x)}{EI}. \quad (16.47)$$

Finalement, le rayon de courbure d'une courbe  $y(x)$  étant défini par (§ 5.2.5)

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d\tau}{dx} \right| \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}(1, y')$$

on a l'expression du rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \quad (16.48)$$

De (16.47) et (16.48), on obtient l'**équation de la poutre** dans le cas de petites déformations (c'est-à-dire  $y' \cong 0$ )

Équation de la poutre  $y''(x) = \frac{1}{EI} M_3(x). \quad (16.49)$

*Attention !* Il ne faut pas confondre le moment d'inertie  $I$  de la section, et le moment d'inertie  $I_\Delta$  d'un solide par rapport à un axe. Dans le cas d'un solide défini par une surface plane on a  $I_\Delta = \int_\Sigma y^2 dm$  (14.14), tandis que le moment d'inertie de la section est  $I = \int_\Sigma y^2 dS$ . Ainsi la dimension de  $I_\Delta$  est  $[M][L]^2$ , alors que la dimension de  $I$  est  $[L]^4$ .

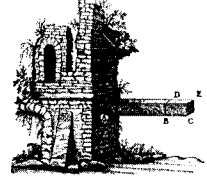
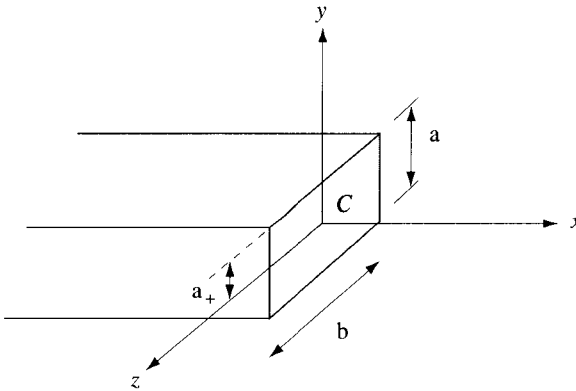
Méthode En résumé, connaissant la répartition des forces appliquées sur la poutre, on commence par calculer les réactions  $F_A$  et  $F_B$  (16.36), puis  $R_1(x)$  et  $M_3(x)$  (16.37), ce qui permet de trouver  $\sigma^m(x)$ ,  $a_+$  et  $I$ ; finalement, en intégrant (16.49), on trouve la forme d'équilibre de la poutre.

### 16.5.1 Illustration : poutre de section rectangulaire

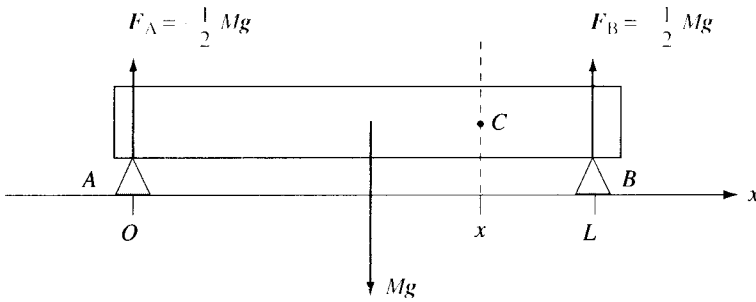
Dans le cas d'une poutre rectangulaire d'épaisseur  $a$  et de largeur  $b$  (fig. 16.16), nous déduisons de (16.41) et (16.42)

$$R_1(x) = \frac{1}{a_+} \sigma^m(x) \int_{a_+-a}^{a_+} yb \, dy = \frac{1}{2} \sigma^m(x) ab \left( 2 - \frac{a}{a_+} \right) \quad (16.50)$$

$$\begin{aligned} M_3(x) &= -\frac{1}{a_+} \sigma^m(x) \int_{a_+-a}^{a_+} y^2 b \, dy \\ &= -\frac{1}{3} \sigma^m(x) \frac{b}{a_+} [a_+^3 + (a - a_+)^3]. \end{aligned} \quad (16.51)$$



GALILÉE G.  
Discorsi e  
dimostrazioni  
matematiche intorno a  
due nuove scienze  
(Leyden 1638)



**Fig. 16.16** Poutre de section rectangulaire sur deux appuis simples.

Dans les exemples des figures 16.14 (a) et 16.16, on a  $R_1 \cong 0$  d'où

$$a_+ = \frac{1}{2}a, \quad I = \frac{1}{12}a^3b, \quad \text{et} \quad \sigma^m(x) = -\frac{6}{a^2b} M_3(x). \quad (16.52)$$

En particulier, dans le cas de la figure 16.16, on tire de (16.36) et (16.37)  $F_A = F_B = -\frac{1}{2}Mg$ , et

$$M_3(x) = \frac{1}{2}Mgx - \frac{M}{L}xg\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\frac{M}{L}gx(L-x).$$

On en déduit ainsi l'équation de la poutre (16.49)

Équation de la poutre  $y''(x) = \frac{1}{E} \frac{6}{a^3b} \frac{M}{L} gx(L-x).$  (16.53)

Avec les conditions aux limites  $y(x=0) = y(x=L) = 0$ , on obtient la forme de la poutre en intégrant (16.53), on obtient

$$y(x) = \frac{1}{E} \frac{Mg}{L} \frac{1}{2a^3b} x(L-x)(x^2 - xL - L^2). \quad (16.54)$$

Par symétrie, la flèche est au centre de la poutre, et

$$y_{\max} = -\frac{5}{32} \frac{1}{E} Mg \frac{L^3}{a^3b}. \quad (16.55)$$

La flèche d'une poutre de section rectangulaire sur deux appuis simples est inversement proportionnelle à la largeur (ce qui est intuitif), et inversement proportionnelle au cube de l'épaisseur.

Il est intéressant de remarquer que si au lieu d'une poutre d'épaisseur  $a$ , on avait pris  $n$  lamelles d'épaisseur  $a/n$  (même longueur, largeur, et masse spécifique que la poutre), on aurait une flèche  $n^2$  fois plus grande.

Dans l'exemple de la figure 16.14 (b), on a au contraire  $F_B = F$ ,  $M_B = F_1 d e_3$ , et dans ce cas (16.50) et (16.51) impliquent

$$R_1(x) = F_1 - Mg \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{1}{2}\sigma^m(x) ab \left(2 - \frac{a}{a_+}\right) \neq 0$$

$$M_3(x) = F_1 d = -\frac{1}{3}\sigma^m(x) \frac{b}{a_+} [a_+^3 + (a - a_+)^3].$$

On trouve ainsi  $a_+$ ,  $\sigma^m$  et

$$I = \frac{b}{3} [a_+^3 + (a - a_+)^3]. \quad (16.56)$$

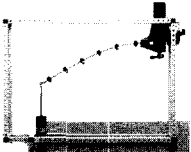
En général on obtiendra toujours  $a_+ \cong \frac{1}{2}a$ , d'où  $I \cong \frac{1}{12}a^3b$ .

### 16.5.2 Remarques technologiques

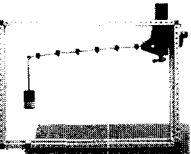
• Ayant choisi le matériau de la poutre, il faut, pour des questions de sécurité, que la tension soit inférieure à une certaine valeur admissible. La relation

$$|\sigma^m(x)| \approx \frac{6}{a^2b} |M_3(x)| \leq \sigma^{\text{adm}} \quad (16.57)$$

donne alors l'épaisseur minimale  $a$  que doit avoir la poutre rectangulaire de largeur  $b$ .



$n$  lamelles indépendantes



$n$  lamelles rigidifiées

- De (16.39) on remarque que les forces internes sont pratiquement nulles au voisinage de  $y = 0$  ; la partie centrale ne contribue donc pas aux efforts et l'on a avantage à la supprimer. On est alors conduit à choisir des sections ayant la forme indiquée sur la figure 16.17.

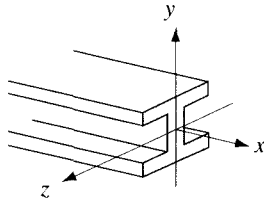


Fig. 16.17 Poutre en I.

## 16.6 PROBLÈMES

**16.6.1** Un système est formé de deux cylindres reliés par deux tiges de longueur  $\ell$  (fig. 16.8). Les cylindres roulent librement aux extrémités des tiges. Trouver les positions d'équilibre et leur stabilité lorsque le système est posé sur deux plans perpendiculaires faisant respectivement un angle  $\alpha$  et  $\pi/2 - \alpha$  avec l'horizontale dans les cas des fig. 16.8 (a) et 16.8 (b).



**16.6.2** Vérifier que la position d'équilibre stable d'un tableau (fig. 16.10) est telle que l'angle  $BGB'$  soit égal à  $AOB$ , pour autant que la longueur du fil le permette.

Équilibre stable d'un tableau

**16.6.3** Une tige de longueur  $\ell$  est posée dans une demi-sphère creuse de rayon  $R$  (fig. 16.18). Trouver la position d'équilibre en l'absence de frottement.

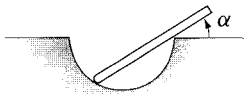


Fig. 16.18

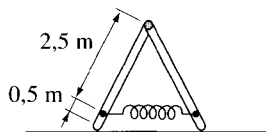


Fig. 16.19

Position d'équilibre

**16.6.4** Un système articulé, formé de deux tiges de masse  $M$  reliées par un ressort, repose sans frottement sur le sol (fig. 16.19). Trouver la position d'équilibre sachant que le ressort exerce une force  $F = -k(\ell - \ell_0)$ . ( $M = 10 \text{ kg}$  ;  $\ell_0 = 50 \text{ cm}$  ;  $k = 10^3 \text{ N/m}$ .)

**16.6.5** On veut suspendre une dalle de 20 m, pesant 10 tonnes, au moyen de câbles verticaux situés tous les 50 cm le long de deux câbles porteurs (fig. 16.20). Calculer la longueur du  $n^{\text{ième}}$  câble, sachant que la tension maximale dans les câbles porteurs est de 3 tonnes.

Pont suspendu

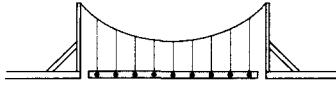


Fig. 16.20

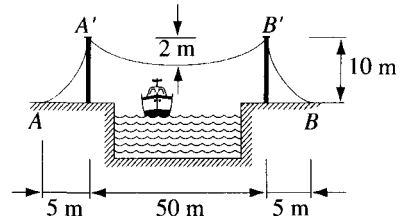


Fig. 16.21

## Équilibre d'un câble

**16.6.6** Un câble ayant une masse spécifique linéique  $\mu = 0,4 \text{ kg/m}$  doit être suspendu entre deux pylônes hauts de 10 m, distants de 50 m, sur un sol horizontal (fig. 16.21). On veut que la flèche soit de 2 m. Trouver la longueur du câble et la force exercée par le câble sur les pylônes. Calculer la longueur du câble AB pour qu'il n'y ait pas de déformation des poteaux.

**16.6.7** Un câble de transmission en cuivre avec  $\mu = 0,75 \text{ kg/m}$  doit être suspendu entre deux isolateurs à même hauteur, éloignés de 100 m. Pour éviter de déformer les isolateurs, on veut limiter la composante horizontale de la tension dans le câble à 900 N. Calculer la longueur du câble, la flèche résultante et la tension maximale dans le câble.

**16.6.8** Un câble est suspendu entre deux points de même hauteur, situés à une distance  $D$ . Quelle doit être la longueur du câble pour que la tension dans le câble soit minimum et, dans ce cas, quelle est la flèche ? Application numérique :  $\mu = 5 \text{ kg/m}$  et  $D = 100 \text{ m}$ .

## Ressorts suspendus

**16.6.9** Un système formé de  $n$  points matériels de masse  $m$ , reliés par des ressorts identiques ( $F^{\text{ress}} = -k(x - \ell_0)$ ), est suspendu au point A (fig. 16.22). Calculer la force  $F_i$  exercée par le  $i^{\text{ème}}$  ressort et la position  $x_i$  de la  $i^{\text{ème}}$  masse.

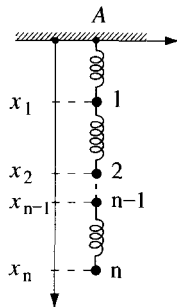


Fig. 16.22

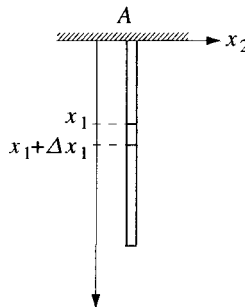


Fig. 16.23

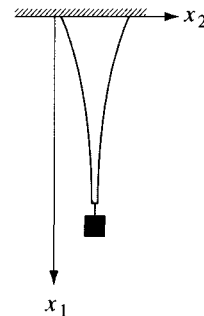


Fig. 16.24

## Cylindre suspendu

**16.6.10** Un cylindre en acier de longueur  $\ell = 10 \text{ m}$ , section circulaire de rayon  $R = 2 \text{ cm}$  et masse spécifique  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , est suspendu au point A (fig. 16.23). Sachant que l'allongement relatif  $\Delta y_i / \Delta x_i$  d'un segment  $\Delta x_i$  est proportionnel à la tension avec  $\frac{dy_i}{dx_i} = \frac{1}{E} \sigma_{11}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , calculer le déplacement vertical  $y_1(x_1)$  du point qui se trouvait en  $x_1$  avant déformation.

Sachant que la contraction relative  $\Delta y_2 / \Delta x_2$  est proportionnelle à la tension avec  $\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11}$ , calculer le rayon de la section en fonction de  $x_1$  ( $\nu = 0,27$ ).

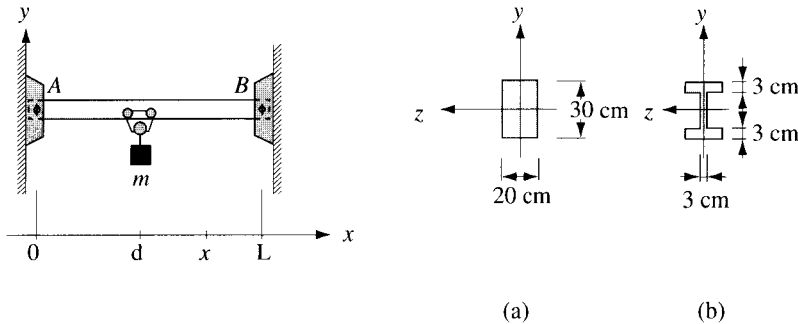
**16.6.11** Vérifier que la forme d'un barreau de révolution (fig. 16.24) doit être exponentielle pour que la tension  $\sigma_{11}$  soit indépendante de  $x_1$  lorsque le barreau supporte une charge  $M$  à son extrémité.

Barreau de forme exponentielle

**16.6.12** Un pont roulant en acier de longueur  $L = 20$  m supporte une charge de masse  $m$  (fig. 16.25). Calculer les réactions en A et B en fonction de la distance  $d$ . Calculer la force de cisaillement et le moment de flexion au point  $x$  pour une position  $d$  de la charge.

Pont roulant

En considérant les deux sections représentées sur la figure 16.25, calculer la tension maximale (relativement à  $x$  et  $d$ ). Calculer la charge maximale pour que la tension  $\sigma(x, y)$  soit inférieure à  $10 \text{ kg/mm}^2$ . Calculer la flèche du pont en l'absence de charge.

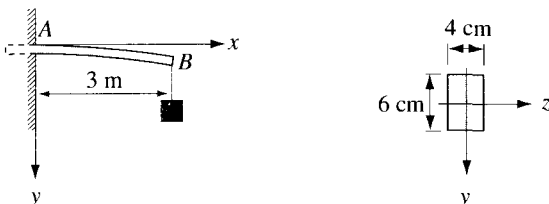


**Fig. 16.25** Acier:  $\rho = 8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

**16.6.13** Une poutre en acier de longueur  $L = 3$  m et de section rectangulaire supporte une charge de 50 kg (fig. 16.26). Calculer le moment de flexion  $M_3(x)$  et trouver la tension de traction maximum. Trouver la forme de la poutre, soit  $y = y(x)$ , et la flèche  $f = y(L)$ .

Poutre encastrée

Calculer la tension maximale et la flèche si au lieu d'une poutre on avait trois lamelles de 2 cm d'épaisseur et 4 cm de largeur. (Intégrer l'équation de la poutre en prenant  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .)



**Fig. 16.26**

**16.6.14** Reprendre le même problème que précédemment dans le cas d'une poutre verticale (fig. 16.27). (Idée : prendre  $a_+ = a_- = \frac{1}{2}a$  et vérifier la validité

Poutre verticale

de cette approximation en calculant ainsi  $\sigma_{\max}$  puis  $a_+$  et  $a_-$  à partir de cette valeur de  $\sigma_{\max}$ .)

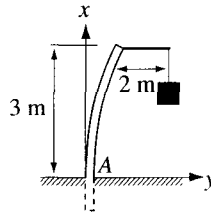


Fig. 16.27

**16.6.15** Un câble ayant une masse linéique  $\lambda$  est utilisé pour supporter un bloc de masse  $m$  (fig. 16.28). Calculer la force minimale pour maintenir le système en équilibre dans les deux cas :

1.  $\lambda = 0, \mu_s \neq 0$
2.  $\lambda \neq 0$  et  $\mu_s = 0$ , où  $\mu$  est le coefficient de frottement.  
(Idée : trouver  $dT/d\theta$ .)

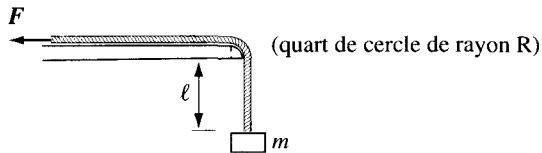


Fig. 16.28



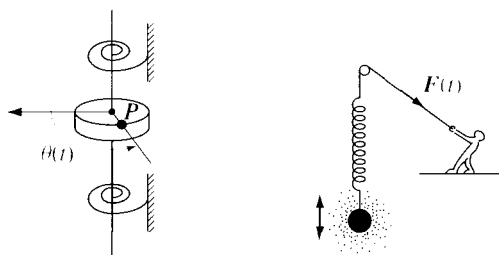
# MOUVEMENTS OSCILLANTS

## 17.1 IMPORTANCE DES MOUVEMENTS OSCILLANTS

Un des mouvements les plus importants observés dans la nature est le mouvement oscillatoire, en particulier le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable : oscillations d'un pendule, d'une masse attachée à un ressort, des électrons dans une antenne ou un circuit électrique, des atomes d'une molécule, des concentrations molaires dans les réactions chimiques, d'un gratte-ciel, de la population de deux espèces animales en compétition pour survivre...

Dans le cas des oscillations de systèmes mécaniques conservatifs isolés, on parle d'*oscillations libres* ; en présence de frottement, l'amplitude des oscillations décroît et l'on a des *oscillations amorties*. Si les oscillations sont entretenues par une action de l'extérieur, on parle d'*oscillations forcées*. Dans ce dernier cas, on verra apparaître de nouveaux phénomènes, tels que la résonance, qui sont très importants aussi bien du point de vue technologique (utiles ou catastrophiques) que du point de vue expérimental (mesures par résonance) ou théorique.

Résonance



**Fig. 17.1** Systèmes oscillants.

Parmi tous les mouvements oscillatoires, celui de l'oscillateur harmonique à une dimension est très important. C'est le mouvement d'une masse  $m$  soumise à une force élastique harmonique  $F = -kx$ , c'est-à-dire d'énergie potentielle  $U = \frac{1}{2}kx^2$ . L'importance de ce mouvement provient du fait que tout mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est oscillatoire

Oscillateur  
harmonique

Petits mouvements *harmonique*. En effet, soit  $\bar{x}$  une position d'équilibre stable d'un système décrit par l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} = -U'(x) \quad \text{avec} \quad U'(\bar{x}) = 0 \quad \text{et} \quad U''(\bar{x}) > 0. \quad (17.1)$$

Pour  $x$  au voisinage de  $\bar{x}$

$$m\ddot{x} = -U''(\bar{x})(x - \bar{x}) - \frac{1}{2}U'''(\bar{x})(x - \bar{x})^2 - \dots$$

et nous obtenons l'équation linéarisée

$$m\ddot{y} = -ky \quad \text{où} \quad y = x - \bar{x} \quad \text{et} \quad K = U''(\bar{x}). \quad (17.2)$$

Transformation de Fourier D'autre part, le mouvement oscillatoire harmonique est très important pour la raison suivante : grâce à la « transformation de Fourier », il est possible de décomposer n'importe quel mouvement périodique de période  $T$  en une somme de mouvements oscillatoires harmoniques de période  $T/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Finalement, la décomposition en mouvements oscillatoires harmoniques est le point de départ de la « quantification » des solides et des ondes électromagnétiques.

## 17.2 OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE

### 17.2.1 Évolution

Oscillateur harmonique L'oscillateur harmonique libre, système dont l'évolution est décrite par

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (17.3)$$

équation ayant la solution

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{où} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (17.4)$$

a été étudié à la section 6.3. La variable  $x$  est une coordonnée généralisée quelconque qui peut être une position, l'abscisse curviligne, un angle, etc.

Rappelons que c'est un mouvement périodique, de période  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  indépendante de l'amplitude : on dit alors qu'il y a *isochronisme des oscillations*.

Pulsation propre Fréquence propre Par définition  $\omega_0$  est la **pulsation propre** et  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  la **fréquence propre** de l'oscillateur.

### 17.2.2 Équpartition de l'énergie

Nous avons vu (6.37) que l'énergie mécanique

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (17.5)$$

est une constante du mouvement. Remarquons que dans (17.5) les énergies potentielle et cinétique ne sont pas constantes (fig. 17.2); toutefois elles satisfont la propriété intéressante d'*équipartition de l'énergie* :

$$\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2}E \quad (17.6) \quad \langle T \rangle = \langle U \rangle$$

où la notation  $\langle A \rangle$  désigne la moyenne sur une période de la fonction périodique  $A(t)$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt A(t). \quad (17.7)$$

Cette propriété est une conséquence de (17.4) et de la relation

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt \cos^2 \omega_0 t = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} \quad (17.8)$$

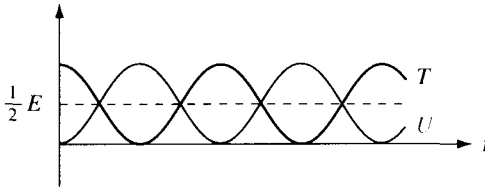


Fig. 17.2 Équipartition de l'énergie :  $\langle T \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2}E$ .

### 17.2.3 Pendule cycloïdal ou isochrone

Considérons un point matériel de masse  $m$  à l'extrémité d'un fil souple, qui s'appuie constamment sur deux portions d'une cycloïde (§ 5.4.1 et fig. 17.3).

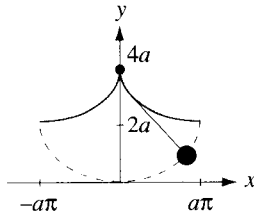


Fig. 17.3 Pendule cycloïdal.

On peut montrer que la trajectoire de  $m$  est également une cycloïde, d'équation

$$\begin{cases} x = a(\varphi + \sin \varphi) \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases} \quad \text{Trajectoire}$$

(Le paramètre  $\varphi$  est associé à l'angle décrivant la rotation d'une roue de rayon  $a$  (§ 5.4.1).)

Du théorème de conservation de l'énergie on tire

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E \quad (17.9)$$

d'où  $ma^2(1 + \cos \varphi)\dot{\varphi}^2 + mga(1 - \cos \varphi) = E$

et  $\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{g}{a} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{E}{2ma^2}$

soit  $4\left(\frac{d}{dt} \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \frac{g}{a} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{E}{2ma^2}.$

En introduisant la variable  $\xi = \sin \frac{\varphi}{2}$ , on voit que

$$\left(\frac{d}{dt}\xi\right)^2 + \frac{g}{4a}\xi^2 = \frac{E}{8ma^2}$$

et, par dérivation,  $\ddot{\xi} = -\frac{g}{4a}\xi.$

Isochronisme

L'évolution de  $\xi$  est un mouvement oscillatoire harmonique de période  $T = 2\pi\sqrt{4a/g}$  : le pendule cycloïdal possède la propriété remarquable d'isochronisme des oscillations pour n'importe quelle valeur de l'amplitude.

Ce résultat fut obtenu par Huygens en 1673 (*Traité des horloges*).

## 17.3 OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI

### 17.3.1 Évolution

En présence de *frottement linéaire en la vitesse*, l'évolution de l'oscillateur harmonique est décrite par l'équation de Newton

Oscillateur amorti  $m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}, \quad \lambda > 0, \quad (17.10)$

que l'on écrit généralement sous la forme

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0. \quad (17.11)$$

Pour trouver l'évolution, on commence par chercher une solution de la forme

$$x(t) = C e^{-\rho t} \quad (17.12)$$

où  $C$  et  $\rho$  sont des constantes (§ 7.3.3). On voit alors que l'expression (17.12) est solution de (17.11) si et seulement si  $\rho$  est solution de l'équation suivante, dite *équation caractéristique*,

$$m\rho^2 - \lambda\rho + k = 0 \quad (17.13)$$

dont les solutions sont

$$\rho_{\pm} = \kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \quad (17.14)$$

avec

$$\kappa = \frac{\lambda}{2m} > 0 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (17.15)$$

Si le **coefficient d'amortissement**  $\kappa$  est différent de la pulsation propre  $\omega_0$ , on a deux solutions indépendantes (associées à  $\rho_+$  et  $\rho_-$ ) et l'évolution temporelle est donnée par

$$x(t) = C_+ e^{-\rho_+ t} + C_- e^{-\rho_- t}. \quad (17.16)$$

Les constantes  $C_+$  et  $C_-$  seront déterminées par les conditions initiales  $(x_0, \dot{x}_0)$ .

D'autre part, si  $\kappa = \omega_0$ , on a  $\rho_+ = \rho_- = \omega_0$  et il faut trouver une seconde solution de (17.11). Dans ce cas, on vérifie aisément que l'évolution est donnée par

$$x(t) = e^{-\omega_0 t} [x_0 + t(x_0 \omega_0 + \dot{x}_0)]. \quad (17.17)$$

En conclusion, le système évolue différemment selon les valeurs des paramètres du problème. Pour  $\lambda \geq 0$  et  $k \geq 0$ , il y a trois cas à distinguer suivant le signe de la racine dans (17.14) :  $\kappa < \omega_0$ ,  $\kappa = \omega_0$  et  $\kappa > \omega_0$  (fig. 17.4).

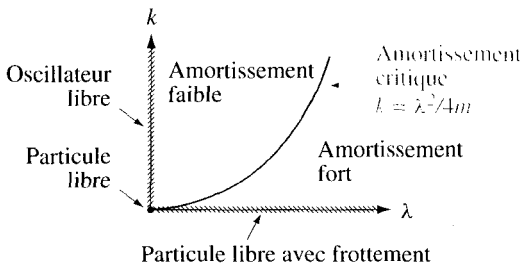
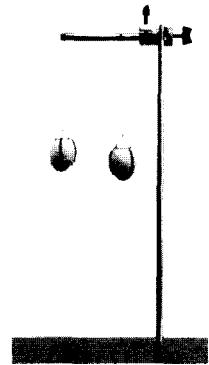


Fig. 17.4 Oscillateur harmonique amorti.



Frottement interne : l'œuf cuit oscille (en torsion) plus longtemps que l'œuf cru

### 17.3.2 Amortissement faible : $\kappa < \omega_0$

Si  $\kappa < \omega_0$ , soit  $\lambda < 2m\omega_0$ , l'équation (17.14) devient  $\rho_{\pm} = \kappa \pm i\omega$ , où

$$\omega = \omega(\lambda) = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4mk}} \quad (17.18)$$

et la solution (17.16) peut s’écrire sous la forme

$$x(t) = Ce^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$$
 (17.19)

où  $C$  et  $\varphi$  sont déterminés par les conditions initiales.

$$\begin{aligned} \lambda/2m < \omega_0 \\ \Downarrow \\ T > T_0 \end{aligned}$$

En conclusion, l’évolution est un mouvement oscillant amorti de (pseudo-)fréquence  $\nu$  inférieure à  $\nu_0$  (fig. 17.6) : les frottements linéaires en la vitesse augmentent la (pseudo-)période  $T = 1/\nu = 2\pi/\omega$ .

D’autre part, l’amplitude décroît de façon exponentielle avec un **temps de relaxation**

Temps de relaxation      
$$\tau = \frac{1}{\kappa} = \frac{2m}{\lambda} > \omega_0^{-1}.$$
 (17.20)

Le coefficient  $\delta = T/\tau$ , appelé **décrément logarithmique**, caractérise la décroissance de l’amplitude pendant une période :

Décrément logarithmique      
$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t + T)}.$$
 (17.21)

Sous l’effet des frottements, il y a dissipation de l’énergie mécanique (17.5) et l’on a

$$\frac{E(t) - E(t + T)}{E(t)} = 1 - e^{-2\kappa T} \cong 2\kappa T = 2\delta.$$
 (17.22)

On caractérise cette dissipation par le **facteur de qualité**  $Q$ , défini par

Facteur de qualité      
$$Q = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\kappa} = \frac{m}{\lambda} \omega_0.$$
 (17.23)

On voit qu’un grand facteur de qualité correspond à une faible dissipation d’énergie.

D’autre part, dans le cas d’un amortissement très faible,  $\kappa \ll \omega_0$ , on tire de (17.22)

$$Q \cong 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t + T)} \cong \frac{\pi}{\delta}.$$
 (17.24)

**Tableau 17.5** Valeurs typiques du facteur de qualité  $Q$ .

	$Q$
Terre	200-1400
Corde de piano	$10^3$
Cavité résonnante	$10^4$
Atome excité	$10^7$

### 17.3.3 Amortissement fort, $\kappa > \omega_0$

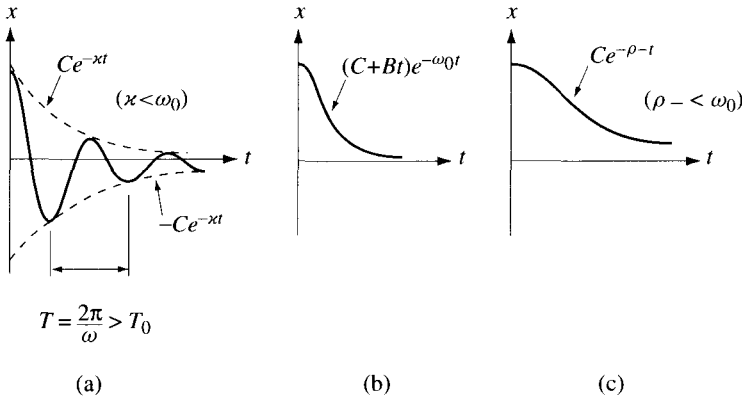
Si  $\kappa > \omega_0$ , soit  $\lambda > 2m\omega_0$ , les coefficients  $\rho_+$  et  $\rho_-$  sont réels et satisfont les inégalités

$$0 < \rho_- < \omega_0 < \rho_+. \quad (17.25)$$

De l'équation (17.16), on tire

$$x(t) = C_+ e^{-\rho_+ t} + C_- e^{-\rho_- t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_- e^{-\rho_- t}. \quad (17.26) \quad \text{Pas d'oscillation}$$

L'amortissement est exponentiel, sans oscillation, moins rapide que  $e^{-\omega_0 t}$ .  $\lambda/2m > \omega_0$



**Fig. 17.6** Oscillateur harmonique amorti : (a) amortissement faible  $\lambda < 2m\omega_0$  ; (b) amortissement critique  $\lambda = 2m\omega_0$  ; (c) amortissement fort  $\lambda > 2m\omega_0$ .

### 17.3.4 Amortissement critique, $\kappa = \omega_0$

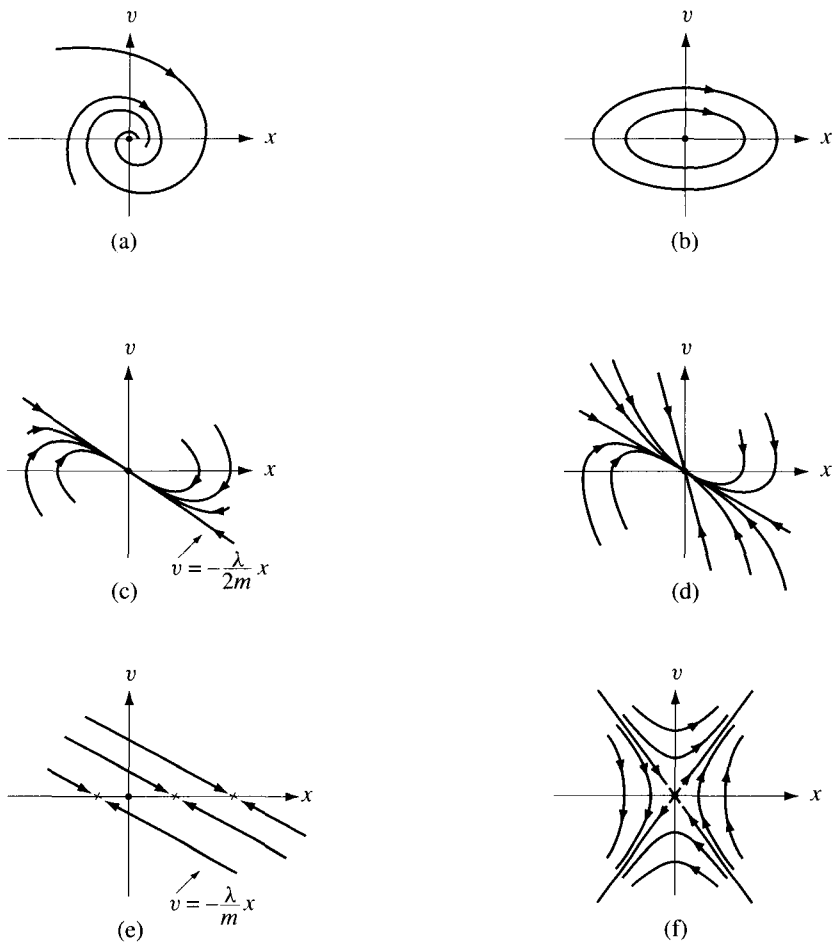
Si  $\kappa = \omega_0$ , soit  $\lambda = 2m\omega_0$ , la solution (17.17) montre que l'amortissement est exponentiel, sans oscillation, de la forme  $te^{-\omega_0 t}$  (fig. 17.6).

En conclusion, l'amortissement critique est celui qui permet d'atteindre le plus rapidement la position d'équilibre ; ce résultat est intéressant pour les réalisations techniques et la construction d'appareils de mesures.

$$\lambda/2m = \omega_0$$

### 17.3.5 Orbites

Les orbites associées à différentes valeurs typiques des paramètres ( $k$ ,  $\lambda$ ) sont représentées sur la figure 17.7.



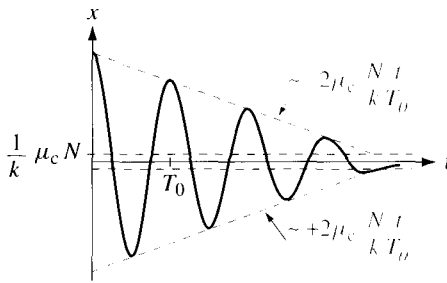
**Fig. 17.7** Orbites de l'oscillateur harmonique amorti.

(a)	$k > \frac{\lambda^2}{4m}$	$\lambda > 0$	: spirale, oscillateur amorti faiblement ;
(b)	$k > 0$	$\lambda = 0$	: centre, oscillateur libre ;
(c)	$k = \frac{\lambda^2}{4m}$	$\lambda > 0$	: noeud, oscillateur amorti critique ;
(d)	$0 < k < \frac{\lambda^2}{4m}$	$\lambda > 0$	: noeud, oscillateur amorti fortement ;
(e)	$k = 0$	$\lambda > 0$	: droites, particule libre avec frottement ;
(f)	$k < 0$	$\lambda > 0$	: selle, point instable.

### 17.3.6 Amortissement par frottements secs

Les résultats précédents ne sont valables que pour des forces de frottement linéaires en la vitesse ( $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\eta \mathbf{v}$ ). Lorsqu'il y a des frottements entre surfaces, des forces de frottements secs apparaissent et  $\mathbf{F}^{\text{fr}} = -\mu_c N \hat{\mathbf{v}}$  (12.60). On montre alors (§ 17.8.5) que le mouvement est oscillant de période  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  et l'amplitude décroît linéairement (fig. 17.8).





L'amplitude décroît  
linéairement

**Fig. 17.8** Oscillations amorties par frottements secs.

## 17.4 OSCILLATEUR HARMONIQUE FORCÉ ET RÉSONANCE

### 17.4.1 Évolution

Considérons un oscillateur harmonique dont le point de suspension  $A$  est animé d'un mouvement oscillatoire harmonique de pulsation  $\Omega$  que l'on peut varier à volonté (fig. 17.9 a),

$$z_A = h \cos \Omega t. \quad (17.27)$$

L'évolution est décrite par l'équation de Newton

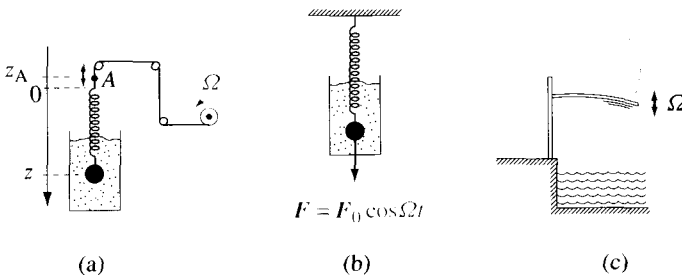
$$m\ddot{z} = mg - k(z - z_A(t) - \ell) - \lambda\dot{z} \quad (17.28)$$

qui, avec (17.27), peut s'écrire

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \quad (17.29)$$

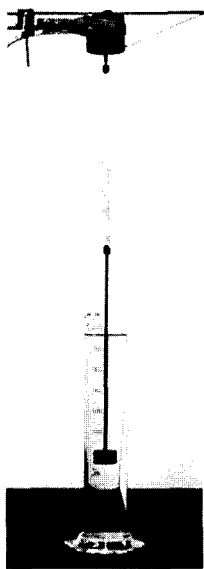
Équation  
du mouvement

avec  $x = z - \ell - \frac{mg}{k}$  et  $F_0 = kh$ .



**Fig. 17.9** Oscillations forcées.

L'équation (17.29) est aussi l'équation du mouvement d'un oscillateur soumis à une force extérieure périodique (fig. 17.9 b). C'est également l'équation du circuit électrique (§ 6.3.5) soumis à une tension périodique. Dans (17.29),



$F_0$  est l'amplitude et  $\Omega$  la pulsation de la force extérieure oscillante ;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti.

Au paragraphe 7.3.4, nous avons vu que pour résoudre (17.29) on utilise la propriété suivante : soit  $x_p(t)$  une solution particulière de (17.29) et  $x_h(t)$  la solution générale de l'équation homogène ( $F_0 = 0$ ) étudiée au paragraphe 17.3.1, alors la fonction

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{17.30}$$

est aussi solution de (17.29).

Comme (17.30) dépend de deux constantes arbitraires, soit  $C_+$  et  $C_-$  dans les équations (17.16) ou (17.17), on obtient ainsi la solution générale. Les constantes seront déterminées par les conditions initiales  $x_0$  et  $\dot{x}_0$ . En présence de frottements la solution homogène  $x_h(t)$  tend exponentiellement vers zéro et, par conséquent,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \xrightarrow[t > \tau = \frac{2m}{\lambda}]{} x_p(t).$$

Régime permanent  
et  
régime transitoire

La solution particulière  $x_p(t)$  décrit le **régime permanent**. Aussi longtemps que  $x_h(t)$  n'est pas négligeable, on parle de **régime transitoire**. Pour  $t$  grand la solution est indépendante des conditions initiales.

17.4.2 Régime permanent

Intuitivement, on peut prévoir que, dans le régime permanent, le système oscille avec la même période que la force extérieure, mais avec un certain déphasage par rapport à cette force. Cherchons alors une solution de la forme

Hypothèse  
heuristique

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \delta) \tag{17.31}$$

où  $\delta$  est le **déphasage** par rapport à la force extérieure (fig. 17.10).

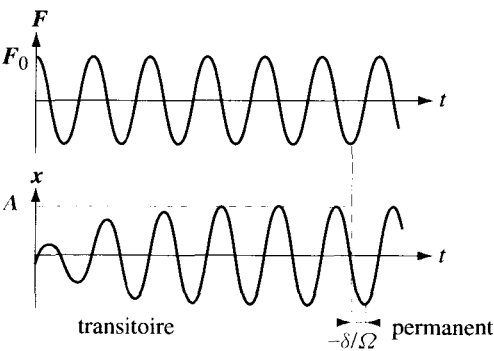


Fig. 17.10 Déphasage avec  $\delta < 0$ .

Les équations (17.29) et (17.31) impliquent :

$$\begin{aligned}
 (-\Omega^2 + \omega_0^2)A \underbrace{\cos(\Omega t + \delta)}_{=\cos \Omega t \cos \delta - \sin \Omega t \sin \delta} - A\Omega \frac{\lambda}{m} \underbrace{\sin(\Omega t + \delta)}_{=\cos \Omega t \sin \delta + \sin \Omega t \cos \delta} &= \\
 = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. & \quad (17.32)
 \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients de  $\cos \Omega t$  et  $\sin \Omega t$ , nous obtenons

$$\begin{cases} (-\Omega^2 + \omega_0^2)A \cos \delta - A\Omega \frac{\lambda}{m} \sin \delta = \frac{F_0}{m} \end{cases} \quad (17.33)$$

$$\begin{cases} (\Omega^2 - \omega_0^2) \sin \delta - \Omega \frac{\lambda}{m} \cos \delta = 0 \end{cases} \quad (17.34)$$

ce qui détermine univoquement l'amplitude  $A$  et le déphasage  $\delta$  :

$$\tan \delta = \frac{\lambda}{m} \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2} \quad A = \frac{F_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 m^2 + \Omega^2 \lambda^2}}. \quad (17.35)$$

On voit que la solution particulière est indépendante des conditions initiales.

En conclusion, la solution de l'équation (17.29) est donnée par

$$x(t) = x_h(t) + A \cos(\Omega t + \delta)$$

où  $A$  et  $\delta$  sont donnés dans (17.35) et  $x_h(t)$  est donné par (17.19), (17.26) ou (17.17).

### 17.4.3 Résonance

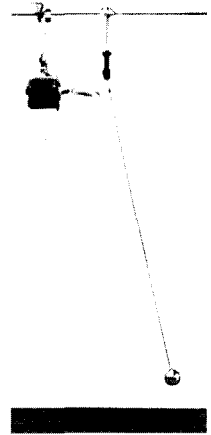
La relation (17.35) montre que

$$A = \frac{1}{\lambda} \frac{F_0}{\omega_0} \quad \text{si} \quad \Omega = \omega_0. \quad (17.36)$$

Par conséquent, lorsque les frottements sont faibles ( $\lambda \cong 0$ ), l'amplitude du mouvement permanent devient très grande si la fréquence de la force extérieure est voisine de la fréquence propre de l'oscillateur (fig. 17.12).

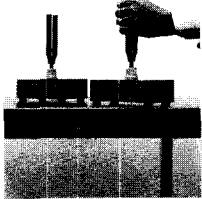
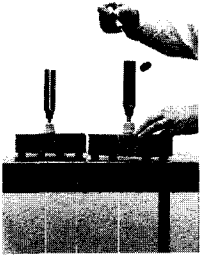
Ce phénomène d'amplification des oscillations lorsque la fréquence d'excitation est voisine de la fréquence propre de l'oscillateur est appelé **résonance**.

Il est mis en évidence par les expériences des figures 17.9 et 17.11.

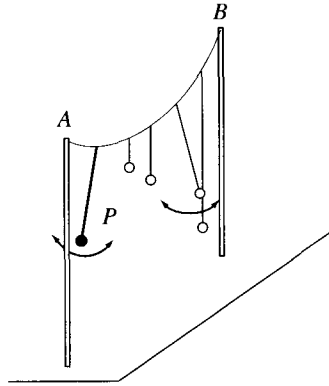


Oscillation forcée  
près de la résonance

Résonance



Le diapason de droite excite celui de gauche



**Fig. 17.11** Expérience de résonance : les pendules étant suspendus à un même fil, on met le pendule  $P$  en mouvement. Sous l'effet du couplage par le fil élastique  $AB$  les autres pendules se mettent en mouvement, mais celui qui a même longueur que  $P$  aura une amplitude de vibration très supérieure aux autres. C'est le principe de base de certains appareils mécaniques de mesure des fréquences.

On exprime souvent l'amplitude (17.35) en fonction du facteur de qualité  $Q = \frac{m}{\lambda} \omega_0$ , soit

$$A(\Omega) = A(0) \frac{Q}{\sqrt{Q^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \text{où} \quad A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}. \quad (17.37)$$

Cette fonction est représentée sur la figure 17.12 pour différentes valeurs de  $Q$ . On vérifie que pour une valeur de  $Q$  donnée, la **pulsation de résonance**  $\Omega_r$  – c'est-à-dire la pulsation pour laquelle l'amplitude est maximale – est donnée par la formule

$$\text{Pulsation de résonance} \quad \Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2mk}} \quad (17.38)$$

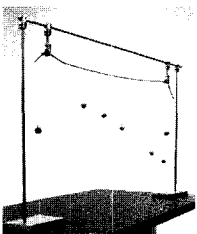
si  $\lambda \leq \sqrt{2mk}$  (amortissement faible) et  $\Omega_r = 0$  si  $\lambda > \sqrt{2mk}$ .

Pour un coefficient de frottement fixé, nous avons ainsi

$$\omega_0 > \omega > \Omega_r \quad (17.39)$$

et les trois pulsations – soit la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur, la pulsation  $\omega$  de l'oscillateur amorti (17.18) et la pulsation  $\Omega_r$  de résonance (17.38) – sont reliées par la formule

$$\omega^2 - \Omega_r^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2. \quad (17.40)$$

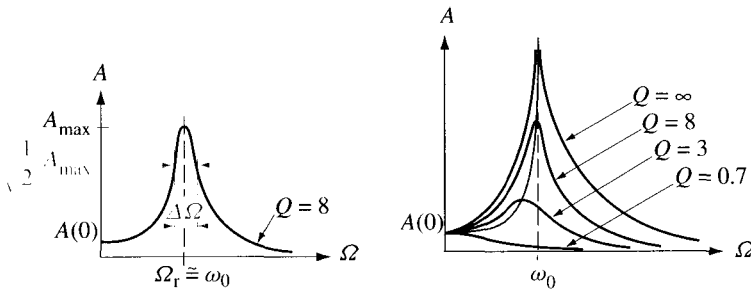


On voit d'autre part que l'amplitude maximale pour un facteur de qualité  $Q$  fixé (fig. 17.12) est donnée par

$$A_{\max} = A(\Omega_r) = A(0) \frac{Q^2}{\sqrt{Q^2 - 1/4}} \underset{Q \gg 1}{\cong} QA(0) : \quad (17.41)$$

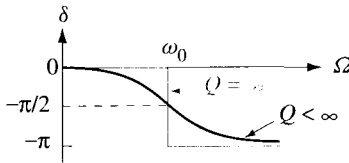
à la résonance, l'amplitude est proportionnelle au facteur de qualité (si  $Q \gg 1$ ).

$$A_{\max} \cong QA(0)$$



**Fig. 17.12** Courbe de résonance pour  $Q = 0, 7, 3, 8, \infty$ , ... : lieu des maxima de  $A$  ( $\Omega_r = \Omega_r(Q)$ ).

Finalement, l'équation (17.35) montre que le déphasage  $\delta$  est toujours négatif (fig. 17.13).



**Fig. 17.13**  $\delta = \delta(Q)$  autour de  $\Omega = \omega_0 \approx \Omega_r$ .

#### 17.4.4 Largeur de résonance

Pour déterminer le facteur de qualité, on mesure souvent la **largeur de résonance** définie par les valeurs de  $\Omega$  telles que  $A(\Omega) = A(\Omega_r)/\sqrt{2}$  (fig. 17.12).

Si  $Q$  est grand, on a  $\Omega_r \cong \omega_0$ ,  $A(\Omega_r) \cong QA(0)$ ; dans ce cas (17.37) et la condition  $A(\Omega) = A(\Omega_r)/\sqrt{2}$  impliquent

$$Q \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right) \cong \pm 1$$

d'où  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 \mp Q^{-1}} \cong \omega_0 \left( 1 \mp \frac{1}{2Q} \right)$  et

$$Q \cong \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}. \quad (17.42)$$

La largeur de résonance est donc inversement proportionnelle au facteur de qualité : si  $Q$  est grand, l'amplification est grande et la résonance est « aiguë ».

### 17.4.5 Énergie et puissance dissipées

Lorsque le régime permanent est atteint, l'énergie mécanique de l'oscillateur reste constante en moyenne : le système absorbe continuellement de l'énergie de l'extérieur, énergie qui est dissipée par les frottements.

L'énergie dissipée pendant une période  $T$  est

$$E^{\text{diss}} = \Delta W^{\text{ext}} = -\Delta W^{\text{fr}} = \int_0^T dt \lambda v^2 = \frac{1}{2} \lambda A^2 \Omega^2 T = \pi \lambda \Omega A^2$$

d'où

$$E^{\text{diss}} = \pi \lambda \Omega \frac{(F_0/m)^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\lambda \Omega/m)^2}. \quad (17.43)$$

De plus, comme  $\langle E^{\text{méc}} \rangle = \langle \frac{1}{2} m v^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle = \frac{1}{4} m A^2 [\Omega^2 + \omega_0^2]$ , on obtient

$$\frac{\langle E^{\text{méc}} \rangle}{E^{\text{diss}}} = \frac{1}{4} \frac{m(\Omega^2 + \omega_0^2)}{\pi \lambda \Omega} \quad (17.44)$$

et pour  $\Omega = \omega_0$

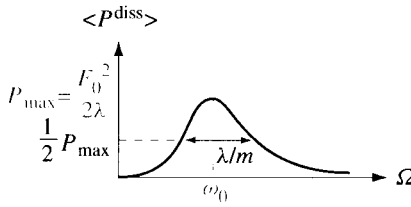
$$\begin{array}{l} \text{Énergie dissipée} \\ \text{pendant une période} \end{array} \quad Q = 2\pi \frac{\langle E^{\text{méc}} \rangle}{E^{\text{diss}}} \bigg|_{\Omega=\omega_0}. \quad (17.45)$$

En conclusion, pour des fréquences d'excitation voisines de la fréquence propre, l'énergie dissipée est inversement proportionnelle au facteur de qualité.

Calculons finalement la puissance dissipée en moyenne. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle P^{\text{diss}} \rangle &= \frac{1}{T} E^{\text{diss}} = \frac{1}{2} \left( \frac{F_0}{m} \right)^2 \frac{\Omega^2 \lambda}{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\lambda \Omega/m)^2} = \\ &= \frac{1}{2} A^2 \lambda \Omega^2. \end{aligned} \quad (17.46)$$

Cette dissipation présente un maximum en  $\Omega = \omega_0$  (fig. 17.14).



**Fig. 17.14** La puissance dissipée présente un maximum pour  $\Omega = \omega_0$ .

En outre pour  $\omega = \omega_0$

$$\langle P^{\text{diss}} \rangle = P_{\text{max}} = \frac{F_0^2}{2\lambda} = \frac{1}{2} \frac{A^2 m \omega_0^3}{Q}. \quad (17.47)$$

### Remarques

- Dans le cas de frottements faibles, le facteur de qualité  $Q$  d'un système oscillant peut être mesuré de plusieurs manières : par mesure du décroissement logarithmique lors de l'enregistrement de la décroissance libre des oscillations (17.24), par mesure de la largeur de résonance en vibration forcée (17.42), par mesure de la puissance dissipée à la résonance (17.47).

### En résumé

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{E^{\text{diss}}}{\langle E^{\text{méc}} \rangle} = \frac{\delta}{\pi} = \frac{\Delta\Omega}{\omega_0} = \frac{2 \langle P^{\text{diss}} \rangle}{A^2 m \omega_0^3}. \quad (17.48)$$

Expressions pour  
 $Q^{-1}$

- Dans le cas de frottements faibles et pour  $\Omega$  voisin de  $\omega_0$ , la solution générale (17.30) est une superposition de deux mouvements oscillants de fréquence voisine. On observera ainsi pendant le régime transitoire ( $t < \tau = 2m/\lambda$ ) un **phénomène de battement** de pulsation  $|\omega - \Omega|$ , phénomène qui sera étudié au paragraphe 17.6.3.

Battement

- Si il n'y a pas de frottement, on vérifie facilement qu'à la résonance, soit  $\Omega = \omega_0$ , la solution de (17.29) est

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t : \quad (17.49)$$

le système absorbe continuellement de l'énergie jusqu'à ce que se produise une catastrophe (fig. 17.15). Au contraire, pour  $\Omega \neq \omega_0$ , les équations (17.31) et (17.35) restent valables avec  $\lambda = 0$ .

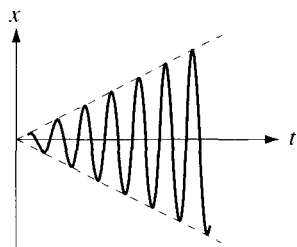


Fig. 17.15 Résonance en l'absence de frottement.

17.4.6 Oscillateur non linéaire

Pour des systèmes oscillants non linéaires tels que le pendule physique, on a l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} - f(x) = F_0 \cos \Omega t. \tag{17.50}$$

Par exemple  $f(x) = -kx - qx^3$ .

Dans le cas libre ( $\lambda = 0$  et  $F_0 = 0$ ) les oscillations du système non linéaire ne sont pas isochrones : la fréquence des oscillations dépend de l'amplitude. (De tels systèmes oscillants ne seraient pas adéquats pour construire des instruments de musique !)

De plus, les oscillations forcées ( $F_0 \neq 0$ ) présentent une courbe de réponse de l'amplitude  $A$  en fonction de la pulsation d'excitation  $\Omega$  qui est très différente de la figure 17.12 (cas linéaire). On obtient des courbes telles que celle de la figure 17.16 : on voit que pour  $\Omega$  compris entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , il y a trois solutions, deux stables en traits pleins et une instable en traitillé.

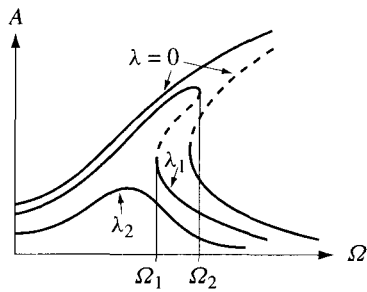
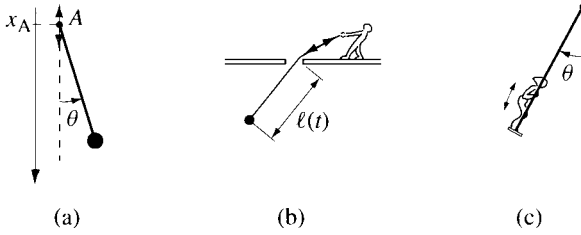


Fig. 17.16 Courbes de réponse pour un frottement faible ( $\lambda_1$ ) et fort ( $\lambda_2$ ).



## 17.5 RÉSONANCE PARAMÉTRIQUE

Il existe un autre phénomène d'amplification très différent, appelé **résonance paramétrique**, qui apparaît dans les systèmes où l'un des paramètres de l'équation (17.11) varie de façon périodique. C'est par exemple le cas d'un pendule dont le point de suspension est animé d'un mouvement vibratoire, ou d'un pendule dont la longueur varie de façon périodique (fig. 17.17).



**Fig. 17.17** Systèmes présentant une résonance paramétrique : (a)  $x_A = h \cos \Omega t$  ; (b)  $\ell = \ell_0 (1 + \varepsilon \cos \Omega t)$  ; (c) balançoire.

Dans l'exemple de la figure 17.17 (a), le mouvement est décrit par l'équation

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \left( 1 - \frac{h}{g} \Omega^2 \cos \Omega t \right) \sin \theta - \lambda \dot{\theta}$$

soit

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \varepsilon \cos \Omega t) \sin \theta = 0. \quad (17.51)$$

Équation  
du mouvement

L'équation (17.51) est typique des problèmes où apparaît la résonance paramétrique ;  $\varepsilon$  caractérise l'amplitude et  $\Omega$  la pulsation de la variation périodique du paramètre considéré.

Si l'on se limite aux petites oscillations autour de la position d'équilibre stable  $\bar{\theta} = 0$ , on a l'équation linéarisée

$$\ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 (1 - \varepsilon \cos \Omega t) \theta = 0. \quad (17.52)$$

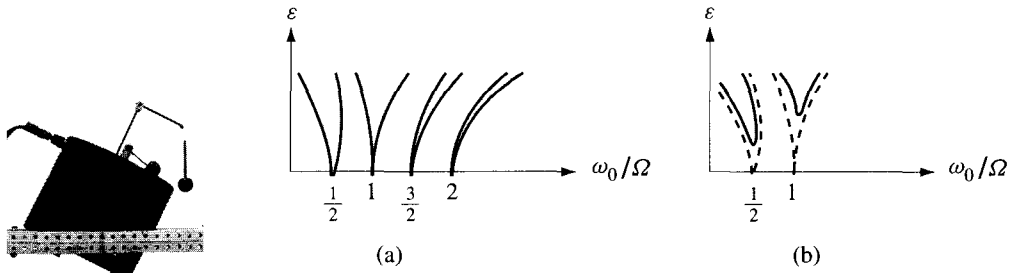
L'étude de (17.52) n'est pas simple. Par une approche numérique, on montre [35] qu'il y a **résonance paramétrique**, c'est-à-dire amplification de l'amplitude du mouvement, lorsque la période  $T = 2\pi/\Omega$  d'oscillation du paramètre est voisine d'un multiple de la demi-période propre, soit

Résonance  
paramétrique

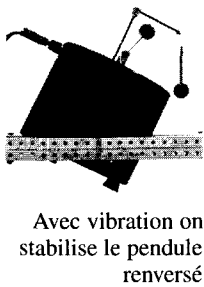
$$T = n \frac{1}{2} T_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (17.53)$$

Ce phénomène est bien connu dans le cas de la balançoire ; il diffère de celui du plongeur où la période de résonance est égale à la période propre.

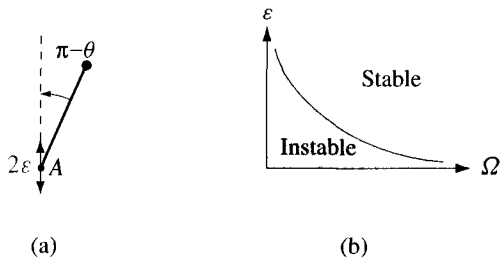
Cette résonance est surtout importante pour les valeurs  $T = \frac{1}{2}T_0$  et  $T = T_0$ . D'autre part, en présence de frottement, l'amplitude  $\varepsilon$  doit être supérieure à une valeur minimale pour qu'il y ait résonance (fig. 17.18).



**Fig. 17.18** Les zones hachurées sont les zones de résonance de l'équation (17.51) pour  $\Omega$  fixé : (a) sans frottement ; (b) avec frottement.



Remarquons également que, pour des pulsations  $\Omega$  suffisamment grandes, la position d'équilibre instable  $\theta = \pi$  (pendule renversé) devient stable [35] (fig. 17.19).



**Fig. 17.19** Domaine de stabilité du pendule renversé au voisinage de  $\theta = \pi$ .

L'analyse numérique de l'équation non linéarisée (17.51) a été effectuée par J.P. Eckmann [44] avec les valeurs numériques  $\Omega = 2\omega_0 = 2$ ,  $\lambda = 0, 1$  et différentes valeurs de  $\varepsilon$  (fig. 17.20). On voit que pour  $\varepsilon = 0,25$  le régime permanent est oscillant de période  $T = 2\pi/\Omega$ . Lorsque  $\varepsilon$  est suffisamment grand, le pendule effectue des rotations complètes et la période devient  $T/2$  ; puis, au fur et à mesure que l'on augmente  $\varepsilon$ , il apparaît des doublements successifs de la période du mouvement permanent pour des valeurs  $\varepsilon_n$ , jusqu'à une valeur maximale de  $\varepsilon$  où le mouvement devient chaotique.

Les travaux de ces dernières années ont montré que ce phénomène de doublement de la période jusqu'à l'apparition du chaos présente un caractère d'universalité.

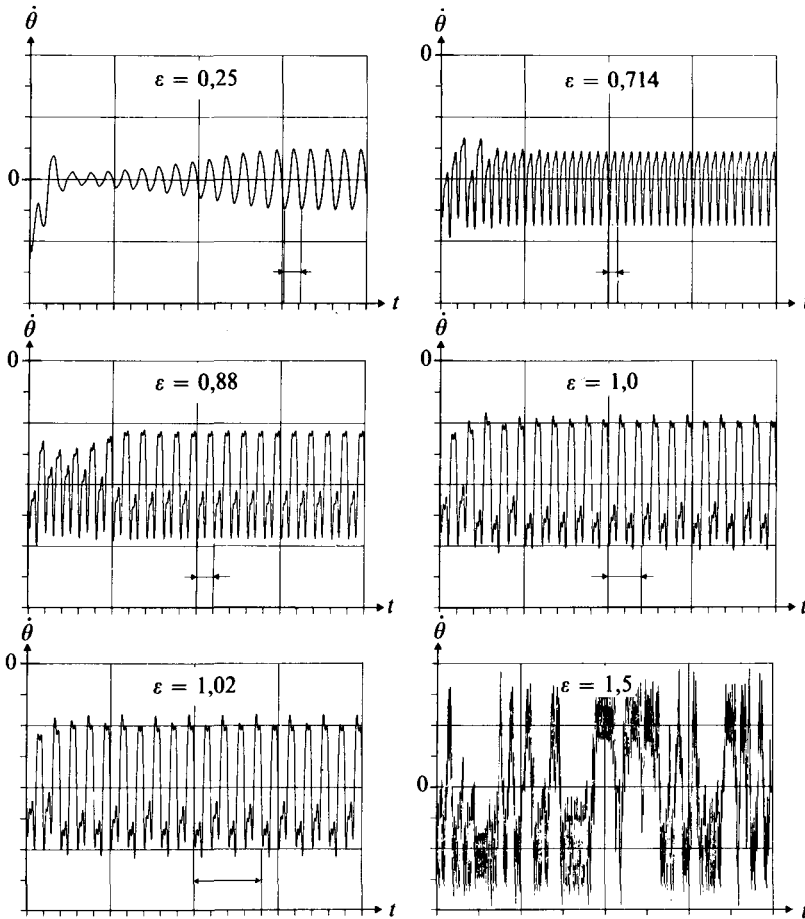


Fig. 17.20 Du mouvement oscillatoire au chaos.

## 17.6 OSCILLATEURS HARMONIQUES COUPLÉS : SYSTÈMES À DEUX DEGRÉS DE LIBERTÉ

### 17.6.1 Oscillateurs libres

Considérons les systèmes à deux degrés de liberté représentés sur la figure 17.21. A titre d'illustration, nous allons étudier l'exemple (a) ; les autres cas s'analysent de façon similaire.

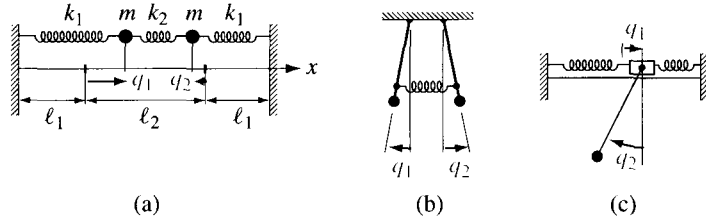


Fig. 17.21 Systèmes couplés à deux degrés de liberté.

Les petits mouvements au voisinage de la position d'équilibre  $x_1 = \ell_1$ ,  $x_2 = \ell_1 + \ell_2$  sont décrits par

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - \ell_1) + k_2(x_2 - x_1 - \ell_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1 - \ell_2) + k_1(\ell_2 + \ell_1 - x_2). \end{cases} \quad (17.54)$$

Introduisons les écarts  $q_1, q_2$  par rapport à la position d'équilibre :

$$q_1 = x_1 - \ell_1, \quad q_2 = x_2 - \ell_1 - \ell_2.$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 = 0. \end{cases} \quad (17.55)$$

Guidés par la solution de l'oscillateur à une dimension, nous cherchons une solution de la forme

$$q_1 = C_1 \cos(\omega t + \varphi), \quad q_2 = C_2 \cos(\omega t + \varphi). \quad (17.56)$$

On voit alors que (17.56) est une solution de (17.55) si et seulement si les coefficients  $C_1, C_2$  satisfont le système d'équations homogènes

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_1 - k_2C_2 = 0 \\ -k_2C_1 + (-m\omega^2 + k_1 + k_2)C_2 = 0. \end{cases} \quad (17.57)$$

Pour que ce système ait une solution, il faut que le déterminant des coefficients s'annule, ce qui conduit à l'équation caractéristique pour  $\omega$

$$\begin{array}{l} \text{Équation} \\ \text{caractéristique} \end{array} \quad (-m\omega^2 + k_1 + k_2)^2 - k_2^2 = 0. \quad (17.58)$$

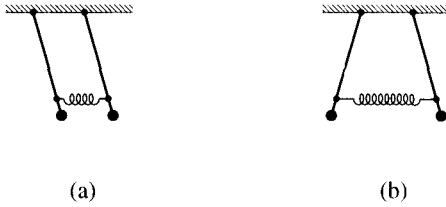
Cette équation possède deux solutions

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad \text{et} \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}. \quad (17.59)$$

La solution de (17.57) associée à  $\omega_+$  est  $C_1 = C_2 = C_+$ , ce qui donne l'évolution

$$q_1(t) = q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+). \quad (17.60)$$

Les deux masses se déplacent en phase avec une fréquence qui correspond à celle du ressort  $k_1$ , le ressort  $k_2$  est inactif : c'est le **mode acoustique** (fig. 17.22).

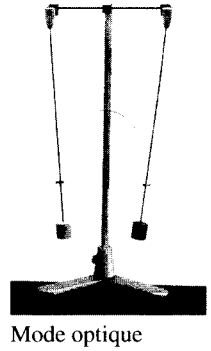
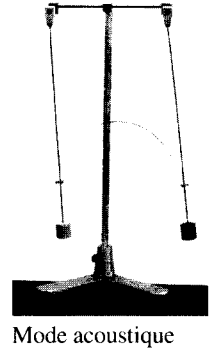


**Fig. 17.22** (a) Mode acoustique ; (b) mode optique.

La solution de (17.57) associée à  $\omega_-$  est  $C_1 = -C_2 = C_-$ , ce qui donne l'évolution

$$q_1(t) = -q_2(t) = C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-). \quad (17.61)$$

Les deux masses se déplacent en opposition de phase, avec une fréquence supérieure à celle du ressort  $k_1$  : c'est le **mode optique** (fig. 17.22).



### 17.6.2 Solution générale

La solution générale de (17.55) est une combinaison linéaire des deux solutions particulières, soit

$$\begin{cases} q_1(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ q_2(t) = C_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - C_- \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases} \quad (17.62)$$

où les quatre constantes  $\{C_\pm, \varphi_\pm\}$  sont déterminées par les conditions initiales  $(x_i^0, v_i^0) \quad i = 1, 2$ .

La résolution de (17.55) a montré qu'il existe deux solutions particulières pour lesquelles l'évolution des coordonnées  $q_1, q_2$  est oscillatoire harmonique de même fréquence. Ces solutions particulières sont appelées **modes normaux** ou **modes propres** ; les fréquences  $\nu_+$  et  $\nu_-$  sont les **fréquences propres** du système. Les coordonnées généralisées  $Q_1 = q_1 + q_2$  et  $Q_2 = q_1 - q_2$ , dont l'évolution – définie par (17.62) – est oscillatoire harmonique quelles que soient les conditions initiales, sont appelées **coordonnées normales**.

Modes normaux  
Fréquences propres  
Coordonnées normales

### 17.6.3 Battements

Considérons l'évolution (17.62) de conditions initiales

$$q_1^0 = A, \quad \dot{q}_1^0 = 0, \quad q_2^0 = 0, \quad \dot{q}_2^0 = 0 \quad (17.63)$$

(le système est au repos ; la particule 2 est à la position d'équilibre, la particule 1 est déplacée par rapport à l'équilibre). Pour ces conditions initiales, on trouve, de (17.62), l'évolution

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} A \cos \omega_+ t + \frac{1}{2} A \cos \omega_- t = \\ \quad = A \cos \left( \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \right) \\ q_2 = \frac{1}{2} A \cos \omega_+ t - \frac{1}{2} A \cos \omega_- t = \\ \quad = A \sin \left( \frac{\omega_- + \omega_+}{2} t \right) \cdot \sin \left( \frac{\omega_- - \omega_+}{2} t \right). \end{cases} \quad (17.64)$$

Regardons plus en détail le cas où  $k_2 \ll k_1$ , soit  $|\omega_- - \omega_+| \ll 1$ . En introduisant

$$\omega = \frac{1}{2} (\omega_- + \omega_+) \quad \text{et} \quad \Delta\omega = \frac{1}{2} (\omega_- - \omega_+),$$

nous obtenons

$$\omega_- - \omega_+ = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}} - \sqrt{\frac{k_1}{m}} \cong \sqrt{\frac{k_1}{m}} \left( 1 + \frac{k_2}{k_1} - 1 \right)$$

soit

$$\omega_- - \omega_+ = 2\Delta\omega \cong \omega \frac{k_2}{k_1} \ll 1, \quad (17.65)$$

et l'évolution

$$\begin{cases} q_1(t) = A \cos(\Delta\omega t) \cos \omega t \\ q_2(t) = A \sin(\Delta\omega t) \sin \omega t. \end{cases} \quad (17.66)$$

On a ainsi des *mouvements oscillatoires de pulsation  $\omega$  dont l'amplitude est modulée par une fonction qui oscille lentement avec la pulsation  $\Delta\omega$* .

Battements

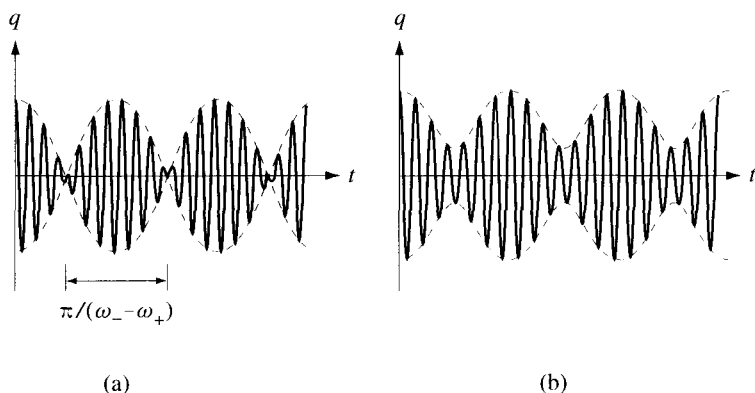
Cette modulation de l'amplitude est appelée **phénomène de battement** ; elle apparaît chaque fois que l'on a superposition de deux mouvements harmoniques de fréquences très voisines. (Phénomène bien connu dans l'accordage des instruments de musique.)

On remarque d'autre part qu'il y a *transfert intégral d'énergie du système 1 au système 2* : après un temps  $T = (\pi)/(\omega_- - \omega_+)$ , seul le système 2 oscille ; après un temps  $2T$ , seul le système 1 oscille et ainsi de suite (fig. 17.23 a).

Dans le cas d'une superposition de deux mouvements harmoniques de fréquences très voisines mais d'amplitudes différentes, on a

$$q(t) = A \cos \omega_+ t + B \cos \omega_- t, \quad (A \neq B). \quad (17.67)$$

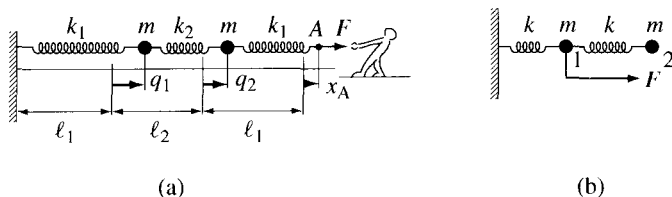
De nouveau, il apparaît un phénomène de battement, mais il n'y a plus transfert intégral d'énergie du système 1 au système 2 (fig. 17.23 b). Ce sera par exemple le cas lorsque les deux pendules couplés (fig. 17.21) n'ont pas la même longueur.



**Fig. 17.23** Oscillateurs couplés  $q(t) = A \cos \omega_+ t + B \cos \omega_- t$  : (a)  $A = B$  ; (b)  $A \neq B$ , l'enveloppe de  $q(t)$  est  $\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\omega_+ - \omega_-)t}$ .

#### 17.6.4 Oscillateurs couplés forcés

Reprenons l'exemple du paragraphe 17.6.1 en imposant au point A un mouvement harmonique de pulsation  $\Omega$  (fig. 17.24 a).



**Fig. 17.24** Oscillateurs couplés forcés : (a)  $x_A(t) = 2\ell_1 + \ell_2 + h \cos \Omega t$  ; (b)  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ .

L'évolution est décrite par le système d'équations

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + (k_1 + k_2)q_1 - k_2q_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 - k_2q_1 + (k_1 + k_2)q_2 = F_0 \cos \Omega t \quad (\text{où } F_0 = k_1 h). \end{cases} \quad (17.68)$$

La solution s'obtient à nouveau en ajoutant à la solution générale (17.62) de l'équation homogène ( $F_0 = 0$ ) une solution particulière de l'équation inhomogène.

Comme il n'y a pas de terme en  $\dot{q}_1$  et  $\dot{q}_2$ , nous cherchons à nouveau une solution particulière de même fréquence que la fréquence d'excitation, soit

$$q_1 = A_1 \cos \Omega t, \quad q_2 = A_2 \cos \Omega t. \quad (17.69)$$

Nous obtenons alors les équations

$$\begin{cases} (-m\Omega^2 + k_1 + k_2)A_1 - k_2A_2 = 0 \\ -k_2A_1 + (-m\Omega^2 + k_1 + k_2)A_2 = F_0 \end{cases} \quad (17.70)$$

d'où

$$\begin{cases} A_1 = F_0 \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - m\Omega^2)^2 - k_2^2} \\ A_2 = F_0 \frac{k_1 + k_2 - m\Omega^2}{(k_1 + k_2 - m\Omega^2)^2 - k_2^2}. \end{cases} \quad (17.71)$$

Remarquons que les valeurs de  $\Omega$  associées aux zéros du dénominateur sont les solutions de (17.58), c'est-à-dire les pulsations propres du système libre.

**Résonance** Il y a **résonance** ( $A_1$  et  $A_2$  deviennent infinis) lorsque la fréquence d'excitation est égale à l'une des fréquences propres du système.

Un autre exemple intéressant est représenté sur la figure 17.24 (b). Dans ce cas, les pulsations propres sont

$$\omega_-^2 = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) \omega_0^2 \quad \omega_+^2 = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) \omega_0^2 \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (17.72)$$

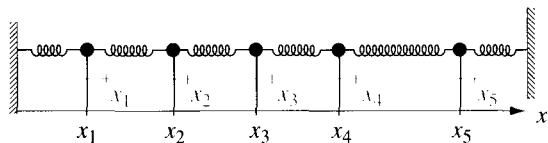
En outre on peut montrer que l'amplitude  $A_1$  du système 1 est nulle pour  $\Omega = \omega_0$ ; ainsi en ajoutant un oscillateur identique à l'oscillateur 1, on élimine la résonance en  $\Omega = \omega_0$  (problème 17.8.11).

## 17.7 PETITS MOUVEMENTS AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE : SYSTÈMES À $N$ DEGRÉS DE LIBERTÉS

Lorsqu'on étudie les petits mouvements autour d'une position d'équilibre d'un système à  $N$  degrés de liberté, le problème se ramène toujours à la résolution d'un système d'équations semblable à (17.55). En effet, en l'absence de frottement, l'évolution d'un système à  $N$  degrés de liberté peut se décrire au moyen d'un système d'équations.

$$m_j \ddot{x}_j = F_j(x_1, \dots, x_N), \quad j = 1, \dots, N. \quad (17.73)$$





**Fig. 17.25** Chaîne linéaire à 5 degrés de liberté ;  $\{x_j\}$  = positions d'équilibre.

Soit  $\bar{x} = \{\bar{x}_j\}$  une position d'équilibre. Par définition d'une position d'équilibre

$$F_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) = 0 \quad (17.74) \quad \text{Équilibre}$$

et au voisinage de cette position d'équilibre, nous pouvons développer les fonctions  $F_j$  au premier ordre en  $q_j = x_j - \bar{x}_j$  ; on obtient l'équation linéarisée

$$m_j \ddot{q}_j = - \sum_{k=1}^N K_{jk} q_k \quad (17.75) \quad \text{Équations linéarisées}$$

où  $K_{jk} = - \left( \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right) (\bar{x}) \quad j = 1, \dots, N.$

Ces équations sont la généralisation de l'équation (17.2) dans l'étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre d'un système à  $N$  degrés de liberté (par exemple celui de la figure 17.25).

Pour résoudre (17.75) on cherche une solution de la forme

$$q_j = C_j e^{i\omega t} \quad (17.76) \quad \text{Résolution}$$

ce qui conduit au système de  $N$  équations linéaires homogènes pour les  $N$  inconnues  $C_1, \dots, C_N$

$$\sum_{k=1}^N \left[ -m_k \omega^2 \delta_{jk} + K_{jk} \right] C_k = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (17.77)$$

Pour que (17.77) ait une solution, il faut que le déterminant des coefficients soit nul, ce qui donne l'**équation caractéristique**

$$\det \left[ K_{jk} - \omega^2 m_k \delta_{jk} \right] = 0 \quad (17.78) \quad \text{Équation caractéristique}$$

Les  $N$  solutions  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , de (17.78) définissent les **pulsations propres** du système.

Pour la valeur propre  $\omega_\alpha$ , on peut résoudre (17.77), soit  $(C_1^{(\alpha)}, \dots, C_N^{(\alpha)})$ , ce qui donne les solutions

$$q_j^{(\alpha)}(t) = C_j^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad \text{ou} \quad q_j^{(\alpha)}(t) = \left| C_j^{(\alpha)} \right| \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \quad (17.79)$$

Modes normaux

Il existe ainsi  $N$  solutions pour lesquelles les  $q_j(t)$  ont un mouvement oscillatoire harmonique de même fréquence  $\nu_\alpha$  : ce sont les **modes normaux** de vibration du système (fig. 17.26).

Solution générale

Comme précédemment, la solution générale est une combinaison linéaire de ces  $N$  solutions particulières, soit

$$q_j(t) = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \left| C_j^{(\alpha)} \right| \cos(\omega_{\alpha} t + \varphi_{\alpha}) \tag{17.80}$$

où les constantes  $\{\lambda_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$  sont déterminées par les conditions initiales.

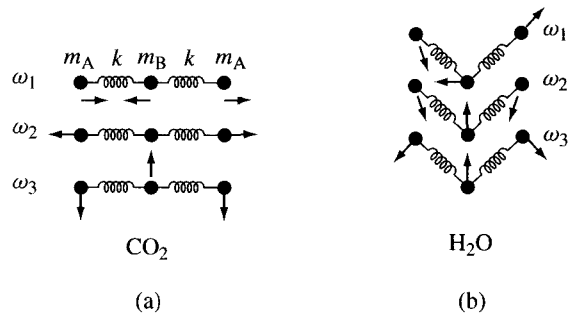
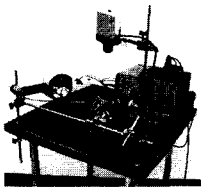


Fig. 17.26 Modes normaux des molécules triatomiques du type  $ABA$ .



En excitant le système avec une fréquence extérieure voisine de l’une des fréquences propres, il y aura à nouveau **résonance**. C’est ce phénomène de résonance qui permet par exemple de briser un verre au moyen d’une onde acoustique de fréquence appropriée. Quelques modes de résonance d’une plaque sont observés sur la figure 17.27.

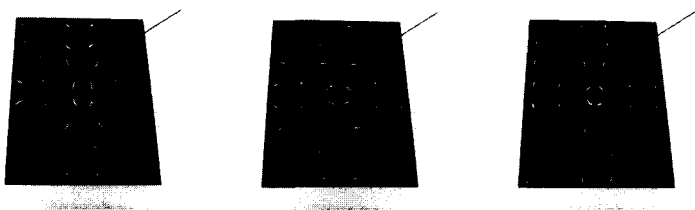


Fig. 17.27 Modes de résonance d’une plaque vibrante.

17.8 PROBLÈMES

Accéléromètre

**17.8.1** Un accéléromètre est constitué d’une masse  $M$  et de deux ressorts identiques dans un fluide (fig. 17.28). Lorsque l’accéléromètre immobile est horizontal, l’aiguille indique  $\delta = 0$ , lorsqu’il est incliné d’un angle  $\theta = 10^\circ$ ,

l'aiguille indique  $\delta = -10$ . L'accéléromètre est placé dans un sous-marin. Calculer l'accélération du sous-marin lorsque l'accéléromètre indique  $\delta = -4$  et que :

1. le sous-marin est horizontal  $\theta = 0$  ;
2. le sous-marin descend avec une inclinaison  $\theta = 5^\circ$  ;
3. le sous-marin monte avec une inclinaison  $\theta = -5^\circ$ .

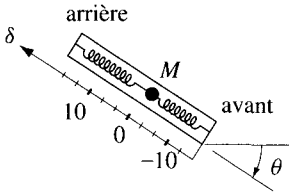


Fig. 17.28

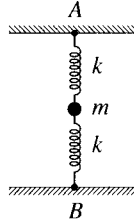


Fig. 17.29

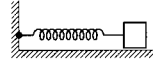


Fig. 17.30

**17.8.2** Un corps de masse  $m$  est fixé à deux ressorts identiques dont les autres extrémités sont fixées en  $A$  et  $B$  (fig. 17.29). A l'instant  $t = 0$ , le corps se trouve au milieu de  $AB$  avec une vitesse nulle. Calculer l'amplitude et la période du mouvement en l'absence de frottement.

Deux ressorts

**17.8.3** Un élastique suspendu en un point  $A$  s'allonge de  $\delta$  lorsque l'on suspend un corps de masse  $m$  à l'autre extrémité. On tire alors sur la masse jusqu'à ce que l'élongation soit  $3\delta$  et on relâche la masse. Montrer que la période du mouvement est  $2\sqrt{\delta/g}(\sqrt{3} + \pi/3)$ .

Élastique

**17.8.4** Une particule  $P$  est soumise de la part de  $n$  points fixés  $A_1, \dots, A_n$ , à  $n$  forces attirantes, proportionnelles aux distances respectives  $|PA_i|$  (fig. 4.48). Trouver les fréquences propres et l'allure des trajectoires.

 $n$  ressorts

**17.8.5** Trouver l'évolution temporelle  $x(t)$  d'un corps de masse  $m$  fixé à un ressort de constante  $k$  et soumis à une force de frottement sec ( $F^{\text{fr}} = -\mu_c mg$  si  $v \neq 0$ ), pour les conditions initiales  $x_0 \neq 0, \dot{x}_0 = 0$  (fig. 17.30).

Frottement sec

**17.8.6** Un oscillateur harmonique sans frottement est soumis à la force extérieure  $F^{\text{ext}}(t) = F_0 e^{-qt}$ . Montrer que l'évolution de conditions initiales  $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$  est donnée par

Oscillateur harmonique forcé

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 + q^2} \left( e^{-qt} + \frac{\sin(\omega_0 t - \alpha)}{\sin \alpha} \right)$$

$$\alpha = \arctan(\omega_0/q).$$

**17.8.7** Lorsque l'on suspend un moteur de 60 kg à un ressort, celui-ci s'allonge de 3 cm. Calculer la vitesse de rotation du moteur en tours par minute pour laquelle il y aura résonance si le moteur n'est pas équilibré statiquement.

Résonance

**Diapason 17.8.8** On observe qu'un diapason de fréquence  $\nu = 400 \text{ s}^{-1}$  s'amortit dans l'air de 10% en 12 s. Quelle serait la fréquence du diapason dans le vide ? Calculer la fréquence d'une excitation extérieure nécessaire pour que le diapason entre en résonance.

**Deux pendules 17.8.9** Deux barres de masses  $m_1, m_2$  peuvent osciller librement autour des points  $O_1$  et  $O_2$  (fig. 17.31). Elles sont de plus reliées par un ressort de constante  $k$ , et de longueur de repos  $\ell_0 = |O_1 O_2|$ . Calculer les pulsations propres des petits mouvements et étudier leur comportement en fonction de  $k$ , en particulier pour  $k \rightarrow 0$  et  $k \rightarrow \infty$ .

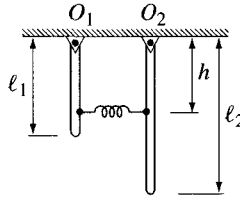


Fig. 17.31

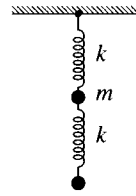


Fig. 17.32

**Deux ressorts 17.8.10** Deux corps identiques sont suspendus à deux ressorts identiques (fig. 17.32). Montrer que les pulsations propres sont données par  $\omega_1 = \omega_0/s$  et  $\omega_2 = s\omega_0$  où  $\omega_0^2 = k/m$  et  $s = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  est la section d'or.

**17.8.11** Établir le résultat (17.72).

**Molécule triatomique 17.8.12** Montrer que les pulsations propres de la molécule linéaire  $ABA$  (fig. 17.29 a) sont  $\omega_1 = \sqrt{\frac{kM}{m_A m_B}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{k/m_A}$ , où  $M = 2m_a + m_B$ .

## PROBLÈME À DEUX CORPS. MOUVEMENT CENTRAL ET DIFFUSION

Au chapitre 6, l'étude des lois de Kepler a montré que le mouvement des planètes est central. Cela signifie que l'accélération (ou la force, § 13.5.3) est parallèle à un vecteur  $\mathbf{OP}$  où  $O$  est un point fixe. En réalité, ni le Soleil pour la Terre, ni la Terre pour la Lune, ni un ion lourd pour un proton (sect. 6.8) ne sont de vrais points fixes. D'où l'objet du problème à deux corps : comment traiter en toute généralité le problème du mouvement de deux points matériels (par exemple la Terre et la Lune) en interaction réciproque.

### 18.1 PROBLÈME À DEUX CORPS

#### 18.1.1 Équations du mouvement et masse réduite

Considérons un système isolé formé de deux points matériels de masse  $m_1$  et  $m_2$  qui interagissent au moyen d'une force centrale conservative (fig. 18.1)

$$\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}^{2 \rightarrow 1} = F(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} = F(r)\mathbf{e}_r \quad (18.1)$$

où  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$  et  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}$ .

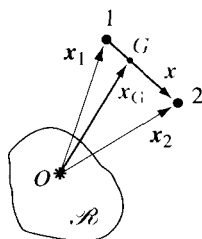


Fig. 18.1 Système formé de deux points matériels 1 et 2.

Des équations du mouvement

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad (18.2)$$

on obtient

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = 0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}. \end{cases} \quad (18.3)$$

Introduisons alors

$$\bullet \text{ la } \textbf{masse totale} \quad M = m_1 + m_2 \quad (18.4)$$

Masse réduite

$$\bullet \text{ la } \textbf{masse réduite} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$\bullet$  les **variables du centre de masse et relatives**, définies par

$$\mathbf{x}_G = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \quad (18.5)$$

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{x}}_G, \quad \mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{x}}_G, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}.$$

Variables Les coordonnées  $\mathbf{x}_G$  et  $\mathbf{x}$  déterminent univoquement la position des particules 1 et 2 par les relations

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_G - \frac{m_2}{M} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_G + \frac{m_1}{M} \mathbf{x}. \quad (18.6)$$

Par ailleurs, en utilisant les équations (18.3) à (18.5), on obtient les équations du mouvement des variables  $\mathbf{x}_G$  et  $\mathbf{x}$ , soit

$$\text{Équations du mouvement} \quad \begin{cases} M \ddot{\mathbf{x}}_G = 0 \end{cases} \quad (18.7)$$

$$\begin{cases} \mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = F(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}. \quad (18.8)$$

En conclusion, l'étude du mouvement de deux particules en interaction, mais isolées par rapport à l'extérieur, se décompose en deux problèmes plus simples :

- $\bullet$  le mouvement rectiligne uniforme du centre de gravité (18.7);
- $\bullet$  l'étude du mouvement d'une particule de masse  $\mu$  soumise à une force centrale dans le référentiel en translation lié à la particule 1 (18.8).

### Remarques

- Les contributions qui s'ajoutent à  $\mathbf{x}_G$  dans (18.6) sont les coordonnées des particules relativement au référentiel du centre de masse (§ 11.5.2).
- Dans le cas d'une molécule diatomique A-A, on a  $m_1 = m_2 = m$ , d'où  $M = 2m$  et  $\mu = \frac{1}{2}m$ .
- Si  $m_2 \gg m_1$ , on a  $\mu \cong m_1$ . Cette remarque, associée à (18.8), explique le fait que dans l'étude du mouvement des planètes autour du Soleil il est possible de considérer que le Soleil est immobile. Il faut cependant relever que l'équation du problème de Kepler est  $\mu \ddot{\mathbf{x}} = -Gm_1m_2 |\mathbf{x}|^{-3} \mathbf{x}$  et que, par conséquent, *ce n'est que dans le cadre de l'approximation  $\mu \cong m_1$  que la troisième loi de Kepler est valable* : la formule (6.70) reliant le demi-grand axe  $a$  à la période  $T$  du mouvement entraîne en effet  $(T/2\pi)^2 = a^3/G(m_1 + m_2)$ , car  $\kappa = Gm_1m_2/\mu = G(m_1 + m_2)$ .
- Si les deux particules subissent une force extérieure de gravitation de la forme  $m_1\mathbf{g}$  et  $m_2\mathbf{g}$ , alors seule l'équation (18.7) est modifiée et devient

Troisième loi de Kepler : une approximation

$$M\ddot{\mathbf{x}}_G = M\mathbf{g}. \quad (18.9)$$

### 18.1.2 Constantes du mouvement

Exprimons tout d'abord les grandeurs fondamentales, quantité de mouvement, énergie cinétique, énergie mécanique et moment cinétique en fonction des variables du centre de masse ( $G$ ) et des variables relatives ( $rel$ ) pour un système isolé.

Changement de variables

- Quantité de mouvement :

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G. \quad (18.10)$$

- Énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\mathbf{v}_G - \frac{m_2}{M}\mathbf{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\mathbf{v}_G + \frac{m_1}{M}\mathbf{v}\right)^2$$

soit

$$T = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 = T_G + T_{rel}. \quad (18.11)$$

- Énergie (mécanique) :

$$E = T + U(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) = T_G + (T_{rel} + U(r)) = E_G + E_{rel} \quad (18.12)$$

où  $U$  est le potentiel associé à  $F$  par  $F(r) = -\frac{dU}{dr}$ .

- Moment cinétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \mathbf{x}_1 \wedge m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{x}_2 \wedge m_2\mathbf{v}_2 = \\ &= \left(\mathbf{x}_G - \frac{m_2}{M}\mathbf{x}\right) \wedge m_1\left(\mathbf{v}_G - \frac{m_2}{M}\mathbf{v}\right) + \left(\mathbf{x}_G + \frac{m_1}{M}\mathbf{x}\right) \wedge m_2\left(\mathbf{v}_G + \frac{m_1}{M}\mathbf{v}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{x}_G \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{x} \wedge \mu\mathbf{v} = \mathbf{L}_{O,G} + \mathbf{L}_{rel}. \quad (18.13)$$

Constantes du mouvement pour le centre de masse De (18.7) on tire  $\mathbf{v}_G = \text{cste}$ , d'où

$$\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G = \text{cste}, \quad (18.14)$$

$$E_G = \frac{1}{2}M\mathbf{v}_G^2 = \text{cste}, \quad (18.15)$$

$$\mathbf{L}_{O,G} = \mathbf{x}_G \wedge M\mathbf{v}_G = \text{cste}. \quad (18.16)$$

Par ailleurs, comme  $E$  est une constante du mouvement, de (18.12) et (18.15), on déduit que pour les variables relatives

Constantes du mouvement relatives 
$$E_{\text{rel}} = \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 + U(r) = \text{cste}. \quad (18.17)$$

En outre comme le système est isolé, on a  $\mathbf{L}_O = \text{cste}$  et de (18.13) et (18.16), on déduit que

$$\mathbf{L}_{\text{rel}} = \mathbf{x} \wedge \mu\mathbf{v} = \text{cste}. \quad (18.18)$$

## 18.2 MOUVEMENT CENTRAL

### 18.2.1 Constantes du mouvement

Nous venons de voir que par rapport au référentiel en translation avec la particule 1, le mouvement de la particule 2 est équivalent au mouvement d'une particule de masse  $\mu$  soumise à la force centrale  $\mathbf{F}(r) = F(r)\mathbf{e}_r = -(\frac{d}{dr}U)\mathbf{e}_r$ . Nous avons démontré au chapitre 6 qu'un tel mouvement est plan. Cela signifie que dans le référentiel en translation avec la particule 1, le mouvement de la particule 2 est plan et il existe deux constantes du mouvement

$$\mu r^2 \dot{\theta} = L_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + U(r) = E_{\text{rel}} \quad (18.19)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = E_{\text{rel}} \quad (18.20)$$

avec

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{L_1^2}{2\mu r^2}. \quad (18.21)$$

Dans le référentiel relatif (en translation avec la particule 1) les conditions initiales  $\mathbf{x}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  déterminent le plan du mouvement et les constantes  $L_1$  et  $E_{\text{rel}}$ . La résolution du problème se ramène alors à l'intégration des équations (13.65), (13.66) et (13.68).

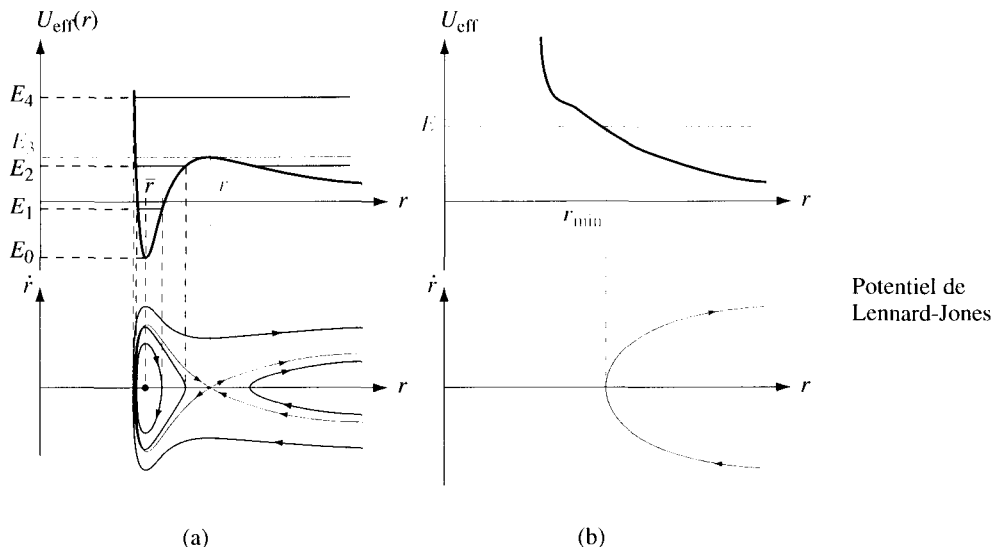
### 18.2.2 Analyse qualitative du mouvement relatif

Comme nous l'avons dit à plusieurs reprises, avant d'effectuer les intégrations (13.65) à (13.68), il est important de connaître l'allure qualitative du mouvement.



- Si  $L_1 = 0$ , on a  $\dot{\theta} = 0$  et  $\theta(t) = \theta_0$  : le mouvement est rectiligne.
- Si  $L_1 \neq 0$ , le signe de  $\dot{\theta}$  est constant et la particule 2 tourne toujours dans le même sens autour de la particule 1.

De  $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r) \geq 0$  on trouve facilement l'allure qualitative des orbites dans l'espace  $(r, \dot{r})$  (fig. 18.2).



**Fig. 18.2** Analyse qualitative des orbites dans le cas d'un potentiel de Lennard-Jones (§ 12.2.5)  $U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6}$  : (a)  $L_1$  petit ; (b)  $L_1$  grand.

Analysons par exemple le cas de la figure 18.2 (a) ( $L_1$  fixé ;  $E_0 = \min U_{\text{eff}}(r)$ ) :

- $E_{\text{rel}} = E_0$  : le mouvement est circulaire uniforme, de rayon  $\bar{r}$  et vitesse angulaire  $\bar{\omega} = L_1/\mu\bar{r}^2$ . On voit que  $\bar{r}$  est un point d'équilibre stable pour la variable  $r$ .
- $E_0 < E_{\text{rel}} \leq 0$  : c'est un état lié. La variable  $r$  oscille entre  $r_1$  et  $r_2$ , solutions de  $U_{\text{eff}}(r) = E$ , avec une période

$$T_{\text{rel}} = \sqrt{2\mu} \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{1}{\sqrt{E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r)}}. \quad (18.22)$$

- $0 < E_{\text{rel}} < E_3$  : il existe un état lié et un état de diffusion.
- $E_{\text{rel}} = E_3$  : il existe quatre mouvements possibles :  
 (a) un mouvement circulaire uniforme de rayon  $\bar{r}$ , instable ;  
 (b) un état lié, non périodique ;  $r(t)$  tend vers  $\bar{r}$  lorsque  $t$  devient infini ;  
 (c) deux mouvements semi-infinis ; soit  $r(t) \rightarrow \infty$ , soit  $r(t) \rightarrow \bar{r}$ .

Mouvement  
circulaire stable

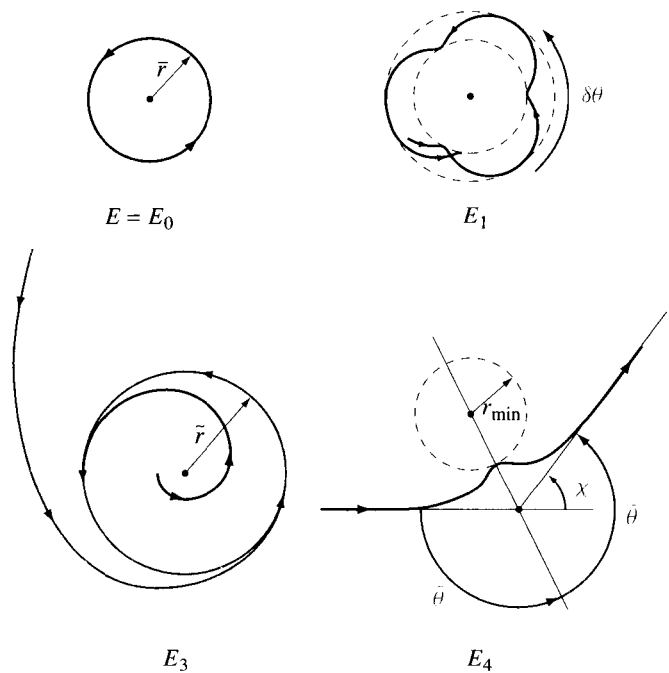
État lié

Mouvement  
circulaire instable

•  $E > E_3$  : c'est un état de diffusion. La particule 2 s'approche jusqu'à la distance  $r_{\min}$  de la particule 1, puis s'éloigne à l'infini.

État de diffusion

Les trajectoires correspondantes sont représentées sur la figure 18.3.



**Fig. 18.3** Trajectoires correspondant aux orbites de la figure 18.2.

Dans le cas d'un état lié, on introduit l'avance du **périgée**  $\delta\theta$  (fig. 18.3). De (13.68) on a

Avance du périgée 
$$\delta\theta = 2 \int_{r_1}^{r_2} dr \frac{L_1}{r^2 \sqrt{2\mu(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (18.23)$$

Dans le cas d'un état de diffusion, on introduit l'**angle de diffusion**  $\chi$  (fig. 18.3) et de (13.68) on trouve

Angle de diffusion 
$$\chi = 2\bar{\theta} - \pi \quad \text{où} \quad \bar{\theta} = \int_{r_{\min}}^{\infty} dr \frac{L_1}{r^2 \sqrt{2\mu(E_{\text{rel}} - U_{\text{eff}}(r))}}. \quad (18.24)$$

**18.2.3 Stabilité de la trajectoire circulaire (mouvement relatif)**

Pour toute valeur de  $\bar{r}$ , telle que  $U'(\bar{r}) > 0$ , il existe un mouvement circulaire uniforme de rayon  $\bar{r}$  et de vitesse angulaire  $\bar{\omega}$ , solution de l'équation radiale  $U'_{\text{eff}} = 0$ , d'où de (18.19) et (18.21) on a

$$\bar{\omega}^2 = \frac{U'(\bar{r})}{\mu \bar{r}}. \quad (18.25)$$

Pour que la trajectoire circulaire soit stable, il faut que  $U''_{\text{eff}}(\bar{r})$  soit positif, ce qui entraîne

$$U''_{\text{eff}}(\bar{r}) = U''(\bar{r}) + 3\frac{L_0^2}{\mu\bar{r}^4} = U''(\bar{r}) + 3\mu\bar{\omega}^2 = U''(\bar{r}) + 3\frac{U'(\bar{r})}{\bar{r}} > 0.$$

Nous avons ainsi la condition de stabilité de la trajectoire circulaire de rayon  $\bar{r}$  :

Condition  
de stabilité

$$\bar{r}U''(\bar{r}) + 3U'(\bar{r}) > 0. \quad (18.26)$$

Considérons par exemple les potentiels

Cas particulier

$$U(r) = -\frac{k}{r^\alpha} \quad (18.27)$$

où  $k$  et  $\alpha$  sont des constantes, telles que  $k\alpha > 0$ . On a

$$U'(r) = \alpha \frac{k}{r^{\alpha+1}}, \quad U''(r) = -\alpha(\alpha+1) \frac{k}{r^{\alpha+2}}$$

et la condition de stabilité devient

$$-\alpha(\alpha+1)k + 3\alpha k > 0.$$

En conclusion, pour les potentiels (18.27) la trajectoire circulaire est stable si  $\alpha < 2$ , instable si  $\alpha > 2$ .

$\alpha = 2$  est une  
valeur critique

#### 18.2.4 États liés : mouvements périodiques

Étudions les mouvements au voisinage d'un mouvement circulaire stable. En linéarisant l'équation radiale, on a

$$\ddot{r} = -\frac{1}{\mu} U'_{\text{eff}}(r) \cong -\frac{1}{\mu} U''(\bar{r}) \cdot (r - \bar{r}), \quad \text{avec } U''(\bar{r}) > 0. \quad (18.28)$$

L'évolution de  $(r - \bar{r})$  est oscillatoire harmonique, de pulsation

$$\omega_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{1}{\mu} U'_{\text{eff}}(\bar{r})} = \sqrt{\frac{1}{\mu} U''(\bar{r}) + 3\bar{\omega}^2} = \bar{\omega} \sqrt{3 + \bar{r} \frac{U''(\bar{r})}{U'(\bar{r})}}.$$

Par ailleurs, pendant une période  $T_{\text{rel}} = 2\pi/\omega_{\text{rel}}$  du mouvement radial, l'angle  $\theta$  varie de  $\Delta\theta$  où

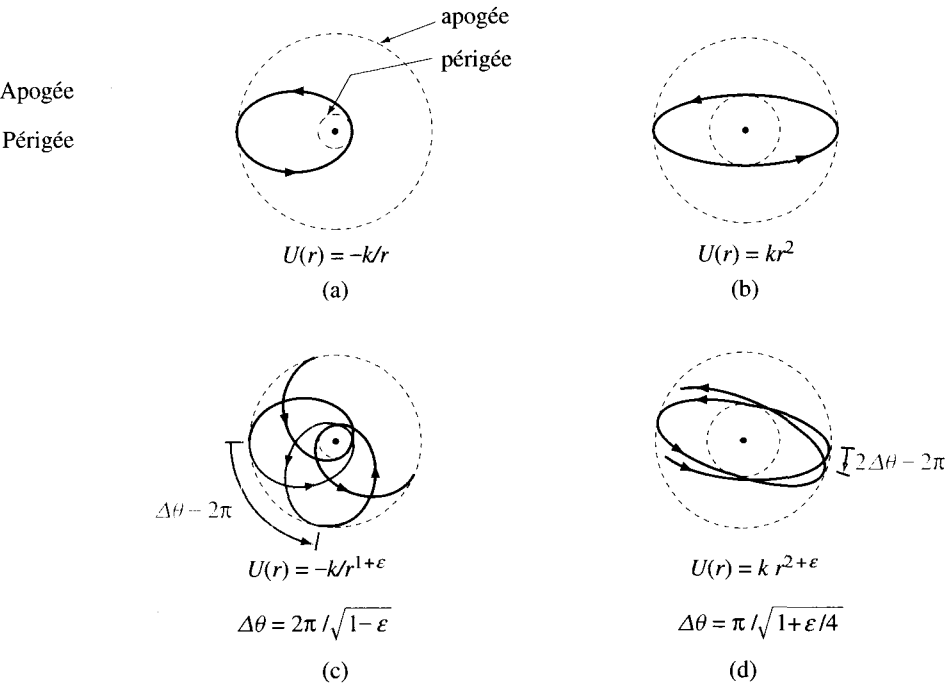
$$\Delta\theta \cong T_{\text{rel}}\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{3 + \bar{r} \frac{U''(\bar{r})}{U'(\bar{r})}}}. \quad (18.29)$$

Par exemple, dans le cas des potentiels du paragraphe précédent,

$$U(r) = -\frac{k}{r^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha < 2,$$

nous avons

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{2-\alpha}}. \tag{18.30}$$



**Fig. 18.4** Trajectoires calculées pour quatre potentiels différents. Si  $\varepsilon = 0$  les trajectoires sont fermées ((a) et (b)). Si  $\varepsilon \neq 0$  les trajectoires sont ouvertes et  $\Delta\theta$  est l'avance du périgée.

Par conséquent, nous avons  $\Delta\theta = 2\pi$  pour  $\alpha = 1$  et  $\Delta\theta = \pi$  pour  $\alpha = -2$ ; d'autre part,  $\Delta\theta/\pi$  est irrationnel pour presque toutes les valeurs de  $\alpha$  et, dans ces cas, les trajectoires ne sont pas fermées. Si l'on va au-delà de l'approximation linéaire, on peut démontrer que *les potentiels proportionnels à  $r^{-1}$  ou à  $r^2$  sont les seuls potentiels centraux pour lesquels toutes les trajectoires bornées sont fermées* : c'est le théorème de Bertrand [45]. Les trajectoires bornées associées à ces deux potentiels sont les ellipses représentées sur la figure 18.4 (a) et (b).

Sur la figure 18.4 (c) et (d) on constate que dès qu'il y a une faible variation de l'exposant, soit  $r^{-1+\varepsilon}$  ou  $r^{2+\varepsilon}$ , la trajectoire n'est plus fermée : la trajectoire est approximativement une ellipse qui tourne autour du point central et le périgée se déplace d'un angle  $\Delta\theta$  (sur le cercle  $r = r_{\max}$ ).

L'analyse précédente devrait permettre une détermination complète du mouvement de planètes. Ainsi les planètes devraient avoir des orbites elliptiques

parfaites s'il n'y avait que la force exercée par le Soleil (supposé sphérique). Dans le cas de Mercure, on sait qu'il y a une *avance du périhélie* de  $574''$  par siècle dont  $531''$  peuvent être expliquées dans le cadre de la théorie newtonienne par les perturbations dues aux autres planètes. La théorie de la relativité générale (Einstein 1915) prédit exactement cette avance du périhélie de Mercure ( $43''$ ) et ce résultat est un des trois tests historiques de la relativité générale. Toutefois, une autre hypothèse a été proposée pour expliquer cette avance de  $43''$ . Si l'on suppose que le Soleil n'est pas une sphère parfaite, la force exercée par le Soleil sur une planète ne sera pas exactement égale à  $GMmr^{-2}$  et l'avance du périhélie de Mercure pourrait alors s'expliquer par la forme du Soleil. Cependant les observations de Dicke en 1970 ont montré que seule une partie de ces  $43''$  pouvait être expliquée par la forme du Soleil, et la théorie de la relativité reste nécessaire.

Avance du périhélie  
de Mercure

### 18.3 DIFFUSION

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés aux états liés, regardons maintenant l'état de diffusion ( $E_{\text{rel}} = E_4$  des figures 18.2 et 18.3).

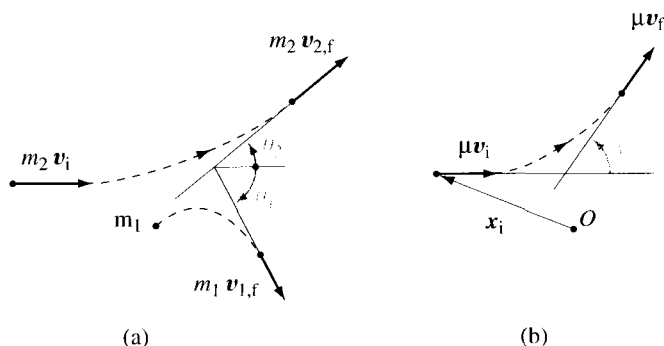
Pour cela considérons un système isolé formé de deux particules qui interagissent au moyen d'une force centrale conservative *de portée finie* et étudions la diffusion élastique de la particule 2, de vitesse initiale  $\mathbf{v}_i$ , par la particule 1 *initialement immobile* (fig. 18.5).

Par définition, la diffusion est **élastique** s'il n'y a pas formation d'un état lié et s'il n'y a pas de modification de l'état interne des particules (dans ce cas les particules peuvent être assimilées à des points matériels et  $|\mathbf{x}(t)| \rightarrow \infty$ ). Par conséquent, dans les états initial et final, où les particules sont très éloignées l'une de l'autre,  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} = 0$  et la conservation de l'énergie relative  $E_{\text{rel}}$  entraîne

Diffusion élastique

$$|\mathbf{v}_i| = |\mathbf{v}_f|. \quad (18.31)$$

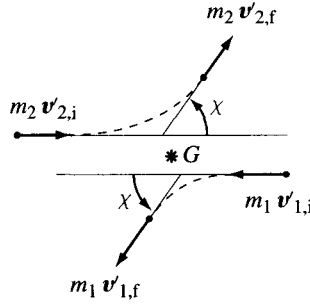
où  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}' = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$  est la vitesse relative.



**Fig. 18.5** Diffusion élastique : (a) référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire ; (b) problème à un corps associé : définition de  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_f$ .

Dans ce paragraphe, nous supposons que nous avons trouvé l'angle de diffusion  $\chi$  de la particule de masse réduite  $\mu$  par le potentiel  $U(r)$  (§ 18.2.2) et nous voulons exprimer les angles de diffusion  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , ainsi que l'énergie transmise à la cible  $m_1$ , en fonction de  $\chi$ .

Avant de commencer, mentionnons qu'il découle de la première remarque du paragraphe 18.1.1 que l'angle  $\chi$  représente également l'angle de diffusion observé dans le référentiel du centre de masse (fig. 18.6). D'autre part, le raisonnement du paragraphe 13.7.2 montre que l'évolution a lieu dans un plan.



**Fig. 18.6** Diffusion relativement au référentiel du centre de masse.

Des équations (18.6) et (18.7) on tire

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_2}{M} \mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_{2,f} = \mathbf{v}_G + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_f \quad (18.32)$$

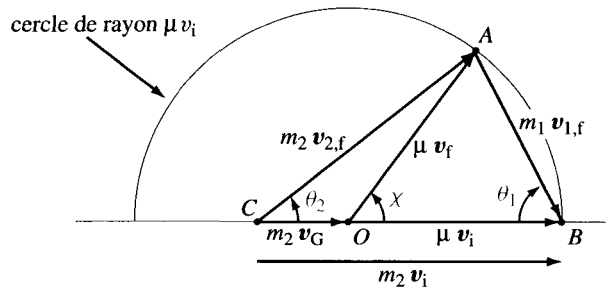
d'où

$$\begin{cases} v_{2,f} \cos \theta_2 = \frac{m_2}{M} v_i + \frac{m_1}{M} v_f \cos \chi \\ v_{2,f} \sin \theta_2 = \frac{m_1}{M} v_f \sin \chi \end{cases} \quad (18.33)$$

Ainsi la condition (18.31), soit  $v_i = v_f$ , entraîne

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \chi}{\cos \chi + m_2/m_1}. \quad (18.34)$$

On peut représenter géométriquement les résultats obtenus (fig. 18.7).



**Fig. 18.7** Représentation géométrique de la diffusion (pour  $m_2 < m_1$ ).

En effet de (18.31) on tire :

$$m_2 \mathbf{v}_i = m_2 \mathbf{v}_G + \mu \mathbf{v}_i \quad (18.35)$$

Construction  
géométrique

que l'on reporte sur l'axe horizontal de la figure 18.7, tous ces vecteurs étant parallèles à  $\mathbf{v}_i$ .

En outre on a

$$m_2 \mathbf{v}_i = m_2 \mathbf{v}_{2,f} + m_1 \mathbf{v}_{1,f} \quad (18.36)$$

et de (18.31), on tire :

$$m_2 \mathbf{v}_{2,f} = m_2 \mathbf{v}_G + \mu \mathbf{v}_f. \quad (18.37)$$

Comme  $|\mathbf{v}_i| = |\mathbf{v}_f|$ , les points  $A$  et  $B$  sont sur un cercle centré en  $O$ . En reportant les angles  $\chi$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sur la figure 18.7 on voit que

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\pi - \chi). \quad (18.38)$$

Calculons alors l'énergie finale de la cible  $m_1$ . De (18.32) et  $v_i = v_f$  il vient

$$|\mathbf{v}_{2,f}|^2 = \left( \mathbf{v}_G + \frac{m_1}{M} \mathbf{v}_f \right)^2 = \left( \frac{m_2^2}{M^2} + \frac{m_1^2}{M^2} \right) v_i^2 + 2 \frac{m_1 m_2}{M^2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_f$$

d'où

$$|\mathbf{v}_{2,f}| = \frac{1}{M} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi} v_i.$$

D'autre part,  $m_1 \mathbf{v}_{1,f}^2 + m_2 \mathbf{v}_{2,f}^2 = m_2 \mathbf{v}_i^2 = 2E$  entraîne

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_{1,f}|^2 &= \frac{m_2}{m_1} \left[ 1 - \frac{1}{M^2} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi) \right] v_i^2 = \\ &= \frac{m_2^2}{M^2} 2 [1 - \cos \chi] v_i^2 = \left( 2 \frac{m_2}{M} \sin(\chi/2) \right)^2 v_i^2 \end{aligned}$$

et l'on obtient finalement l'énergie transférée à la particule 1

$$E_{1,f} = \frac{1}{2} m_1 |\mathbf{v}_{1,f}|^2 = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E \sin^2(\chi/2). \quad (18.39)$$

En conclusion (fig. 18.7) :

- Si  $m_2 = m_1$ , alors  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$  et  $E_{1,f} = E \sin^2(\chi/2)$  (voir aussi § 13.7.2 et 19.3.3).
- Si  $m_2 < m_1$ , l'angle de diffusion  $\theta_2$  peut prendre n'importe quelle valeur et  $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$ . Si  $m_2 \ll m_1$ , on a  $E_{1,f} \cong 4 \frac{m_2}{m_1} E \sin^2(\chi/2)$  et l'énergie transférée à la cible est négligeable (par exemple choc élastique sur une paroi).

- Si  $m_2 > m_1$ , l'angle de diffusion  $\theta_2$  est nécessairement inférieur à  $\theta_2^{\max}$ , où  $\sin \theta_2^{\max} = m_1/m_2$ , et  $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$ . D'autre part, pour une valeur de  $\theta_2$  donnée, il y a deux solutions pour  $\mathbf{v}_{2,f}$ , et toutes les deux correspondent à une diffusion vers l'avant.

**Remarque.** Si  $m_2 = m_1$ , le point  $C$  de la figure 18.7 se trouve sur le cercle et dans ce cas on a

$$\theta_2 = \frac{\chi}{2} \quad \text{et} \quad \theta_1 = \frac{\pi - \chi}{2}, \quad (18.40)$$

et l'on retrouve le résultat  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$  (§ 13.7.2).

Par contre si  $m_2 < m_1$ , le point  $C$  est à l'intérieur du cercle (fig. 18.7). Il est à l'extérieur lorsque  $m_2 > m_1$ .

## 18.4 APPLICATIONS

### 18.4.1 Diffusion d'un faisceau de particules. Section efficace

Dans les applications, on a souvent affaire à la diffusion d'un faisceau de particules identiques. Considérons alors un flux homogène de particules identiques, de vitesse  $\mathbf{v}_\infty$ , qui sont diffusées par une force centrale de portée finie (fig. 18.8). Soit  $j$  l'intensité du flux incident (= nombre de particules traversant une unité de surface perpendiculaire à  $\mathbf{v}_\infty$  par unité de temps) et  $dN$  le nombre de particules diffusées par unité de temps avec un angle de diffusion compris entre les valeurs  $\chi$  et  $\chi + d\chi$ . La **section efficace différentielle**  $\sigma(\chi)$  est la grandeur définie par

$$dN = \sigma(\chi) j 2\pi \sin \chi d\chi \quad (18.41)$$

(l'élément d'angle solide  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$  représente l'aire de la surface sur la sphère unité définie par  $(\chi, \chi + d\chi)$ ).

Soit  $\rho = \rho(\chi)$  le paramètre d'impact pour une diffusion d'angle  $\chi$  (sect. 6.8). Les particules étant conservées, et le potentiel central, on a

$$dN = j 2\pi \rho d\rho \quad (18.42)$$

d'où

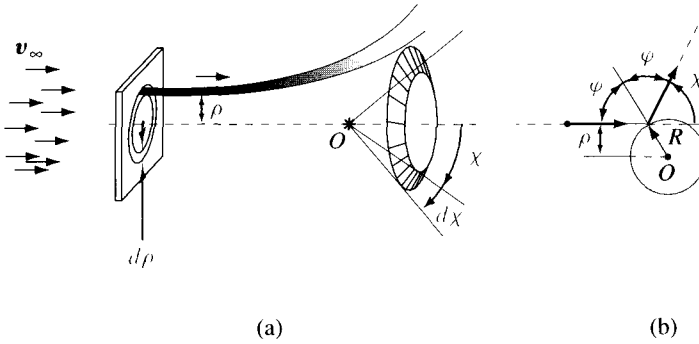
$$\sigma(\chi) = \frac{\rho(\chi)}{\sin \chi} \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right|. \quad (18.43)$$

On introduit également la **section efficace totale**  $\sigma_T$ , définie par

$$\sigma_T = \int_0^\pi \sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi. \quad (18.44)$$

Elle caractérise l'aire de la section du flux qui est diffusé par le potentiel.





**Fig. 18.8** Diffusion : (a) cas général ; (b) par une sphère dure.

Considérons d'abord les chocs élastiques sur une sphère dure immobile de rayon  $R$  (fig. 18.8 b). On a

$$\rho = R \sin \frac{1}{2}(\pi - \chi) = R \cos(\chi/2)$$

$$\sigma(\chi) = \frac{R \cos(\chi/2)}{\sin \chi} R \frac{1}{2} \sin(\chi/2) = \frac{R^2}{4}$$

$$\sigma_T = 2\pi \frac{R^2}{4} \int_0^\pi d\chi \sin \chi = \pi R^2.$$

La section efficace est donc l'aire de la section de la sphère.

Considérons ensuite la diffusion de particules chargées (masse  $\mu$ , charge  $q$ ) et calculons en la section efficace. Le potentiel créé par une charge  $Q$  immobile est  $U(r) = Qq/4\pi\epsilon_0 r$  et en utilisant le résultat (sect. 6.8)

$$\rho = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 \mu v_\infty^2} \frac{1}{\tan(\chi/2)}, \quad (18.45)$$

on trouve

$$\frac{d\rho}{d\chi} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\mu v_\infty^2} \frac{1}{\sin^2(\chi/2)}$$

et de (18.43) on obtient la section efficace  $\sigma(\chi)$ .

### Formule de Rutherford

$$\sigma(\chi) = \left( \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2\mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\chi/2)}. \quad (18.46)$$

**Remarque.** Dans ce cas la section efficace totale est infinie ; ce résultat est lié au fait que la force de Coulomb est de portée infinie. Mentionnons également l'intérêt historique de cette formule, qui permit à Rutherford d'évaluer le volume d'un noyau.

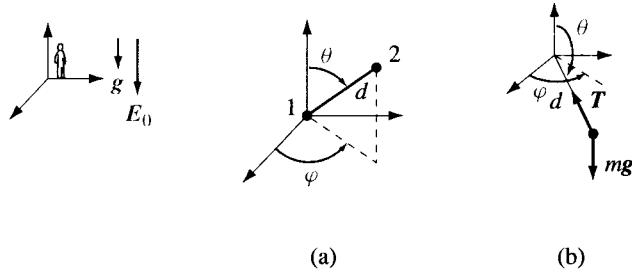


**RUTHERFORD** Ernest  
Physicien anglais  
(1871-1937)  
Prix Nobel (1908)

Formule de  
Rutherford

### 18.4.2 Rotateur ou pendule sphérique

Considérons une molécule diatomique *rigide* ( $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| = d = \text{cte}$ ) formée de deux atomes de masse  $m_1, m_2$  et de charge opposée  $q_2 = -q_1 = q$ , placée dans un champ électrique homogène  $\mathbf{E}_0$  parallèle à  $\mathbf{g}$  (fig. 18.9).



**Fig. 18.9** (a) Molécule diatomique rigide ; (b) pendule sphérique.

De  $\mathbf{M}\mathbf{a}_G = m_1\mathbf{g} + m_2\mathbf{g}$ , le mouvement du centre de masse est uniformément accéléré, d'accélération  $\mathbf{g}$ .

Pour la variable relative  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , nous avons la contrainte  $|\mathbf{x}| = d$  et l'équation du mouvement

$$\mu \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} + q\mathbf{E}_0 \quad (18.47)$$

où  $\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2}$  est parallèle à  $\mathbf{x}$ . Le mouvement relatif est ainsi identique à celui d'un pendule sphérique (si l'on remplace  $q\mathbf{E}_0/\mu$  par  $\mathbf{g}$ ).

La molécule étant rigide, il y a conservation de l'énergie relative ; en coordonnées sphériques (avec  $\dot{r} = 0$ ), on a

Constants  
du mouvement

$$\frac{1}{2}\mu(d^2\dot{\theta}^2 + d^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) - q\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{x} = E_{\text{rel}}. \quad (18.48)$$

D'autre part de  $[\mathbf{x} \wedge (\mathbf{F}^{1 \rightarrow 2} + q\mathbf{E}_0)] \cdot \mathbf{e}_z = 0 = \dot{L}_{0,z}$  il découle que la composante selon l'axe  $z$  du moment cinétique est conservée, d'où

$$\mu d^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = L_0 \quad (18.49)$$

et

$$\frac{1}{2}\mu d^2 \dot{\theta}^2 = E_{\text{rel}} - qE_0 d \cos\theta - \frac{1}{2} \frac{L_0^2}{\mu d^2 \sin^2\theta}. \quad (18.50)$$

- Si  $\dot{\varphi}_0 = 0$ , on a  $L_0 = 0$  et le mouvement est celui du pendule mathématique plan (§ 10.5.1, fig. 18.11 a).
- Si  $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ , nous effectuons l'analyse qualitative à partir de (18.50) en écrivant

$$\frac{1}{2}\mu d^2 \dot{\theta}^2 = E_{\text{rel}} + C_1 \xi - \frac{C_2}{1 - \xi^2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} C_1 = qE_0 d \\ C_2 = \frac{L_0^2}{2\mu d^2} \end{cases}$$

et  $\xi = \cos(\pi - \theta)$ .

Cette analyse est représentée sur la figure 18.10.

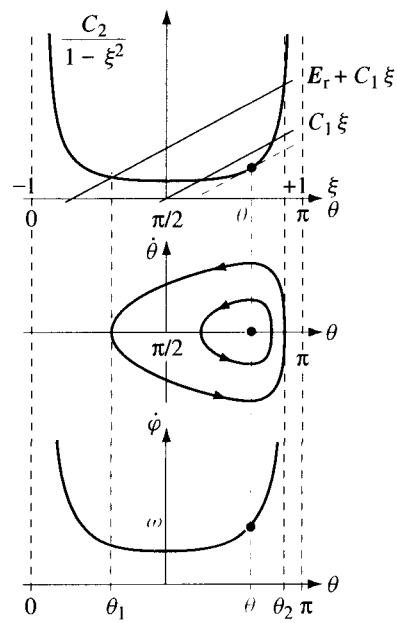


Fig. 18.10 Mouvement d'un rotateur ou du pendule sphérique.

- Si  $\dot{\varphi}_0^2 = -\frac{qE_0}{\mu d \cos \theta_0}$ , alors  $\theta(t) = \theta_0$  et  $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0$  : c'est un mouvement circulaire uniforme (fig. 18.11 b).
- Si  $\dot{\varphi}_0^2 \neq -\frac{qE_0}{\mu d \cos \theta_0}$ , l'angle  $\theta$  varie entre deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et  $\text{sign } \dot{\varphi}$  est constant (fig. 18.11 c).

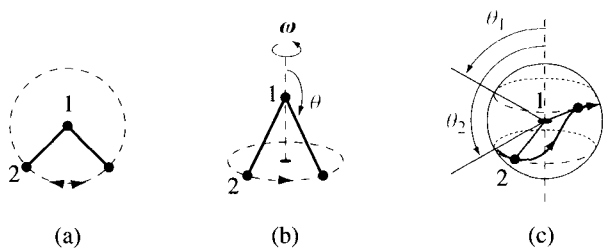


Fig. 18.11 Trajectoires : (a) mouvement plan ; (b) mouvement circulaire uniforme; (c) cas général.

18.5 PROBLÈMES

**18.5.1** Deux molécules diatomiques  $AB$  et  $A'B'$  sont constituées d'atomes de divers isotopes. On admet que l'interaction interatomique est indépendante

Molécules diatomiques

des isotopes. Montrer que les fréquences de vibrations des deux molécules sont reliées par  $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$ , où  $\mu$  est la masse réduite de la molécule.

**Diffusion proton-proton 18.5.2** Un proton de vitesse  $v_\infty = 4 \cdot 10^4$  m/s est diffusé par un proton initialement immobile sous un angle  $\theta = 30^\circ$ . Étudier le mouvement des deux protons ; calculer le paramètre d'impact et la distance minimale entre les deux protons.

**Interaction entre nucléons 18.5.3** On admet que l'interaction entre deux nucléons est décrite par le potentiel de Yukawa

$$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad (r_0 \cong 1,5 \text{ fm}).$$

Donner une analyse qualitative du mouvement de deux nucléons identiques pour différentes conditions initiales. Calculer la période du mouvement tel que  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$  soit constant et, dans ce cas, calculer l'énergie qu'il faut fournir pour séparer les deux nucléons.

**Molécules de H<sub>2</sub> 18.5.4** On décrit l'interaction entre deux molécules H<sub>2</sub> au moyen d'une force de Lennard-Jones (fig. 12.7). Calculer la position d'équilibre et l'énergie de liaison.

**Interaction entre deux atomes 18.5.5** Un atome A de masse  $m_A$  se déplace avec une vitesse initiale  $\mathbf{v}_A$ . Lorsqu'il se trouve à une distance  $\delta$  d'un atome B de masse  $m_B$ , initialement immobile, il se lie pour former une molécule AB. On admet que l'interaction est de la forme  $\mathbf{F}^{B \rightarrow A} = -k(r - \delta) \mathbf{e}_r$  où  $\mathbf{BA} = r \mathbf{e}_r$ . Décrire le mouvement de la molécule en négligeant le champ de gravitation  $\mathbf{g}$  et pour un paramètre d'impact  $\rho$ .

**Liaison rigide 18.5.6** Reprendre le problème précédent en supposant que la liaison est telle que la molécule soit rigide. Calculer la variation d'énergie cinétique.

**États liés 18.5.7** Deux corps de masse  $m_A$  et  $m_B$  effectuent un mouvement circulaire autour de leur centre de masse  $G$  (immobile), sous l'effet de la force de gravitation. A l'instant  $t_0$ , une perturbation extérieure modifie la direction de la vitesse de A sans changer son intensité. Décrire le mouvement ultérieur. Calculer la vitesse de  $G$  et la période du mouvement de A autour de B.

**18.5.8** Deux ions chargés décrivent des mouvements circulaires de période  $T$  autour de leur centre de masse sous l'effet de la force électrique. Calculer la distance entre les deux ions.

**18.5.9** Une particule de masse  $m_1$  interagit avec une particule de masse  $m_2$  au moyen d'une force dérivant du potentiel

$$U(r) = -U_0 e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$$

( $U_0$  et  $a$  sont des constantes positives). Donner une analyse qualitative du mouvement.

**Interaction entre solides 18.5.10** Un bloc A de masse  $m_A$  est posé sans vitesse initiale sur un bloc B immobile sur le sol (fig. 18.12). Trouver l'évolution de  $m_A$  et  $m_B$  en supposant qu'il n'y a pas de frottement (ni entre A et B, ni entre B et le sol).

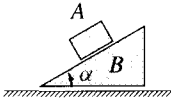


Fig. 18.12

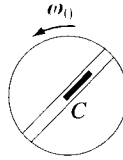


Fig. 18.13

**18.5.11** Une tige (masse  $m$ , longueur  $\ell$ ) peut glisser sans frottement sur le diamètre d'un disque (masse  $M$ , rayon  $R$ ) posé sur une table à air (fig. 18.13). A l'instant  $t = 0$ , la tige a une extrémité qui coïncide avec le centre du disque et une vitesse radiale nulle ; pour le disque,  $v_C(0) = 0$  et  $\omega(0) = \omega_0$ . Donner une analyse qualitative du mouvement.

Disque avec tige

**18.5.12** Montrer que la section efficace pour la diffusion d'une particule 2 chargée par une particule 1 identique, initialement immobile, est donnée par

Section efficace

$$\sigma(\theta_2) = \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_\infty^2} \right)^2 \frac{\cos \theta_2}{\sin^4 \theta_2}.$$

(Idée : établir, pour commencer, la relation  $d\Omega_2 = \frac{1}{4 \cos \theta_2} d\Omega$ .)



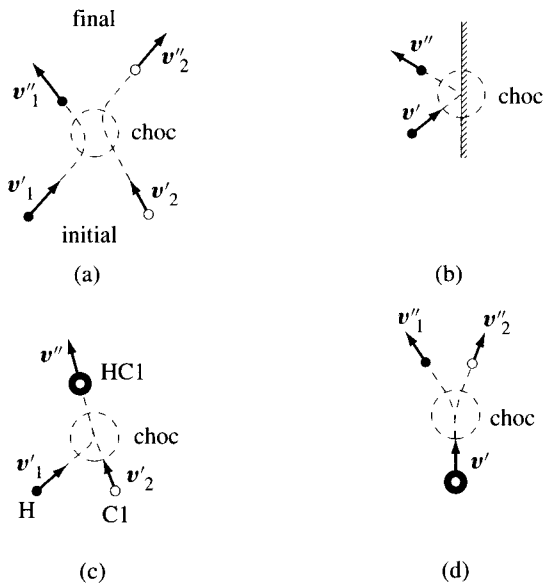
## CHOCS ET PERCUSSIONS

## 19.1 ÉQUATIONS DES CHOCS

## 19.1.1 Chocs et percussions

On appelle **choc** toute interaction entre deux ou plusieurs systèmes qui s'effectue pendant un intervalle de temps limité (fig. 19.1) : avant et après le choc, les forces entre les systèmes sont négligeables. L'état avant le choc est appelé *état initial* (noté  $x'_\alpha, v'_\alpha$ ), celui après le choc *état final* (noté  $x''_\alpha, v''_\alpha$ ).

Choc



**Fig. 19.1** Exemples de chocs : (a) diffusion ; (b) choc sur une paroi ; (c) choc mou ; (d) désintégration.

La théorie des chocs ne s'intéresse qu'aux états initiaux et finaux et non à l'évolution détaillée pendant le choc qui est très complexe ; en effet, les

chocs sont souvent associés à des systèmes ayant un grand nombre de degrés de liberté internes et, pendant la durée du choc, le modèle utilisé (« point matériel » ou « solide indéformable ») n'est plus valable.

Parmi les problèmes de chocs, il y a par exemple les problèmes de *collision* – interaction pouvant s'effectuer sans qu'il y ait contact matériel entre les systèmes – avec comme cas particuliers la formation d'un système unique (chocs mous) et la *désintégration* d'un système en plusieurs parties (explosion d'un obus ; fusée se séparant des fusées d'appoint). Mentionnons également que les expériences de collisions sont un outil puissant aussi bien pour l'étude des interactions que pour l'étude de la structure interne des molécules et des particules élémentaires.

Percussion

On appelle *percussion* un choc caractérisé par l'apparition de forces extrêmement grandes pendant des durées extrêmement courtes. Ces forces, dont l'intensité est inversement proportionnelle à la durée de leur action, sont appelées *forces impulsionnelles*.

Le concept de percussion correspond à celui de choc dans la vie de tous les jours. Lors d'un choc (percussion) entre deux solides, on distingue trois phases.

- État initial : avant le choc.
- Choc :
  - *phase de déformation* : l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle de déformation ;
  - *phase de restitution* : l'énergie potentielle de déformation se transforme – intégralement (choc élastique) ou partiellement (choc inélastique) – en énergie cinétique.
- État final : après le choc.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer essentiellement le cas de percussion ; le problème de la diffusion élastique a déjà été abordé à la section 18.3.

### 19.1.2 Modèles de choc

Observons pour commencer le choc d'un marteau sur une enclume. Nous voyons que la durée du choc varie entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$  s selon la nature de l'enclume (acier ou plomb) et selon que l'on frappe avec le plat ou la pointe du marteau.

Modèle de choc :  
discontinuité de la  
vitesse

Ces observations conduisent à introduire le *modèle de choc*. Dans ce modèle, un choc à l'instant  $t_0$  est défini par une *discontinuité de la vitesse* – celle-ci restant cependant finie – sans discontinuité du vecteur-lieu (fig. 19.1). Par conséquent, la ligne d'univers d'un point matériel est une courbe de classe  $\mathcal{C}_1$ , sauf aux chocs où elle est simplement continue, tandis que l'orbite est de classe  $\mathcal{C}_0$ , sauf aux chocs où elle est discontinue (§ 5.3.4).



Si le système total est isolé, il y a conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie (totale) ; cependant, s'il existe des degrés de liberté internes, une partie de l'énergie cinétique initiale pourra être transformée en énergie interne et, inversement, une partie de l'énergie interne initiale pourra être transformée en énergie cinétique :

Grandeurs  
conservées

$$\Delta T = T_f - T_i = -\Delta E^{\text{int}}.$$

Si  $\Delta T = -\Delta E^{\text{int}} = 0$ , le choc est dit **élastique** (sect. 13.7 et 18.3).  
Si  $\Delta T \neq 0$ , il est **inélastique** et il y aura une variation d'énergie interne (variation de température, vibrations, déformations) qui peut être positive (choc endo-énergétique) ou négative (choc exo-énergétique).

Choc élastique  
Choc inélastique

Considérons le cas particulier du **choc mou** de deux points matériels, c'est-à-dire qu'après le choc  $\mathbf{v}_1'' = \mathbf{v}_2''$ . De l'équation (18.11), avec  $\mathbf{v}_G(t) = \mathbf{v}_G(0)$  pour tout  $t$ , on tire

Choc mou

$$\Delta T = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{v}_f^2 - \mathbf{v}_i^2) \quad \text{où} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}_f = \mathbf{v}'', \quad (19.1)$$

et par conséquent

$$\Delta E^{\text{int}} = -\Delta T = \frac{1}{2}\mu \mathbf{v}_i^2 > 0. \quad (19.2)$$

Par ailleurs, la conservation de la quantité de mouvement détermine la vitesse finale, soit

$$\mathbf{v}_1'' = \mathbf{v}_2'' = \frac{m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'}{m_1 + m_2}. \quad (19.3)$$

### 19.1.3 Équations des chocs

En intégrant les équations générales du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} + \mathbf{v}_A \wedge M\mathbf{v}_G = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}, \quad \text{où} \quad \mathbf{x}_{\alpha} = A\mathbf{P}_{\alpha}, \end{cases} \quad (19.4)$$

de  $t_0$  à  $t_1$ , on obtient

$$\begin{cases} \mathbf{p}(t_1) - \mathbf{p}(t_0) = \sum_{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} dt \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}(t) \\ \mathbf{L}_A(t_1) - \mathbf{L}_A(t_0) + M \int_{t_0}^{t_1} dt (\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{v}_G)(t) = \sum_{\alpha} \int_{t_0}^{t_1} dt (\mathbf{x}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}})(t). \end{cases} \quad (19.5)$$

Dans le « modèle de choc », un choc à l'instant  $t_0$  est défini par la condition

$$\Delta p = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} (p(t_1) - p(t_0)) \neq 0. \quad (19.6)$$

Percussion

On appelle **percussion**  $\Pi$  associée à la force  $F$  la grandeur

$$\Pi(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt F(t). \quad (19.7)$$

On remarquera que les forces ordinaires (non impulsioneelles) ont une percussion nulle (car  $F(t)$  est finie pour tout  $t$ ).

Comme  $x_\alpha(t)$  est une fonction continue de  $t$ , et  $v_A, v_G$  sont finis, on obtient de (19.5)-(19.7) le résultat suivant.

Équations  
des chocs

Lors d'un choc à l'instant  $t_0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p = \sum_{\alpha} \Pi_{\alpha}^{\text{ext}}(t_0) \end{array} \right. \quad (19.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L_A = \sum_{\alpha} x_{\alpha}(t_0) \wedge \Pi_{\alpha}^{\text{ext}}(t_0), \quad x_{\alpha} = AP_{\alpha}. \end{array} \right. \quad (19.9)$$

Le point  $A$  qui apparaît dans (19.9) peut être arbitrairement choisi.

## 19.2 CENTRE DE PERCUSSION

### 19.2.1 Répercussion et centre de percussion

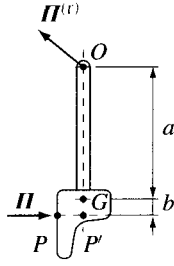
Répercussion

De même que l'on a distingué les forces appliquées des forces de liaison, on introduit également une distinction entre percussions appliquées et répercussions ; ces dernières sont des percussions engendrées par les liaisons (fig. 19.2).

Considérons un solide mobile autour d'un axe horizontal  $\Delta$  fixé et appliquons une percussion sur le solide, perpendiculairement à l'axe  $\Delta$  (fig. 19.2). La contrainte  $v'_A = 0$  pour tout  $A$  sur  $\Delta$  engendre généralement une **répercussion**  $\Pi^{(r)}$  de l'axe sur le solide.

Centre  
de percussion

Par définition, le **centre de percussion** est le point où il faut appliquer la percussion pour que la répercussion soit nulle.



**Fig. 19.2** Solide mobile autour de  $O$  : percussion  $\mathbf{H}$  et répercussion  $\mathbf{H}^{(r)}$ .

### 19.2.2 Calcul du centre de percussion

Supposons que  $\Delta$  soit perpendiculaire à un plan de symétrie du solide et que le solide soit initialement immobile (fig. 19.2). Par symétrie, on se ramène à un problème plan et nous avons :

- *Propriétés des solides* :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_G = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OG} & \text{où } O \in \Delta; \\ L_O = I_\Delta \boldsymbol{\omega} & \text{avec } I_\Delta = I_{\Delta_G} + m |\mathbf{OG}|^2; \end{cases}$$

- *Équations des chocs* :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^{(r)}; & (19.10) \\ \Delta L_O = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{H}; & (19.11) \end{cases}$$

où  $P$  est le point d'application de la percussion  $\mathbf{H}$ .

En tenant compte des conditions initiales ( $\mathbf{v}'_G = 0$ ,  $\boldsymbol{\omega}' = 0$ ) et en appliquant la percussion dans le plan de symétrie (soit  $\mathbf{H} \perp \Delta$ ), (19.10) et (19.11) donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= m \mathbf{v}''_G - \mathbf{H}^{(r)} \\ \Delta L_O &= I_\Delta \boldsymbol{\omega}'' = \mathbf{OP} \wedge (m \mathbf{v}''_G - \mathbf{H}^{(r)}) = \\ &= \mathbf{OP} \wedge m (\boldsymbol{\omega}'' \wedge \mathbf{OG}) - \mathbf{OP} \wedge \mathbf{H}^{(r)} = \\ &= m (\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OG}) \boldsymbol{\omega}'' - \mathbf{OP} \wedge \mathbf{H}^{(r)} \end{aligned}$$

d'où

$$[m (\mathbf{OP} \cdot \mathbf{OG}) - I_\Delta] \boldsymbol{\omega}'' = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{H}^{(r)}$$

Ainsi, par définition, le centre de percussion est donné par la relation  $\mathbf{H}^{(r)} = 0$

$$I_\Delta = m \mathbf{OP} \cdot \mathbf{OG} = m (\mathbf{OG} + \mathbf{GP}) \cdot \mathbf{OG} \quad (19.12)$$

soit (fig. 19.2)

$$I_\Delta = m(a + b) \cdot a = ma^2 + mab.$$

Or, comme  $I_{\Delta} = I_{\Delta_G} + ma^2$ , on obtient

Centre de percussion  $I_{\Delta_G} = mab$  avec  $a = |\mathbf{OG}|$  et  $b = |\mathbf{GP}'|$ . (19.13)

### Propriétés

1. En utilisant le rayon de giration  $R_{\Delta_G}$  ( $I_{\Delta_G} = mR_{\Delta_G}^2$ ), le centre de percussion est défini par

$$R_{\Delta_G}^2 = ab. \quad (19.14)$$

2. Par symétrie,  $O$  est le centre de percussion du solide mobile autour de l'axe  $\Delta'$  parallèle à  $\Delta$  passant par  $P'$ .

Pendule  
mathématique

3. Le centre de percussion d'un pendule mathématique de longueur  $\ell$  coïncide avec le point matériel.

En effet, dans ce cas  $I_{\Delta_G} = 0$  d'où  $b = 0$  et  $a = \ell$ .

4.  $|\mathbf{OP}'|$  est la longueur du pendule mathématique ayant même évolution que le solide. En effet,

$$I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = -mga \sin \theta \quad \text{et} \quad I_{\Delta} = ma(a + b)$$

impliquent

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{(a + b)} \sin \theta$$

ce qui est l'équation du mouvement du pendule de longueur  $\ell = (a + b)$ .

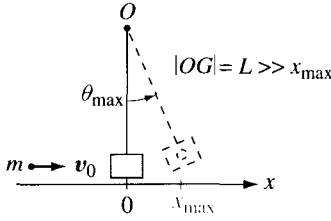
Raquette et marteau

**Remarque.** Cette discussion montre que pour frapper un solide sans se faire mal au poignet (marteau, raquette de tennis, ...), il faudra tenir le solide à une distance  $\ell = a + b$  du point de choc.

## 19.3 ILLUSTRATIONS

### 19.3.1 Pendule balistique

Le pendule balistique est un pendule constitué d'une cible de masse  $M$  suspendue à un fil ; il permet de mesurer la vitesse d'une balle de fusil à partir de l'amplitude des oscillations du pendule, sachant qu'après le choc, la cible et la balle constituent un seul solide (choc mou, fig. 19.3). En assimilant le pendule balistique à un pendule mathématique on a  $\mathbf{II}^{(r)} = 0$ .



**Fig. 19.3** Pendule balistique.

Soit  $\mathbf{v}_0$  la vitesse de la balle juste avant le choc,  $\mathbf{v}''$  la vitesse du solide (cible + balle) juste après le choc, et  $\mathbf{v}(t)$  la vitesse du solide au cours de l'évolution ultérieure.

Comme  $\mathbf{\Pi}^{(r)} = 0$ , les percussions extérieures au système (balle + pendule) sont nulles et (19.8) implique

$$\mathbf{p}'' - \mathbf{p}' = 0 \quad \text{d'où} \quad m\mathbf{v}_0 = (m + M)\mathbf{v}'' \quad (19.15) \quad \text{Pendant le choc}$$

D'autre part, après le choc, l'énergie mécanique étant conservée, on a

$$E = \frac{1}{2}(m + M)\mathbf{v}^2 + (m + M)gL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}(m + M)\mathbf{v}''^2 \quad (19.16) \quad \text{Après le choc}$$

Lorsque  $\theta = \theta_{\max}$ , on a  $\mathbf{v} = 0$  et de (19.15) et (19.16)

$$\frac{1}{2}(m + M)\mathbf{v}''^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m + M}\mathbf{v}_0^2 = (m + M)gL(1 - \cos \theta_{\max})$$

$$\text{soit } \mathbf{v}_0^2 = \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 gL2(1 - \cos \theta_{\max}) \cong \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 gL\theta_{\max}^2.$$

Par conséquent, la vitesse de la balle de fusil avant le choc est reliée à l'amplitude des oscillations par la formule

$$v_0 \cong \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{\frac{g}{L}} x_{\max}. \quad (19.17)$$

**Remarque.** La percussion exercée par la balle sur la cible est

$$\mathbf{\Pi}^{b \rightarrow c} = M\mathbf{v}'' = \frac{mM}{m + M}\mathbf{v}_0.$$

### 19.3.2 Choc sur une tige

Une tige homogène  $PQ$  de masse  $M$ , de longueur  $L$ , est lâchée horizontalement sans vitesse initiale. La tige étant reliée par un fil souple de longueur  $\ell$  à un point  $O$  (avec  $O = P$  à l'instant initial), nous voulons trouver la vitesse de la tige juste après le choc supposé élastique (fig. 19.4).

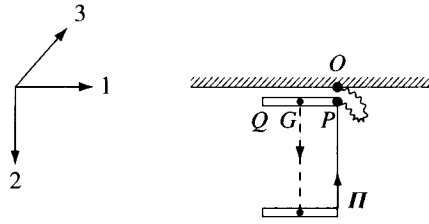


Fig. 19.4 Choc sur une tige.

- Juste avant le choc :  $\omega' = 0$ ,  $\mathbf{v}'_G = \sqrt{2g\ell}\mathbf{e}_2$ .
- Équation des chocs (19.10) et (19.11) :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p} = M(\mathbf{v}''_G - \mathbf{v}'_G) = \mathbf{\Pi} & \text{avec } \mathbf{\Pi} = -\Pi \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (19.18)$$

$$\begin{cases} \Delta L_G = I_G(\omega'' - \omega') = \mathbf{GP} \wedge \mathbf{\Pi} & \text{où } I_G = \frac{1}{12}ML^2. \end{cases} \quad (19.19)$$

De ces équations on voit que  $\mathbf{v}''_G$  est parallèle à  $\mathbf{e}_2$ ,  $\omega''$  est parallèle à  $\mathbf{e}_3$  et

$$I_G \omega'' = \mathbf{GP} \wedge M(\mathbf{v}''_G - \mathbf{v}'_G)$$

d'où

$$\omega''_3 = \frac{6}{L} (v''_G - v'_G). \quad (19.20)$$

- Choc élastique :  $\Delta T = 0$  implique

$$M\mathbf{v}_G'^2 = M\mathbf{v}_G''^2 + I_G \omega''^2 = M\mathbf{v}_G''^2 + 3M(\mathbf{v}_G'' - \mathbf{v}_G')^2$$

d'où, après le choc,

$$\mathbf{v}_G'' = \frac{1}{2}\mathbf{v}_G' \quad \text{et} \quad \omega'' = -\frac{3}{L}\mathbf{v}_G'. \quad (19.21)$$

On remarquera que la vitesse du point  $P$  change de signe

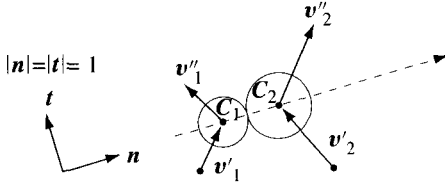
$$\mathbf{v}_P'' = \mathbf{v}_G'' + \omega'' \wedge \mathbf{GP} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_G' - \frac{3}{2}\mathbf{v}_G' = -\mathbf{v}_G' = -\mathbf{v}_P'$$

et que la percussion est donnée par

$$\mathbf{\Pi} = -M\sqrt{\frac{g\ell}{2}} \mathbf{e}_2.$$

### 19.3.3 Choc de deux sphères lisses

Considérons le choc de deux sphères parfaitement lisses (aucun frottement entre les sphères), de masse  $m_1$  et  $m_2$ , soumises à des forces extérieures ordinaires (pas de percussion extérieure). On considère uniquement le cas où les centres des sphères se déplacent initialement dans un même plan (fig. 19.5).



**Fig. 19.5** Choc de deux sphères lisses.

En l'absence de percussion extérieure, on a  $\mathbf{p}'' = \mathbf{p}'$ , d'où

$$m_1 (\mathbf{v}_1'' - \mathbf{v}_1') + m_2 (\mathbf{v}_2'' - \mathbf{v}_2') = 0. \quad (19.22)$$

Conservation de la  
quantité de  
mouvement

De plus, les sphères étant lisses, les percussions  $\mathbf{\Pi}^{1 \rightarrow 2}$  et  $\mathbf{\Pi}^{2 \rightarrow 1}$  sont parallèles à la ligne d'impact  $C_1 C_2$  avec  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{C}_1 C_2}{|C_1 C_2|}$ .

Les équations des chocs ((19.10) et (19.11)), appliquées à chaque sphère donnent :

Équations des chocs

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p}_1 = m_1 (\mathbf{v}_1'' - \mathbf{v}_1') = \mathbf{\Pi}^{2 \rightarrow 1} \\ \Delta L_{O,1} = I_1 (\boldsymbol{\omega}_1'' - \boldsymbol{\omega}_1') = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{p}_2 = m_2 (\mathbf{v}_2'' - \mathbf{v}_2') = -\mathbf{\Pi}^{2 \rightarrow 1} \\ \Delta L_{O,2} = I_2 (\boldsymbol{\omega}_2'' - \boldsymbol{\omega}_2') = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\boldsymbol{\omega}_1'' = \boldsymbol{\omega}_1', \quad \boldsymbol{\omega}_2'' = \boldsymbol{\omega}_2' \quad (19.23)$$

et, avec  $\mathbf{t}$  le vecteur unité perpendiculaire à  $\mathbf{n}$ , on obtient

$$\mathbf{t} (\mathbf{v}_1'' - \mathbf{v}_1') = 0, \quad \mathbf{t} (\mathbf{v}_2'' - \mathbf{v}_2') = 0 : \quad (19.24)$$

les vitesses de rotation et la composante des vitesses de translation perpendiculaire à la ligne d'impact ne sont pas modifiées par le choc.

Comme les sphères sont impénétrables, on a aussi

$$\mathbf{n} (\mathbf{v}_2'' - \mathbf{v}_1'') = -e \mathbf{n} (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1') \quad \text{avec} \quad e \geq 0 : \quad (19.25) \quad \text{Choc mou : } e = 0$$

la composante de la vitesse relative dans la direction de la ligne d'impact change de signe et est multipliée par un facteur  $e$  appelé **facteur de restitution**.

Si l'on donne  $e$ , les équations (19.22), (19.24) et (19.25) permettent de calculer les vitesses après le choc.

Pour calculer la variation d'énergie cinétique, on utilise (19.23), (19.24) et (18.17); on obtient

$$\begin{aligned}\Delta T &= \frac{1}{2}\mu \left\{ [(\mathbf{v}_2'' - \mathbf{v}_1'') \cdot \mathbf{n}]^2 - [(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1') \cdot \mathbf{n}]^2 \right\} = \\ &= (e^2 - 1) \frac{1}{2}\mu [(\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1') \cdot \mathbf{n}]^2 = -\Delta E^{\text{int}}.\end{aligned}\quad (19.26)$$

Choc élastique :  
 $e = 1$

Dans le cas d'un choc élastique  $\Delta T = 0$  et le coefficient de restitution est égal à 1. Au contraire, dans le cas d'un choc mou ( $\mathbf{v}_2'' = \mathbf{v}_1''$ ) le coefficient de restitution est nul.

### Choc élastique

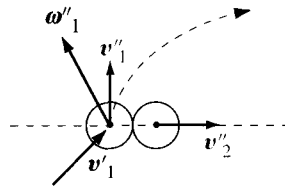
Dans le cas d'un choc élastique ( $e = 1$ ), les équations (19.22) et (19.25) impliquent

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot [(m_1 + m_2)\mathbf{v}_2'' - 2m_1\mathbf{v}_1' - (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2'] = 0 \\ \mathbf{n} \cdot [(m_1 + m_2)\mathbf{v}_1'' - 2m_2\mathbf{v}_2' - (m_1 - m_2)\mathbf{v}_1'] = 0 \end{cases}\quad (19.27)$$

ce qui permet, avec (19.24), de calculer les vitesses après le choc. Par exemple, si  $m_1 = m_2$  et  $\mathbf{v}_2' = 0$ , on trouve  $\mathbf{n}\mathbf{v}_1'' = 0$ ,  $\mathbf{n}\mathbf{v}_2'' = \mathbf{n}\mathbf{v}_1'$ , et

$$\mathbf{v}_1'' = (\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}, \quad \mathbf{v}_2'' = (\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.\quad (19.28)$$

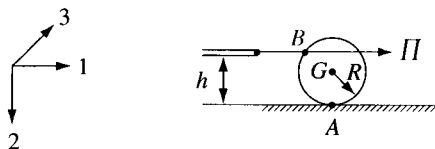
Les vitesses après le choc sont perpendiculaires (fig. 19.6), résultat indépendant de l'interaction pourvu qu'elle soit centrale (§ 13.7.2.)



**Fig. 19.6** Choc d'une boule de billard sur une boule identique au repos (vu de dessus). (Pour l'évolution ultérieure des boules 1 et 2, voir le paragraphe 12.5.6).

### 19.3.4 Billard

Nous avons étudié le mouvement d'une boule sur une table de billard au paragraphe 12.5.6. Dans ce paragraphe, nous voulons étudier le mouvement d'une boule de billard sur laquelle on applique un coup horizontal dans un plan méridien vertical, coup appelé en anglais « *shot without english* » (fig. 19.7).



**Fig. 19.7** *Shot without english.*



Comme la force exercée par la table sur la boule est finie, il n'y a pas de répercussion (19.7) et les équations des chocs ((19.10) et (19.11)), avec les conditions initiales  $\mathbf{p}' = 0$  et  $\mathbf{L}'_G = 0$ , donnent

$$\Pi_A^r = 0$$

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}'' = \Pi \\ \Delta \mathbf{L}_G = \mathbf{L}_G'' = \mathbf{GB} \wedge \Pi \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_G'' = \frac{2}{5} m R^2 \boldsymbol{\omega}'', \end{cases}$$

d'où  $\frac{2}{5} m R^2 \boldsymbol{\omega}'' = \mathbf{GB} \wedge m \mathbf{v}_G''$  et

$$\boldsymbol{\omega}'' = \frac{5}{2} \frac{h - R}{R^2} v_G'' \mathbf{e}_3. \quad (19.29)$$

Nous avons ainsi pour le point de contact A

$$\mathbf{v}_A'' = \mathbf{v}_G'' + \boldsymbol{\omega}'' \wedge \mathbf{GA} = \left( v_G'' - \frac{5}{2} \frac{h - R}{R} v_G'' \right) \mathbf{e}_1$$

soit

$$\mathbf{v}_A'' = \frac{7R - 5h}{2R} \mathbf{v}_G''. \quad (19.30)$$

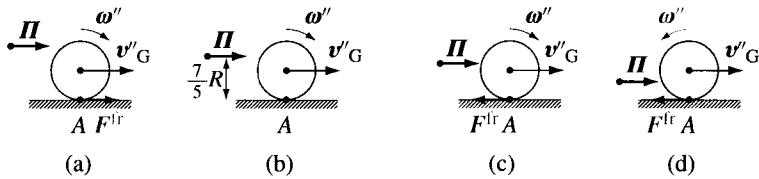
Cette dernière équation montre qu'il faut distinguer trois cas, représentés sur la figure 19.8 :

- (a) Si  $h > \frac{7}{5} R$  (« coup haut »), on a  $v_A'' < 0$ ,  $\omega'' > 0$ .  
Comme  $\mathbf{v}_A''$  est opposé à  $\mathbf{v}_G''$ , les équations du mouvement en présence d'un frottement sec et après le choc sont :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_G = \mu_c g \mathbf{e}_1, & \mathbf{v}_G(t) = (v_G'' + \mu_c g t) \mathbf{e}_1 \\ \frac{2}{5} R^2 \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\mu_c g R \mathbf{e}_3, & \boldsymbol{\omega}(t) = \left( \omega'' - \frac{5}{2R} \mu_c g t \right) \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Dans ce cas, le frottement accélère la boule et diminue  $\omega_3$  jusqu'à l'instant  $t_1$  où  $\mathbf{v}_A(t_1) = 0$ . Pour  $t \geq t_1$ , la boule roule sans glisser avec un mouvement uniforme de vitesse  $\mathbf{v}_G^{(f)} = \frac{5}{7} \frac{h}{R} \mathbf{v}_G''$  (on a négligé la résistance au roulement).

- (b) Si  $h = \frac{7}{5} R$ , on a  $v_A'' = 0$  et il y a roulement sans glissement.  
(c) et (d) Si  $h < \frac{7}{5} R$  (« coup bas »), on a  $v_A'' > 0$ . Dans ce cas, le frottement ralentit la boule et augmente  $\omega_3$ . De nouveau, la vitesse finale du mouvement uniforme est  $\mathbf{v}_G^{(f)} = \frac{5}{7} \frac{h}{R} \mathbf{v}_G''$  : si  $h > R$  on a  $\omega_3'' > 0$  (fig. 19.8 c), et si  $h < R$ ,  $\omega_3'' < 0$  (fig. 19.8 d).

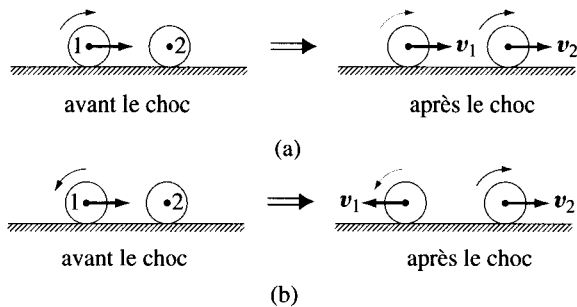


**Fig. 19.8** (a) Coup haut  $h > \frac{7}{5}R$  ;  $F^{\text{fr}}$  accélère la boule ; (b)  $h = \frac{7}{5}R$  ;  $v'_A = 0$  ; (c) et (d) coup bas  $h < \frac{7}{5}R$  ;  $F^{\text{fr}}$  ralentit la boule.

Supposons que la boule entre ensuite en collision élastique centrale avec une deuxième boule identique immobile (c'est-à-dire que la vitesse est dirigée vers le centre de la deuxième boule). Comme les boules sont parfaitement lisses (pas de frottement entre les boules), l'équation des chocs, associée à la conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie cinétique, implique (§ 19.3.3)

$$\omega''_1 = \omega'_1, \quad \omega''_2 = \omega'_2 = 0, \quad v'_1 = 0 \quad v'_2 = v'_1.$$

Nous avons alors un « coulé » ou un « rétro » suivant la direction de la vitesse angulaire  $\omega'_1$  de la boule incidente (fig. 19.9).



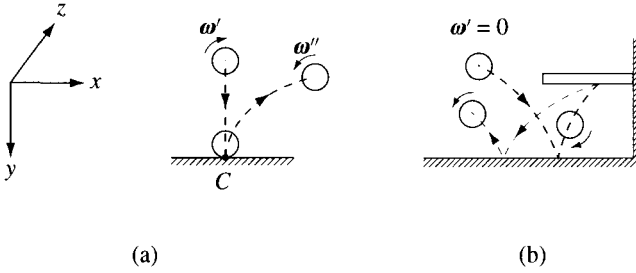
**Fig. 19.9** (a) Coulé ; (b) rétro.

Juste après le choc,  $v'_1$  est nulle ; en conséquence après le choc la boule 1 roule, dans le sens imposé par  $\omega'_1$ .

**19.3.5 Choc élastique avec frottement : superballes**

Le frottement entre les deux systèmes qui se choquent engendre une *percussion de frottement* dont il faudra tenir compte en introduisant une hypothèse pour relier la percussion tangentielle à la percussion normale.

A titre d'illustration, analysons le choc d'une « superballe » sur une surface horizontale. Une superballe est caractérisée par le fait que le choc est élastique et que la composante de la vitesse perpendiculaire à la surface change uniquement de signe.



**Fig. 19.10** Choc élastique d'une superballe sur un plan.

- *Équation des chocs :*

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{p} = m (\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') = \mathbf{\Pi} \\ \Delta L_G = \frac{2}{5} m R^2 (\boldsymbol{\omega}'' - \boldsymbol{\omega}') = \mathbf{GC} \wedge \mathbf{\Pi} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{2}{5} R (\omega'' - \omega') = -(v_x'' - v_x'), \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_z. \quad (19.31)$$

- *Propriétés de la superballe :*

$$\begin{cases} v_y'' = -v_y' \\ \frac{1}{2} m v_x''^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega''^2 = \frac{1}{2} m v_x'^2 + \frac{1}{5} m R^2 \omega'^2 \end{cases}$$

d'où

$$(v_x'' - v_x')(v_x'' + v_x') = \frac{2}{5} R^2 (\omega' - \omega'')(\omega' + \omega'')$$

et, en utilisant l'équation des chocs (19.31), nous obtenons

$$v_x'' + v_x' = R(\omega' + \omega''). \quad (19.32)$$

Nous avons ainsi après le choc

$$\begin{cases} v_x'' = \frac{3}{7} v_x' + \frac{4}{7} R \omega', & v_y'' = -v_y' \\ \omega'' = -\frac{3}{7} \omega' + \frac{10}{7} \frac{v_x'}{R} \end{cases}$$

résultat qui explique le mouvement surprenant de ces balles (fig. 19.10).

## 19.4 PROBLÈMES

**19.4.1** Sous l'effet d'une explosion interne qui augmente l'énergie mécanique de  $\Delta E$ , un obus se scinde en deux parties de masses  $m_1$  et  $m_2$ . Montrer

Explosion

que les deux parties s'éloignent l'une de l'autre avec une vitesse relative  $v_r = \sqrt{2\Delta E(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$ .

**Raquette de tennis** **19.4.2** Trouver le centre de percussion d'une raquette de tennis schématisée par une tige de masse  $m$ , longueur  $\ell$ , et un anneau de masse  $M$ , rayon  $R$  (fig. 19.11).



Fig. 19.11

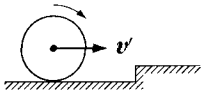
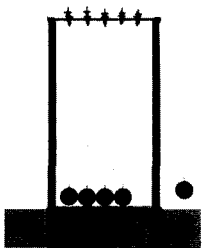
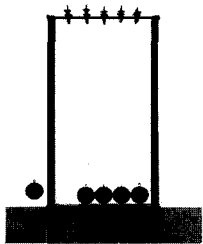


Fig. 19.12

**Disque et marche** **19.4.3** Trouver la vitesse minimale que doit avoir un disque homogène qui roule sans glisser pour passer une marche de hauteur  $h$  (fig. 19.12). Calculer la variation d'énergie mécanique au cours du choc. On suppose qu'il n'y a pas de glissement au point de contact A.

$n$  pendules



**19.4.4** On considère un système formé de  $n$  pendules de même longueur, de masse  $m_\alpha = \lambda^\alpha m_0$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  (où  $\lambda$  est une constante positive), alignés l'un à côté de l'autre sans se toucher (fig. 19.13). Une particule de masse  $m_0$  et vitesse  $v_0$  effectue une collision sur le premier pendule. On suppose les chocs élastiques. Calculer la vitesse de la particule incidente après le choc et montrer que la vitesse du dernier pendule sera  $v_n = (\frac{2}{1+\lambda})^n v_0$ . Trouver l'énergie transmise par la particule incidente au dernier pendule et vérifier que si  $\lambda = 1 + \varepsilon$  avec  $|\varepsilon| \ll 1$ , alors la particule incidente transmet toute son énergie au dernier pendule. Comparer ces résultats avec ceux que l'on obtiendrait dans le cas où les pendules se touchent (en assimilant l'ensemble des  $n$  pendules à un solide).

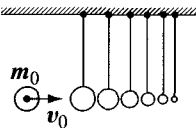


Fig. 19.13

**Choc élastique** **19.4.5** Deux particules de vitesse  $v'$  et  $-v'$  font une collision élastique. Trouver le rapport des masses des particules sachant que l'une des particules est immobile après la collision.

**Billard** **19.4.6** Une boule de billard ayant une vitesse initiale  $v_0$  et roulant sans glisser sur la table frappe une boule identique, immobile, selon un angle  $\theta$ . On suppose que le choc est parfaitement élastique et qu'il n'y a pas de frottement entre les boules (fig. 19.14). Calculer la vitesse et la vitesse angulaire de chacune des boules immédiatement après le choc ; décrire les trajectoires des boules ; trouver l'évolution temporelle de la boule B.

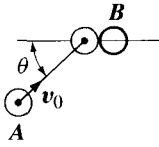


Fig. 19.14

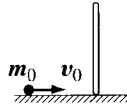


Fig. 19.15

**19.4.7** Un point matériel de masse  $m = 100$  g est lancé avec une vitesse  $v_0$  contre une tige homogène (masse  $M = 400$  g, longueur  $L = 20$  cm) posée verticalement sur le sol (fig. 19.15). Trouver les vitesses du point matériel et de la tige immédiatement après le choc, en supposant le choc élastique. Pour quelles valeurs de  $v_0$  la tige décollera-t-elle juste après le choc ? (Indication : faire l'hypothèse que la tige décolle et chercher pour quelles valeurs  $v_0$  cette hypothèse est vérifiée en considérant  $t \ll 1$ .)

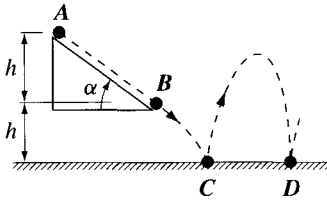


Fig. 19.17

**19.4.8** Une superballe ( $m = 100$  g,  $R = 2$  cm) est posée sans vitesse initiale au point A (fig. 19.17) et roule sans glisser sur le plan incliné ( $\alpha = 30^\circ$ ). Calculer la distance  $CD$  et comparer ce résultat à celui obtenu en l'absence de tout frottement entre la balle et le sol ( $h = 1$  m).

Superballe

**19.4.9** La superballe de l'exercice précédent est lancée horizontalement avec une vitesse  $v_0 = 4$  m/s, d'une hauteur  $h = 1,2$  m, et frappe le dessous d'une table de 50 cm de hauteur (fig. 19.10). Calculer la distance entre les deux premiers chocs sur le sol.



## CHAPITRE 20

# SYSTÈMES OUVERTS

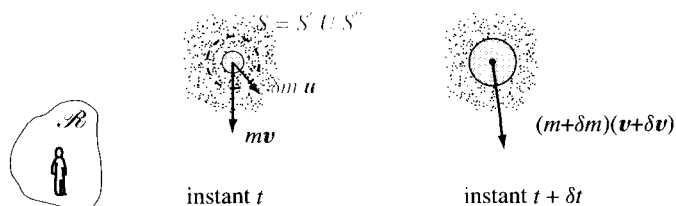
### 20.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, nous avons toujours supposé que les systèmes matériels étaient fermés (sect. 10.1). Dans ce chapitre nous abordons la dynamique des systèmes ouverts, c'est-à-dire l'étude de systèmes qui échangent de la matière avec l'extérieur. Les problèmes sont de trois types selon que le système absorbe de la matière (condensation), éjecte de la matière (fusée) ou tous les deux à la fois (hydrodynamique).

Systèmes ouverts

Dans le problème de type *condensation* (fig. 20.1), on suppose que le système matériel de masse  $m$  et vitesse  $\mathbf{v}$  à l'instant  $t$  absorbe une quantité de matière  $\delta m$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + \delta t]$ . A l'instant  $t$  (avant l'absorption)  $\delta m$  avait une vitesse  $\mathbf{u}$  ; à l'instant  $(t + \delta t)$  (après l'absorption) le système a une masse  $(m + \delta m)$  et une vitesse  $(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v})$ .

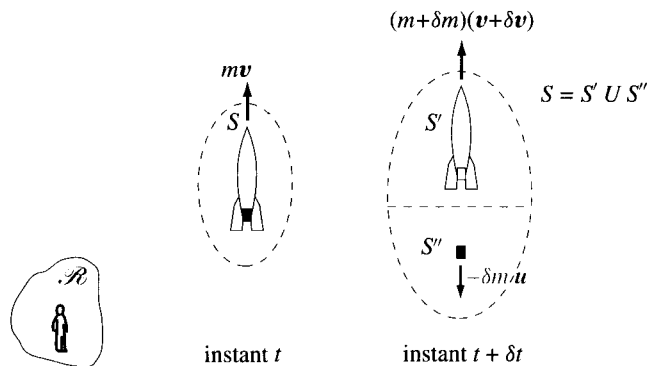
Condensation



**Fig. 20.1** Condensation :  $\delta m$  est la variation de masse de la goutte pendant  $\delta t$ , soit  $\delta m > 0$  ;  $\mathbf{u}$  est la vitesse de la vapeur par rapport à  $\mathcal{R}$ .

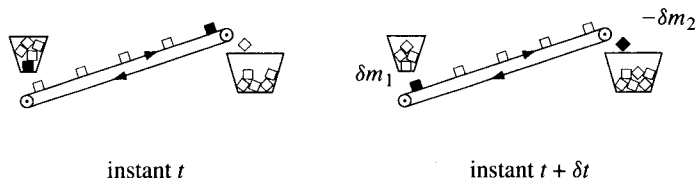
Dans le problème de type *fusée* (fig. 20.2), où la propulsion est provoquée par l'éjection d'un gaz à une vitesse  $\mathbf{u}$  (par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ ) on conserve le même formalisme avec  $\delta m < 0$  : la fusée éjecte une quantité de matière  $|\delta m| = -\delta m$ , et la vitesse  $\mathbf{u}$  est la vitesse de  $|\delta m|$  après avoir quitté la fusée.

Fusée



**Fig. 20.2** Fusée :  $\delta m$  est la variation de masse de la fusée pendant  $\delta t$ , soit  $\delta m < 0$  ;  $u$  est la vitesse de la masse éjectée par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Hydrodynamique      Enfin, dans le problème de type « hydrodynamique », la matière entre d'un côté pour ressortir de l'autre (fig. 20.3).



**Fig. 20.3** Masse entrante  $\delta m_1 > 0$  ; masse sortante  $\delta m_2 < 0$ .

20.2 ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

20.2.1 Méthode des systèmes fermés : fusée et condensation

Pour un système ouvert, la définition du système et la distinction entre « système » et « extérieur » est délicate : au cours de l'évolution l'extérieur deviendra partie du système et, inversement, une partie du système fera partie de l'extérieur. Par conséquent, il est plus simple d'établir les équations du mouvement en considérant le *système fermé*  $S$  défini par toute la matière mise en jeu pendant l'intervalle de temps  $[t, t + \delta t]$ . Le reste de l'Univers est alors l'extérieur de  $S$  et le système de masse  $m(t)$  variable qui nous intéresse (fusée, goutte d'eau, ...) est un sous-système  $S'$  de  $S$ .

Pour simplifier la discussion nous admettrons que tous les points de  $S'$  ont le même vecteur vitesse  $v$ .



Les équations du mouvement appliquées au système fermé  $S$  impliquent

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta t} dt \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S}(t) &= \mathbf{p}^{(S)}(t + \delta t) - \mathbf{p}^{(S)}(t) = \\ &= (m + \delta m)(\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) - \delta m \mathbf{u} - m \mathbf{v} \end{aligned}$$

où toutes les vitesses sont définies relativement à  $\mathcal{R}$ , et  $\mathbf{u}$  désigne la vitesse de la masse  $\delta m$  lorsqu'elle ne fait pas partie de  $S'$ . Ainsi

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} dt \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S}(t) = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'}(t) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dm}{dt}. \tag{20.1}$$

En effet, dans la limite où  $\delta t \rightarrow 0$ , on a  $\delta m \rightarrow 0$  et la résultante des forces extérieures à  $S$  sur  $\delta m$  tend vers zéro. En introduisant la vitesse relative par rapport à  $S'$

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{u} - \mathbf{v} \tag{20.2}$$

de la masse sortante (fusée) ou entrante (condensation), nous obtenons le résultat suivant.

Équation du mouvement d'un système  $S'$  ouvert

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} + \mathbf{v}_r \frac{dm}{dt}. \tag{20.3}$$

On appelle **force de réaction** le terme  $\mathbf{v}_r \dot{m}$  qu'il faut ajouter à la somme des forces extérieures (gravifiques, frottements, ...) et **poussée** l'intensité de cette force de réaction.

Tableau 20.4

Fusée Saturne V	
Masse totale	2940 tonnes
<i>1<sup>er</sup> étage :</i>	
Masse de carburant	2150 tonnes
Combustion	13,3 t/s
Vitesse d'éjection	2,8 km/s
Poussée moyenne	3270 tonnes-force

20.2.2 Méthode des systèmes ouverts

La deuxième méthode – utilisée en mécanique des fluides et dans les systèmes où il y a des masses qui entrent et sortent – fait intervenir le système ouvert  $S'$  (fig. 20.3).

Soit  $\delta m_j$  la quantité de matière qui entre dans le système  $S'$  (ou qui sort de  $S'$ ) pendant  $\delta t$  et qui a une vitesse  $\mathbf{u}_j$  lorsqu'elle ne fait pas partie de  $S'$ . En répétant l'argument ayant conduit à (20.1), on obtient

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \sum_j (\mathbf{v} - \mathbf{u}_j) \frac{dm_j}{dt}. \quad (20.4)$$

De plus,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S')} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \sum_j \frac{dm_j}{dt}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S')} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} + \sum_j \mathbf{u}_j \frac{dm_j}{dt}. \quad (20.5)$$

En introduisant

$$\mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'} = \mathbf{v} \sum_j \frac{dm_j}{dt} \quad (20.6)$$

on obtient :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S')} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} + \mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'} + \sum_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}) \frac{dm_j}{dt}. \quad (20.7)$$

On en déduit une équation du bilan pour la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}^{(S')} = \mathbf{F}^{(S')} + \mathbf{j}^{(S')} \quad (20.8)$$

où  $\mathbf{j}^{(S')} = \sum_j (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}) \frac{dm_j}{dt}$  est le *flux de quantité de mouvement* et la force  $\mathbf{F}^{(S')} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} + \mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'}$  est la force exercée sur  $S'$  (par exemple dans le cas des fluides il faudra tenir compte de la force de pression exercée par le reste du fluide).

Propulsion par un  
turbo-réacteur

Considérons par exemple la propulsion d'un avion à turbo-réacteur ou l'ascension d'un hélicoptère. Dans ce cas, la masse du système  $S'$  est constante ((20.6)  $\Rightarrow \mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'} = 0$ ) et la masse entrante (air) a une vitesse nulle, d'où (20.8)

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}^{(S')} + (0 - \mathbf{v}) \left| \frac{dm}{dt} \right| - (\mathbf{u}_j - \mathbf{v}) \left| \frac{dm}{dt} \right| = \\ &= \mathbf{F}^{(S')} - \left| \frac{dm}{dt} \right| (\mathbf{v} + \mathbf{v}_r) \end{aligned} \quad (20.9)$$

où  $\mathbf{v}_j = \mathbf{v} + \mathbf{v}_r$  est la vitesse absolue de l'air après éjection par le turbo-réacteur,  $|dm/dt|$  est la masse qui traverse le système par unité de temps, et  $\mathbf{v}_r$  est la vitesse d'éjection par rapport à  $S'$ .

## 20.3 ILLUSTRATIONS

### 20.3.1 Fusées

Considérons une fusée qui éjecte les gaz avec une vitesse relative  $w = |\mathbf{v}_r|$  constante et prenons la trajectoire (supposée rectiligne) comme axe des  $x$ .

Si la fusée se déplace *dans le vide* et loin de toute masse on a  $\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext} \rightarrow S'} = 0$  et l'équation (20.3) entraîne

$$m \frac{dv}{dt} = -w \frac{dm}{dt}$$

d'où, en intégrant par rapport à  $t$ ,

$$v(t) - v_i = w \ln \frac{m_i}{m(t)}. \quad (20.10)$$

Fusée à un étage sans force de gravitation

Au contraire, si l'on considère un tir vertical au *voisinage de la Terre*, nous avons, en négligeant les frottements de l'air et la variation de  $g$  avec l'altitude,

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - w \frac{dm}{dt}$$

d'où

$$v(t) - v_i = -gt + w \ln \frac{m_i}{m(t)}. \quad (20.11)$$

Fusée à un étage avec force de gravitation

En particulier, si la vitesse de combustion est constante, c'est-à-dire telle que  $dm/dt = -\alpha m_i$  ( $\alpha^{-1}$  est de l'ordre de 200 s), nous avons  $m(t) = m_i(1 - \alpha t)$  et

$$v_f = v_i - \frac{g}{\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_i}\right) + w \ln \frac{m_i}{m_f}. \quad (20.12)$$

#### Remarque : fusée à plusieurs étages

Pour des raisons technologiques, il n'est pas possible d'avoir un rapport  $r = m_i/m_f$  supérieur à 10. Par conséquent, avec une vitesse d'éjection de 2,8 km/s, nous trouvons

$$v_f - v_i < 2,8 \ln 10 = 6,44 \text{ km/s.}$$

Par exemple, en prenant les chiffres correspondant à la fusée Saturne, on obtient  $v_f = 2,1$  km/s après la combustion du carburant du 1<sup>er</sup> étage. (La valeur réelle atteinte est 2,75 km/s et cela provient du fait que la trajectoire n'est pas verticale.)

Par conséquent, avec une fusée à un étage, il n'est pas possible de placer un satellite sur orbite géostationnaire (vitesse requise 10,3 km/s). On utilise

Fusée à plusieurs étages sans force de gravitation

alors des fusées à  $n$  étages qui se séparent du reste de la fusée une fois qu'ils ont consommé leur carburant. Si chaque étage a le même rapport de masse  $r = m_i/m_f$  (où les masses de tous les étages supérieurs doivent être prises en considération), la vitesse finale de la fusée, en négligeant les forces de gravitation, sera

$$v_f = n w \ln r \quad (20.13)$$

### 20.3.2 Mesure de la vitesse de molécules d'argent [46]

On se propose de mesurer la vitesse des molécules d'argent émises par une source à  $1090^\circ\text{C}$  au moyen du dispositif représenté sur la figure 20.5 : les molécules sont absorbées par un bloc suspendu à un dynamomètre et l'on mesure la force exercée par le dynamomètre en fonction du temps.

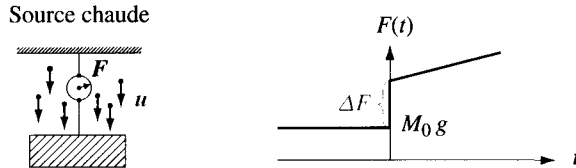


Fig. 20.5 Mesure de la vitesse de molécules d'argent.

Soit  $M(t)$  la masse du bloc et des molécules d'argent absorbées. De (20.3) on tire

$$M \frac{dv}{dt} = 0 = M(t) g + F + \frac{dM}{dt} u$$

d'où

$$F = \left( M_0 + t \frac{dM}{dt} \right) g + \frac{dM}{dt} u.$$

Par conséquent, la mesure de la pente de  $F(t)$  permet de connaître  $dM/dt$  (fig. 20.5) et l'on obtient la vitesse des molécules à partir de

$$\Delta F = F(t = +0) - F(t = -0) = \frac{dM}{dt} u.$$

## 20.4 PROBLÈMES

**20.4.1** On veut placer un satellite sur une orbite géostationnaire. Pour ce faire, on dispose de moteurs permettant une vitesse d'éjection de  $2,8 \text{ km/s}$  et l'on admet qu'il n'est pas possible d'avoir un rapport de masse  $m_i/m_f$  supérieur à 10. Quel est le nombre minimal d'étages nécessaires ?

Orbite  
géostationnaire

**20.4.2** Un hélicoptère de 10 tonnes, muni d'un rotor balayant une surface de 10 m de rayon, aspire de l'air pour le rejeter avec une vitesse  $v$ . Calculer la vitesse  $v$  nécessaire pour que l'hélicoptère reste immobile au-dessus du sol. Hélicoptère

**20.4.3** Vérifier l'équation (20.4) dans le cas d'une chaîne qui tombe sans frottement sous l'effet de la pesanteur, en considérant la partie verticale comme un système ouvert (fig. 20.6).



Fig. 20.6

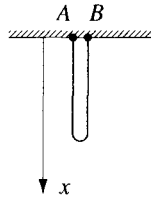


Fig. 20.7

**20.4.4** Un câble de masse  $M$  et de longueur  $L$ , est suspendu par ses extrémités  $A$  et  $B$  (fig. 20.7). A l'instant  $t = 0$ , l'extrémité  $B$  est libérée. Trouver la force exercée au point  $A$  en fonction de la position  $x$  de  $B$  en considérant les parties verticales comme des systèmes ouverts.

**20.4.5** Un tapis roulant reçoit du sable de manière continue à la vitesse  $dm/dt$ . Trouver la puissance du moteur nécessaire pour maintenir le tapis roulant à la vitesse  $v$  constante (fig. 20.8). Expliquer pourquoi  $dT/dt \neq P_{\text{moteur}}$ . Tapis roulant

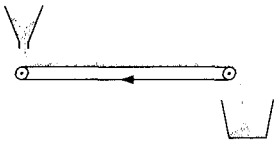


Fig. 20.8



Fig. 20.9

**20.4.6** On dispose d'un moteur de puissance  $P$  pour actionner le tapis roulant de longueur  $\ell$  de la figure 20.9. Calculer la vitesse maximale du tapis roulant si celui-ci est alimenté à la vitesse  $dm/dt$  constante.

**20.4.7** Une goutte d'eau initialement immobile tombe verticalement dans une atmosphère contenant de la vapeur d'eau immobile. Par condensation, la masse de la goutte augmente linéairement avec le temps ( $dm/dt = \alpha$ ). On admet de plus que la goutte est soumise à une force de frottement  $F^{\text{fr}} = -\lambda v$  où  $\lambda = Cm(t)$  et  $C$  est une constante. Trouver la vitesse en fonction du temps et la vitesse limite. Condensation

Indication :  $\frac{d}{dt}(mv e^{Ct}) = \left(\frac{d}{dt}(mv) + Cmv\right)e^{Ct}$ .



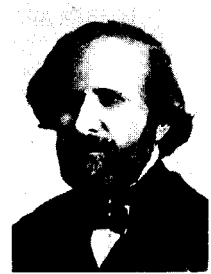
# INTRODUCTION À LA RELATIVITÉ RESTREINTE

## 21.1 INTRODUCTION

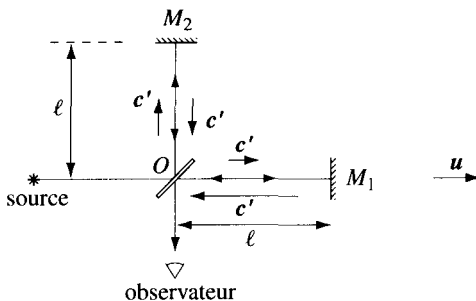
### 21.1.1 Expériences de Michelson et Morley

Nous avons brossé au chapitre 1 le tableau des expériences et des réflexions qui conduisirent Einstein à rejeter les concepts newtoniens de l'espace et du temps et à formuler une nouvelle théorie, dite *Théorie de la relativité restreinte* (1905). Il faut cependant souligner que si les lois de la mécanique sont remises en question, il n'en va pas de même des principes d'invariance qui, au contraire, se trouvent confirmés et étendus à tous les domaines de la physique.

Rappelons que les expériences de Fizeau [47] avaient montré que l'éther n'est pas entraîné par l'observateur (§ 1.5.4). Ainsi, en admettant que la lumière se déplace avec une vitesse scalaire  $c$  constante par rapport à l'éther, la vitesse de la lumière par rapport à l'observateur devait dépendre du mouvement de celui-ci par rapport à l'éther ; il devenait alors possible de mettre en évidence le mouvement absolu, c'est-à-dire le mouvement par rapport à l'éther. En 1881, Michelson [48], puis plus tard Michelson et Morley [49], commencèrent une série d'expériences de plus en plus précises pour mettre en évidence une variation de la vitesse de la lumière selon la direction de propagation, au moyen d'un interféromètre dont le principe est le suivant (fig. 21.1).



FIZEAU Hippolyte  
Physicien français  
(1819-1896)



**Fig. 21.1** Expérience de Michelson ;  $u$  vitesse de la Terre (= observateur) par rapport à l'éther ;  $c'$  vitesse de la lumière par rapport à l'observateur.

Expérience de  
Michelson et Morley

Un rayon lumineux est divisé en deux par un miroir semi-transparent  $O$  ; les deux rayons sont ensuite réfléchis par deux miroirs  $M_1$ ,  $M_2$ , et se superposent à nouveau pour atteindre l'observateur. En admettant que la vitesse de la lumière par rapport à l'éther est  $c$ , et que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther est  $u$ , il découle de la discussion du chapitre 9 que la vitesse de la lumière par rapport à la Terre est  $c' = c - u$ . Supposons que les deux bras de l'interféromètre ont même longueur  $\ell$  (ce qui n'est du reste pas essentiel) et orientons l'appareil de manière telle que le bras  $OM_1$  soit parallèle à  $u$  ; les temps mis par les rayons lumineux pour parcourir les chemins  $OM_1O$  et  $OM_2O$  sont respectivement

$$t_1 = \frac{1}{c-u} + \frac{1}{c+u} = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{1-u^2/c^2}$$

et

$$t_2 = \frac{2\ell}{c} \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

Négligeant les termes d'ordre supérieur à 2 en  $u/c$ , nous voyons qu'il y aura un déphasage  $\Delta\Phi$  entre les deux rayons, donné par

$$\Delta\Phi = \nu(t_2 - t_1) = \frac{\nu lu^2}{c^3}, \quad (21.1)$$

où  $\nu$  est la fréquence de la lumière émise par la source.

En faisant tourner tout l'appareillage de  $90^\circ$ , le déphasage sera de  $-\Delta\Phi$  et on devrait observer un déplacement des franges d'interférence.

Contrairement aux prévisions de la physique classique, on n'a observé aucune modification des franges d'interférence et ceci quelle que soit la période de l'année, ou de l'altitude à laquelle on se place. Il fallait donc conclure que  $t_1 = t_2$ . Ce résultat en contradiction avec les prédictions classiques remettait alors en question les bases conceptuelles de la mécanique newtonienne. Ces expériences furent effectuées à nouveau par Brillet et Hall en 1977 et confirmèrent les résultats de Michelson et Morley avec une précision supérieure à  $10^{-12}$ .

### 21.1.2 Développements théoriques

En 1887 déjà, Voigt cherchait à remplacer la transformation de Galilée (9.24) par une autre qui laisse invariante l'équation d'onde de l'électromagnétisme. Il était arrivé à la transformation

$$\begin{cases} x' &= x - ut \\ t' &= t - \frac{u}{c^2} x. \end{cases} \quad (21.2)$$

En 1892 Lorentz, et indépendamment Fitzgerald, introduisirent l'hypothèse suivante qui permettait d'expliquer le résultat  $t_1 = t_2$  des expériences de Michelson et Morley : tout corps solide qui se déplace avec une vitesse  $u$  par rapport à l'éther se contracte dans la direction du mouvement et sa longueur devient  $\ell' = \ell \sqrt{1 - u^2/c^2}$ , où  $\ell$  est la longueur du solide au repos.



En 1905, Poincaré avait obtenu les formules relativistes de transformation de l'espace et du temps. Cependant, il n'y vit aucune signification physique et ne réalisa pas qu'elles remettaient en question le concept de simultanéité.

Finalement, c'est Einstein [50] qui, la même année et indépendamment de Poincaré, a levé la contradiction et a rendu superflue la notion d'éther en *postulant* que la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, quel que soit le mouvement de la source. Nous avons vu au chapitre 1 que cette hypothèse a été confirmée, par exemple en mesurant la vitesse des photons émis lors de la désintégration de  $\pi^0$  à très hautes vitesses (§ 1.5.4).

## 21.2 L'ESPACE-TEMPS DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE

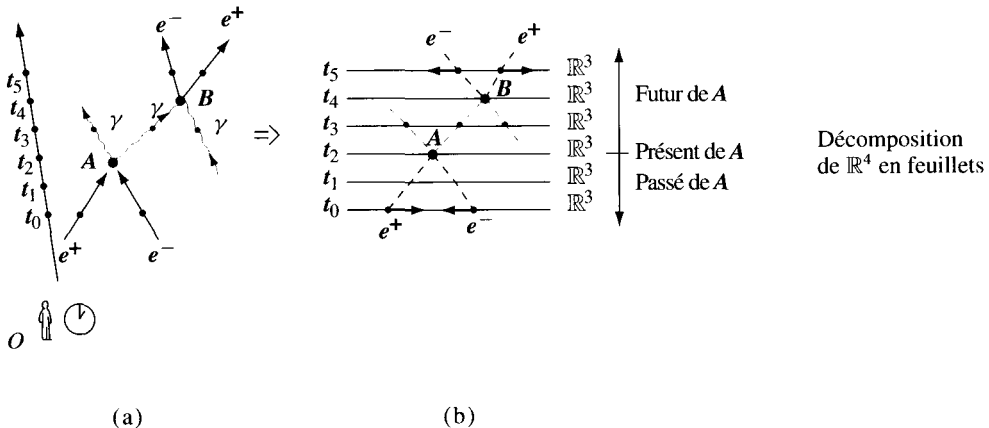
Considérons des *événements*, c'est-à-dire des phénomènes localisés dans l'espace et le temps, qu'il est possible d'identifier : création ou annihilation d'une particule, positions successives des aiguilles d'une horloge ... (fig. 21.2). Pour un observateur  $O$ , paramétriser ces événements signifie leur associer 4 nombres réels  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x})$  appelés *coordonnées*.



A. EINSTEIN  
en 1910

### 21.2.1 Description non relativiste

Dans le cadre de la physique newtonienne, la notion de simultanéité est un concept absolu, indépendant de l'observateur (§ 9.2.1), et les événements simultanés peuvent être représentés par les points d'un espace à 3 dimensions. Ceci définit une structure en feuillets de l'espace-temps, chaque feuillet étant paramétrisé par la valeur correspondante de  $t$  (fig. 21.2).



**Fig. 21.2** Description non relativiste d'un processus : (a) événements ; (b) représentation newtonienne des événements.

21.2.2 Axiome de la relativité restreinte

Pour expliquer le résultat des expériences de Michelson et Morley, Einstein généralise à toute la physique le principe de la relativité introduit en mécanique par Galilée (§ 15.2.2). Cette généralisation constitue l'axiome de base de la mécanique relativiste, axiome qu'Einstein substitue à ceux de la mécanique newtonienne. Il faut insister sur le fait que la relativité restreinte est une théorie des phénomènes physiques en l'absence de gravitation et relativement à des coordonnées cartésiennes d'espace.

Principe de la relativité restreinte (Einstein, 1905)

$c = \text{cste}$

- Il existe des référentiels privilégiés, appelés *référentiels d'inertie*, par rapport auxquels l'espace est homogène-isotrope et le temps homogène. En particulier, relativement à un référentiel d'inertie, un corps isolé à un mouvement rectiligne uniforme et, dans le vide, la lumière se déplace en ligne droite avec une vitesse qui est la même dans toutes les directions.
- Tout référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  est aussi un référentiel d'inertie. Pour les systèmes isolés, la transformation de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  est une symétrie.
- Toutes les lois de la physique sont *invariantes*, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas de forme lorsque l'on passe d'un référentiel d'inertie à un nouveau référentiel en translation uniforme par rapport au premier. Il découle de ce postulat que la lumière se déplace dans le vide avec une vitesse  $c$  indépendante du référentiel et du mouvement de la source (puisque  $c$  apparaît dans les lois de Maxwell de l'électrodynamique).

En comparant cet énoncé avec celui de la mécanique newtonienne (§ 15.2.2) on constate que l'énoncé d'Einstein est une extension de celui de Galilée à toutes les lois de la physique.

21.2.3 Paramétrisation des événements par l'observateur  $O$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$

Le principe de la relativité d'Einstein étant en contradiction avec les axiomes de base de la mécanique newtonienne (sect. 9.2), il devient nécessaire de définir très précisément la méthode utilisée pour la description du mouvement (cinématique).

Un système de coordonnées, ou « *carte* », est une paramétrisation qui à tout événement  $E$  associe 4 nombres réels  $x_E = (x_E^0, x_E^1, x_E^2, x_E^3)$ , tels que  $x_E^0 = ct_E$  où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $t_E$  paramétrise l'instant de l'événement et  $x_E = (x_E^1, x_E^2, x_E^3)$  sont trois coordonnées cartésiennes paramétrisant le lieu de

cet événement (soit le point coïncidant dans  $\mathcal{R}$ ). De cette manière les quatre coordonnées  $x_E^\mu$  ont même dimension. Par la suite nous adoptons la notation

$x_E^\mu$  lorsque  $\mu = 0, 1, 2, 3$

$x_E^i$  lorsque  $i = 1, 2, 3$ , par exemple  $x \cdot y = \sum_{i=1}^3 x^i y^i$ .

La paramétrisation de l'événement  $E$  par  $x_E^\mu$  s'effectue en imposant la condition postulée dans le principe de la relativité restreinte (§ 21.2.2).

### Condition 1. « Constance de la vitesse de la lumière »

Dans le vide et par rapport à un référentiel d'inertie la lumière se propage en ligne droite avec une vitesse  $c$  indépendante de la direction, du mouvement de la source et du référentiel.

Pour la vitesse de la lumière on prendra soit  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ , soit  $c = 1$  (comme cela est l'usage en relativité).

Paramétrisation  
des événements

Nous allons montrer que cette condition 1 permet de paramétriser les événements en utilisant uniquement des rayons lumineux émis par l'observateur, puis reçus par l'observateur après réflexion sur l'événement en question.

Remarquons pour commencer que si deux événements  $A$  et  $B$  sont reliés par un rayon lumineux (fig. 21.4 a), la condition 1 entraîne alors nécessairement

$$|\Delta \mathbf{x}| = c |\Delta t| \quad (\text{par définition de la vitesse}), \quad (21.3)$$

$$\text{où } |\Delta \mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^3 (x_B^i - x_A^i)^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

$$\text{et } c \Delta t = c(t_B - t_A) = x_B^0 - x_A^0 = \Delta x^0.$$

Par conséquent, si  $A$  et  $B$  sont reliés par un rayon lumineux, on doit avoir  $|\Delta \mathbf{x}| = |\Delta x^0|$ , c'est-à-dire

Propagation  
de la lumière

$$\sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 - (\Delta x^0)^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu. \quad (21.4)$$

Pour paramétriser les événements, l'observateur  $O$  (supposé immobile dans un référentiel d'inertie) dispose d'une horloge à l'endroit où il se trouve. Cette horloge est schématisée par un tube rigide, fermé aux deux extrémités par des miroirs parallèles  $M_1$  et  $M_2$ , entre lesquels chemine un rayon lumineux, avec  $M_1$  au même endroit que l'observateur (« tube à lumière », fig. 21.3). En prenant la longueur du tube égale à  $0,5 [L]$ , les « secondes » sont définies par les réflexions successives du rayon sur le miroir  $M_1$ .

Horloge

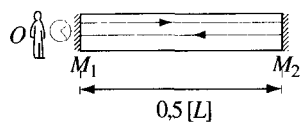


Fig. 21.3 Horloge pour l'observateur  $O$ .

Soit en  $E_n$ , l'événement défini par la  $n^e$  réflexion du rayon sur le miroir  $M_1$ , c'est-à-dire par le  $n^e$  « tic » de l'horloge (fig. 21.4 a). Ces événements  $E_n$  sont paramétrisés par l'observateur  $O$  au moyen des quatre nombres ( $x_n^0 = ct_n = n, 0, 0, 0$ ) et il peut les représenter sur une « carte », c'est-à-dire un diagramme défini par quatre axes orthogonaux, dont l'un est  $x^0 = ct$  et les trois autres  $x^1, x^2, x^3$ , gradués de manière identique (fig. 21.4 b). L'axe  $x^0$  représente l'observateur avec son horloge ; l'événement  $E_n$ ,  $n^e$  « tic » de l'horloge, est représenté par  $(n, 0, 0, 0)$  sur cet axe. Nous reviendrons par la suite sur l'interprétation physique des trois autres axes. De cette manière, dès que nous aurons paramétrisé les événements, il sera possible de les représenter par des points sur la carte de l'observateur  $O$ .

La condition 1 implique que si l'événement  $B$  est relié à l'événement  $A$  par un rayon lumineux alors  $|\Delta x^0| = |\Delta x|$  et, sur la carte de l'observateur  $O$ , l'événement  $B$  est représenté par un point sur le cône de sommet  $A$ , d'axe  $x^0$  et d'angle au sommet égal à  $45^\circ$ . Ce cône est appelé cône de lumière (fig. 21.4 b).

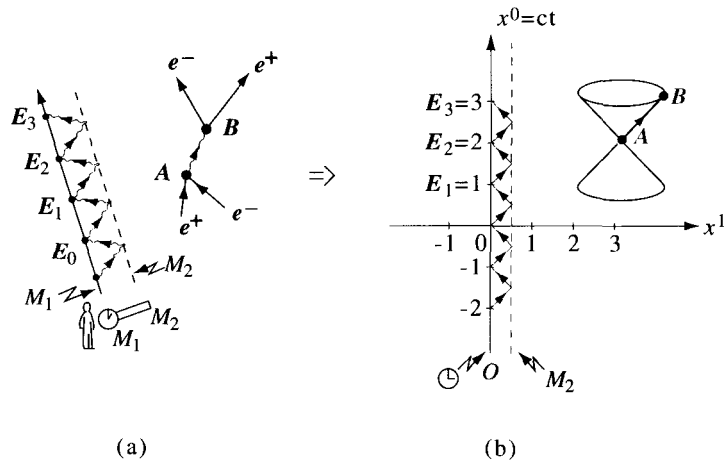


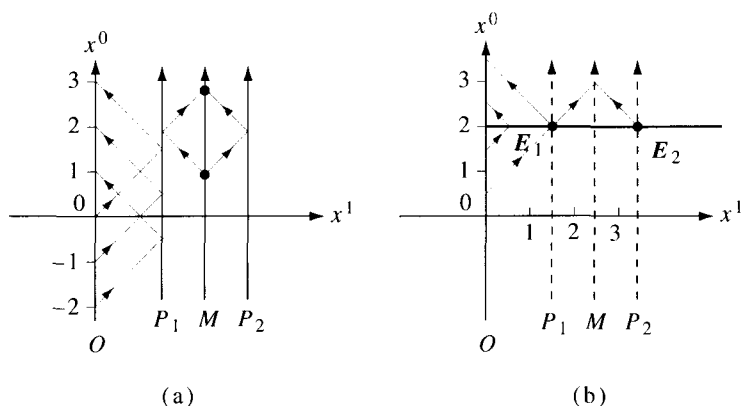
Fig. 21.4 (a) Événements physiques  $A$  et  $B$  ; (b) représentation des événements sur la carte de l'observateur  $O$ . L'axe  $x^0 = ct$  représente l'observateur avec son horloge.

A ce stade il nous faut introduire quelques définitions.

• Le point  $P$  est *immobile par rapport à l'observateur  $O$* , si les intervalles de temps entre l'émission d'un rayon par  $O$  et sa réception par  $O$  (suite à une réflexion sur  $P$ ) sont constants. En particulier le miroir  $M_2$  du tube de lumière est immobile par rapport à  $O$ .

Il découle de cette définition qu'un point  $P$  est immobile par rapport à  $O$  si et seulement si il est représenté par une droite parallèle à  $x^0$  (fig. 21.5 a).

Les droites parallèles à  $x^0$  représentent les lignes d'univers de points immobiles par rapport à  $O$ .



**Fig. 21.5** (a) Les points  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M$  sont immobiles par rapport à  $O$ ; le point  $M$  est mis à mi-distance de  $P_1$  et  $P_2$ ; (b) les événements  $E_1$  et  $E_2$  sont simultanés par rapport à  $O$  tous les points de l'axe  $x^1$  sont simultanés à l'instant  $t = 0$  de l'horloge de l'observateur.

- Le point  $M$  (immobile) est à *mi-distance des points*  $P_1$ ,  $P_2$  (immobiles) par rapport à  $O$ , si les rayons émis de  $M$  et réfléchis par  $P_1$  et  $P_2$  sont reçus simultanément au point  $M$  (fig. 21.5 a). Par conséquent la ligne d'univers du point  $M$  est au milieu des lignes d'univers de  $P_1$  et  $P_2$ .
- Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont *simultanés par rapport à l'observateur*  $O$ , si les rayons émis lors de ces événements sont reçus simultanément au point  $M$  à mi-distance des points  $P_1$  et  $P_2$  coïncidant avec  $E_1$  et  $E_2$  (fig. 21.5 b).

Il suit de cette définition que deux événements sont simultanés par rapport à  $O$  si et seulement si ils sont sur un 3-plan perpendiculaire à  $x^0$ , c'est-à-dire  $x^0 = \bar{x}^0 = \text{cste}$ . En particulier le 3-plan  $x^0 = 0$  représente l'ensemble des événements simultanés à l'instant  $t = 0$  de l'observateur.

Événements  
simultanés

Pour simplifier la discussion nous allons considérer des événements ayant lieu sur une même droite, choisie comme axe  $x^1$ . (On peut également dire que l'on considère un espace-temps à  $1 + 1$  dimensions, soit 1 dimension de temps et 1 dimension d'espace.) Supposons que l'observateur  $O$  envoie un signal lumineux dans le sens positif de l'axe 1 et que ce signal soit réfléchi par l'événement  $A$  (fig. 21.6). Appelons  $t_A^e$  le temps d'émission et  $t_A^r$  le temps de réception du signal par l'observateur. La condition (21.3) implique

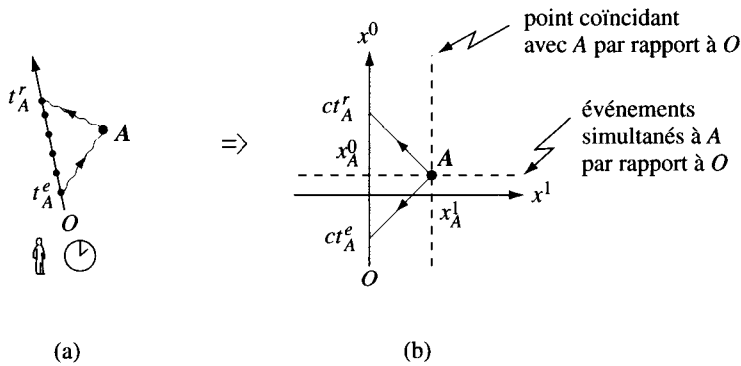
$$\begin{cases} x_A^1 - 0 &= c(t_A - t_A^e) \\ 0 - x_A^1 &= -c(t_A^r - t_A). \end{cases} \quad (21.5)$$

L'observateur  $O$  peut ainsi paramétrer l'événement  $A$  ayant lieu sur l'axe 1 par les formules

Paramétrisation  
de l'évènement  $A$

$$\begin{cases} x_A^0 = \frac{c}{2} (t_A^r + t_A^e) = ct_A \\ x_A^1 = \pm \frac{c}{2} (t_A^r - t_A^e) \\ x_A^2 = x_A^3 = 0. \end{cases} \quad (21.6)$$

et le représenter sur sa carte (fig. 21.6). Le signe  $\pm$  correspond aux événements sur la partie positive/négative de l'axe.



**Fig. 21.6** Paramétrisation de l'évènement  $A$  ; les rayons lumineux sont représentés par des droites faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'axe  $x^0$ .

Il découle des définitions ci-dessus qu'un point  $P$  est immobile par rapport à  $O$  si et seulement si sa ligne d'univers est représentée par ( $x^0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_P^1 = \bar{x}_P^1 = \text{cte}$ ) : en effet on aura par définition de « immobile »,  $t_A^r - t_A^e = \text{cte}$ , d'où de (21.6)

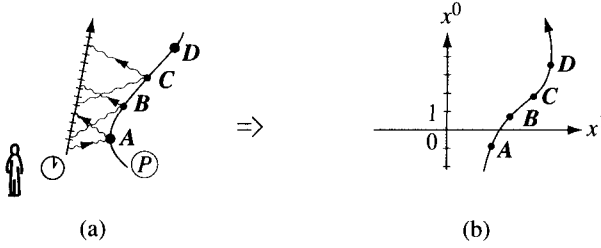
$$x_P^1 = \text{cte} = \bar{x}_P^1.$$

De même deux événements  $E$  et  $E'$  sont simultanés par rapport à  $O$  si et seulement si  $t_E = t_{E'}$  (soit  $x_E^0 = x_{E'}^0$ ), c'est à dire

$$t_E^r + t_E^e = t_{E'}^r + t_{E'}^e \quad (21.7)$$

Finalement considérons l'évolution d'un point matériel. En utilisant des rayons, l'observateur  $O$  peut représenter les événements « réflexions par le point matériel » par une succession de points sur sa carte. La courbe ainsi définie est la *ligne d'univers*  $x = x(t)$  du point matériel (fig. 21.7).

Ligne d'univers



**Fig. 21.7** (a) Évolution du point matériel  $P$  ; (b) ligne d'univers de  $P$  sur la carte de l'observateur  $O$ .

**Par définition, l'observateur  $O'$  est en translation uniforme par rapport à  $O$ , si sa ligne d'univers est une droite (sur la carte de  $O$ ).**

Translation uniforme

Dans ce cas nous avons

$$x^1(t + \Delta t) - x^1(t) = u \Delta t, \quad \text{où} \quad u = v_{O'}_O = \text{cste}$$

$$\text{soit} \quad \Delta x^1 = \frac{u}{c} \Delta x^0.$$

Par conséquent la ligne d'univers de  $O'$  (sur la carte de  $O$ ) est une droite faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $x^0$  (fig. 21.8 b) où

$$\tan \theta = \frac{u}{c} \quad \text{et} \quad u = v_{\mathcal{R}'}_{\mathcal{R}}. \quad (21.8)$$

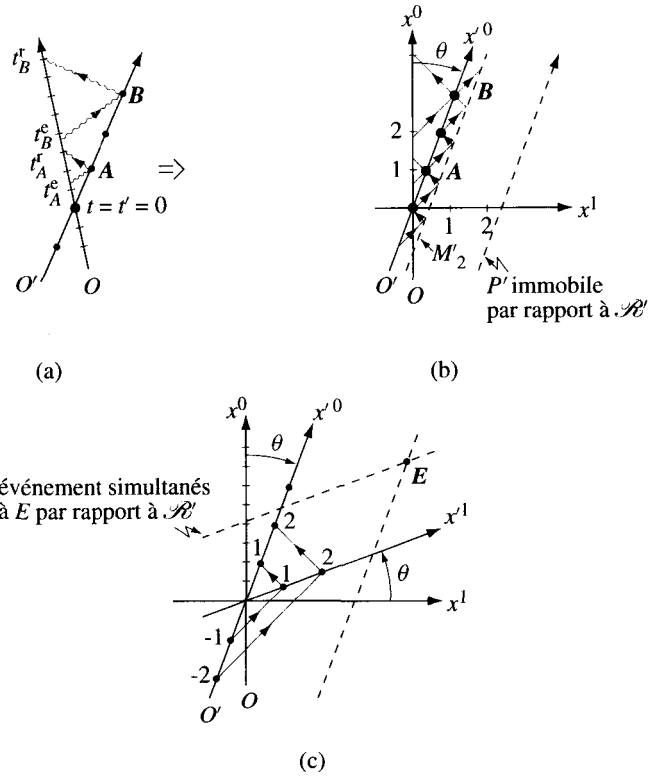
## 21.3 TRANSFORMATIONS DE LORENTZ

### 21.3.1 Observateur en translation uniforme par rapport à $O$

Dans cette section, nous considérons un observateur  $O'$  en *translation uniforme dans la direction 1* par rapport à l'observateur  $O$  (= référentiel d'inertie). Nous voulons obtenir la relation, appelée transformation de Lorentz, entre les paramétrisations  $\{x^\mu\}$  et  $\{x'^\mu\}$  d'un même événement, effectuées par les observateurs  $O$  et  $O'$ .

$$v_{O'}_O = u = \text{cste}$$

Nous admettons que tous les observateurs en translation uniforme par rapport à  $O$  suivent la méthode de la section 21.2 pour définir leur horloge et paramétriser les événements. De plus pour simplifier, nous admettons que les observateurs sont au même endroit à l'instant  $t = 0$  sur l'horloge de  $O$ , et, qu'à cet instant, les horloges de tous les observateurs indiquent la valeur zéro, ce qui n'est rien d'autre qu'un choix de l'origine du temps par les observateurs (fig. 21.8).



**Fig. 21.8** (a) Événements  $A, B$  définis par les « secondes » de  $O'$ ; (b) ligne d'univers de  $O'$  sur une carte de l'observateur  $O$ ; (c) l'axe  $x'^1$  représente l'ensemble des événements simultanés à  $t' = 0$  par rapport à  $O'$ .

Comme nous l'avons vu (§ 21.2.3) la ligne d'univers de l'observateur  $O'$  sur la carte de  $O$  est une droite et  $\tan \theta = u/c$ .

L'énoncé du principe de la relativité nous conduit à introduire la condition suivante.

**Condition 2. « Homogénéité du temps »**

- Tout référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation uniforme par rapport à un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$  est également un référentiel d'inertie.
- Si  $\mathcal{R}'$  est en translation uniforme par rapport à  $\mathcal{R}$ , les « secondes » de  $\mathcal{R}'$  définissent des intervalles de temps égaux par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Il découle de cette condition 2 que les « secondes », ou « tocs », de l'horloge en mouvement (=  $E'_n$  « secondes de  $O'$  ») sont représentés

$$\begin{aligned} \text{sur la carte de } O' \quad & \text{par } E'_n = (x_n'^0 = ct_n' = n, 0) \\ \text{et sur la carte de } O \quad & \text{par } E'_n = (x_n^0 = \gamma x_n'^0, x_n^1 = \gamma \frac{u}{c} x_n'^0) \end{aligned} \quad (21.9)$$

où  $\gamma$  est une constante qui dépend de  $O$  et  $O'$  à déterminer.



En effet, par la condition 2, on doit avoir  $x_{n+1}^0 - x_n^0$  indépendant de  $n$  et  $x_n^1/x_n^0 = \tan \theta = u/c$ .

**Propriété 1.** Les points immobiles par rapport à  $O'$  sont représentés sur la carte de  $O$  par des droites parallèles à  $x'^0$  : tous les points immobiles par rapport à  $O'$  ont même vitesse  $u = v_{O'}_O = c \tan \theta$  par rapport à  $O$ .

Carte de  
l'observateur  $O$

Cette propriété est une conséquence de la définition (§ 21.2.3) et de la condition 2 (les secondes de  $O'$  définissent des intervalles de temps égaux par rapport à  $O$ ).

**Propriété 2.** Les événements simultanés par rapport à  $O'$  sont représentés sur la carte de  $O$  par une droite faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $x^1$ , où  $\tan \theta = u/c$  (fig. 21.8 c).

En effet de (21.7) les événements  $E$  simultanés à  $t' = 0$  par rapport à  $O'$  sont tels que  $t'_E = -t''_E$  ; en construisant les rayons lumineux à  $45^\circ$ , on conclut que les événements simultanés à  $t' = 0$  sont situés sur la droite faisant un angle  $\theta$  avec  $x^1$ . La démonstration est identique pour n'importe quel  $t'$ .

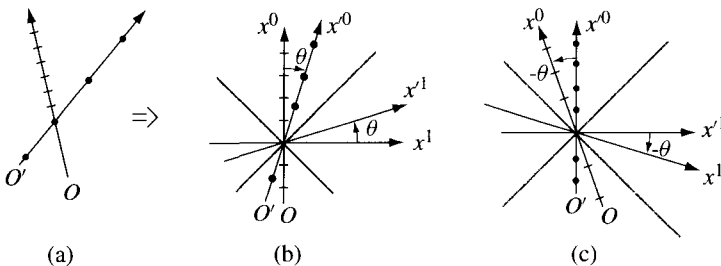
En conclusion, le concept de simultanéité n'est plus un concept absolu, mais devient un concept relatif qui dépend des observateurs.

Simultanéité

**Propriété 3.** Sur la carte de l'observateur  $O'$  la ligne d'univers de l'observateur  $O$  est une droite faisant un angle  $\theta' = -\theta$  avec l'axe  $x'^0$  (fig. 21.9 c), d'où

$$v_{O'}_O = -v_O_{O'} \quad (21.10)$$

Carte de  
l'observateur  $O'$



**Fig. 21.9** (a)  $O'$  en translation uniforme par rapport à  $O$ ; (b) carte de l'observateur  $O$ ; (c) carte de l'observateur  $O'$ .

En effet, par définition, la vitesse de  $O'$  par rapport à  $O$  est obtenue en envoyant un rayon lumineux et en mesurant les temps d'émission  $t^e$  et de réception  $t^r$ . De (21.6)

$$u = v_{O'}_O = \frac{x^1}{t} = \frac{t^r - t^e}{t^r + t^e} = \frac{t^r/t^e - 1}{t^r/t^e + 1},$$
$$u' = v_O_{O'} = \frac{x'^1}{t'} = -\frac{t'^r/t'^e - 1}{t'^r/t'^e + 1}.$$

Mais en vertu de la condition 2 (et du choix de l'origine du temps :  $t = t' = 0$ )

$$t^r/t^e = t'^r/t'^e$$

et l'on obtient  $u' = -u$ .

21.3.2 Transformation de Lorentz

Jusqu'ici l'unité de longueur choisie par les différents observateurs (tube de lumière) était entièrement arbitraire. Pour obtenir les formules de transformation de coordonnées d'un observateur  $O$  à un observateur  $O'$ , il nous faut ajuster la longueur des tubes de lumière de tous les observateurs. Cette « synchronisation » des horloges s'effectue en imposant la condition suivante qui exprime le principe de la relativité selon lequel tous les observateurs en translation uniforme sont équivalents.

Condition 3. « Ajustement des horloges »

La durée des secondes de l'observateur  $O'$  mesurée par l'observateur  $O$  est égale à la durée des secondes de l'observateur  $O$  mesurée par l'observateur  $O'$ .

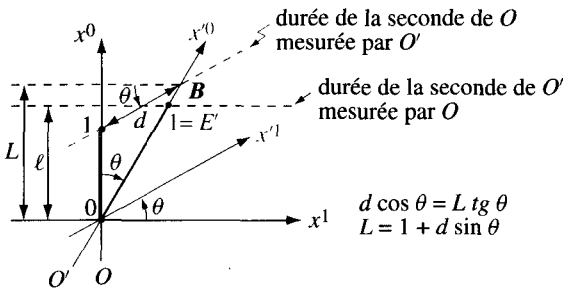


Fig. 21.10 Paramétrisation de  $E'$ , la « seconde » de l'horloge  $O'$ , par l'observateur  $O$ .

Cherchons pour commencer la paramétrisation  $(x^0, x^1)$  par l'observateur  $O$  de l'événement  $E'$  de paramétrisation  $(x'^0 = 1, x'^1 = 0)$  par l'observateur  $O'$ , c'est-à-dire le premier « toc » de l'horloge de  $O'$ .

Comme on le voit sur la figure 21.10, les conditions 2 et 3 impliquent

$$\frac{\ell}{1} = \frac{|OB|}{|OE'|} = \frac{L}{\ell}$$

d'où  $\ell^2 = L = 1 + d \sin \theta = 1 + L(\sin^2 \theta / \cos^2 \theta)$  et  $L(1 - \tan^2 \theta) = 1$ .

Par conséquent

$$\ell^2 = (x^0)^2 = 1 + \frac{\tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 - u^2/c^2}$$

et de (21.9)

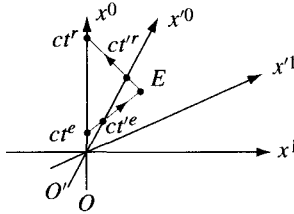
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (21.11)$$

En conclusion de (21.9) et (21.11) on obtient la paramétrisation de l'axe  $x'^0$  par l'observateur  $O$  :

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 = 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} x'^0 \\ x^1 = \frac{u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} x'^0 \end{pmatrix} \quad (21.12)$$

Paramétrisation  
de l'axe  $x'^0$   
par l'observateur  $O$

Nous avons alors toutes les informations nécessaires pour relier les paramétrisations d'un même événement  $E$  par les observateurs  $O$  et  $O'$  (fig. 21.11).



**Fig. 21.11** Paramétrisation de l'événement  $E$  par  $O$  et  $O'$ .

De (21.6), par rapport à  $O'$ ,  $E$  est paramétrisé par

$$\begin{cases} x'^0 = \frac{c}{2} (t'^r + t'^e) \\ x'^1 = \frac{c}{2} (t'^r - t'^e). \end{cases}$$

Par rapport à  $O$ ,  $E$  est paramétrisé par

$$\begin{cases} x^0 = \frac{c}{2} (t^r + t^e) \\ x^1 = \frac{c}{2} (t^r - t^e). \end{cases}$$

D'autre part, de (21.12) l'événement  $(x'^0 = ct', x'^1 = 0)$  est paramétrisé par  $O$  par les coordonnées

$$(x^0 = \gamma ct', x^1 = \gamma ut'), \quad \gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2},$$

et de  $\Delta x^1 = \pm \Delta x^0$  pour un rayon lumineux on obtient :

$$\gamma ut'^e = (\gamma ct'^e - ct^e) \quad \text{soit} \quad ct^e = \gamma(c - u)t'^e$$

$$-\gamma ut'^r = -(ct^r - \gamma ct'^r) \quad \text{soit} \quad ct^r = \gamma(c + u)t'^r.$$

D'où

$$\begin{cases} x^0 = \frac{1}{2}\gamma [(c + u)t'^r + (c - u)t'^e] = \gamma \left[ x'^0 + \frac{u}{c}x'^1 \right] \\ x^1 = \frac{1}{2}\gamma [(c + u)t'^r - (c - u)t'^e] = \gamma \left[ x'^1 + \frac{u}{c}x'^0 \right]. \end{cases}$$

### 21.3.3 Conclusions

Soit  $O'$  un observateur en translation uniforme par rapport à l'observateur  $O$ , de vitesse  $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$  :

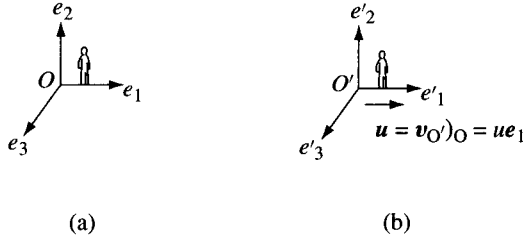


Fig. 21.12 Transformation de Lorentz dans la direction 1.

La relation entre les paramétrisations  $x = \{x^\mu\}$  et  $x' = \{x'^\mu\}$  d'un même événement par les observateurs  $O$  et  $O'$  s'exprime par la *transformation linéaire*

$$x' = L(u)x, \quad \text{soit} \quad x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 L^\mu_{\nu} x^\nu,$$

appelée **transformation de Lorentz dans la direction 1**, définie par les formules suivantes :

$x^0 = \gamma(x'^0 + \frac{u}{c}x'^1)$	$x'^0 = \gamma(x^0 - \frac{u}{c}x^1)$	(21.13)    Transformation de Lorentz
$x^1 = \gamma(\frac{u}{c}x'^0 + x'^1)$	$x'^1 = \gamma(-\frac{u}{c}x^0 + x^1)$	
$x^2 = x'^2$	$x'^2 = x^2$	
$x^3 = x'^3$	$x'^3 = x^3$	
$x = L^{-1}(u)x' = L(-u)x'$ $x' = L(u)x$		
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad u = v_O)_O = ue_1$		

Remarquons que nous avons posé  $x'^2 = x^2$  et  $x'^3 = x^3$  pour des raisons de symétrie. Rappelons également que  $x^0 = ct$  et  $x'^0 = ct'$ .

De même que la transformation de Galilée, la *transformation de Lorentz de vitesse*  $u = v_O)_O$  peut s'écrire sous forme vectorielle et l'on a

$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \frac{1}{c}u \cdot x) \\ x' = x + (\gamma - 1)\frac{u \cdot x}{u^2}u - \gamma x^0 \frac{u}{c} \end{cases} \quad (21.14)$$

Le paramètre **rapidité**  $\eta$  est la grandeur définie par

Rapidité  $\eta$

$$\tanh \eta = \frac{u}{c} = \tan \theta \quad (21.15)$$

et l'on a :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \cosh \eta,$$

$$\gamma \frac{u}{c} = \sinh \eta.$$

Avec l'aide du paramètre  $\eta$  la matrice  $L$  associée à la transformation de Lorentz (21.13) s'écrit

$$L(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21.16) \quad \begin{array}{l} \text{Analogie avec} \\ \text{les rotations} \end{array}$$

Des propriétés des fonctions  $\sinh \eta$  et  $\cosh \eta$

$$\cosh \eta_1 \cosh \eta_2 + \sinh \eta_1 \sinh \eta_2 = \cosh(\eta_1 + \eta_2)$$

$$\cosh \eta_1 \sinh \eta_2 + \sinh \eta_1 \cosh \eta_2 = \sinh(\eta_1 + \eta_2)$$

on obtient immédiatement la propriété suivante.

**Propriété 1. Loi de composition**

Groupe

1. L'ensemble des transformations de Lorentz dans la direction 1 est un groupe, avec la loi de composition

$$L(\eta_2) \circ L(\eta_1) = L(\eta_2 + \eta_1)$$

2. Le produit de deux transformations de Lorentz dans la direction 1, de vitesses respectives  $u$  et  $v$ , est une transformation de Lorentz dans la direction 1 de vitesse  $w$  avec

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2} \tag{21.17}$$

Cette expression est une conséquence de la relation

$$\tanh(\eta_1 + \eta_2) = \frac{\tanh \eta_1 + \tanh \eta_2}{1 + \tanh \eta_1 \cdot \tanh \eta_2}.$$

Finalement les formules de la transformation de Lorentz impliquent le résultat suivant (fig. 21.13).

**Propriété 2. Unités sur la carte de  $O'$**

1. L'événement  $(x'^0 = 0, x'^1 = 1)$ , c'est-à-dire l'extrémité de la règle unité de l'observateur  $O'$  dans la direction 1 à l'instant  $t' = 0$ , est représenté sur la carte de  $O$  par un point sur l'hyperbole

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 = 1. \tag{21.18}$$

2. L'événement  $(x'^0 = 1, x'^1 = 0)$ , c'est-à-dire l'unité de l'horloge de  $O'$ , est représenté sur la carte de  $O$  par un point sur l'hyperbole

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = 1 \tag{21.18 bis}$$

Seconde et mètre de  $O'$  sur la carte de  $O$

En effet :

$(x'^0 = 0, x'^1 = 1)$	implique	$(x^0 = \gamma \frac{u}{c}, x^1 = \gamma)$
$(x'^0 = 1, x'^1 = 0)$	implique	$(x^0 = \gamma, x^1 = \gamma \frac{u}{c})$

et

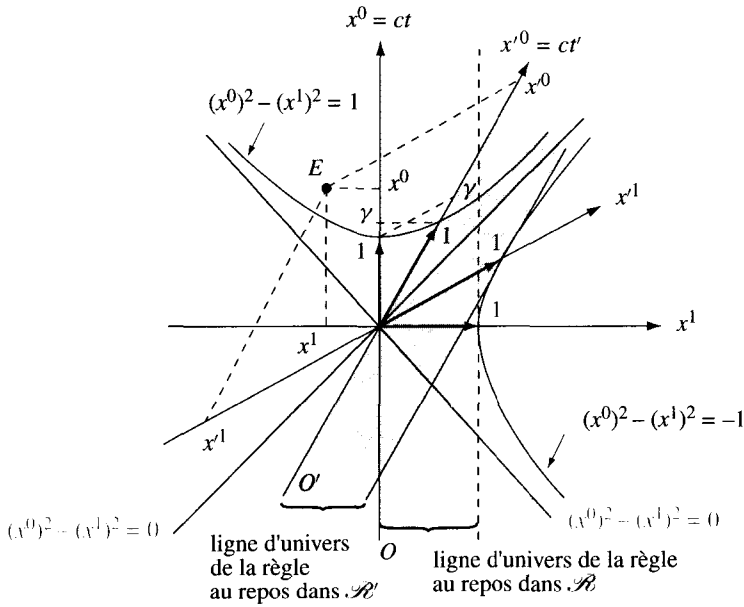


Fig. 21.13 Contraction des longueurs et dilatation de temps.

## 21.4 CONSÉQUENCES DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

### 21.4.1 Invariant

Pour tout couple d'événements  $A$  et  $B$  la grandeur  $\Delta\tau^2$ , ou  $\Delta s^2$ , définie par

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = -\Delta s^2 \quad (21.19) \quad \text{Invariant}$$

où  $\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu$

est un *invariant*, c'est-à-dire une grandeur indépendante du référentiel choisi.

En effet, de (21.13) on a

$$(\Delta x'^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x'^i)^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \gamma^2 \left[ (\Delta x^0 - \frac{u}{c} \Delta x^1)^2 - (\frac{u}{c} \Delta x^0 - \Delta x^1)^2 \right] - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \\ &= (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2. \end{aligned}$$

Intervalles

Si  $c^2 \Delta t^2 - |\Delta \mathbf{x}| = c^2 \Delta \tau^2$  est positif, l'intervalle  $\Delta x = \{\Delta x^\mu\}$  est dit du **genre temps** et  $\Delta \tau$  est l'**intervalle de temps propre** entre les événements A et B.  
Si  $c^2 \Delta t^2 - |\Delta \mathbf{x}| = -\Delta s^2$  est négatif, donc  $\Delta s^2 > 0$ , l'intervalle  $\Delta x = \{\Delta x^\mu\}$  est dit du **genre espace** et  $\Delta s$  est l'**intervalle de longueur propre** entre A et B.

On écrit généralement (21.19) sous la forme

$$c^2 \Delta \tau^2 = - \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{21.20}$$

Tenseur métrique

avec  $\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Espace de Minkowski

L'espace  $\mathbb{R}^4$  muni de la métrique (21.20) est appelé **espace de Minkowski** et  $g_{\mu\nu}$  est la **tenseur métrique** de la relativité restreinte.

21.4.2 Formule de transformation des vitesses

Soit  $O'$  en translation de vitesse  $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_1$  par rapport à  $O$ . La relation entre les vitesses  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}'$  d'un point  $P$  relativement à  $O$  et  $O'$  est donnée par les formules

Transformation des vitesses

$$\begin{cases} v^1 = \frac{v'^1 + u}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} / c^2} \\ v^2 = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} / c^2} v'^2 \\ v^3 = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u} / c^2} v'^3 \end{cases} \tag{21.21}$$



DÉMONSTRATION. Soit  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t')$  l'évolution de  $P$  par rapport à  $O'$  et  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  la même évolution par rapport à  $O$ . De (21.13), avec  $x^0 = ct$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\{x'^{\mu}(t')\}), \quad t = t(\{x'^{\mu}(t')\})$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \left( \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'^{\mu}} \frac{dx'^{\mu}}{dt'} \right) \cdot \left( \frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = \\ &= (\gamma (v^1 + u), v'^2, v'^3) \left( \frac{dt}{dt'} \right)^{-1} \end{aligned}$$

et  $\frac{dt}{dt'} = \gamma (1 + \frac{u}{c^2} v'^1)$  ce qui établit (21.21).

### 21.4.3 Remarques

- Dans la limite où  $|u| \ll c$ , on obtient la transformation de Galilée (§ 9.4.1) et la formule non relativiste de composition des vitesses (§ 9.3.2).
- Si la vitesse  $\mathbf{v}$  du point  $P$  par rapport à  $O'$  est parallèle à la vitesse de  $O'$  par rapport à  $O$ , on retrouve de (21.21) la loi de composition des vitesses (21.17).
- Dans la cinématique de Newton il y a deux invariants  $\Delta t$  et  $|\Delta \mathbf{x}|$ ; dans celle d'Einstein il y a également deux invariants  $c$  et  $\Delta \tau$ .
- De (21.21) on conclut que si la vitesse d'un point  $P$  est égale à  $c$  par rapport à  $O'$ , elle sera aussi égale à  $c$  par rapport à  $O$ , quel que soit  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{O'}\big|_O$ .

### 21.4.4 Vecteurs et tenseurs et relativité restreinte

En relativité on adopte toujours la *convention d'Einstein* (§ 4.5.4) : un même indice répété deux fois, une fois en haut, l'autre en bas, indique automatiquement une sommation. Ainsi on écrira (21.20) sous la forme

$$c^2 \Delta \tau^2 = -g_{\mu\nu} \Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu}.$$

Par définition un **quadrivecteur contravariant** est un ensemble de 4 grandeurs de même nature  $(\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3) = \{\omega^{\mu}\} = \omega$ , définies relativement à tout référentiel d'inertie muni d'un système de coordonnées  $\{x^{\mu}\}$ , qui se transforment selon (21.13) lors d'un changement de référentiel d'inertie, c'est-à-dire

$$\omega'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} \omega^{\nu} \quad (21.22)$$

De même que les 3-vecteurs en mécanique newtonienne (espace à 3 dimensions), les 4-vecteurs en mécanique relativiste (espace-temps à 4 dimensions)

définissent des grandeurs ayant une signification intrinsèque, indépendamment de tout système de coordonnées.

*Attention !* Les quatre nombres  $\{x^\mu\}$ , qui paramétrisent un événement, ne définissent pas un vecteur ; en effet pour une transformation de Lorentz inhomogène (c'est-à-dire avec translation  $s^\mu$  de l'origine), ils se transforment selon

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu + s^\mu. \quad (21.23)$$

Au contraire, l'intervalle entre les événements  $A$  et  $B$ ,  $\Delta x = \{\Delta x^\mu = x_B^\mu - x_A^\mu\}$  est un vecteur contravariant car

$$\Delta x'^\mu = L^\mu_\nu \Delta x^\nu. \quad (21.24)$$

A partir de la matrice  $L$ , on définit, comme dans le cas à 3-dimensions (Appendice B), les tenseurs  $p$  fois contravariants et  $q$  fois covariants.

## 21.5 PROPRIÉTÉS DE L'ESPACE-TEMPS

### 21.5.1 Futur, passé et ailleurs de l'événement $E$

**Cône de lumière** Considérons un événement  $E$ . Le *cône de lumière* de  $E$  est défini par l'ensemble des points associés au front d'onde d'un signal lumineux émis par  $E$ . Il est représenté par les points  $(x^0, \mathbf{x})$  tels que

$$c^2 \Delta \tau^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta \mathbf{x}^2 = 0 \quad \text{où} \quad \Delta x^\mu = x^\mu - x_E^\mu \quad (21.25)$$

En vertu de l'invariance de  $\Delta \tau$  (§ 21.4.1), la surface (21.25) décompose l'espace des événements en quatre régions *indépendantes des observateurs* (d'inertie) : le futur, le passé, l'ailleurs et le cône de lumière de  $E$  (fig. 21.14).

**Futur** Le *futur* de  $E$  est l'ensemble des événements, paramétrisés relativement à  $O$  par  $(x^0, \mathbf{x})$ , tels que

$$c^2 \Delta \tau^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta \mathbf{x}^2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta x^0 = c \Delta t > 0. \quad (21.26)$$

Pour tout événement  $E_1$  dans le futur de  $E$ , l'intervalle  $\Delta x$  est du genre temps, et il existe un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  par rapport auquel  $E$  et  $E_1$  ont lieu au même endroit, c'est-à-dire  $\Delta \mathbf{x}' = 0$  (fig. 21.14). Dans ce cas  $\Delta t' = \Delta \tau$ .

L'intervalle de temps propre  $\Delta \tau$  entre les deux événements  $E$  et  $E_1$  est égal à l'intervalle de temps mesuré par l'horloge dans ce référentiel d'inertie où  $E$  et  $E_1$  ont lieu au même endroit. Par rapport à tout autre référentiel  $|\Delta t| \geq \Delta \tau$ .

**Passé** Le *passé* de  $E$  est l'ensemble des événements  $(x^0, \mathbf{x})$  tels que

$$c^2 \Delta \tau^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta \mathbf{x}^2 > 0 \quad \text{et} \quad \Delta x^0 = c \Delta t < 0 \quad (21.27)$$

De nouveau pour tout événement  $E_2$  dans le passé de  $E$ , il existe un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}''$  par rapport auquel  $E$  et  $E_2$  ont lieu au même endroit (fig. 21.14).

L'ailleurs de  $E$  est l'ensemble des événements  $(x^0, x)$  tels que

Ailleurs

$$c^2 \Delta \tau^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta x^2 = -\Delta s^2 < 0. \quad (21.28)$$

Pour tout événement  $E_3$  dans l'ailleurs de  $E$ , l'intervalle  $\Delta x$  est du genre espace, et il existe un référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'''$  par rapport auquel  $E$  et  $E_3$  sont simultanés, c'est-à-dire  $\Delta t''' = 0$  (fig. 21.14). Dans ce cas  $\Delta s = |\Delta x'''|$ .

L'intervalle de longueur propre  $\Delta s$  entre les deux événements  $E$  et  $E_3$  est égal à l'intervalle de longueur relativement au référentiel d'inertie où  $E$  et  $E_3$  sont simultanés.

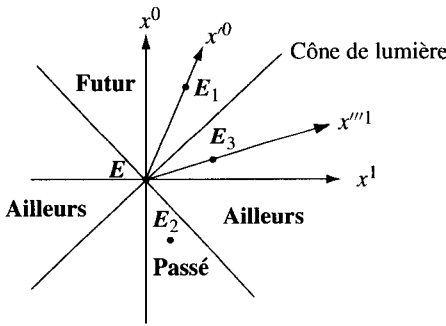


Fig. 21.14 Décomposition de l'espace-temps en relativité.

### 21.5.2 Borne sur la vitesse d'un point matériel

Pour que la paramétrisation des événements soit cohérente il est nécessaire que la vitesse de l'observateur  $O'$  par rapport à  $O$  soit inférieure à la vitesse de la lumière :

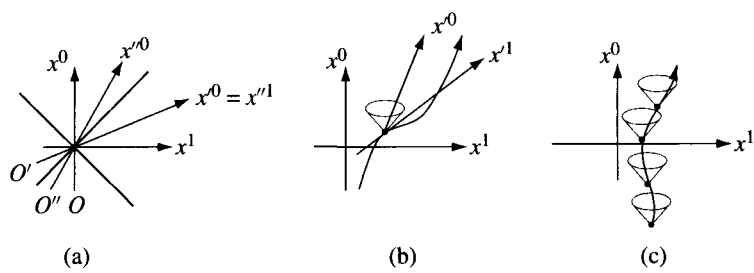
$$|u| < c. \quad (21.29)$$

En effet si  $u/c = \tan \theta > 1$ , on peut alors toujours trouver un observateur  $O''$  pour lequel l'observateur  $O'$  serait partout à l'instant  $t''_0$  et nulle part à l'instant  $t'' \neq t''_0$  (fig. 21.15 a), ce qui est absurde.

De même, la vitesse de la lumière est une borne supérieure pour la vitesse  $|v|$  de tout point matériel :  $|v| < c$ . Cette condition implique qu'en chaque point sur la carte de  $O$ , la ligne d'univers d'un point matériel est à l'intérieur du cône de lumière en ce point (fig. 21.15 c).

$$|v| < c$$

En effet soit  $x = x(t)$  l'évolution du point matériel ; si  $v = |dx/dt| > c$ , il existerait un observateur d'inertie  $O'$  par rapport auquel le point matériel serait simultanément en deux endroits différents (fig. 21.15 b), ce qui est absurde.



**Fig. 21.15** La vitesse d'un observateur ou d'un point matériel est toujours inférieure à  $c$ .

**Remarque.** La vitesse de la lumière apparaît comme vitesse limite, c'est-à-dire  $|v| < c$ , parce que l'on a utilisé la lumière pour paramétrer les événements. Certains physiciens ont envisagé l'existence de particules qui pourraient avoir des vitesses supérieures à  $c$  (« tachyons »), mais cette hypothèse n'a jamais été confirmée expérimentalement.

21.5.3 Temps propre associé à un point matériel

Considérons un point matériel ayant un mouvement arbitraire (sous l'action de forces appliquées autres que les forces de gravitation) relativement à un référentiel d'inertie (fig. 21.16) :

$$x = x(t), \quad v = v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Temps propre

Comme  $v^2(t) < c^2$ , nous pouvons introduire le **temps propre du point matériel**, grandeur indépendante de l'observateur d'inertie, définie par

$$\Delta\tau = \tau_B - \tau_A = \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - v^2(t)/c^2} \tag{21.30}$$

Étant donnés deux événements  $A$  et  $B$  le temps propre du point matériel (21.30) reliant ces deux événements dépend de la ligne d'univers du point matériel (fig. 21.16) ; ce temps propre, qui caractérise le « vieillissement » du point matériel, est toujours inférieur à l'intervalle de temps propre entre  $A$  et  $B$  (§ 21.4.1) qui représente l'intervalle de temps mesuré par une horloge immobile dans ce référentiel d'inertie où  $A$  et  $B$  sont au même endroit (voir également § 21.5.6).

Hypothèse de Sygne

On introduit parfois l'hypothèse *chronométrique* suivante (hypothèse de Sygne) : il existe des horloges idéales dont la période de battement, relative au référentiel où l'horloge est au repos, est indépendante du mouvement (uniforme ou accéléré) de l'horloge. Le temps propre du point matériel est alors le temps mesuré par une horloge idéale attachée au point matériel.

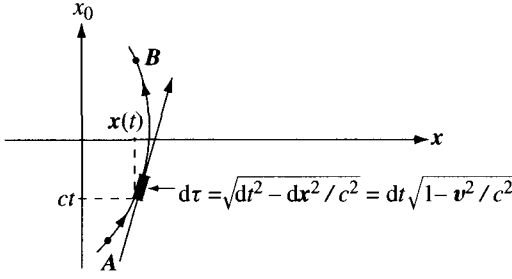


Fig. 21.16 Temps propre du point matériel.

**Remarque.** L'intervalle de temps propre est défini par

$$c^2 \Delta\tau^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t^2 \left( 1 - \frac{\Delta x^2}{c^2} \right)$$

ce qui conduit à la relation

$$d\tau = \pm dt \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Le référentiel choisi en prenant le signe (+) dans la définition (21.30) est appelé référentiel *orthochrone* : dans ce cas la coordonnée  $t$  évolue dans le même sens que le temps propre, qui est associé au « vieillissement ».

#### 21.5.4 Contraction apparente des longueurs

Considérons une règle, immobile dans le référentiel d'inertie  $O'$ , de longueur  $L'$  (fig. 21.17), orientée dans la direction du mouvement de  $O'$  par rapport à  $O$ .

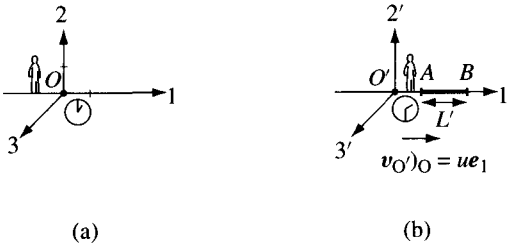


Fig. 21.17 Contraction apparente des longueurs.

Comme on le voit sur la figure (21.13) la longueur  $L$  de la règle par rapport à  $O$  sera inférieure à  $L'$ . Faisons alors explicitement le calcul.

Sur la carte de l'observateur  $O'$ , les lignes d'univers des extrémités  $A$  et  $B$  de la règle sont représentées par les lignes d'univers

$$A : (x'^0, \bar{x}'^1_A, 0, 0), \quad B : (x'^0, \bar{x}'^1_B = \bar{x}'^1_A + L', 0, 0), \quad (21.31)$$

où  $x'^0 \in \mathbb{R}$  et  $\bar{x}'^1_A$  est constant.

Sur la carte de l'observateur  $O$ , les lignes d'univers des extrémités  $A$  et  $B$  sont décrites par les équations obtenues à partir de (21.31) et (21.13),

Ligne d'univers de  
l'extrémité  $A$  par  
rapport à  $O$

$$A : (x_A^0 = \gamma(x'^0 + \frac{u}{c}\bar{x}'^1), \quad x_A^1 = \gamma(\frac{u}{c}x'^0 + \bar{x}'^1), \quad 0, \quad 0)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x_A^1 &= \gamma \left( \frac{u}{c} (\gamma^{-1} x_A^0 - \frac{u}{c} \bar{x}'^1) + \bar{x}'^1 \right) = \\ &= \frac{u}{c} x_A^0 + \sqrt{1 - u^2/c^2} \bar{x}'^1. \end{aligned} \quad (21.32)$$

De même pour l'extrémité  $B$ , avec  $\bar{x}'^1_B = \bar{x}'^1_A + L'$ ,

$$x_B^1 = \frac{u}{c} x_B^0 + \sqrt{1 - u^2/c^2} (\bar{x}'^1_A + L'). \quad (21.33)$$

Pour mesurer la longueur de la règle en mouvement, l'observateur  $O$  doit mesurer les coordonnées  $x_A^1$  et  $x_B^1$  au même instant, soit  $x_A^0 = x_B^0 = x^0$ . Il obtient ainsi :

Longueur de la règle  
par rapport à  $O$

$$L = x_B^1(x^0) - x_A^1(x^0) = \sqrt{1 - u^2/c^2} L' < L' \quad (21.34)$$

et la règle apparaît plus courte dans un référentiel où elle est en mouvement que dans le référentiel où elle est immobile ; c'est le phénomène de *contraction apparente des longueurs* (fig. 21.13).

Au contraire si la règle est perpendiculaire à la vitesse de  $O'$  par rapport à  $O$ , sa longueur est la même dans les deux directions.

**Remarque.** De (21.13) on peut montrer qu'un solide  $S$  immobile par rapport à  $O'$ , loin de l'observateur  $O$ , sera vu par  $O$  avec exactement la même forme mais simplement tourné. Cela provient du fait que les rayons qui arrivent au même instant sur  $O$  ne sont pas émis au même instant par  $S$  et ces deux effets conduisent à ce résultat surprenant.

### 21.5.5 Dilatation apparente du temps

De nouveau on voit sur la figure 21.13 que l'intervalle de temps  $\Delta t$  mesuré par l'observateur  $O$  sera plus long que celui mesuré dans le référentiel  $O'$  où l'horloge est immobile. Faisons alors explicitement le calcul.

Relativement à  $O'$ , l'intervalle de temps  $\Delta T'$  entre deux événements ayant lieu au même endroit est représenté par  $(c\Delta T', \Delta x = 0)$ . Par rapport à l'observateur  $O$ , l'intervalle  $\Delta x$  entre ces deux mêmes événements est représenté par (21.13) :

$$(\Delta x^0 = \gamma c \Delta T', \Delta x^1 = \gamma u \Delta T', 0, 0).$$

Par conséquent

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Delta T' > \Delta T' \quad (21.35)$$

et la durée de l'intervalle de temps apparaît plus longue dans un référentiel où l'horloge est en mouvement que dans le référentiel où elle est immobile : c'est le phénomène de dilatation apparente du temps, ou encore du ralentissement apparent des horloges en mouvement.

Dilatation apparente du temps

Ce retard n'est pas dû à un ralentissement de l'horloge en mouvement mais il est lié au fait que l'horloge mesure l'intervalle de temps relativement au référentiel où elle se trouve au repos ( $\Delta x' = 0$  implique  $\Delta t' = \Delta \tau$ ).

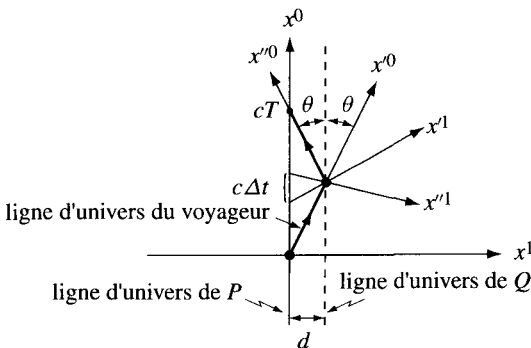
Ce phénomène est confirmé par les expériences de désintégration de particules : on observe que la durée de vie d'une particule à très grande vitesse est plus longue que la durée de vie de la même particule au repos. Si ce phénomène n'existait pas, il serait impossible de détecter certaines particules dont la durée de vie est très petite (§ 21.8.1).

Durée de vie d'une particule

### 21.5.6 Paradoxe des jumeaux

Le phénomène de dilatation du temps a soulevé le pseudo-paradoxe suivant, appelé « paradoxe des jumeaux ». Admettons que l'évolution biologique d'un observateur dans un référentiel d'inertie (vieillessement) corresponde au temps indiqué par son horloge et considérons deux jumeaux qui sont initialement au point  $P$  dans un référentiel d'inertie. L'un d'eux fait alors un voyage à très grande vitesse  $v$  (constante) jusqu'à un point  $Q$  qui se trouve à la distance  $d$  de  $P$ . Lorsqu'il atteint son but, il inverse « brusquement » la vitesse et revient à son point de départ (fig. 21.18).

En accord avec (21.35), le jumeau resté au point  $P$  voit retarder l'horloge – et le rythme biologique – du voyageur aussi bien à l'aller qu'au retour, car c'est  $v^2$  qui intervient dans la formule. Au contraire, toujours selon (21.35), le voyageur voit son horloge avancer par rapport à son frère, c'est-à-dire qu'il se



**Fig. 21.18**  $\frac{1/2 c \Delta t}{d} = \tan \theta = v/c$ .

Lequel des deux  
jumeaux sera le plus  
vieux lors de la  
rencontre ?

voit vieillir plus rapidement. Ainsi le jumeau resté au point  $P$  conclut que le voyageur sera plus jeune que lui à son retour, et il semblerait que le voyageur arrive à la conclusion opposée : d'où le paradoxe. Il n'y a cependant aucun paradoxe et le voyageur arrivera à la même conclusion que son frère. En effet, le jumeau immobile est à tout instant dans un référentiel d'inertie et il observe que l'inversion de la vitesse est instantanée (fig. 21.18). Il conclut que la durée du voyage est  $T = 2d/v$  ; il aura vieilli de  $T$  et le voyageur aura vieilli de  $\tau = T' = T\sqrt{1 - v^2/c^2} < T$ .

Au contraire, pour revenir au point  $P$ , le voyageur doit changer de référentiel d'inertie et il se trouve pendant un très court instant dans un référentiel accéléré. Comme on le voit sur la figure 21.18, pour le voyageur, l'horloge en  $P$  aura avancé de  $\Delta t$  pendant l'inversion de la vitesse et son frère vieilli d'autant. Le voyageur conclut qu'il aura vieilli de  $\tau = T'$  et que son jumeau sédentaire aura vieilli de

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= T'\sqrt{1 - v^2/c^2} + \Delta t = T'\sqrt{1 - v^2/c^2} + 2dv/c^2 = \\ &= T(1 - v^2/c^2) + Tv^2/c^2 = T.\end{aligned}\tag{21.36}$$

**Les deux jumeaux arrivent ainsi à la même conclusion : le voyageur sera plus jeune que son frère à son retour au point de départ.**

Effet de la  
gravitation sur les  
horloges

On remarquera que dans ce cas il y a un ralentissement réel de l'horloge, mais cet effet est dû au fait que l'horloge a été accélérée. En se souvenant qu'un référentiel accéléré est équivalent à un référentiel d'inertie où règne un champ de gravitation, nous pouvons nous attendre à ce que la gravitation conduise à un ralentissement de la marche des horloges. C'est le phénomène du « red shift » (déplacement des raies spectrales vers le rouge), mais il faudra faire appel à la relativité générale pour étudier ce problème (sect. 21.10). Par exemple, dans l'expérience effectuée pour comparer les temps mesurés par des horloges transportées en avion autour du globe, au temps mesuré par une horloge restée sur Terre (§ 1.4.4), il faut tenir compte du fait que l'horloge sur Terre est dans un champ de gravitation plus intense que l'horloge dans l'avion [9].

## 21.6 DYNAMIQUE RELATIVISTE DU POINT MATÉRIEL

### 21.6.1 Formulation tridimensionnelle

Considérons un point matériel qui évolue sous l'effet de forces appliquées, qui ne sont pas d'origine gravifique. Soit  $(x^0(\tau), \mathbf{x}(\tau)) = x(\tau)$  l'évolution du point matériel relativement à  $O$  (= référentiel d'inertie), évolution paramétrisée par le temps propre  $\tau$  (21.30). Pour établir les équations différentielles du mouvement, considérons le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}'$  en translation qui, à l'instant  $\tau$ , coïncide avec le point matériel et a la vitesse constante  $\mathbf{u} = \mathbf{v}(\tau) = d\mathbf{x}/d\tau$



par rapport à  $O$  (fig. 21.19). Ce référentiel est appelé *référentiel de repos* du point matériel. L'axe 1 sera choisi dans la direction de  $\mathbf{v}(\tau)$ .

Référentiel  
de repos

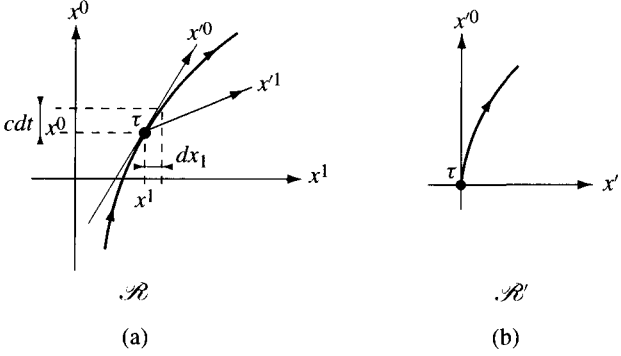


Fig. 21.19 Référentiel de repos  $\mathcal{R}'$  du point matériel à l'instant  $\tau$ .

Par rapport à  $\mathcal{R}'$ , la particule a une vitesse nulle à l'instant  $t' = 0$ . Par conséquent, pour  $|t'| \ll 1$ , sa vitesse  $|\mathbf{v}'|$  reste très petite et nous pouvons admettre que la mécanique newtonienne est valable. Ainsi, par rapport à  $\mathcal{R}'$  et pour  $t'$  tel que  $|\mathbf{v}'| \ll c$ , on a

$$m_0 \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{F}'(\mathbf{x}', t'), \quad (21.37)$$

où  $m_0$  est la masse non relativiste de la particule. La transformation de Lorentz avec  $|dx'^1/dt'| \ll c$  et  $\gamma = (1 - \mathbf{u}^2/c^2)^{-1/2}$  implique

$$\begin{cases} dt = \gamma \left( 1 + \frac{u}{c^2} \frac{dx'^1}{dt'} \right) dt' \cong \gamma dt' \\ dx^1 = \gamma \left( \frac{dx'^1}{dt'} + u \right) dt' \\ dx^2 = \frac{dx'^2}{dt'} dt', \quad dx^3 = \frac{dx'^3}{dt'} dt'. \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{d}{dt'} \left( \frac{d}{dt'} x^1 \right) = \gamma \frac{d^2 x'^1}{dt'^2} = \gamma \frac{d}{dt} \left[ \gamma \frac{d}{dt} x^1 \right] \\ \frac{d}{dt'} \left( \frac{d}{dt'} x'^2 \right) = \gamma \frac{d}{dt} \left[ \gamma \frac{d}{dt} x^2 \right] \\ \frac{d}{dt'} \left( \frac{d}{dt'} x'^3 \right) = \gamma \frac{d}{dt} \left[ \gamma \frac{d}{dt} x^3 \right]. \end{cases} \quad (21.38)$$

De (21.37), (21.38) et  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , on obtient l'équation du mouvement relativiste

Équation du  
mouvement  
relativiste

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2}} \mathbf{v}(t) \right) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (21.39)$$

$$\begin{cases} F^1 = F'^1, & \text{si } \mathbf{e}_1 \text{ est parallèle à } \mathbf{v}(t) \\ F^i = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2(t)/c^2} F'^i & \text{si } \mathbf{e}_i \text{ est perpendiculaire à } \mathbf{v}(t). \end{cases} \quad (21.40)$$

Masse relativiste  
et masse de repos

La grandeur  $m$ , qui dépend de la vitesse de la particule, définie par

$$m = m(\mathbf{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \quad (21.41)$$

est appelée **masse relativiste**. Dans la limite où  $\mathbf{v}$  tend vers zéro,  $m(\mathbf{v})$  tend vers  $m_0$  qui s'identifie à la masse newtonienne :  $m_0$  est la **masse de repos** du point matériel.

Finalement, en introduisant le **3-vecteur quantité de mouvement**, défini par

$$\mathbf{p} = m(\mathbf{v})\mathbf{v} \quad (21.42)$$

on voit que l'équation de Newton

$$\text{Équation de Newton} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (21.43)$$

reste valable en mécanique relativiste.

Comme on l'établira au paragraphe 21.9.1, l'équation (21.42) est la loi relativiste de la quantité de mouvement. Rappelons pour terminer que la force  $\mathbf{F}$  est reliée par la formule (21.40) à la force  $\mathbf{F}'$  mesurée dans le référentiel d'inertie où le point est au repos.

### 21.6.2 Relation entre force et accélération

De l'équation (21.41), on tire

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) = \frac{m_0}{[1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{3/2}} \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{m\mathbf{v}}{c^2 - \mathbf{v}^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (21.44)$$

et l'on obtient de (21.42), (21.43) et (21.44)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}^2 \frac{dm}{dt} = \\ &= (c^2 - \mathbf{v}^2) \frac{dm}{dt} + \mathbf{v}^2 \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

En conclusion

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(mc^2), \quad (21.45)$$

où  $m = m(\mathbf{v})$  et de (21.43)

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = m\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})\mathbf{v}/c^2. \quad (21.46)$$

En mécanique relativiste la force et l'accélération ne sont pas des 3-vecteurs parallèles.

Les seuls cas où  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{a}$  sont parallèles sont les suivants.

- Si  $\mathbf{F}$  est parallèle à la vitesse, on tire de (21.46) et (21.41)

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{[1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{3/2}} \mathbf{a}.$$

- Si  $\mathbf{F}$  est perpendiculaire à la vitesse, on tire de (21.46)

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{[1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{1/2}} \mathbf{a}.$$

Au début de la relativité on appelait « masse longitudinale » la grandeur  $[1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{-3/2} m_0$  et « masse transverse » la grandeur  $[1 - \mathbf{v}^2/c^2]^{-1/2} m_0$ .

### 21.6.3 Remarques

- L'expression (21.42) montre que la masse relativiste d'un corps devient infiniment grande lorsque  $v$  tend vers  $c$  ; ceci signifie que plus la vitesse est grande, et plus il sera difficile de l'augmenter. Au contraire, « la quantité de matière » ( $m_0$ ) n'est pas modifiée.
- Pour  $v \ll c$  nous pouvons nous limiter aux premiers termes du développement de  $m(\mathbf{v})$ , soit

$$m(\mathbf{v}) \cong m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right). \quad (21.47) \quad \text{Basse vitesse}$$

- Remarquons également que, contrairement à la mécanique non relativiste, la force (21.40) dépend du référentiel d'inertie considéré.
- Les équations (21.41) et (21.42) impliquent

$$p^2 = \left( m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \right) v^2 \quad (21.48) \quad \text{Relation entre } p \text{ et } v$$

ce qui permet d'écrire les équations du mouvement sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{m_0^2 + p^2/c^2}} p \\ \frac{dp}{dt} = F. \end{cases} \quad (21.49)$$

#### 21.6.4 Énergie relativiste

Nous voulons définir pour commencer une énergie cinétique relativiste ayant les mêmes propriétés que l'énergie cinétique non-relativiste, c'est-à-dire  $E^{\text{cin}}(v=0) = 0$  et vérifiant le **théorème de l'énergie cinétique**

$$\frac{dE^{\text{cin}}}{dt} = F \cdot v. \quad (21.50)$$

De (21.45) et (21.50) on obtient  $\frac{d}{dt} E^{\text{cin}} = \frac{d}{dt} (mc^2)$ , ce qui nous amène à la définition de l'**énergie cinétique relativiste**

$$\text{Énergie cinétique} \quad E^{\text{cin}} = (m - m_0)c^2. \quad (21.51)$$

La grandeur

$$E = E^{\text{cin}} + m_0c^2 = mc^2, \quad \text{où } m = m(v) \quad (21.52)$$

est appelée **énergie relativiste du point matériel** : c'est la somme de l'énergie cinétique et de l'**énergie de repos**  $m_0c^2$ .

Finalement, de  $p = mv$  et  $E = mc^2$ , on tire la relation

$$p = \frac{E}{c^2} v. \quad (21.53)$$

En remplaçant dans cette dernière équation  $v$  par l'expression (21.49), on obtient la relation entre  $E$  et  $p$ .

$$E = mc^2 = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} \quad (21.54)$$

Relation entre  
 $E$  et  $p$

La grandeur  $E^2/c^2 - p^2 = m_0^2c^2$  est une constante.

### 21.6.5 Cas limite $|v| \ll c$

Dans la limite où  $|v| \ll c$ , nous avons

$$\begin{aligned} E^{\text{cin}} &= m_0 c^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] = m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{2} m_0 v^2 \left[ 1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right] \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2 \end{aligned} \quad (21.55)$$

Ainsi, dans le cas des faibles vitesses, on retrouve l'expression non relativiste de l'énergie cinétique.

### 21.6.6 Cas limite $|v| = c$

Si  $v = c$ , l'équation (21.53) montre que  $|p| = E/c$  et il découle de (21.54) que la masse de repos est nécessairement nulle ; c'est le cas, par exemple, des photons. Inversement, si la masse de repos d'une particule est nulle, les équations (21.53) et (21.54) impliquent

$$E = c|p| \quad \text{et} \quad |v| = c. \quad (21.56)$$

Une particule se déplace à la vitesse de la lumière si et seulement si sa masse de repos est nulle.

Particule de  
masse nulle

### 21.6.7 Grandeur conservée

Si la force est de la forme

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{grad} \, U(\mathbf{x})$$

alors la grandeur

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2 c^2} + U(\mathbf{x}) \quad (21.57)$$

est une constante du mouvement.

En effet, de (21.45) et (21.5.4) on obtient

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2) + (\mathbf{grad} \, U) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

## 21.7 FORMULATION QUADRIMENSIONNELLE

La formulation tridimensionnelle développée jusqu'ici n'est pas satisfaisante parce qu'elle fait intervenir des grandeurs n'ayant pas de signification intrinsèque, c'est à dire indépendantes du référentiel choisi.

Le principe de la relativité restreinte (§ 21.2.2) nous amène à introduire une dernière condition.

**Condition 4. « Principe de covariance »**

Les lois de la physique gardent la même forme relativement à tout référentiel d'inertie.

Pour satisfaire cette condition les lois de la physique doivent s'exprimer au moyen de grandeurs ayant une signification intrinsèque, c'est à dire en terme de vecteurs ou tenseurs sur l'espace-temps (§ 21.4.4).

**21.7.1 Définitions**

Soit  $x^\mu = x^\mu(\tau)$  la ligne d'univers d'un point matériel.

**Le quadrivecteur vitesse  $w$  est le vecteur défini par**

$$w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (21.58)$$

**Le quadrivecteur quantité de mouvement  $p$  est le vecteur défini par**

$$p^\mu = m_0 w^\mu, \quad \text{soit} \quad p = m_0 w. \quad (21.59)$$

**Le quadrivecteur accélération  $a$  est le vecteur défini par**

$$a^\mu = \frac{dw^\mu}{d\tau}, \quad \text{soit} \quad a = \frac{dw}{d\tau}. \quad (21.60)$$

Ce sont effectivement des quadrivecteurs contravariants (§ 21.4.4) car le temps propre et la masse de repos sont des invariants et  $\Delta x = \{\Delta x^\mu\}$  est un quadrivecteur contravariant.

De (21.30) on déduit que

$$\text{Relation entre } w \text{ et } v \quad \left\{ \begin{array}{l} w^0 = c \frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{array} \right. \quad (21.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = w^0 \frac{\mathbf{v}}{c} \end{array} \right. \quad (21.62)$$

d'où

$$(w^0)^2 - \mathbf{w}^2 = c^2. \quad (21.63)$$

De même, avec  $p = m_0 w$  et (21.52)  $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}$  on obtient

$$\begin{cases} p^0 = m_0 w^0 = E/c \\ \mathbf{p} = m_0 \mathbf{w} = m(v) \mathbf{v} \end{cases} \quad (21.64)$$

et

$$(p^0)^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2. \quad (21.65)$$

### 21.7.2 Équation du mouvement

De (21.61)

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}$$

et (21.45), (21.64), (21.39), il découle

$$\begin{cases} \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{d}{dt} (m(v) \mathbf{v}) \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}. \end{cases}$$

Ainsi on a l'équation du mouvement

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu \quad (21.66)$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{F}^0 = \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}} \\ \mathcal{F} = \gamma \mathbf{F}. \end{cases} \quad (21.67)$$

Relation entre  
3-force  $\mathbf{F}$  et  
4-force  $\mathcal{F}$

En introduisant  $F'^0 = 0$  et  $F'^i$  la force mesurée dans le référentiel de repos de la particule (§ 21.6.1), il suit de (21.40) que

$$\mathcal{F}^\mu = L^\mu{}_\nu (-\mathbf{v}) F'^\nu. \quad (21.68)$$

Par conséquent,  $\mathcal{F}^\mu$  est un quadrivecteur, le *quadrivecteur force*, obtenu par transformation de Lorentz à partir de la force newtonienne mesurée dans le référentiel de repos de la particule.

En conclusion, les équations du mouvement d'un point matériel s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{p^\mu}{m_0}, & \text{soit} \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{p}{m_0} \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} = \mathcal{F}^\mu, & \text{soit} \quad \frac{dp}{d\tau} = \mathcal{F} \end{cases} \quad (21.69)$$

où  $(p^0)^2 - p^2 = m_0^2 c^2$ ,  $p_0 = E/c$  et  $\mathcal{F}^\mu$  est le quadrivecteur force.

### 21.7.3 Remarques

- On voit que la seule masse qui apparaît dans la formulation quadrimensionnelle est la masse invariante  $m_0$  et de plus

$$\mathcal{F}^\mu = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (21.70)$$

Par conséquent, le quadrivecteur force est proportionnel au quadrivecteur accélération.

On aurait pu obtenir l'équation du mouvement (21.70) immédiatement comme conséquence de la condition 4.

- Ayant remarqué que des grandeurs sont des quadrivecteurs, nous connaissons les formules de transformation lors d'un changement de référentiel d'inertie. Les formules (21.13) donnent par exemple immédiatement les relations suivantes pour une transformation de Lorentz dans la direction 1

$$\begin{aligned} &\text{Formule de} \\ &\text{transformation de} \\ &p = \left( \frac{E}{c}, p \right) \end{aligned} \quad \begin{cases} \frac{E}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left( \frac{E'}{c} + \frac{u}{c} p'^1 \right) \\ p^1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left( p'^1 + \frac{u}{c^2} E' \right) \\ p^2 = p'^2 \quad p^3 = p'^3. \end{cases} \quad (21.71)$$

De la même manière on obtient les formules de transformation du quadrivecteur vitesse, au lieu des formules (21.21) qui sont celles du vecteur vitesse à 3 dimensions.

## 21.8 ILLUSTRATIONS

### 21.8.1 Durée de vie et distance de vol d'une particule

Sachant que la durée de vie d'un pion  $\pi^\pm$  au repos est  $2,6 \cdot 10^{-8}$  s, évaluons la durée de vie et la distance moyenne parcourue par un pion cosmique de vitesse  $v = 0,99999999 c$ .

Si on utilisait la mécanique newtonienne, on obtiendrait la distance

$$d_{NR} \cong 3 \cdot 10^8 \cdot 2,6 \cdot 10^{-8} \cong 8 \text{ m.}$$



En utilisant la mécanique relativiste, on trouve que la durée de vie par rapport à la Terre est

$$\tau = \tau' \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \cdot 7070 \text{ s.}$$

La distance de vol est également 7000 fois plus grande que le résultat non relativiste, soit

$$d = 56\,000 \text{ m} = 56 \text{ km.}$$

Ce résultat explique que l'on puisse observer ces particules à la surface de la Terre.

### 21.8.2 Vitesse d'émission d'une particule

Un méson  $K^+$  au repos se désintègre ( $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$ ) en émettant un muon de vitesse  $0,72 c$ . Calculons la vitesse du muon émis par un  $K^+$  de vitesse  $0,998 c$  dans le cas où le muon est émis dans la direction du mouvement du  $K$ .

Dans la théorie non relativiste on aurait

$$v = v_r + v_c = \pm 0,72 c + 0,998 c = \begin{cases} 1,718 c \\ 0,278 c \end{cases}$$

Les équations (21.17) montrent que dans le cadre relativiste on obtient au contraire

$$v = \frac{v_r + v_c}{1 + v_r v_c / c^2} = \frac{\pm 0,72 + 0,998}{1 \pm 0,71856} c = \begin{cases} 0,9997 c \\ 0,988 c \end{cases}$$

résultat en accord avec les observations expérimentales.

### 21.8.3 Évolution d'accélération constante [51]

Un vaisseau spatial ayant une masse de repos  $m_0$  est soumis à l'action d'une force  $F$  constante. Nous voulons analyser l'évolution de conditions initiales  $x = 0$ ,  $v = 0$ , à  $t = 0$ .

De (21.39) et  $F = \text{cste}$ , on tire

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v(t) = F t$$

d'où

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{F t}{\sqrt{m_0^2 + F^2 t^2 / c^2}}. \quad (21.72)$$

On voit que dans ce cas la force est parallèle à la vitesse et l'accélération ; par conséquent, par (21.40) la force sera également constante relativement aux occupants du vaisseau.

L'évolution temporelle est ainsi décrite par

Évolution temporelle 
$$x(t) = \int_0^t dt \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}}{\sqrt{m_0^2 + F^2 t^2 / c^2}} = \frac{c^2}{|\mathbf{F}|} \left[ \sqrt{m_0^2 + F^2 t^2 / c^2} - m_0 \right] \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|}$$
 (21.73)

En prenant l'axe 1 dans la direction de la force, la ligne d'univers est la courbe d'équation

Mouvement hyperbolique 
$$\left( x^1 + \frac{m_0 c^2}{F} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{m_0^2 c^4}{F^2}.$$
 (21.74)

C'est une hyperbole (fig. 21.20 a) et le *mouvement est dit hyperbolique* (au contraire du cas non relativiste où la ligne d'univers est la parabole,  $x^1 = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2$ ).

D'autre part, de (21.57) avec  $U = -Fx^1$  et (21.54)  $\sqrt{m_0^2 + \mathbf{p}^2 / c^2} = m(v)$ , on tire :

Orbite 
$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - Fx^1 = m_0 c^2,$$
 (21.75)

ce qui donne l'équation de l'orbite dans l'espace de phase  $(x^1, v^1)$ , où  $v^1 = v$  (fig. 21.20 b).

Finalement, l'évolution du temps est donnée par (21.72) et

$$d\tau^2 = dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = dt^2 \left( 1 - \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} \right) = dt^2 \frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}.$$

En intégrant

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}}} \quad (21.76)$$

on obtient (fig. 21.20 (b) et (c)) :

Évolution du paramètre  $t$  
$$t(\tau) = \frac{m_0 c}{F} \sinh \left( \frac{F}{m_0 c} \tau \right).$$
 (21.77)

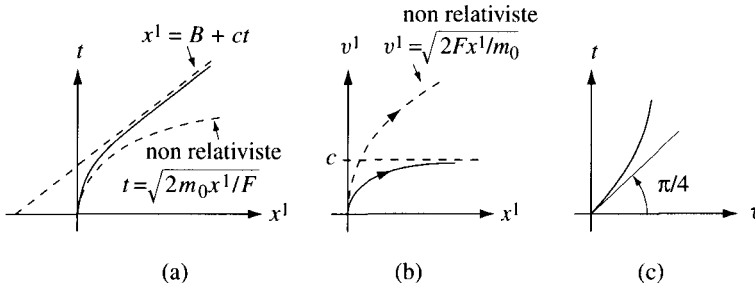


Fig. 21.20 (a) Ligne d'univers ; (b) orbite ; (c) évolution de  $t$ .

A titre d'illustration, calculons le temps nécessaire pour atteindre Andromède à partir de la Terre, en supposant que la force est constante, égale à  $m_0 9,81 \text{ m s}^{-2}$ . Dans ce cas, les occupants du vaisseau ressentiront une « force gravifique » constante égale à leur poids sur Terre. Nous avons

$$\frac{F}{m_0} = 9,81 \text{ m s}^{-2} \quad , \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad , \quad x^1 = d = 2 \cdot 10^{22} \text{ m}$$

et l'équation (21.74) donne le temps nécessaire pour atteindre Andromède

$$t \cong \frac{2}{3} \cdot 10^{14} \text{ s} \cong 2 \text{ millions d'années.}$$

D'autre part, selon (21.77), le temps propre correspondant est

$$\tau = \frac{c}{9,81} \arg \left( \sinh \frac{9,81}{c} t \right) = 4,67 \cdot 10^8 \text{ s} \cong 15 \text{ ans !}$$

Deux millions  
d'années sur Terre =  
15 ans dans la fusée !

et le pilote du vaisseau spatial a vieilli de 15 ans seulement.

#### 21.8.4 Formules de transformation du champ électromagnétique

Connaissant la force de Lorentz sur une particule de charge  $e$

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

on obtient de (21.67) le quadrivecteur force

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F}) = \\ &= \frac{e}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = \\ &= e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{w}/c, \mathbf{E}w^0/c + \mathbf{w} \wedge \mathbf{B}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \frac{dp^0}{d\tau} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{w}/c \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = e (\mathbf{E}w^0/c + \mathbf{w} \wedge \mathbf{B}) \end{cases} \quad (21.78) \quad \begin{array}{l} \text{Équations} \\ \text{du mouvement} \end{array}$$

ce que l'on écrit aussi sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = \frac{e}{m_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{w}/c \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{e}{m_0} (\mathbf{E} \mathbf{w}^0/c + \mathbf{w} \wedge \mathbf{B}). \end{cases} \quad (21.79)$$

On a par conséquent

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{e}{m_0} F^\mu{}_\nu \omega^\nu \quad (21.80)$$

où  $F^\mu{}_\nu$  est le *tenseur électromagnétique*

$$(F^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21.81)$$

En général on introduit le *tenseur antisymétrique deux fois contravariant*

$$F^{\mu\nu} = g^{\nu\zeta} F^\mu{}_\zeta \quad (21.82)$$

où  $g$  est la matrice (21.20). On obtient alors

$$\begin{cases} F^{0i} = E^i/c = -F^{i0} \\ F^{12} = B^3, \quad F^{23} = B^1, \quad F^{31} = B^2. \end{cases}$$

Les formules de transformation des tenseurs (Appendice B), avec la matrice  $L^\mu{}_\nu$  (21.13), soit

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

permettent d'obtenir facilement les formules de transformation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$E'^1/c = F'^{01} = L^0{}_0 L^1{}_1 F^{01} + L^0{}_1 L^1{}_0 F^{10} = E^1/c$$

$$B'^3 = F'^{12} = L^1{}_0 L^2{}_2 F^{02} + L^1{}_1 L^2{}_2 F^{12} = \gamma \left( -\frac{u}{c^2} E^2 + B^3 \right).$$

Les autres composantes s'obtiennent de façon similaire et l'on trouve

$$\begin{aligned}
 E'^1 &= E^1; & E'^2 &= \gamma(E^2 - uB^3); & E'^3 &= \gamma(E^3 + uB^2) \\
 B'^1 &= B^1; & B'^2 &= \gamma(B^2 + \frac{u}{c^2}E^3); & B'^3 &= \gamma(B^3 - \frac{u}{c^2}E^2)
 \end{aligned}
 \quad (21.83)$$

Formules de transformation du champ électromagnétique

Dans la limite où  $u/c$  tend vers zéro, on retrouve les formules non relativistes ( $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$ ).

### 21.8.5 Déflexion par un champ magnétique

Considérons une particule de charge  $e$  qui pénètre dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$  homogène avec une vitesse initiale perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  (§ 12.2.4).

Dans ce cas,  $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ ; par conséquent  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$  et (21.46) entraîne

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}. \quad (21.84)$$

On retrouve le résultat non relativiste, mais avec la masse relativiste au lieu de la masse de repos : le mouvement est circulaire uniforme de rayon  $R$ , période  $T$ , avec

$$R = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v}{eB} \quad \text{et} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{eB}. \quad (21.85)$$

Mentionnons encore que la confirmation expérimentale de ce résultat fut la première vérification de la relativité [52].

### 21.8.6 Champ créé par une particule chargée ayant un mouvement rectiligne et uniforme

Cherchons les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  créés au point  $P$  à l'instant  $t$  par une particule de charge  $e$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  constante (fig. 21.21 a)

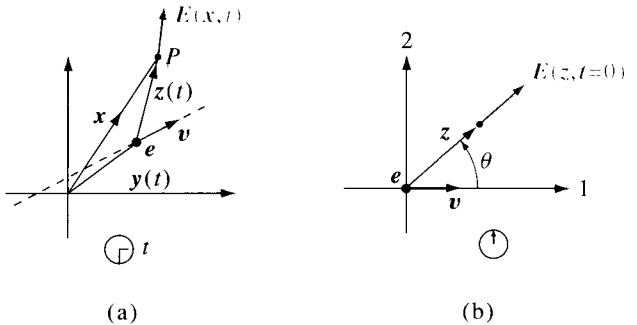


Fig. 21.21 (a) Référentiel du laboratoire ; (b) choix des coordonnées.

On ne diminue pas la généralité du problème en choisissant dans  $\mathcal{R}$  le système de coordonnées tel que  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_1$ , avec la particule à l'origine et l'instant  $t$  pris comme origine des temps (fig. 21.21 b)

Considérons alors  $\mathcal{R}'$  le référentiel de repos de la particule. Par rapport à  $\mathcal{R}'$ , nous avons

$$\mathbf{E}' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^3} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = 0 \quad \text{pour tout } t'.$$

Lors de la transformation de Lorentz  $\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}$  (21.13), nous obtenons avec  $x^0 = \gamma(x'^0 + \frac{v}{c}x'^1) = 0$ ,

$$z^1 = \gamma \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) z'^1 = \frac{1}{\gamma} z'^1, \quad z^2 = z'^2, \quad z^3 = z'^3$$

et les formules (21.83) (avec  $\mathcal{R}' \rightleftharpoons \mathcal{R}$ ) permettent d'obtenir facilement les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  relativement au référentiel du laboratoire (et avec notre choix de coordonnées) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (E'^1, \gamma E'^2, \gamma E'^3) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{|\mathbf{z}'|^3} \mathbf{z} \\ \mathbf{B} &= (0, -\frac{\gamma v}{c^2} E'^3, \frac{\gamma v}{c^2} E'^2) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}. \end{aligned}$$

En conclusion, le champ  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  est univoquement défini par le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ , avec

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (21.86)$$

Pour trouver  $\mathbf{E}$  il faut alors calculer  $|\mathbf{z}'|^3$

$$\begin{aligned} |\mathbf{z}'|^2 &= \gamma^2 (z^1)^2 + (z^2)^2 + (z^3)^2 = \gamma^2 \left[ |\mathbf{z}|^2 - \frac{v^2}{c^2} ((z^2)^2 + (z^3)^2) \right] = \\ &= \gamma^2 |\mathbf{z}|^2 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right] \end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{e}_1$ .

Le champ  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  est parallèle au vecteur lieu  $\mathbf{z}(t)$  défini par le point  $\mathbf{x}$  et la position  $\mathbf{y}(t)$  de la charge  $e$  à cet instant et

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2 \sin^2 \theta / c^2)^{3/2}} \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|^3} \quad (21.87)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}(t).$$

Champ magnétique  
créé par la charge en  
mouvement

Champ électrique  
créé par la charge en  
mouvement

## 21.9 SYSTÈMES DE PARTICULES

## 21.9.1 Quantité de mouvement et énergie

Considérons une collision élastique entre une particule  $a$  de masse  $m_0$  et une particule  $b$ , *identique*, initialement au repos (fig. 21.22).

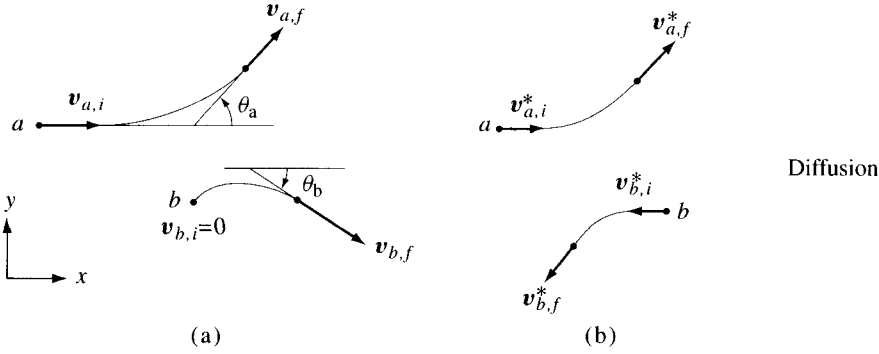


Fig. 21.22 (a) référentiel du laboratoire ; (b) Référentiel  $\mathcal{R}^*$  du centre de masse.

Si la vitesse initiale de  $a$  est très inférieure à  $c$ , on peut admettre que la théorie de Newton est valable et, dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  du centre de masse, on a

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{a,i}^* + \mathbf{v}_{b,i}^* = 0 = \mathbf{v}_{a,f}^* + \mathbf{v}_{b,f}^* \\ |\mathbf{v}_{a,i}^*| = |\mathbf{v}_{a,f}^*| \end{cases}$$

Les formules de transformation de vitesse (21.21) montrent que, par rapport à tout autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , on aura

$$m_0 \mathbf{v}_{a,i} + m_0 \mathbf{v}_{b,i} \neq m_0 \mathbf{v}_{a,f} + m_0 \mathbf{v}_{b,f}$$

et

$$\frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_{a,i}^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_{b,i}^2 \neq \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_{a,f}^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_{b,f}^2.$$

Au contraire, en introduisant les masses relativistes, on obtient

$$m_{a,i} \mathbf{v}_{a,i} + m_{b,i} \mathbf{v}_{b,i} = m_{a,f} \mathbf{v}_{a,f} + m_{b,f} \mathbf{v}_{b,f}$$

et

$$m_{a,i} c^2 + m_{b,i} c^2 = m_{a,f} c^2 + m_{b,f} c^2.$$

En effet, comme  $m_0 w$  est un quadrivecteur, on peut conclure que la relation  $m_0 w_{a,i} + m_0 w_{b,i} - m_0 w_{a,f} - m_0 w_{b,f} = 0$  qui est valable dans  $\mathcal{R}^*$  sera aussi valable dans tout autre référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ .

Énergie et quantité  
de mouvement

Par conséquent, les grandeurs conservées énergie et quantité de mouvement d'un système de particules sans interaction, s'expriment par les relations

$$E/c = \sum_{\alpha} m_{0,\alpha} w_{\alpha}^0 \quad \mathbf{p} = \sum_{\alpha} m_{0,\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \quad (21.88)$$

où  $m_{0,\alpha}$  est la masse de repos de la particule  $\alpha$ . En d'autres termes, le quadrivecteur  $p = m_0 w$  d'une particule représente l'énergie divisée par  $c$  et la quantité de mouvement de cette particule.

Le principe fondamental de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, valable en particulier pour tout processus de collision (élastique ou inélastique), conduit aux équations

$$E_i = E_f, \quad \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f, \quad (21.89)$$

Par définition, la collision est **élastique** si les masses de repos des particules ne sont pas modifiées.

On remarquera pour terminer qu'il est difficile d'énoncer les lois de conservation pendant l'intervalle de temps où les particules interagissent parce qu'il faut tenir compte du temps de propagation de l'interaction qui, dans les théories relativistes, n'est pas nul.

### 21.9.2 Masse de repos et référentiel de repos

Considérons un ensemble de particules sans interaction (l'état initial d'un processus de collision par exemple). On définit la **masse relativiste**  $M$  et la **vitesse  $\mathbf{v}$  du système** par les relations

$$\text{Masse et vitesse} \quad \begin{cases} \sum_{\alpha} m_{0,\alpha} w_{\alpha}^0 = Mc \\ \sum_{\alpha} m_{0,\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = M\mathbf{v} \end{cases} \quad (21.90)$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} E = Mc^2 \\ \mathbf{p} = M\mathbf{v} \quad \text{et} \quad M_0 = M\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{cases} \quad (21.91)$$

Pour généraliser le concept non relativiste de référentiel du centre de masse (le centre de masse n'étant pas défini en relativité), on définit le référentiel de repos du système.

**Le référentiel de repos** ou **référentiel du centre d'énergie** est le référentiel par rapport auquel la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  est nulle.



Considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  en translation de vitesse  $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1$ . De (21.71) on obtient

$$\begin{aligned} p'^1 &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \sum_{\alpha} \left( p_{\alpha}^1 - \frac{u}{c^2} E \right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} M(v^1 - u) \\ p'^2 &= Mv_2, \quad p'^3 = Mv_3 \\ E' &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left( E - u \sum_{\alpha} p_{\alpha}^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} Mc^2 \left( 1 - \frac{uv^1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

En conclusion, le référentiel de repos du système est le référentiel  $\mathcal{R}^*$  en translation de vitesse  $\mathbf{v}$ , égale à la vitesse du système (21.90). L'énergie  $E^*$  du système relativement au référentiel de repos s'exprime par la relation

$$E^* = M_0 c^2, \quad \text{où} \quad M_0 = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} M. \quad (21.92)$$

$M_0$  est, par définition, la **masse de repos du système**.

Référentiel de repos  
d'un système

### 21.9.3 Illustration 1. Collision élastique de deux particules identiques

Considérons une collision élastique de deux particules identiques (fig. 21.22 a) telle que dans l'état final les deux particules aient même énergie et, par conséquent, même masse et même vitesse scalaire ;

Des lois de conservation nous tirons, avec  $m_{a,0} = m_{b,0} = m_0$ ,

$$\begin{aligned} E_{a,i} + m_0 c^2 &= E_{a,f} + E_{b,f} \\ (p_{a,i})^x &= (p_{a,f})^x + (p_{b,f})^x \\ (p_{a,i})^y &= 0 = (p_{a,f})^y + (p_{b,f})^y \end{aligned}$$

et de la condition  $E_{a,f} = E_{b,f}$ , on tire

$$\begin{cases} E_{a,i} + m_0 c^2 = 2E_{a,f} \end{cases} \quad (21.93)$$

$$\begin{cases} \theta_a = \theta_b = \theta \\ |\mathbf{p}_{a,i}| = 2|\mathbf{p}_{a,f}| \cos \theta. \end{cases} \quad (21.94)$$

D'autre part, de l'équation (21.54)

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m_0^2 c^2},$$

et de (21.94), on obtient

$$\sqrt{E_{a,i}^2 - m_0^2 c^4} = 2\sqrt{E_{a,f}^2 - m_0^2 c^4} \cos \theta.$$

D'où, en remplaçant  $E_{a,f}$  par sa valeur (21.93),

Les angles  $\theta_a$  et  $\theta_b$   
sont égaux :  
 $\theta_a = \theta_b = \theta$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{E_{a,i}^2 - m_0^2 c^4}}{\sqrt{(E_{a,i} + m_0 c^2)^2 - 4m_0^2 c^4}} = \frac{\sqrt{E_{a,i} + m_0 c^2}}{\sqrt{E_{a,i} + 3m_0 c^2}}. \quad (21.95)$$

En conclusion, contrairement au cas classique, les vitesses finales des particules ne sont pas orthogonales.

Dans la limite  $|v_{a,i}| \ll c$ , on a  $E_{a,i} \cong m_0 c^2$  et  $\cos \theta = 1/\sqrt{2}$  : on retrouve ainsi le résultat non relativiste  $\theta_a = \theta_b = 45^\circ$ . Au contraire, pour de très grandes vitesses de la particule incidente,  $\theta$  sera très inférieur à  $45^\circ$ .

#### 21.9.4 Illustration 2. Désintégration en deux particules

Considérons la désintégration d'une particule  $a$  immobile en deux particules  $b$  et  $c$  de même masse, par exemple  $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

On aura

$$\begin{cases} m_{a,0} &= m_b + m_c \\ 0 &= m_b \mathbf{v}_b + m_c \mathbf{v}_c \end{cases}$$

d'où

$$\mathbf{v}_c = -\frac{m_b}{m_{a,0} - m_b} \mathbf{v}_b.$$

Si, par exemple, les deux particules  $b$  et  $c$  ont même énergie, on obtient

$$|\mathbf{v}_b| = |\mathbf{v}_c| = v,$$

$$m_{a,0} = \frac{2m_{b,0}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{et} \quad v = c \sqrt{1 - 4 \left( \frac{m_{b,0}}{m_{a,0}} \right)^2}. \quad (21.96)$$

Mentionnons pour terminer l'inégalité

Condition  
nécessaire pour la  
désintégration

$$m_{a,0} = m_b + m_c \geq m_{b,0} + m_{c,0}$$

nécessaire pour que la désintégration soit possible.

## 21.10 DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE À LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

De même que Mach a généralisé le principe de la relativité de Galilée en postulant que les lois de la mécanique newtonienne restent valables dans tout référentiel d'inertie ou non, Einstein s'est attaché dès 1907 à généraliser la relativité restreinte de manière à englober tous les changements de référentiels possibles. La relativité générale est ainsi une théorie qui considère des référentiels accélérés les uns par rapport aux autres. Comme nous avons remarqué qu'il n'est pas possible de distinguer expérimentalement les forces d'inertie qui apparaissent dans les référentiels accélérés des forces de gravitation créées par la matière, nous voyons que la relativité générale est une *théorie de la gravitation*.

Relativité générale et gravitation

Il faut souligner que dans cette extension de la relativité restreinte à la relativité générale la notion habituelle de référentiel disparaît et seule subsiste la notion de système de coordonnées, qui représente une paramétrisation des événements.

A la fin de l'année 1915, Einstein a achevé ses travaux et publie en 1916 « Les fondements de la théorie de la relativité générale » [53]. Cette théorie constitue l'un des chefs-d'œuvre de la physique du XX<sup>e</sup>.

L'idée première de cette théorie est le principe de covariance qui est la généralisation de la condition 4 (sect. 21.7).

### Principe de covariance

- Tous les systèmes de coordonnées sont acceptables pour la description et l'étude des phénomènes.
- Les lois de la physique gardent la même forme relativement à n'importe quel système de coordonnées : elles sont covariantes.

Nous remarquons que ce principe de covariance est encore une fois une expression du principe d'objectivité : les lois de la physique sont indépendantes du choix des coordonnées.

Pour trouver les lois en question, Einstein maintient et généralise le principe d'équivalence, fondamental à la mécanique newtonienne.

### Principe d'équivalence fort

En n'importe quel point  $X$  de l'espace-temps, on peut trouver des systèmes de coordonnées particuliers, appelés système inertiel local au point  $X$ , tels que dans une petite région de l'espace-temps au voisinage du point  $X$  les lois de la physique aient la même forme que dans le référentiel d'inertie en l'absence de gravitation ; cela signifie que les lois de la relativité restreinte restent localement valables par rapport à un système de coordonnées inertiel.

Système inertiel local

En d'autres termes, ce principe d'équivalence fort affirme qu'il est toujours possible d'éliminer le champ de gravitation, dans un domaine suffisamment petit

Gravitation et  
géométrie de  
l'espace-temps

de l'espace-temps, par un choix judicieux des coordonnées ; c'est par exemple l'ascenseur en chute libre, ou le satellite en chute libre autour de la Terre.

Les idées de Mach sont également généralisées en postulant qu'il y a une relation fondamentale entre la matière d'une part et la géométrie de l'espace-temps d'autre part (qui n'est plus celle de Minkowski) : la *gravitation apparaît comme une propriété géométrique intrinsèque de l'espace-temps, appelée courbure*.

Finalement les équations de la gravitation seront obtenues en se basant sur le principe de correspondance, principe sous-jacent à la plupart des théories physiques.

### Principe de correspondance

Dans la limite de champs gravifiques statiques faibles, et pour de petites vitesses, les équations générales de la gravitation doivent redonner les équations de Newton de la gravitation.

Le laboratoire de la  
relativité générale

Cette théorie a permis d'expliquer ou de prédire plusieurs effets qui confirment brillamment les résultats de la relativité générale, et ceci avec une très grande précision : avance du périhélie de Mercure, déviation des rayons lumineux au voisinage d'une étoile, déplacement des fréquences d'un atome situé dans un champ de gravitation, temps de retard d'un signal radar réfléchi sur Mercure, Vénus et les sondes spatiales. Plus récemment, avec la découverte en 1974 du premier pulsar binaire (PSR 1913+16) par R. Hulse et J.M. Taylor, c'est un véritable laboratoire de la relativité générale qui se trouve à disposition des physiciens. En conclusion, aujourd'hui les tests observationnels de la relativité générale sont nombreux et, pour l'instant, rien ne permet de douter du bien-fondé de cette théorie.

Le lecteur intéressé trouvera un exposé accessible, ainsi que les références historiques, dans l'article de J. Eisenstaedt [54].

## 21.11 PROBLÈMES

**21.11.1** Une fusée qui s'éloigne de la Terre à la vitesse  $v = 0,8 c$  envoie un signal radio toutes les heures (heure de la fusée). De son côté, la Terre envoie également un signal toutes les heures (heure de la Terre). Quel est l'intervalle de temps mesuré sur la Terre, et dans la fusée, entre la réception de deux signaux ?

**21.11.2** Deux avions volant à Mach 2 ( $= 660 \text{ m/s}$ ) partent d'un même point à l'équateur, l'un dans la direction Ouest, l'autre dans la direction Est. Quelle sera l'heure indiquée par l'horloge terrestre, et les horloges dans les avions, lorsque ceux-ci se rencontrent à nouveau ? (On ne tient compte que des effets liés à la relativité restreinte ; il y a d'autres effets liés à la gravitation.) Indication : considérer le référentiel géocentrique.

**21.11.3** Une fusée quitte la Terre à la vitesse  $0,5c$  ; une heure plus tard, une deuxième fusée part à sa poursuite à la vitesse de  $0,7c$ . Quelle est à cet instant la distance entre les deux fusées, mesurée à partir de la Terre, et à partir des fusées ? Quelle est la vitesse de la deuxième fusée par rapport à la première ? Quel sera le temps indiqué par les trois horloges à l'instant où la fusée est rattrapée ?

**21.11.4** Un point matériel a un mouvement rectiligne de vitesse  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_2$  par rapport à un observateur  $O$ . Vérifier que l'angle  $\alpha$  entre la vitesse du point et l'axe  $\mathbf{e}_1$ , observé par un observateur  $O'$  de vitesse  $\mathbf{v}_{O'/O} = u\mathbf{e}_1$ , est donné par

$$\tan \alpha = -\frac{v}{u} \sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

**21.11.5** On observe à partir de la Terre deux explosions qui ont lieu au même instant aux endroits  $A$  et  $B$  distants d'une longueur  $L$  l'un de l'autre. Calculer l'intervalle de temps, et la longueur, qui séparent ces deux événements pour un observateur se déplaçant à la vitesse  $v$  dans la direction de  $A$  vers  $B$ .

**21.11.6** Calculer la masse et la vitesse d'un électron d'énergie 50 MeV. Quelle est l'énergie de l'électron par rapport à un observateur se déplaçant avec une vitesse  $u$  dans le même sens que l'électron ?

**21.11.7** On considère la désintégration  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$  d'un méson  $K$  immobile. Calculer la vitesse des pions et la distance qu'ils parcourent – en moyenne – avant de se désintégrer (voir le tableau 3.9 pour les valeurs numériques).

**21.11.8** Calculer l'énergie cinétique du muon émis lors de la désintégration  $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu$  d'un méson  $K$  immobile. (Valeur observée expérimentalement  $E_{\mu}^{\text{cin}} = 152,4 \text{ MeV}$ .)

**21.11.9** Un proton d'énergie  $E = 28 \text{ GeV}$  entre en collision avec un proton au repos. Calculer l'angle  $\varphi$  entre les trajectoires finales si les protons ont des énergies finales égales.

**21.11.10** Une particule de masse de repos  $m_{1,0}$  et d'énergie  $E_1$  entre en collision avec une particule immobile de masse de repos  $m_{2,0}$ . Montrer que l'énergie  $E^*$  dans le référentiel de repos est donnée par

$$E^* = \sqrt{(m_{1,0}^2 + m_{2,0}^2)c^4 + 2m_{2,0}c^2 E_1}.$$

**21.11.11** Dans les anneaux de collision du CERN, des protons d'énergie  $E = 28 \text{ GeV}$  effectuent des collisions frontales. Calculer l'énergie des protons d'un faisceau dans le référentiel où les protons de l'autre faisceau sont au repos.

**21.11.12** Montrer que l'énergie minimale que doit avoir un pion pour qu'une collision sur un proton immobile conduise à la réaction  $\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda$  est 906 MeV. (Indication : utiliser l'équation (21.89).)



## CHAPITRE 22

# INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

L'étude des systèmes avec liaisons (sect. 12.6) a montré qu'il fallait commencer par éliminer des équations de Newton les forces de liaison (inconnues), de manière à obtenir des équations différentielles dans lesquelles seules les forces appliquées (connues) apparaissent. Ayant trouvé l'évolution, les équations de Newton permettent ensuite de calculer les forces de liaison. Cependant, nous avons vu qu'un tel programme est souvent laborieux. La mécanique analytique que nous allons esquisser dans ce dernier chapitre est une approche de la mécanique qui traite les liaisons de façon simple et systématique. Cette méthode permet d'obtenir immédiatement les équations d'évolution en fonction des forces appliquées uniquement ; les liaisons sont introduites de manière « automatique » dans le formalisme, ce qui présente un grand avantage pour la résolution des problèmes.

De plus, la mécanique analytique est le formalisme le mieux adapté à l'étude des propriétés générales du mouvement dans l'espace de phase. C'est par exemple l'approche utilisée pour comprendre l'apparition du chaos à partir d'équations déterministes.

Mentionnons également que, conceptuellement, les idées de la mécanique analytique sont satisfaisantes pour le physicien. En effet, ce formalisme est basé sur des principes variationnels (§ 22.1.7) appréciés en physique parce qu'ils font ressortir des propriétés globales et permettent de tirer profit des symétries.

Remarquons pour terminer que la mécanique analytique est l'outil nécessaire pour la mécanique statistique, la mécanique quantique et la théorie des champs.

## 22.1 FORMALISME LAGRANGIEN

## 22.1.1 Hypothèses

Systèmes holonômes *Pour simplifier, nous ne considérons que des systèmes holonômes à  $k$  degrés de liberté, soumis à des liaisons parfaites (§ 12.6.3), c'est-à-dire tels que pour tout point  $P_\alpha$  du système on a*

$$\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k, t), \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (22.1)$$

où les  $\{q_i, \dot{q}_i\}$  sont des variables indépendantes et les liaisons vérifient la condition des travaux virtuels (12.104) :

Condition des travaux virtuels 
$$\sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}^{(\alpha)} \cdot \delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = 0 \quad (22.2)$$

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons (12.102)

$$\delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (22.3)$$

## 22.1.2 Équation de d'Alembert (1743)

Considérons un système de points matériels de masse  $m_\alpha$ , soumis à des forces de liaison  $\mathbf{R}^{(\alpha)}$  et à des forces appliquées  $\mathbf{F}^{(\alpha)}$ . Des équations de Newton

$$m_\alpha \mathbf{a}^{(\alpha)} = \mathbf{F}^{(\alpha)} + \mathbf{R}^{(\alpha)},$$

et de la condition des travaux virtuels (22.2), on obtient l'**équation de d'Alembert** :

Équation de d'Alembert 
$$\sum_{\alpha} (m_\alpha \mathbf{a}^{(\alpha)} - \mathbf{F}^{(\alpha)}) \cdot \delta \mathbf{x}^{(\alpha)} = 0 \quad (22.4)$$

pour tout déplacement virtuel compatible (22.3).

En d'autres termes, la somme des travaux des forces appliquées et des forces d'inertie est nulle pour tout déplacement virtuel compatible. Par conséquent, pour la dynamique, l'équation (22.4) est l'analogie du principe des travaux virtuels que nous avons discuté en statique (§ 16.2.1).

De (22.4), avec (22.3), on a

$$\sum_{\alpha, i} \left( m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial q_i} - \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0. \quad (22.5)$$

Comme nous avons supposé le système holonôme, tous les  $\delta q_i$  sont indépendants et l'on obtient :

$$\sum_{\alpha} \left( m_\alpha \mathbf{a}_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial q_i} - \mathbf{F}_\alpha \frac{\partial \mathbf{x}_\alpha}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (22.6)$$



D'ALEMBERT  
Jean Le Rond  
Philosophe et  
mathématicien français  
1717-1783



Nous pouvons écrire cette dernière équation sous la forme

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a} \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (22.7)$$

où, par définition,

$$Q_i = \sum_{\alpha} F_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \quad (22.8) \quad \text{Force généralisée}$$

est la **force généralisée** associée à la coordonnée généralisée  $q_i$  (§ 16.2.1).

On constate que (22.7) est un ensemble de  $k$  équations pour les  $k$  variables  $(q_1, \dots, q_k)$  dans lequel les forces de liaison n'apparaissent pas.

### 22.1.3 Équations de Lagrange

De (22.1) on tire

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = \frac{d}{dt} \mathbf{x}^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t}, \quad (22.9)$$

ce qui permet d'écrire l'énergie cinétique  $T$  en fonction des variables  $(q, \dot{q}, t)$  :

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left[ \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} \right]^2 = T(q, \dot{q}, t). \quad (22.10)$$

En outre, de (22.9) et (22.10) on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}^{(\alpha)} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i}. \quad (22.11)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} T \right) &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \mathbf{a}^{(\alpha)} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} + \mathbf{v}^{(\alpha)} \frac{\partial \mathbf{v}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{a}^{(\alpha)} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} T \end{aligned} \quad (22.12)$$

et de (22.12) et (22.7) nous obtenons la proposition suivante :

#### Équations de Lagrange de 1<sup>re</sup> espèce

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (22.13)$$



LAGRANGE Louis de  
Mathématicien français  
(1736-1813)

C'est un système de  $k$  équations différentielles du second ordre en les  $\{q_i\}$ , dans lequel les forces de liaisons ont été éliminées.

Si les forces appliquées dérivent d'un potentiel  $U$ , indépendant des vitesses ( $U$  indépendant des vitesses (le cas général où  $U$  dépend des vitesses sera traité à la section 22.3), on a par définition

$$F_i^{(\alpha)} = -\frac{\partial U}{\partial x_i^{(\alpha)}} \quad \text{d'où} \quad Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}; \tag{22.14}$$

on introduit alors le **lagrangien**, fonction des  $2k + 1$  variables  $\{q, \dot{q}, t\}$  définie par

Lagrangien  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t).$  (22.15)

Sous ces hypothèses, on obtient de (22.13) les équations suivantes :

**Équations de Lagrange de seconde espèce**

Équations de Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k.$  (22.16)

**22.1.4 Propriété générale de l'énergie cinétique**

De (22.10) on tire

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left[ \sum_i \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_i \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} \right] \dot{q}_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \tag{22.17}$$

Par conséquent,  $T$  est de la forme

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k a_{ij}(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^k b_i(q, t) \dot{q}_i + c(q, t) = \\ &= T^{(2)}(q, \dot{q}, t) + T^{(1)}(q, \dot{q}, t) + T^{(0)}(q, t) \end{aligned} \tag{22.18}$$

où  $T^{(2)}$  est une fonction homogène de degré 2 en  $\{\dot{q}_i\}$  :

$$\sum_{i=1}^k \dot{q}_i \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i} = 2T^{(2)}. \tag{22.19}$$

$T^{(1)}$  est une fonction homogène de degré 1 en  $\{\dot{q}_i\}$  :

$$\sum_{i=1}^k \dot{q}_i \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \dot{q}_i} = T^{(1)} \quad (22.20)$$

et  $T^{(0)}$  est indépendant des  $\{\dot{q}_i\}$ .

**Propriété.** Si les liaisons sont indépendantes du temps, c'est-à-dire si  $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \mathbf{x}^{(\alpha)}(q_1, \dots, q_k)$ , alors l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive en les  $\{\dot{q}_i\}$ .

Liaisons  
indépendantes du  
temps

En effet, en ce cas, dans (22.17),  $T = T^{(2)} \geq 0$  et  $T = 0$  si et seulement si  $v^{(\alpha)} = 0$  pour tout  $\alpha$ , c'est-à-dire si

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial \mathbf{x}^{(\alpha)}}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0.$$

Comme le système est holonôme, la seule solution est  $\dot{q}_i = 0$  pour tout  $i$ .

Pour les systèmes holonômes à liaisons dépendantes du temps, on introduit l'hypothèse que la forme quadratique  $T^{(2)}$  est définie positive.

Liaisons  
dépendantes du  
temps

### 22.1.5 Formalisme lagrangien

De façon plus générale, dans le formalisme lagrangien on postule que le système est caractérisé par un ensemble de  $2k$  variables indépendantes  $(q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)$  définissant l'état instantané, et par une fonction  $L = L(q, \dot{q}, t)$  définissant l'évolution temporelle à partir des équations de Lagrange (22.16), c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (22.21)$$

De plus, on suppose que  $\left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\}$  est défini positif, condition analogue à celle introduite sur l'énergie cinétique (§ 22.1.4).

Par définition,  $q_i$  est une **variable cyclique**, si le lagrangien ne dépend pas explicitement de  $q_i$  ; le **temps est homogène** si le lagrangien ne dépend pas explicitement de  $t$  ; l'**impulsion généralisée** associée à  $q_i$ , aussi appelée **moment conjugué** à  $q_i$ , est la grandeur définie par

Variable cyclique  
Temps homogène  
Moment conjugué

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t). \quad (22.22)$$

### Propriétés 1. Constantes du mouvement

- Si  $q_i$  est une variable cyclique, l'impulsion associée  $p_i$  est une constante du mouvement.
- Si le temps est homogène, la fonction

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - L = \mathcal{H}(q, \dot{q}) \quad (22.23)$$

est une constante du mouvement.

DÉMONSTRATION. De la définition (22.22) de  $p_i$ , et des équations de Lagrange (22.21), on déduit

$$\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (22.24)$$

$p_i$  est une constante  
du mouvement

et, par conséquent,  $\frac{\partial}{\partial q_i} L = 0$  entraîne  $p_i(t) = p_i(0)$ .

De la définition (22.23) de  $\mathcal{H}$  on tire

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = \sum_i \left( \dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

et les équations (22.21) et (22.22) impliquent

$$\frac{d}{dt} \mathcal{H} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (22.25)$$

$\mathcal{H}$  est une constante  
du mouvement

Par conséquent,  $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$  entraîne  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(0)$ .

### Propriétés 2. Énergie mécanique

Pour un système holonôme, à liaisons parfaites et indépendantes du temps, tel que les forces appliquées dérivent d'un potentiel  $U(q, t)$  indépendant des vitesses, l'observable  $\mathcal{H}$  est l'énergie mécanique.

Liaisons  
indépendantes du  
temps  
↓  
 $\mathcal{H}$  est l'énergie  
mécanique

DÉMONSTRATION. Si les liaisons sont indépendantes du temps et si  $U = U(q, t)$ , on a  $T = T^{(2)}$ , et de (22.19)

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

d'où

$$\mathcal{H} = 2T - (T - U) = T + U = E^{\text{méc}}.$$

### Propriétés 3. Lagrangiens équivalents

- Si  $L'(q, \dot{q}, t) = \lambda L(q, \dot{q}, t)$  où  $\lambda$  est une constante arbitraire, alors  $L$  et  $L'$  définissent la même évolution temporelle.
- Si

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (22.26) \quad \text{Lagrangiens équivalents}$$

où  $f(q, t)$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}_1$ , alors  $L$  et  $L'$  définissent la même évolution.

DÉMONSTRATION. Si  $L' = \lambda L$ , alors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Si  $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$ , alors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} f(q, t) \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} f(q, t);$$

mais

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} f,$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

On remarquera que l'impulsion généralisée  $p_i$  dépend du choix du lagrangien : deux lagrangiens équivalents ne définissent pas toujours la même impulsion.

#### 22.1.6 Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

Considérons un système holonôme à  $k$  degrés de liberté et liaisons indépendantes du temps, pour lequel les forces appliquées dérivent du potentiel  $U(q_1, \dots, q_k)$  indépendant du temps. Il est décrit par le lagrangien (22.15) où l'énergie cinétique est une forme quadratique définie positive en les  $\{\dot{q}_i\}$  (§ 22.1.4) :

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_k). \quad (22.27)$$

Liaisons  
indépendantes  
du temps

Les équations de Lagrange (22.16)

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j a_{ij}(q) \dot{q}_j \right) - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial a_{jk}(q)}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0$$

impliquent

$$\sum_j a_{ij}(q) \ddot{q}_j + \sum_{j,k} \left( \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0. \quad (22.28)$$

Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises (chap 7 ; chap 17 ; appendice D), pour aborder l'étude générale d'un tel système d'équations, on commence par chercher les points d'équilibre  $q_i(t) = \bar{q}_i = \text{cste}$ , c'est-à-dire les solutions de

Point d'équilibre  $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (22.29)$

Soit  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_k)$  un point d'équilibre. On étudie ensuite les petits mouvements au voisinage de ce point d'équilibre en linéarisant les équations du mouvement (22.28) au voisinage de ce point. Dans le cas présent, pour obtenir les équations linéarisées, il suffit de développer le lagrangien à l'ordre 2 relativement aux variables  $(q, \dot{q})$ . Pour cela, on introduit les variables

Changement de variables  $\eta_i = q_i - \bar{q}_i, \quad \dot{\eta}_i = \dot{q}_i \quad (22.30)$

qui représentent les écarts par rapport au point d'équilibre  $(\bar{q}_i, \dot{q}_i = 0)$  et l'on introduit les développements :

$$a_{ij}(\bar{q} + \eta) = A_{ij} + 0(\eta), \quad \text{où} \quad A_{ij} = a_{ij}(\bar{q}),$$

ainsi que

$$U(\bar{q} + \eta) = U(\bar{q}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} \eta_i \eta_j + 0(\eta^3),$$

Élimination des termes d'ordre supérieur

où

$$U_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=\bar{q}} = U_{ji}$$

et nous avons utilisé (22.29) pour éliminer le terme linéaire en  $\eta$ .

Nous obtenons ainsi le lagrangien à l'ordre 2

Nouveau Lagrangien  $L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} U_{ij} \eta_i \eta_j$

et les équations du mouvement linéarisées

Équations linéarisées  $\sum_{j=1}^k (A_{ij} \ddot{\eta}_j + U_{ij} \eta_j) = 0 \quad i = 1, \dots, k. \quad (22.31)$

Comme nous l'avons vu à la section 17.7, on cherche des solutions de la forme

$$\eta_j = C_j e^{i\omega t}. \quad (22.32)$$

En introduisant (22.32) dans les équations (22.31), on déduit

$$\sum_{j=1}^k \left[ -A_{ij} \omega^2 + U_{ij} \right] C_j = 0 \quad i = 1, \dots, k. \quad (22.33)$$

Pour que (22.33) ait une solution non triviale, il faut que le déterminant des coefficients soit zéro, ce qui donne l'équation caractéristique pour  $\omega$  :

Équation  
caractéristique

$$\det(U_{ij} - A_{ij} \omega^2) = 0. \quad (22.34)$$

Comme les matrices  $U_{ij}$  et  $A_{ij}$  sont symétriques, les  $k$  solutions  $\omega_\alpha^2$ , de (22.34), avec  $\alpha = 1, \dots, k$ , sont réelles et définissent les pulsations propres du système.

Pour la valeur propre  $\omega_\alpha$  nous pouvons alors résoudre (22.33), soit  $(C_1^{(\alpha)}, \dots, C_k^{(\alpha)})$ , ce qui donne la solution particulière

Solution particulière

$$\eta_j^{(\alpha)}(t) = C_j^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t} \quad j = 1, \dots, k. \quad (22.35)$$

La solution générale de (22.31) est finalement obtenue par combinaison linéaire des  $k$  solutions particulières (22.35), avec  $\alpha = 1, \dots, k$ , on obtient

Solution générale

$$\eta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^k A_\alpha C_j^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}, \quad (22.36)$$

où les  $k$  constantes complexes  $A_\alpha = |A_\alpha| e^{i\varphi_\alpha}$  sont déterminées par les  $2k$  conditions initiales  $(\eta_j(0), \dot{\eta}_j(0))$ .

Si la matrice  $\{U_{ij}\}$  est définie positive, ce qui implique que le point d'équilibre  $\bar{q}$  est un minimum de l'énergie potentielle, les pulsations propres sont réelles ( $A_{ij}$  étant également défini positif) et la solution est de la forme

$$\eta_j(t) = \sum_{\alpha=1}^k |A_\alpha| C_j^{(\alpha)} \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha). \quad (22.37)$$

Point d'équilibre  
stable

Par conséquent, dans ce cas, le point d'équilibre est stable.

## 22.1.7 Principe de moindre action de Hamilton

Parmi toutes les courbes  $q = q(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ , telles que  $q(t_0) = q^0$  et  $q(t_1) = q^1$ , l'évolution naturelle – définie par les solutions des équations de

Lagrange – est celle qui rend extrémale la fonctionnelle

$$\text{Action} \quad I[q(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} dt \, L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (22.38)$$

appelée *action*.

En effet, comme nous le montrons dans l'appendice E, les équations de Lagrange (22.16) sont les équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel associé à la recherche des extrema de (22.38).

En général, si  $\Delta t = t_1 - t_0$  n'est pas trop grand, on peut montrer que le mouvement naturel est non seulement un extrémum, mais également un minimum de l'action de Hamilton [55], ce qui explique la terminologie de principe de « moindre » action. On remarquera également que ce principe est le correspondant dynamique du principe d'énergie potentielle extrémale – ou minimale – en statique.

## 22.2 ILLUSTRATIONS DU FORMALISME LAGRANGIEN

**Méthode.** La marche à suivre pour étudier un problème dans l'approche lagrangienne est la suivante :

1. choisir un système de coordonnées généralisées  $(q_1, \dots, q_k)$  ; ce système doit être holonôme ;
2. exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction des variables  $\{q_i, \dot{q}_i, t\}$  ;
3. écrire les équations de Lagrange ;
4. étudier les solutions de ces équations.

### 22.2.1 Problème à deux corps

Considérons un système de deux particules interagissant au moyen d'une force centrale conservative (sect. 18.1). C'est un système à six degrés de liberté, holonôme, à liaisons indépendantes du temps. Nous allons présenter différentes méthodes pour aborder ce problème.

Coordonnées  
cartésiennes

- Si l'on choisit les coordonnées cartésiennes  $x_{\alpha,i}$  des particules 1 et 2, on a

$$L(\{x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, t\}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}^2 - U(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|). \quad (22.39)$$

Dans ce cas

$$p_{\alpha,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha,i}, \quad \text{soit} \quad \mathbf{p}_{\alpha} = m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \quad (22.40)$$

et l'impulsion généralisée est la quantité de mouvement des particules 1 et 2.



Comme  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , on conclut que

$$\mathcal{H} = T + U = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2 + U(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) = E = \text{cste.} \quad (22.41)$$

Finalement, on voit que les équations de Lagrange

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha,i} = - \frac{\partial U}{\partial x_{\alpha,i}} \quad (22.42)$$

sont identiques aux équations de Newton.

- Si l'on choisit les coordonnées cartésiennes du centre de masse  $\mathbf{x}_G$  et de la variable relative  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ , on tire de (18.11)

Coordonnées  
du centre de masse  
et relatives

$$L = \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{G,i}^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - U(|\mathbf{x}|). \quad (22.43)$$

Les impulsions généralisées sont maintenant

$$p_{G,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{G,i}} = M \dot{x}_{G,i}, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{p}_G = M \mathbf{v}_G \quad (22.44)$$

et

Impulsions  
généralisées

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \mu \dot{x}_i, \quad \text{d'où} \quad \mathbf{p} = \mu \mathbf{v}. \quad (22.45)$$

Comme  $\frac{\partial}{\partial x_{G,i}} L = 0$ , on conclut que  $p_{G,i} = M \dot{x}_{G,i}$  est une constante du mouvement; de même, comme  $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$ ,  $\mathcal{H} = T + U$  est une constante du mouvement. Les équations de Lagrange sont

$\mathbf{p}_G$  est une constante  
du mouvement

$$\begin{cases} M \ddot{x}_{G,i} = 0 \\ \mu \ddot{x}_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \end{cases} \quad (22.46)$$

On obtient ainsi directement les équations (18.7) et (18.8).

- Si l'on choisit les coordonnées cartésiennes de  $G$  et les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de la variable relative  $\mathbf{x}$ , on a

Coordonnées  
sphériques

$$L = \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^3 \dot{x}_{G,i}^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r). \quad (22.47)$$

Dans ce cas, les impulsions généralisées sont

$$p_G = M\mathbf{v}_G \quad (= \text{quantité de mouvement du système})$$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu \dot{r} \quad (= \mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2 \dot{\theta} \quad (= \mu (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_\varphi)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (= \mu (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_3).$$

De plus,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{H} = T + U = \text{cste}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{G,i}} = 0 \quad \text{entraîne} \quad p_{G,i} = M \dot{x}_{G,i} = \text{cste}$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{entraîne} \quad p_\varphi = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{cste}.$$

$L_{\text{rel}}$  est une constante  
du mouvement

Finalement, l'axe  $\mathbf{e}_3$  ayant été arbitrairement choisi, on conclut que  $L_{\text{rel}} = \mu \mathbf{x} \wedge \mathbf{v}$  est une constante du mouvement et l'on obtient par conséquent

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{|L_{\text{rel}}|^2}{2\mu r^2} + U(r) = E_r = \text{cste} :$$

c'est l'équation (18.20) du paragraphe (18.2.1).

En conclusion, la signification physique de l'impulsion généralisée (quantité de mouvement, moment cinétique, ...) et le nombre de constantes du mouvement « évidentes » dépendent du choix des coordonnées généralisées.

### 22.2.2 Point matériel sur une surface

Reprenons l'exemple (§ 13.5.2) d'un point matériel se déplaçant sous l'action de la pesanteur sur la surface de révolution d'équation

$$z = -\frac{A}{\rho^\alpha} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z \quad (22.48)$$

(où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes, et  $(\rho, \varphi, z)$  les coordonnées cylindriques du point).

C'est un système à deux degrés de libertés. Choisissons les coordonnées  $(\rho, \varphi)$  ; ce système de coordonnées est holonôme et les liaisons (22.48) sont indépendantes du temps.

De (22.48) on tire

$$\dot{z} = \alpha \frac{A}{\rho^{\alpha+1}} \dot{\rho}, \quad (22.49)$$

d'où

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \\ &= \frac{1}{2}m \left[ \left( 1 + \left( \frac{\alpha A}{\rho^{\alpha+1}} \right)^2 \right) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right] + mg \frac{A}{\rho^\alpha}. \end{aligned} \quad (22.50)$$

De (22.50),

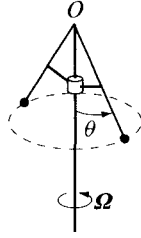
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{entraîne} \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} = \text{cste} \quad (22.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \mathcal{H} &= \frac{1}{2}m \left[ \left( 1 + \left( \frac{\alpha A}{\rho^{\alpha+1}} \right)^2 \right) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right] \\ &\quad - mg \frac{A}{\rho^\alpha} = \text{cste}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi immédiatement les équations (13.50) et (13.53).

### 22.2.3 Régulateur de Watt

Considérons le régulateur de Watt représenté à la figure 22.1, où le support tourne à *vitesse angulaire*  $\Omega$  *constante*. (C'est un système similaire à celui traité aux §§ 14.3.2 et 15.4.4.)



**Fig. 22.1** Régulateur de Watt.

C'est un système à un degré de liberté, holonôme, à *liaisons dépendantes du temps*. Prenons le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire et l'angle  $\theta$  comme coordonnée généralisée. La condition  $\dot{\varphi} = \Omega = \text{cste}$  entraîne

Liaisons  
dépendantes  
du temps

$$L = \frac{1}{2}m(\ell^2 \dot{\theta}^2 + \ell^2 \sin^2 \theta \Omega^2) - 2(-mg\ell \cos \theta), \quad (22.52)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 2m\ell^2 \dot{\theta}. \quad (22.53)$$

Finalement, de  $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$ , on voit que

$$\mathcal{H} = p_\theta \dot{\theta} - L = m\ell^2 \dot{\theta}^2 - m\ell^2 \sin^2 \theta \Omega^2 - 2mg\ell \cos \theta = \text{cste}. \quad (22.54)$$

$\mathcal{H}$  n'est pas l'énergie *La liaison étant dépendante du temps,  $\mathcal{H}$  n'est pas l'énergie mécanique du système.* On remarquera toutefois que  $\mathcal{H}$  représente l'énergie par rapport au référentiel tournant lié au support (§ 15.4.4).

#### 22.2.4 Chute libre

1<sup>re</sup> méthode Pour un point matériel en chute libre, on a

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad (22.55)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad \text{soit } \mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (22.56)$$

et  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  entraîne  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} = \text{cste}$ .  
Finalement, les équations de Lagrange

$$m\ddot{x}_i - mg_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

sont identiques aux équations de Newton.

2<sup>e</sup> méthode Remarquons que le même système peut être décrit par le lagrangien équivalent (§ 22.1.4)

Lagrangien équivalent 
$$L' = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} - \frac{d}{dt}m(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{6}g^2t^3),$$

c'est-à-dire

$$L'(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{g}t)^2. \quad (22.57)$$

Dans ce cas, l'impulsion associée à  $x_i$  est

$$p_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}_i} = m(\dot{x}_i - g_it). \quad (22.58)$$

Comme  $x_i$  est une coordonnée cyclique pour le lagrangien (22.57), on conclut que  $p_i$  est une intégrale première, de sorte que

$$\dot{x}_i(t) - g_it = \dot{x}_i(0),$$

d'où

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \mathbf{g}t \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

En conclusion, en prenant le lagrangien équivalent  $L'$ , l'impulsion généralisée représente la quantité de mouvement par rapport au référentiel accéléré en chute libre.

#### 22.2.5 Solide avec point fixe : gyroscope

Reprenons, dans le formalisme lagrangien, l'étude du gyroscope (§ 14.9.2), c'est-à-dire l'étude d'une toupie symétrique ( $I_1 = I_2$ ) soumise à la seule action de son poids et de la force de liaison au point  $C$  (fig. 14.33).

En choisissant comme coordonnées généralisées les angles d'Euler, et en utilisant l'expression (14.85) de l'énergie cinétique, le lagrangien du système s'écrit

$$L(\theta, \varphi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}) - mg\ell \cos \theta = \\ = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - mg\ell \cos \theta. \quad (22.59)$$

Comme  $L$  ne dépend pas explicitement de  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $t$ , nous obtenons immédiatement trois constantes du mouvement (22.22, 22.23) :

$$I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = C_1$$

$$I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = C_2$$

$$\frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + mg\ell \cos \theta = C_3.$$

Constantes du mouvement

Ce sont les trois équations utilisées au paragraphe (14.9.3) pour étudier le mouvement du gyroscope.

## 22.3 PARTICULES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

### 22.3.1 Potentiel dépendant des vitesses

Au paragraphe 22.1.3, nous avons supposé que les forces appliquées dérivent d'un potentiel indépendant des vitesses (22.14). Supposons maintenant que les composantes  $Q_i$  dépendent des vitesses, mais sont de la forme

$U$  dépend des vitesses

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (22.60) \quad \text{Hypothèse}$$

où  $U = U(q, \dot{q}, t)$  est une fonction quelconque des  $q_i$ ,  $\dot{q}_i$  et du temps.

En introduisant le lagrangien

$$L = T(q, \dot{q}, t) - U(q, \dot{q}, t), \quad (22.61)$$

les équations (22.13) peuvent à nouveau se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (22.62)$$

### 22.3.2 Lagrangien d'un ensemble de particules chargées

Considérons un système de particules chargées en présence des champs électromagnétiques  $\{\mathbf{E}(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\}$  définis en terme du potentiel-vecteur  $\{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (22.63)$$

Dans ce cas, les forces dérivent du potentiel dépendant des vitesses

$$U(\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha, t\}) = \sum_\alpha e_\alpha [\phi(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t) - \mathbf{v}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(\alpha)}, t)] \quad (22.64)$$

où  $e_\alpha$  est la charge de la particule  $\alpha$ .

En effet, pour une particule de charge  $e$ , on déduit de (22.63)

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = e(-\mathbf{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{rot}\mathbf{A})$$

d'où

$$F_i = -e \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \phi - \frac{d}{dt} A_i - \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A} \right)$$

(comme on le vérifie facilement en prenant  $i = 1, 2, 3$ ). Par conséquent

$$\begin{aligned} F_i &= -e \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}] - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i} [\phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}] \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i} - \frac{\partial U}{\partial x_i} \end{aligned}$$

avec

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = e [\phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)]. \quad (22.65)$$

### 22.3.3 Cas particulier : champ invariant dans une direction

Considérons une particule en présence d'un champ électromagnétique défini à partir du potentiel vecteur  $\{\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\}$  indépendant de la coordonnée  $x_3$ . Dans ce cas

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - e [\phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)] \quad (22.66)$$

et

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i + e A_i, \quad \text{soit} \quad \mathbf{p} = m \mathbf{v} + e \mathbf{A}(\mathbf{x}, t). \quad (22.67)$$

Comme la coordonnée  $x_3$  est cyclique, l'impulsion généralisée  $p_3$  est intégrale première, d'où

$$m v_3(t) + e A_3(\mathbf{x}(t), t) = \text{cste.}$$

De plus, si les champs électromagnétiques ne dépendent pas du temps (champs statiques), on a  $\frac{\partial}{\partial t} L = 0$  et

$$\mathcal{H} = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + e \phi(\mathbf{x}) = E = \text{cste.}$$

## 22.4 THÉORÈME DE NOETHER

Les lois de conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique, et de l'énergie, que nous avons discutées dans les chapitres précédents, sont associées à l'invariance du système par rapport aux translations et rotations de l'espace ainsi qu'aux translations dans le temps. Ce sont des cas particuliers d'un théorème important : le théorème de Noether. Ce théorème, que nous allons aborder dans ce chapitre, montre qu'à tout groupe à un paramètre de symétries est associé une constante du mouvement.

### 22.4.1 Symétrie

Soit

$$g : q = (q_1, \dots, q_k) \mapsto g(q) = (g_1(q_1), \dots, g_k(q_k)) \quad (22.68)$$

une application différentiable de l'espace de configuration dans lui-même et  $g^*$  l'application induite sur l'espace de phase  $(q, \dot{q})$ , soit

$$g^* : (q, \dot{q}) \mapsto g^*(q, \dot{q}) = (g(q), \dot{g}(q, \dot{q})), \quad (22.69)$$

où

$$\dot{g}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (22.70)$$

Par définition, l'application  $g$  est une **symétrie** du système décrit par le lagrangien  $L$ , si  $g^*$  laisse  $L$  invariant, c'est-à-dire si

$$L(g^*(q, \dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t). \quad (22.71)$$

**Théorème.** Si  $g$  est une symétrie, l'image par  $g$  d'une solution des équations de Lagrange est aussi solution de ces équations. On dit alors que le système est invariant par rapport à  $g$ , ou encore que  $g^*$  commute avec l'évolution.

**DÉMONSTRATION.** Si  $q(t)$  est solution de (22.16), alors  $q(t)$  rend extrémale l'action (22.38). Le lagrangien étant laissé invariant par l'application  $g$ , l'image par  $g$  de  $q(t)$  rend également extrémale l'action (parmi tous les  $q(t)$  tels que  $q(t_0) = g(q^0)$  et  $q(t_1) = g(q^1)$ ). Par conséquent,  $g(q(t))$  est une solution de (22.16).

Par définition,  $G = \{g_s \mid s \in \mathbb{R}\}$  est un **groupe à un paramètre de symétries**, si pour tout  $s$  réel,  $g_s$  est une symétrie, avec  $g_{s=0} = 1$  et  $g_s \cdot g_t = g_{s+t}$ .



NOETHER Emmy  
Mathématicienne  
allemande  
(1882-1935)

Symétrie

### 22.4.2 Théorème de Noether

Si  $G = \{g_s\}$  est un groupe à un paramètre de symétries, différentiables par rapport à  $s$ , alors la grandeur

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{d}{ds} [g_s(q)]_i \right)_{s=0} \quad (22.72)$$

est une constante du mouvement.

DÉMONSTRATION. De  $L(g_s^*(q, \dot{q}), t) = L(q, \dot{q}, t)$  pour tout  $s$ , il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(g_s^*(q, \dot{q}), t) &= 0 = \\ &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{\partial L(\dots)}{\partial q_i} \frac{d}{ds} [g_s(q)]_i + \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} [\dot{g}_s(q, \dot{q})]_i \right\}, \end{aligned} \quad (22.73)$$

où  $[g_s(q)]_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $g_s(q)$ . Comme  $g_s$  est une symétrie, si  $q(t)$  est solution des équations de Lagrange, alors  $\tilde{q}(t) = g_s(q(t))$  l'est aussi et

$$\frac{\partial}{\partial q_i} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t), t).$$

Par conséquent, (22.73) devient (avec  $q = q(t)$  solution de (22.16))

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} [g_s(q)]_i + \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{ds} g_s(q, \dot{q}) \right]_i \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\partial L(\dots)}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{ds} [g_s(q)]_i \right\}. \end{aligned} \quad (22.74)$$

Finalement, en prenant  $s = 0$  dans (22.74), on obtient  $\frac{d}{dt} I(q, \dot{q}, t) = 0$ , et  $I(q, \dot{q}, t)$  est une constante du mouvement.

### 22.4.3 Illustrations : conservation de $p$ et $L_0$

Considérons un système de  $N$  points matériels interagissant au moyen de forces conservatives qui dérivent du potentiel  $U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ , et supposons que le potentiel soit invariant par rapport aux translations ; cela signifie que pour tout vecteur  $s$ , on a

$$U(\mathbf{x}_1 + s, \dots, \mathbf{x}_N + s) = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N).$$

On dit alors que l'espace est homogène. Dans ce cas, pour tout  $\hat{n}$  fixé, l'appli-

$$g_s : (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \mapsto (\mathbf{x}_1 + s\hat{n}, \dots, \mathbf{x}_N + s\hat{n}) \quad (22.75)$$

Invariance sous les  
translations dans  
l'espace



est une symétrie et

$$\frac{d}{ds} g_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \Big|_{s=0} = (\hat{\mathbf{n}}, \dots, \hat{\mathbf{n}}), \quad (22.76)$$

d'où

$$I(\{\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha, t\}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_\alpha} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_{\alpha} m_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

L'intégrale première est la composante selon  $\hat{\mathbf{n}}$  de la quantité de mouvement du système.

Si l'espace est homogène, la quantité de mouvement  $\mathbf{p} = M\mathbf{v}_G$  est une constante du mouvement.

Supposons ensuite que le potentiel soit invariant par rapport aux rotations autour de l'origine, c'est-à-dire  $U(\mathbf{R}_s \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{R}_s \mathbf{x}_N) = U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  où  $\mathbf{R}_s$  est une rotation d'axe  $\hat{\mathbf{n}}$  fixé, d'angle  $s$ . Dans ce cas, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,

Invariance sous les rotations

$$g_s : (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \mapsto (\mathbf{R}_s \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{R}_s \mathbf{x}_N)$$

est une symétrie. De l'équation (8.4) on déduit

$$\frac{d}{ds} g_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) \Big|_{s=0} = (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{x}_1, \dots, \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{x}_N) \quad (22.77)$$

d'où

$$I(\{\mathbf{x}_\alpha, \dot{\mathbf{x}}_\alpha, t\}) = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\mathbf{x}}_\alpha \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{x}_\alpha) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{L}_O$$

et la constante du mouvement est la composante selon  $\hat{\mathbf{n}}$  du moment cinétique du système.

Si l'espace est isotrope ( $\hat{\mathbf{n}}$  quelconque), le moment cinétique  $\mathbf{L}_O = \sum_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha \wedge m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  est une constante du mouvement.

#### 22.4.4 Généralisations et conservation de l'énergie

Il est possible de généraliser le concept de symétrie en considérant des applications  $g$  telles que  $L(g^*(q, \dot{q}), t)$  soit équivalent à  $L(q, \dot{q}, t)$  au sens du paragraphe (22.1.5).

De plus, on peut considérer des applications  $g$  agissant sur l'espace de configuration étendu  $(t, q)$ . Dans ce cas, on assimile le temps à une coordonnée généralisée,  $q_0 = t$ , et on introduit un paramètre  $\lambda$  décrivant l'évolution. Le mouvement est alors décrit par le lagrangien  $L^{(c)}$  défini sur l'espace de phase étendu  $\Gamma^c = \{(q_0, \dots, q_k, \dot{q}_0, \dots, \dot{q}_k)\}$  où  $\dot{q}_\mu = \frac{d}{d\lambda} q_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, k$ , et

$$q_0 = t$$

$\lambda$  = paramètre décrivant l'évolution

$$L^{(c)}(q_0, \dots, q_k, \dot{q}_0, \dots, \dot{q}_k) = L\left(q_1, \dots, q_k, \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_0}, \dots, \frac{\dot{q}_k}{\dot{q}_0}, q_0\right) \dot{q}_0. \quad (22.78)$$

Espace de phase étendu

Dans ce cas, le moment  $p_0$  conjugué à  $q_0 = t$  est généralement défini avec le signe négatif, soit

$$p_0 = -\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_0} = -\sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}_0} - L = \mathcal{H} \tag{22.79}$$

et les équations de Lagrange sont

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial L^{(e)}}{\partial q_\mu} = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, k. \tag{22.80}$$

En effet, on vérifie facilement que pour  $\mu = 1, \dots, k$ , on obtient (22.16), et pour  $\mu = 0$ , on obtient (22.25).

Soit  $G = \{g_s\}$  le groupe à 1 paramètre des translations dans le temps :

$$g_s : (q_0, q_1, \dots, q_k) \mapsto (q_0 + s, q_1, \dots, q_k).$$

Si le temps est homogène, c'est-à-dire si le lagrangien est invariant par rapport aux translations dans le temps, il suit du théorème de Noether que la grandeur

Invariance sous les translations dans le temps

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{\mu=0}^k \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_\mu} \left( \frac{d}{ds} [g_s(q)]_\mu \right)_{s=0} = -\frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_0}$$

est une constante du mouvement ; mais en vertu de (22.79),  $I = -\mathcal{H}$ .

La grandeur  $\mathcal{H}$  est la constante du mouvement associée à l'homogénéité du temps. Si les conditions de la propriété 2 (§ 22.1.5) sont satisfaites, cette grandeur s'identifie à l'énergie mécanique.

22.5 FORMALISME HAMILTONIEN

22.5.1 Hamiltonien

Considérons un système mécanique décrit par le lagrangien  $L(q, \dot{q}, t)$ . Nous avons remarqué qu'en présence de symétries, certaines des impulsions  $p_i$  sont des constantes du mouvement et il apparaît ainsi plus intéressant d'introduire les variables  $\{q_i, p_i\}$  au lieu des variables  $\{q_i, \dot{q}_i\}$ .

Pour étudier la mécanique au moyen des variables  $\{q_i, p_i\}$ , il faut commencer par introduire l'**hamiltonien**  $H$ , fonction des variables  $(q, p, t)$  définie par transformation de Legendre du lagrangien, c'est-à-dire

$$H = H(q, p, t) = \sum_{j=1}^k p_j \dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t) \tag{22.81}$$

où  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(q, p, t)$  est obtenu en inversant les équations (22.37).



LEGENDRE A.M.  
Mathématicien français  
(1752-1833)

De (22.23) on voit que

$$H(q, p, t) = \mathcal{H}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

et, sous les conditions de la propriété 2 (§ 22.1.5), l'hamiltonien s'identifie à l'énergie mécanique.

### 22.5.2 Équations de Hamilton

De la définition de l'hamiltonien, on obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_j = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (22.82)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{q}_j = \dot{q}_i. \quad (22.83)$$



HAMILTON William R.  
Astronome et  
mathématicien irlandais  
(1805-1865)

Par conséquent, si  $q = q(t)$  est solution des équations de Lagrange, on a

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \\ \frac{dH}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

**Théorème.** Les équations de Lagrange sont équivalentes au système de  $2k$  équations du premier ordre, appelé *équations de Hamilton*,

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, k. \quad (22.84)$$

De plus,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (22.85)$$

### 22.5.3 Formalisme hamiltonien

Dans le formalisme hamiltonien, on postule que le système est caractérisé par  $2k$  variables indépendantes  $(q_1, \dots, q_k, p_1, \dots, p_k)$ , notées  $(q, p)$ , définissant l'état instantané, et par une fonction  $H = H(q, p, t)$ , l'hamiltonien, définissant l'évolution à partir des solutions des équations de Hamilton.

Par définition,  $q_i$  est une *variable cyclique* si l'hamiltonien ne dépend pas explicitement de  $q_i$  ; le *temps est homogène* si l'hamiltonien ne dépend pas explicitement de  $t$ .

**Propriétés. Constantes du mouvement**

- Si  $q_i$  est une variable cyclique, l'impulsion  $p_i$  est une constante du mouvement.
- Si le temps est homogène, l'hamiltonien  $H$  est une constante du mouvement.
- Si  $H(q, p, t) = \sum_{i=1}^k H_i(q_j, p_j, t)$ , le système est équivalent à  $k$  systèmes à un degré de liberté, indépendants, d'hamiltonien respectif  $H_j = H_j(q_j, p_j, t)$ . En particulier, si le temps est homogène, alors  $H_j = H_j(q_j, p_j) = E_j$  est constant, et le système est résoluble par des quadratures.

DÉMONSTRATION. Ces propriétés sont des conséquences immédiates des équations (22.84) et (22.85).

22.6 ILLUSTRATIONS DU FORMALISME HAMILTONIEN

22.6.1 Oscillateur harmonique

Lagrangien      Dans le cas de l'oscillateur harmonique, on a

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \text{soit} \quad \dot{x} = \frac{p}{m},$$

Hamiltonien       $H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2,$

et les équations de Hamilton s'écrivent

Équations de Hamilton      
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} = -kx. \end{cases}$$

Finalement, comme le temps est homogène, on conclut que

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = E, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E.$$

22.6.2 Problème à 2 corps

Considérons un système de deux particules se déplaçant dans un *plan* et interagissant au moyen d'une force centrale.

- Si l'on choisit les coordonnées cartésiennes  $x_{\alpha,i}$  des particules 1 et 2, on obtient des équations (22.39), (22.40) et (22.81),

$$H(\{x_{\alpha,i}, p_{\alpha,i}\}) = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2m_{\alpha}} p_{\alpha,i}^2 + U(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) \quad \text{Hamiltonien}$$

et les équations de Hamilton (22.84) s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_{\alpha,i} = \frac{1}{m_{\alpha}} p_{\alpha,i} \\ \frac{d}{dt} p_{\alpha,i} = -\frac{\partial}{\partial x_{\alpha,i}} U. \end{cases} \quad i = 1, 2, \alpha = 1, 2$$

- Si l'on choisit les coordonnées cartésiennes de  $G$  et des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  de la variable relative, on obtient

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r), \quad \text{Lagrangien}$$

d'où

$$\begin{aligned} p_{G,i} &= M \dot{x}_{G,i}, & \text{soit } \dot{\mathbf{x}}_G &= \frac{1}{M} \mathbf{p}, \\ p_r &= \mu \dot{r}, & \text{soit } \dot{r} &= \frac{1}{\mu} p_r, \\ p_{\theta} &= \mu r^2 \dot{\theta}, & \text{soit } \dot{\theta} &= \frac{1}{\mu r^2} p_{\theta}, \end{aligned}$$

$$H = \mathbf{p}_G \cdot \dot{\mathbf{x}}_G + p_r \dot{r} + p_{\theta} \dot{\theta} - L = \frac{1}{2M} \mathbf{p}_G^2 + \frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_{\theta}^2 \right) + U(r). \quad \text{Hamiltonien}$$

Les coordonnées  $x_{G,i}$  et  $\theta$  sont cycliques, ce qui implique

$$\mathbf{p}_G(t) = \mathbf{p}_G(0), \quad p_{\theta}(t) = p_{\theta}(0)$$

et

$$\dot{\mathbf{x}}_G(t) = \dot{\mathbf{x}}_G(0), \quad \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0).$$

Comme le temps est homogène, on obtient

$$\frac{1}{2\mu} \left( p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_{\theta}^2(0) \right) + U(r) = E = \text{cste}$$

avec

$$p_r = \mu \frac{dr}{dt}.$$

### 22.6.3 Chute libre

Considérons une particule en chute libre. Si l'on choisit le lagrangien (22.55), on déduit de (22.56)

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} p_i,$$

Hamiltonien 
$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2m} p_i^2 - m g_i x_i \right) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - m \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$$

et les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i = \frac{1}{m} p_i \\ \frac{d}{dt} p_i = m g_i. \end{cases}$$

Si l'on choisit le lagrangien équivalent (22.57), on déduit de (22.58)

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} p_i + g_i t$$

et

Hamiltonien équivalent 
$$H = \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{g} t.$$

Dans ce cas, les équations de Hamilton s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x_i = \frac{1}{m} p_i + g_i t \\ \frac{d}{dt} p_i = 0. \end{cases}$$

En conclusion, l'hamiltonien et les équations de Hamilton dépendent des coordonnées et du Lagrangien choisis pour caractériser le système.

### 22.6.4 Particules en présence d'un champ électromagnétique

Considérons un système de  $N$  particules chargées, par exemple un atome, en présence du champ électromagnétique (22.63). Des équations (22.64) et (22.81), on obtient

$$p_{\alpha,i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = m_\alpha \dot{x}_{\alpha,i} + e_\alpha A_i(\mathbf{x}_\alpha, t)$$

et

Hamiltonien 
$$H(\{\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, t\}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2m_\alpha} (\mathbf{p}_\alpha - e_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}_\alpha, t))^2 + U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) + \sum_{\alpha} e_\alpha \phi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, t), \quad (22.86)$$

où  $U(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  est le potentiel associé aux forces d'interaction entre les particules. On remarquera que l'hamiltonien s'identifie à nouveau à l'énergie mécanique du système. On remarquera également la relation entre la vitesse  $\mathbf{v}_\alpha$  et l'impulsion  $\mathbf{p}_\alpha$  :

$$m_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha - e_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}_\alpha, t)$$

## 22.7 FORMALISME HAMILTONIEN NON RELATIVISTE DANS L'ESPACE DE PHASE ÉTENDU

Considérons l'espace de phase étendu (§ 22.4.4), associé aux variables  $(q_\mu, \dot{q}_\mu)$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, k$ , où  $\dot{q}_\mu = \frac{d}{d\lambda} q_\mu$ , avec  $\lambda$  un paramètre décrivant l'évolution. Nous pouvons toujours choisir  $\lambda$  tel que  $\dot{q}_0 = 1$ , c'est-à-dire  $q_0(\lambda) = t(\lambda) = \lambda + t_0$ .

Avec le lagrangien  $L^{(e)}$  (22.78) on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dq_i}{dt} \right)} = p_i \\ \frac{\partial L^{(e)}}{\partial \dot{q}_0} = -\mathcal{H} = -p_0. \end{cases} \quad \dot{q}_\mu = \frac{d}{d\lambda} q_\mu$$

L'hamiltonien du système est la fonction sur l'espace de phase étendu  $\Gamma^e = \{(q_\mu, p_\mu)\}$  définie par transformation de Legendre de  $L^{(e)}$ , soit

$$H^{(e)} = \sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i - p_0 \dot{q}_0 - L^{(e)} = \left( \sum_{i=1}^k p_i \frac{dq_i}{dt} - p_0 - L \right) \dot{q}_0.$$

En prenant  $\dot{q}_0 = 1$ , on obtient l'*hamiltonien*

Hamiltonien

$$H^{(e)}(\{q_\mu, p_\mu\}) = H(\{q_i, p_i\}, q_0) - p_0. \quad (22.87)$$

où  $H(\{q_i, p_i\}, t)$  est l'hamiltonien dépendant du temps (22.81).

En conclusion, en assimilant le temps à l'une des coordonnées généralisées, le système est défini dans le formalisme hamiltonien par l'espace de phase étendu  $(q_0, q_1, \dots, q_k, p_0, p_1, \dots, p_k)$ , l'hamiltonien  $H^{(e)}$  (22.87) et les *équations de Hamilton*

$$\begin{cases} \frac{dq_0}{d\lambda} = -\frac{\partial H^{(e)}}{\partial p_0} = 1; & \frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \\ \frac{dp_0}{d\lambda} = \frac{\partial H^{(e)}}{\partial q_0}; & \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{cases} \quad (22.88)$$

On voit que  $H^{(e)}$  ne dépend pas explicitement de  $\lambda$  et, par conséquent,  $H^{(e)}$  est une intégrale première.

## 22.8 FORMALISME LAGRANGIEN ET HAMILTONIEN RELATIVISTE

### 22.8.1 Lagrangien covariant

Pour illustrer ce formalisme, nous considérons une particule de charge  $e$ , soumise à l'action du champ électromagnétique défini par le potentiel-vecteur  $\{\phi(x), \mathbf{A}(x)\}$  où  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  et  $x^0 = ct$ .

Étant donné deux quadrvecteurs  $x$  et  $y$ , on introduit le produit scalaire

$$x \cdot y = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - x^0 y^0 = \sum_{i=1}^3 x^i y^i - x^0 y^0. \quad (22.89)$$

De plus, on introduit le *quadrvecteur potentiel électromagnétique*  $A = (A^0, \mathbf{A})$ , où  $A^0 = \phi/c$ .

Soit  $m_0$  la masse de repos de la particule,  $\lambda$  le paramètre décrivant l'évolution, et  $\dot{x}^\mu = \frac{d}{d\lambda} x^\mu$ . Si l'on choisit la condition initiale

$$\frac{dt}{d\lambda}(\lambda = 0) = \frac{m(\lambda = 0)}{m_0}, \quad (22.90)$$

où  $m$  est la masse relativiste, alors les équations du mouvement sont les équations de Lagrange associées au *lagrangien*

$$L\left(x, \frac{dx}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2} m_0 \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda} + eA \cdot \frac{dx}{d\lambda}. \quad (22.91)$$

En effet, comme le lagrangien (22.91) ne dépend pas explicitement de  $\lambda$ , la grandeur

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \dot{x}^\mu - L = \frac{1}{2} m_0 \left[ \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right)^2 - \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \right]$$

est une constante du mouvement. La condition initiale (22.90) implique

$$\left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right)^2 = (c^2 - v^2) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = c^2$$

et, par conséquent, le paramètre d'évolution  $\lambda$  s'identifie au temps propre  $\tau$  (21.30) :

$$\tau = \text{temps propre} \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{dt}{d\tau}.$$

D'autre part, pour  $i = 1, 2, 3$ , les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{d\lambda} \left( m_0 \frac{dx^i}{d\lambda} + eA^i \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left( e\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} - \frac{e}{c} \phi \frac{dx^0}{d\lambda} \right) = 0,$$



d'où

$$\frac{d}{dt} \left( m_0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\lambda} + eA^i \right) = e \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \phi),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( m_0 \frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\lambda} \right) &= e \left[ -\frac{dA^i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \phi) \right] = \\ &= e \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} (\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right] \end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt} p^i = e[\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}]^i = F^i. \quad (22.92)$$

Finalement, pour  $\mu = 0$ , on a

$$\frac{d}{d\lambda} \left( -m_0 \frac{dx^0}{d\lambda} - \frac{e}{c} \phi \right) - \frac{\partial}{\partial x^0} \left( e\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} - \frac{e}{c} \phi \frac{dx^0}{d\lambda} \right) = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left( cm_0 \frac{dt}{d\lambda} \right) &= \frac{e}{c} \frac{d\phi}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \phi] = \\ &= \frac{e}{c} \left[ \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{e}{c} \left[ \mathbf{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{v} = -\frac{e}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

et

$$\frac{d}{dt} (mc^2) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (22.93)$$

En conclusion, les équations d'évolution (22.92) et (22.93) sont les équations relativistes obtenues à la section 21.6.

### 22.8.2 Hamiltonien covariant

Pour obtenir l'hamiltonien associé au lagrangien (22.91), on calcule pour commencer les moments  $p^\mu$

$$\begin{cases} p^0 = -\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = m_0 \frac{dx^0}{d\lambda} + \frac{e}{c} \phi \\ p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m_0 \frac{dx^i}{d\lambda} + eA^i. \end{cases} \quad (22.94)$$

Et, de la définition du hamiltonien

$$H(x, p) = p \cdot \frac{dx}{d\lambda} - L, \quad (22.95)$$

on obtient l'*hamiltonien* d'une particule chargée dans un champ électromagnétique,

$$H((x, p) = \frac{1}{2m_0} (p - eA(x)) \cdot (p - eA(x)), \quad (22.96)$$

soit

$$H((x, p) = \frac{1}{2m_0} \left[ (p - eA(x))^2 - \left( p^0 - \frac{e}{c} \phi(x) \right)^2 \right]. \quad (22.97)$$

Comme  $H$  ne dépend pas explicitement de  $\lambda$ , l'*hamiltonien est une intégrale première*. D'autre part, des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \frac{dx^0}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial p^0} = \frac{1}{m_0} \left( p^0 - \frac{e}{c} \phi \right) & \frac{dp^0}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x^0} \\ \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p^i} = \frac{1}{m_0} (p^i - eA^i) & \frac{dp^i}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{cases} \quad (22.98)$$

on trouve le temps propre  $\tau$

$$\left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 - \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda} \right)^2 \right] = -\frac{2m_0}{c^2} H.$$

En conséquence, si l'on choisit la condition initiale

$$H = -\frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (22.99)$$

le paramètre  $\lambda$  s'identifie au temps propre ; dans ce cas, l'équation (22.98) implique que

$$c \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{m_0} \left( p^0 - \frac{e}{c} \phi \right) = \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

et que

$$\begin{cases} p^0 - \frac{e}{c} \phi = mc \\ \mathbf{p} - e\mathbf{A} = m\mathbf{v} \end{cases} \quad (22.100)$$

avec  $m$  la masse relativiste de la particule.

### 22.8.3 Remarques

Le quadrivecteur  $p = (p^0, \mathbf{p})$  défini par (22.100), soit

$$\begin{cases} p^0 = (E + e\phi)/c & E = mc^2 \\ \mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \end{cases} \quad (22.101)$$

est le **quadrivecteur quantité de mouvement** d'une particule chargée en présence d'un champ électromagnétique. D'autre part, avec la condition initiale (22.99), on tire de (22.97)

$$\frac{1}{2m_0} \left[ m^2 \mathbf{v}^2 - \frac{E^2}{c^2} \right] = -\frac{1}{2} m_0 c^2$$

et l'on retrouve l'équation (21.54), c'est-à-dire

$$E = c \sqrt{m^2 \mathbf{v}^2 + m_0^2 c^2}. \quad (22.102)$$

Finalement, on remarquera que le lagrangien et l'hamiltonien sont des scalaires par rapport aux transformations de Lorentz.

#### 22.8.4 Interaction scalaires

L'interaction définie par l'hamiltonien (22.96) est appelée « interaction vectorielle ». On remarque que l'hamiltonien le plus simple pour décrire le mouvement d'une particule dans un champ extérieur, qui soit scalaire par rapport aux transformations de Lorentz, est donné par

$$H(x, p) = \frac{1}{2m_0} p \cdot p + U(x), \quad (22.103)$$

soit

$$H(x, p) = \frac{1}{2m_0} (p^2 - (p^0)^2) + U(x),$$

où  $U(x)$  est une fonction scalaire. Dans ce cas, on parle d'interaction scalaire et on obtient les équations de Hamilton suivantes

$$\begin{cases} \frac{dx^0}{d\lambda} = \frac{p^0}{m_0} & \frac{dp^0}{d\lambda} = \frac{\partial U}{\partial x^0} \\ \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{p^i}{m_0} & \frac{dp^i}{d\lambda} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \end{cases} \quad (22.104) \quad \begin{array}{l} \text{Équations} \\ \text{de Hamilton} \end{array}$$

Une interaction de ce type, avec  $U(x) = \kappa / |\mathbf{x}|$  où  $\kappa$  est une constante, a été proposée par Sommerfeld comme modèle relativiste du problème de Képler. On voit que l'hamiltonien est à nouveau une intégrale première, soit

$$H(x, p) = \tilde{H}, \quad (22.105)$$

mais les équations de Hamilton impliquent, avec (22.105), que

$$\left( \frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = \frac{2}{m_0 c^2} [U(x) - \tilde{H}]. \quad (22.106)$$

En choisissant à nouveau des conditions initiales telles que  $\bar{H} = -\frac{1}{2}m_0c^2$ , on a

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \sqrt{1 + \frac{2}{m_0c^2} U(x)} \tag{22.107}$$

et le paramètre  $\lambda$  correspond au temps propre uniquement dans les régions de l'espace-temps où  $U(x) = 0$ .

Remarquons finalement que les équations du mouvement entraînent

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{c}{p^0} \mathbf{p}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{cm_0}{p^0} \mathbf{grad} U,$$

où, pour les conditions initiales  $\bar{H} = -\frac{1}{2}m_0c^2$ ,

$$p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2c^2 + U(x)}.$$

Ainsi, dans la limite non relativiste où  $p^0 \rightarrow m_0c$ , on retrouve les équations de Newton, pour une particule de masse  $m_0$ , soumise à la force  $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U$ .

22.9 PROBLÈMES

- Surface de révolution
- 22.9.1 Étudier le mouvement d'un point sur la surface de révolution  $z = -A/\rho^\alpha$  d'axe parallèle à  $\mathbf{g}$  (§ 13.5.2) en utilisant le formalisme lagrangien ; écrire le lagrangien ; trouver les variables cycliques et les constantes du mouvement ; écrire les équations de Lagrange.
- 22.9.2 Étudier le problème précédent dans le formalisme hamiltonien : écrire l'hamiltonien ; trouver les variables cycliques et les constantes du mouvement ; écrire les équations de Hamilton.
- Points matériels reliés par un fil
- 22.9.3 Étudier le mouvement d'un point sur la table à air, relié par un fil à un autre point matériel astreint à se déplacer verticalement (§ 10.5.3) en utilisant le formalisme hamiltonien.
- Pendule en rotation
- 22.9.4 Étudier le mouvement du pendule physique sur un support tournant à vitesse angulaire  $\Omega$  constante (§ 14.3.2) dans le formalisme hamiltonien et par rapport au référentiel du laboratoire. Quelle est l'interprétation physique de l'hamiltonien ?
- Pendule de Thomson-Tait
- 22.9.5 Un système est formé de deux points matériels de masse  $m$ , fixés aux extrémités d'une tige rigide  $AB$  de longueur  $2\ell$  et de masse négligeable. Le milieu  $C$  de la tige  $AB$  est fixé à un axe horizontal  $OC$  de longueur  $L$  (masse négligeable). La tige  $OC$  tourne librement autour d'un axe vertical et la tige  $AB$  tourne librement autour de  $C$  dans le plan vertical contenant  $OC$  (fig. 22.2). Écrire le lagrangien ; trouver les variables cycliques et les constantes du mouvement ; écrire les équations de Lagrange et vérifier que le système est résoluble par des quadratures.

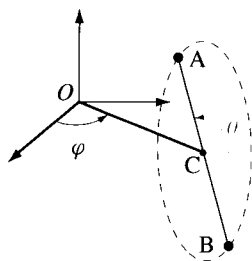


Fig. 22.2

**22.9.6** Un cylindre homogène de masse  $M$  et rayon  $r$  roule sans glisser à l'intérieur d'un cylindre immobile de rayon  $R$  et d'axe perpendiculaire à  $g$ . Étudier le mouvement en utilisant le formalisme lagrangien.

**22.9.7** On considère un cône homogène de masse  $M$ , hauteur  $h$ , rayon de base  $R$ , dont le sommet est fixé (sect. 14.9). Écrire le lagrangien (en termes des angles d'Euler); trouver les variables cycliques et les constantes du mouvement; écrire les équations de Lagrange.

Gyroscope

**22.9.8** Un pendule double est constitué d'une masse  $m_1$  reliée par un fil rigide de longueur  $\ell_1$  à un point  $O$  fixé, et d'une masse  $m_2$  reliée à  $m_1$  par un fil rigide de longueur  $\ell_2$  (fig. 22.3). Écrire le lagrangien du système; trouver les constantes du mouvement; écrire les équations de Lagrange; trouver les fréquences propres des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

Double pendule

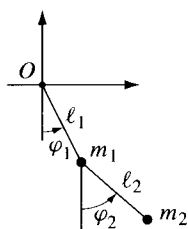


Fig. 22.3

**22.9.9** On considère le problème précédent en imposant au point  $m_1$  le mouvement circulaire uniforme  $\varphi(t) = \omega_1 t$ . Vérifier que le système peut être décrit par l'un ou l'autre des lagrangiens suivants :

$$1. L = \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \omega_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \omega_1 t) + m_2 g (\ell_2 \cos \varphi_2 + \ell_1 \cos \omega_1 t);$$

$$2. L' = \frac{1}{2} m_2 \ell_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ell_1 \ell_2 \omega_1^2 \cos(\varphi_2 - \omega_1 t) + m_2 g \ell_2 \cos \varphi_2.$$

Trouver l'hamiltonien et les équations de Hamilton relativement à  $L$  et  $L'$ .

**22.9.10** Un système est constitué d'un tube homogène de masse  $M$ , section négligeable, en forme d'anneau de rayon  $R$ , à l'intérieur duquel se déplace

Anneau tournant

(sans frottement) un point matériel de masse  $m$ . Ce tube tourne librement autour d'un diamètre vertical (fig. 22.4). Analyser le mouvement du système en utilisant le formalisme lagrangien.

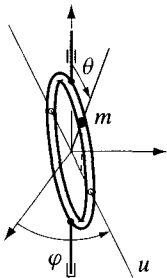


Fig. 22.4

**22.9.11** Deux points matériels de même masse  $m$  sont astreints à se mouvoir sans frottement sur deux cercles de même rayon  $R$  situés dans un même plan horizontal. Les points interagissent au moyen d'une force  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -P_1P_2$  (fig. 22.5). Trouver l'hamiltonien, les constantes du mouvement et les équations de Hamilton. Étudier les petits mouvements au voisinage des positions d'équilibre stable.

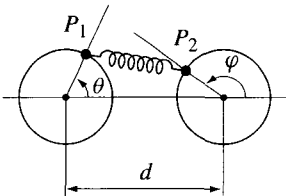


Fig. 22.5

## APPENDICE A

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.4

Soit  $X = X(A_1, \dots, A_k)$ . Supposons pour commencer que tous les  $A_i$  soient de même dimension  $[A]$  et considérons le changement d'unités défini par  $1[A] = \alpha[A]'$ . Comme pour toute observable  $X$  le rapport  $x/\bar{x}$  de deux valeurs est indépendant du système d'unités, nous avons :

$$X = x[X] = x'[X']$$

et

$$\frac{x}{\bar{x}} = \frac{x(a_1, \dots, a_k)}{x(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k)} = \frac{x'}{\bar{x}'} = \frac{x(\alpha a_1, \dots, \alpha a_k)}{x(\alpha \tilde{a}_1, \dots, \alpha \tilde{a}_k)}.$$

Nous avons alors

$$x(\alpha a_1, \dots, \alpha a_k) = \varphi(\alpha)x(a_1, \dots, a_k)$$

où

$$\varphi(\alpha) = \frac{x(\alpha \tilde{a}_1, \dots, \alpha \tilde{a}_k)}{x(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k)} = \frac{x(\alpha a_1, \dots, \alpha a_k)}{x(a_1, \dots, a_k)} = \frac{x'}{x}.$$

Cette dernière équation entraîne

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha_1)} = \frac{x(\alpha \tilde{a}_1, \dots, \alpha \tilde{a}_k)}{x(\alpha_1 \tilde{a}_1, \dots, \alpha_1 \tilde{a}_k)} = \frac{x(\frac{\alpha}{\alpha_1} \tilde{a}_1, \dots, \frac{\alpha}{\alpha_1} \tilde{a}_k)}{x(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_k)} = \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha_1)} = \varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(1) = 1.$$

Dérivons cette dernière équation par rapport à  $\alpha$  et posons ensuite  $\alpha_1 = \alpha$  ; nous obtenons

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} \left( \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) (\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) (1) \quad \varphi(1) = 1$$

ce qui implique :

$$\varphi(\alpha) = \alpha^n = \frac{x'}{x} \quad \text{avec} \quad n = \left( \frac{d\varphi}{d\alpha} \right) (\alpha = 1),$$

d'où

$$x' = \alpha^n x, \quad [X] = [A]^n$$

et

$$x(\alpha a_1, \dots, \alpha a_k) = \alpha^n x(a_1, \dots, a_k).$$

La fonction  $x(a_1, \dots, a_k)$  est ainsi une fonction homogène de degré  $n$ .

De même, si  $X = X(A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_q)$  où les  $A_i$  sont de dimension  $[A]$  et les  $B_j$  de dimension  $[B]$ , nous obtiendrons de façon analogue :

$$[X] = [A]^{n_1} [B]^{n_2}$$

et

$$x(\alpha a_1, \dots, \alpha a_k, \beta b_1, \dots, \beta b_q) = \alpha^{n_1} \beta^{n_2} x(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_q).$$

Le cas général se démontre de façon similaire.



## APPENDICE B

# VECTEURS ET TENSEURS

L'expérience de Stévin (§ 4.3.3) nous a amenés à introduire le concept de « vecteur », grandeur physique ayant les mêmes propriétés géométriques que les déplacements libres. Par conséquent, ayant choisi un repère  $Oe_1e_2e_3$ , tout vecteur  $\mathbf{v}$  peut être représenté par trois nombres réels de même nature ( $v^1, v^2, v^3$ ), appelés *composantes contravariantes* de  $\mathbf{v}$  relativement au repère  $Oe_1e_2e_3$ , tels que (§ 4.5.3)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 v^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{B.1})$$

De même dans le chapitre 21, nous avons introduit des vecteurs de l'espace à 4 dimensions et, dans ce cas, nous avons écrit

$$\mathbf{v} = \sum_{\mu=0}^3 v^\mu \mathbf{e}_\mu. \quad (\text{B.2})$$

La discussion qui suit, bien que présentée explicitement pour le cas tridimensionnel, est valable quelle que soit la dimension de l'espace.

## B.1 CHANGEMENTS DE REPÈRE

### B.1.1 Formules de transformation

Etant donné un référentiel  $\mathcal{R}$ , il y a une infinité de manières de choisir un repère  $Oe_1e_2e_3$ . Comme la physique ne doit pas dépendre de ce choix, la question suivante se pose : comment se transforment les composantes d'un vecteur lors d'un changement de repère ?

Soient  $Oe_1e_2e_3$  et  $O'e'_1e'_2e'_3$  deux repères qui ne sont pas nécessairement orthonormés (fig. B.1). Par rapport au premier repère les points  $P$  et  $O'$  sont représentés par (§ 4.5.1)

$$\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{OO'} = \sum_{i=1}^3 s^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{B.3})$$

Par rapport au second repère, ces mêmes points  $P$  et  $O'$  sont représentés par

$$O'P = \sum_{i=1}^3 x'^i e'_i \quad O'O' = 0. \tag{B.4}$$

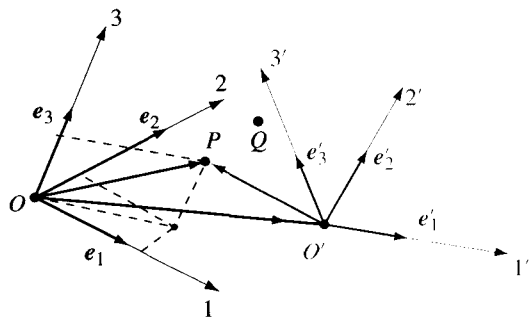


Fig. B.1 Changement de repère.

Pour trouver la relation entre les coordonnées  $x^i$  et  $x'^i$  de  $P$ , décomposons les vecteurs  $e'_i$  dans la base  $e_1 e_2 e_3$  :

$$e'_i = \sum_{j=1}^3 A^j_i e_j. \tag{B.5}$$

Les  $3^2 = 9$  nombres réels  $A^j_i$  définissent une matrice, la matrice de changement des vecteurs de base,

Matrice de  
changement des  
vecteurs de base

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix}$$

De même nous avons

$$e_i = \sum_{j=1}^3 B^j_i e'_j \quad \text{où} \quad \sum_{j=1}^3 B^k_j A^j_i = \delta^k_i, \tag{B.6}$$

c'est-à-dire que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont l'inverse l'une de l'autre :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{B.7}$$

Nous obtenons ainsi

$$O'P = \sum_{j=1}^3 x'^j e'_j = OP - OO' = \sum_{i=1}^3 (x^i - s^i) e_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (x^i - s^i) B^j_i e'_j$$

ce qui donne les formules de transformation pour les composantes contravariantes des rayons vecteurs

$$x'^j = \sum_i B^j_i (x^i - s^i). \quad (\text{B.8})$$

La matrice  $B^j_i = \frac{\partial}{\partial x^i} x'^j$  est la matrice de transformation des coordonnées.

Matrice de transformation des coordonnées

Au contraire, pour les déplacements libres, on a simplement

$$\xi'^j = \sum_i B^j_i \xi^i. \quad (\text{B.9})$$

Pour les **composantes covariantes** des rayons vecteurs (§ 4.5.3), définies par

$$x_j = \mathbf{OP} \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (\text{B.10})$$

nous déduisons de (B.5)

$$x'_j = \mathbf{O'P} \cdot \mathbf{e}'_j = (\mathbf{OP} - \mathbf{OO'}) \cdot \left( \sum_i A^i_j \mathbf{e}_i \right),$$

ce qui donne les formules de transformation pour les composantes covariantes des rayons-vecteurs

$$x'_j = \sum_i A^i_j (x_i - s_i) \quad (\text{B.11})$$

et des déplacements libres

$$\xi'_j = \sum_i A^i_j \xi_i. \quad (\text{B.12})$$

### B.1.2 Repères orthonormés

Si l'on ne considère que des repères orthonormés,  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  et (B.5) implique que

$$A^j_i = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i \quad (\text{B.13})$$

et

$$\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}'_i = \delta_{ki} = \sum_j \mathbf{e}'_k \cdot A^j_i \mathbf{e}_j = \sum_j A^j_i A^j_k = \sum_j \tilde{A}^k_j A^j_i = (\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A})^k_i.$$

Par conséquent, la matrice  $\mathbf{A}$  est telle que

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14}) \quad \text{Repère orthonormé}$$

Matrice orthogonale

où  $\tilde{\mathbf{A}}$  est la matrice transposée de  $\mathbf{A}$  ( $\tilde{\mathbf{A}}^k_j = A^j_k$ ). Une matrice  $\mathbf{A}$  telle que  $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbb{1}$  est dite **orthogonale**. Ainsi pour les changements de repères orthonormés on déduit de (B.7) que

$$B^j_i = A^i_j, \quad \text{soit} \quad \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}}. \quad (\text{B.15})$$

Finalement, le déterminant de  $\mathbf{A}$  est égal à  $+1$  ou  $-1$  selon que le changement de repère conserve ou inverse l'orientation du repère (car  $\det(\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}}) = (\det \mathbf{A})^2 = 1$ ).

### B.1.3 Interprétation passive et active

Comme les transformations associées aux changements d'unités (sect. 2.6), la transformation (B.8) admet deux interprétations : du **point de vue passif** ( $x'^1, x'^2, x'^3$ ) représentent les coordonnées du même point  $P$ , exprimées dans le nouveau repère (c'est le point de vue développé jusqu'ici); du **point de vue actif** ( $x'^1, x'^2, x'^3$ ) représentent les coordonnées d'un nouveau point  $P'$ , exprimées dans l'ancien repère, c'est-à-dire  $\mathbf{OP}' = \sum_i x'^i \mathbf{e}_i$  (fig. B.2).

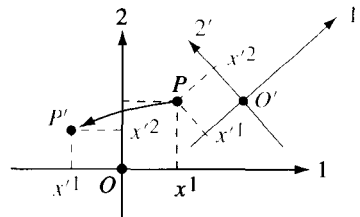


Fig. B.2 Transformation passive et active.

Remarquons que la transformation active est l'inverse de la transformation associée au changement de repère. Par exemple, si  $O'e'_1e'_2e'_3$  est relié à  $Oe_1e_2e_3$  par la translation  $s$ , alors la transformation active est la translation  $(-s)$ .

## B.2 TENSEURS

Les formules de transformation (sect B.1) nous amènent à reconsidérer les expériences ayant conduit aux notions de « scalaire » et de « vecteur ». Une analyse algébrique de ces expériences (§ B.4.1) laisse apparaître une nouvelle approche du concept de « scalaire » et de « vecteur ». Ces nouvelles définitions sont plus proches de l'expérience et sont celles auxquelles le physicien pense lorsqu'il parle de « scalaire » et de « vecteur ». D'autre part, ces nouveaux concepts se généralisent facilement et conduisent à la notion de tenseur.

Toutes les grandeurs considérées dans cette section sont définies par rapport à un référentiel.  $\mathcal{R}$  muni d'un repère qui n'est pas nécessairement orthonormé.

### B.2.1 Tenseur d'ordre zéro ou scalaire

Considérons deux points  $P$  et  $Q$  (fig. B.1). Par rapport au repère  $Oe_1e_2e_3$ ,  $P = (x^1, x^2, x^3)$  et  $Q = (y^1, y^2, y^3)$ ; de même, par rapport à  $O'e'_1e'_2e'_3$ ,  $P = (x'^1, x'^2, x'^3)$  et  $Q = (y'^1, y'^2, y'^3)$ .

A partir de (B.10) nous voyons que le longeur  $L$  du déplacement  $PQ$  s'exprime par la relation :

$$\begin{aligned} L^2 = |PQ|^2 &= \left[ \sum_i (y^i - x^i) e_i \right] \left[ \sum_j (y^j - x^j) e_j \right] = \\ &= \sum_i (y^i - x^i) \cdot \left[ \sum_j (y^j - x^j) e_j \cdot e_i \right] = \\ &= \sum_i (y^i - x^i)(y_i - x_i). \end{aligned}$$

Par conséquent, la grandeur  $L$  définie par la formule

$$L = \left[ \sum_i (y^i - x^i)(y_i - x_i) \right]^{1/2} \quad (\text{B.16}) \quad \text{Norme de } PQ$$

est la norme de  $PQ$  et elle ne dépend pas du repère choisi. En conclusion

$$L' = L \quad \text{où} \quad L' = \left[ \sum_i (y'^i - x'^i)(y'_i - x'_i) \right]^{1/2}.$$

Par définition un **scalaire**  $S$  – ou un **tenseur d'ordre 0** – est une grandeur invariante par rapport aux changements de repères considérés, c'est-à-dire

Scalaire

$$S' = S. \quad (\text{B.17})$$

Attention ! Si les repères ne sont pas orthonormés, la grandeur

$$\lambda = \left[ \sum_i (y^i - x^i)^2 \right]^{1/2}$$

dépend du repère choisi, et n'a pas de signification physique.

### B.2.2 Tenseur d'ordre 1 ou vecteur

L'analyse de l'expérience de Stévin (§ 4.3.3) montre que les formules reliant les nouvelles valeurs ( $F'^1, F'^2$ ) aux anciennes ( $F^1, F^2$ ), sont identiques aux formules (B.9), en remplaçant  $\xi^j$  par  $F^j$ .

Vecteur  
contravariant

Par définition un **vecteur contravariant** – ou **tenseur contravariant d'ordre 1** – est un ensemble de trois grandeurs, de même unité, noté  $(v^1, v^2, v^3)$ , qui se transforment comme les composantes contravariantes d'un déplacement libre lors d'un changement de repère, c'est-à-dire

$$v'^i = \sum_j B^i_j v^j. \quad (\text{B.18})$$

Vecteur covariant

De même un **vecteur covariant** – ou **tenseur covariant d'ordre 1** – est un ensemble de trois grandeurs de même unité, noté  $(v_1, v_2, v_3)$ , qui se transforment comme les composantes covariantes d'un déplacement libre, c'est-à-dire

$$v'_i = \sum_j A^j_i v_j. \quad (\text{B.19})$$

De (B.15), nous déduisons que si on se limite à des repères orthonormés, il n'y a pas de distinction entre composantes co- et contravariantes ( $v_i = v^i$ ).

### B.2.3 Propriété

Condition pour que  
les trois grandeurs  
 $(u_1, u_2, u_3)$  soient les  
composantes d'un  
vecteur covariant

Un ensemble de trois grandeurs  $(u_1, u_2, u_3)$  est un vecteur covariant si et seulement si pour tout vecteur contravariant  $(v^1, v^2, v^3)$  la grandeur  $S = \sum_i u_i v^i$  est un scalaire.

En effet, si  $(u_1, u_2, u_3)$  est un vecteur covariant, alors par (B.6)

$$S' = \sum_i u'_i v'^i = \sum_i \sum_j \sum_k A^k_i B^i_j u_k v^j = \sum_j u_j v^j = S.$$

Inversement, si pour tout vecteur contravariant  $(v^1, v^2, v^3)$  la grandeur  $S$  est un scalaire, alors avec (B.19)

$$S = \sum_i u_i v^i = S' = \sum_j u'_j v'^j = \sum_j \sum_i u'_j B^j_i v^i.$$

Par conséquent, pour tout  $(v^1, v^2, v^3)$  on doit avoir

$$\sum_i (u_i - \sum_j u'_j B^j_i) v^i = 0 \quad \text{d'où} \quad u_i = \sum_j B^j_i u'_j$$

et de (B.7), on tire

$$u'_k = \sum_i A^i_k u_i.$$

### B.2.4 Tenseur d'ordre deux

Par définition, un **tenseur contravariant d'ordre 2** est un ensemble de 9 grandeurs de même unité, noté

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = (T^{ij}),$$

Tenseur  
contravariant  
d'ordre 2

qui se transforment lors d'un changement de repère selon la loi

$$T'^{ij} = \sum_k \sum_\ell B^i_k B^j_\ell T^{k\ell}, \quad (\text{B.20})$$

où  $B^i_j$  est la matrice du changement de coordonnées (B.8).

Le tenseur est dit **symétrique** si

$$T^{ij} = T^{ji} \quad (\text{B.21}) \quad \text{Tenseur symétrique et antisymétrique}$$

et **antisymétrique** si

$$T^{ij} = -T^{ji}. \quad (\text{B.22})$$

**Propriété.** Tout tenseur d'ordre 2 est la somme d'un tenseur symétrique  $\mathbf{T}_{(s)}$  et d'un tenseur antisymétrique  $\mathbf{T}_{(a)}$ .

DÉMONSTRATION.

$$T^{ij} = \left[ \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}) \right] + \left[ \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji}) \right] = T^{ij}_{(s)} + T^{ij}_{(a)}. \quad (\text{B.23})$$

### B.2.5 Tenseurs co- et contravariant

On définit de façon similaire les tenseurs covariant d'ordre 2 ( $T_{ij}$ ) au moyen de la matrice  $\mathbf{A}$ , puis les tenseurs  $p$ -fois contravariants et  $q$ -fois covariants. Par exemple,

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} A^k_i A^l_j T_{kl} \quad (\text{B.24}) \quad \text{Tenseur covariant d'ordre 2}$$

$$T'^i_j = \sum_{k,l} B^i_k A^l_j T^k_l. \quad (\text{B.25})$$

Dans cet ouvrage, nous choisissons des repères orthonormés et il n'y a pas lieu de distinguer entre co- et contravariant (sauf dans le cas de la relativité).

**Propriété.** Une matrice  $3 \times 3$  ( $T_{ij}$ ) symétrique, définie dans tout système de coordonnées, est un tenseur covariant d'ordre 2 si et seulement si, pour tout vecteur contravariant ( $v^1, v^2, v^3$ ), la grandeur

Condition pour  
qu'une matrice  
symétrique soit un  
tenseur d'ordre 2

$$S = \sum_{i,j} T_{ij} v^i v^j \quad (\text{B.26})$$

est un scalaire.

**DÉMONSTRATION.** Si **T** est un tenseur, alors

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i,j} T'_{ij} v'^i v'^j = \sum_{i,j,k,l,m,n} A^k_i A^l_j T_{kl} (A^{-1})^i_m (A^{-1})^j_n v^m v^n = \\ &= \sum_{m,n} T_{mn} v^m v^n = S. \end{aligned}$$

Inversement, si (B.26) est un scalaire, alors

$$S' = \sum_{k,l} T'_{kl} v'^k v'^l = S = \sum_{i,j} T_{ij} v^i v^j = \sum_{i,j,k,l} T_{ij} A^i_k A^j_l v'^k v'^l$$

d'où

$$\sum_{k,l} \left[ T'_{kl} - \sum_{i,j} A^i_k A^j_l T_{ij} \right] v'^k v'^l = 0.$$

**Corollaire.**

Tout tenseur symétrique d'ordre 2 peut être représenté géométriquement par une surface d'équation

Ellipsoïde,  
hyperboloïde  
ou paraboloïde

$$\sum_{i,j} T_{ij} x^i x^j = \pm 1 \quad (\text{B.27})$$

et cette représentation est indépendante du repère choisi.

Ces surfaces sont des ellipsoïdes, hyperboloïdes ou paraboloïdes, notions qui généralisent à 3 dimensions les concepts d'ellipse, d'hyperbole et de parabole (sect. 14.5).

### Axes principaux

Axes principaux du  
tenseur

Pour tout tenseur symétrique d'ordre 2 il existe un repère orthonormé par rapport auquel le tenseur est diagonal, c'est-à-dire  $T'_{ij} = T'_{ii} \delta_{ij}$ . Les axes de ce repère sont appelés *axes principaux du tenseur*.



### B.2.6 Pseudo-tenseur

Dans l'espace à 3 dimensions, un *pseudo-tenseur d'ordre*  $n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) est un ensemble de  $3^n$  grandeurs de même unité qui se transforment comme un tenseur d'ordre  $n$  à un facteur multiplicatif près qui dépend du déterminant de la matrice de changement de coordonnées.

Par exemple, un *pseudo-scalaire*  $\Delta$  est une grandeur qui se transforme selon la formule

$$\Delta' = (\det \mathbf{A}) \Delta. \quad (\text{B.28}) \quad \text{Pseudo-scalaire}$$

Un *pseudo-vecteur* contravariant est un ensemble de 3 grandeurs qui se transforment selon la formule

$$\omega'^i = (\det \mathbf{A}) \sum_j B^i_j \omega^j. \quad (\text{B.29}) \quad \text{Pseudo-vecteur}$$

### Propriété (valable à 3 dimensions seulement)

Dans l'espace à 3 dimensions, tout tenseur antisymétrique covariant d'ordre 2 définit un pseudo-vecteur contravariant ; la représentation géométrique (fig. 4.18) est indépendante du repère choisi.

DÉMONSTRATION. Soit  $\omega^k = T_{ij}$  et  $\omega'^k = T'_{ij}$ , où  $i j k$  est une permutation paire de 1 2 3. Pour simplifier, nous démontrons cette propriété dans le cas de repères orthonormés. Dans ce cas,

$$A^j_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}'_i \wedge \mathbf{e}'_j = (\det \mathbf{A}) \mathbf{e}'_k \quad \text{et} \quad \det \mathbf{A} = \pm 1.$$

Comme  $(T_{ij})$  est un tenseur covariant, nous tirons de (B.24)

$$\begin{aligned} \omega'^k = T'_{ij} = & (A^1_i A^2_j - A^2_i A^1_j) T_{12} + (A^3_i A^1_j - A^1_i A^3_j) T_{31} \\ & (A^2_i A^3_j - A^3_i A^2_j) T_{23}. \end{aligned}$$

Mais de (B.13) et (4.20) on déduit que

$$\begin{aligned} A^\ell_i A^m_j - A^m_i A^\ell_j &= (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_\ell)(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_m) - (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_m)(\mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_\ell) = \\ &= (\mathbf{e}'_i \wedge \mathbf{e}'_j) \cdot (\mathbf{e}_\ell \wedge \mathbf{e}_m) = (\det \mathbf{A}) \mathbf{e}'_k \cdot (\mathbf{e}_\ell \wedge \mathbf{e}_m), \end{aligned}$$

d'où

$$\omega'^k = (\det \mathbf{A}) \mathbf{e}'_k \cdot [\mathbf{e}_3 \omega^3 + \mathbf{e}_2 \omega^2 + \mathbf{e}_1 \omega^1] = (\det \mathbf{A}) B^k_j \omega^j.$$

## B.3 CONCLUSION

Les formules telles que (B.18) et (B.19) permettent de définir des grandeurs ayant une signification indépendante du repère choisi ; c'est la raison pour

laquelle la notion de tenseur est si importante en physique. L'idée fondamentale réside dans le fait que les systèmes de coordonnées ne sont qu'un outil pour étudier des grandeurs ayant une signification intrinsèque et que seules les grandeurs – et non les composantes – correspondent à une réalité physique indépendante de l'observateur.

Il est possible de parler de scalaires, vecteurs, ou tenseurs, relativement à *d'autres groupes de transformations*. On dit par exemple que le rayon-vecteur est un vecteur relativement aux transformations qui laissent l'origine du repère invariante ; de même, le produit vectoriel définit un vecteur relativement aux transformations qui conservent l'orientation du repère. Dans les théories relativistes on parle de vecteurs relativement au groupe de Lorentz.

Pour terminer, remarquons que dans toutes les équations de la physique nous pouvons vérifier les *unités* et le *caractère tensoriel de chaque terme*.

Produit	Caractère tensoriel	Produit	Caractère tensoriel
$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$	scalaire	$\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$	pseudo-vecteur
$\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$	scalaire	$\boldsymbol{\omega}_1 \wedge \boldsymbol{\omega}_2$	pseudo-vecteur
$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$	pseudo-scalaire	$\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\omega}$	vecteur

B.4 PROBLÈME

**B.4.1** Un corps de poids  $P$  est suspendu soit par un fil, soit par deux fils (fig. B.3).

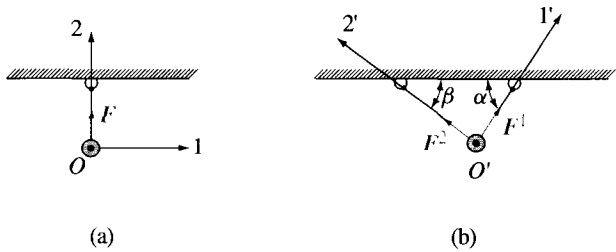


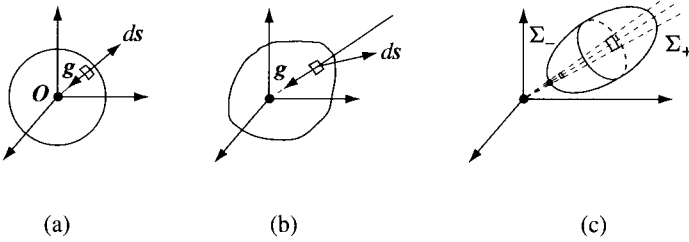
Fig. B.3

- Quelles sont les forces  $F$  et  $(F^1, F^2)$  exercées par les fils ?
- Trouver les matrices **A** et **B** associées au changement de repère normé  $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \mapsto O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ . Vérifier que les forces  $(F^1, F^2)$  sont reliées à  $F$  comme les composantes *contravariantes*  $(\xi'^1, \xi'^2)$  sont reliées à  $(\xi^1, \xi^2)$ .
- Un corps est suspendu à deux fils et on mesure les angles  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  et les forces  $(\tilde{F}^1, \tilde{F}^2)$ . Trouver les composantes *covariantes*  $(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$  et le poids  $\tilde{P}$  ( $\tilde{P}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$ ).

## APPENDICE C

# PROPRIÉTÉS DU CHAMP DE GRAVITATION

Soit  $\mathbf{g} = -G \frac{m}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$  le champ de gravitation au point  $\mathbf{x}$  créé par un point matériel de masse  $m$ , situé à l'origine d'un système de coordonnées sphériques.



**Fig. C.1** Champ de gravitation créé par un point matériel.

Considérons une surface  $\Sigma$  fermée, régulière, et calculons **le flux**  $\phi$  du champ  $\mathbf{g}$  à travers  $\Sigma$  où, par définition,  $\phi$  est l'intégrale de surface suivante

$$\phi = \int_{\Sigma} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}.$$

Dans le cas d'une sphère  $S_R$  de rayon  $R$  et centre  $O$ , on a immédiatement

$$\phi = \int_{S_R} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{g} = \int_{S_R} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \left( -\frac{Gm}{R^2} \right) = -4\pi Gm.$$

Si  $\Sigma$  est une surface entourant l'origine, telle que les rayons d'origines  $O$  coupent  $\Sigma$  en un seul point, on obtient

$$\phi = \int_{\Sigma} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_r \left( -\frac{Gm}{r^2} \right) = \int_{\Sigma} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \left( -\frac{Gm}{r^2} \right) = -4\pi Gm.$$

Considérons finalement une surface  $\Sigma$  n'entourant pas l'origine et supposons  $\Sigma$  coupée en deux points par les rayons d'origine  $O$ . La surface se

décompose alors en deux parties  $\Sigma_+$  et  $\Sigma_-$  telles que  $ds \cdot e_r = \pm r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  avec le signe + sur  $\Sigma_+$  et le signe - sur  $\Sigma_-$ . Par conséquent

$$\begin{aligned}\phi &= \int_{\Sigma_+} ds \cdot g + \int_{\Sigma_-} ds \cdot g = \\ &= \int_{\Sigma_+} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \left( -\frac{Gm}{r^2} \right) - \int_{\Sigma_-} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \left( -\frac{Gm}{r^2} \right) = 0\end{aligned}$$

(car  $\int_{\Sigma_+} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{\Sigma_-} \sin \theta d\theta d\varphi$  est l'aire de la surface sur la sphère unité définie par le cône tangent à  $\Sigma$ ).

Dans le cas d'une surface régulière quelconque, on décompose le volume  $V$  défini par  $\Sigma$  en volumes  $V_i$  tels que la surface  $\Sigma_i$ , frontière de  $V_i$ , satisfasse les conditions précédentes.

En conclusion, pour toute surface fermée  $\Sigma$ , on a

$$\text{Flux du champ de gravitation} \quad \int_{\Sigma} ds \cdot g = -4\pi Gm, \quad (\text{C.1})$$

où  $m$  est la masse à l'intérieur de la surface  $\Sigma$ .

Ce résultat ne dépend pas du choix de l'origine et est ainsi valable pour le champ de gravitation  $g$  créé par une distribution discrète ou continue de matière. On a, par conséquent, le théorème suivant.

**Théorème.** Le flux du champ de gravitation  $g$  à travers une surface fermée, régulière, est égal à la masse totale à l'intérieur de la surface multipliée par  $(-4\pi G)$  :

$$\int_{\Sigma} ds \cdot g = -4\pi G M_{\Sigma}.$$

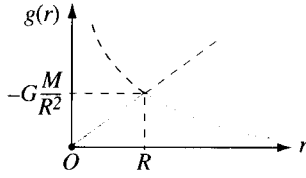
Pour démontrer le théorème de Newton (§ 12.1.3), considérons le champ  $g$  créé par une boule homogène de masse  $M$  et de rayon  $R$ , centrée à l'origine. Par symétrie, on a  $g = g(r)e_r$ , et

$$\int_{S_{R_1}} ds \cdot g = \int_{S_{R_1}} R_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi g(R_1) = \begin{cases} -4\pi G M & \text{si } R_1 > R \\ -4\pi G M \frac{R_1^3}{R^3} & \text{si } R_1 < R \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\text{Champ de gravitation exercé par une sphère de rayon } R \\ g(R_1) &= \begin{cases} -G \frac{M}{R_1^2} & \text{si } R_1 > R \\ -GM \frac{R_1}{R^3} & \text{si } R_1 < R \end{cases} \quad (\text{C.2}) \end{aligned}$$

ce qui établit le théorème.



**Fig. C.2** Champ de gravitation créé par une boule homogène de rayon  $R$ .

Considérons, pour terminer, une distribution continue de matière, de masse spécifique  $\rho(\mathbf{x})$ . Du théorème d'Ostrogradsky,

$$\int_{\Sigma} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{v} \quad \left( \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right),$$

où  $V$  est un volume arbitraire de frontière  $\Sigma$ , et  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$ , on tire

$$\int_{\Sigma} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{g} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G M_{\Sigma} = -4\pi \int_V dV \rho(\mathbf{x}).$$

En conclusion, le champ de gravitation  $\mathbf{g}$  créé par une distribution de matière de masse spécifique  $\rho(\mathbf{x})$  est solution de l'équation différentielle

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G \rho. \quad (\text{C.3}) \quad \text{Théorème de la divergence}$$

En introduisant le **potentiel de gravitation**  $U$  associé, soit

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad} U, \quad (\text{C.4})$$

on obtient l'équation de la gravitation newtonienne

$$\Delta U = 4\pi G \rho. \quad (\text{C.5})$$

Équation de la gravitation newtonienne

Dans (C.5),

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \quad \text{Laplacien}$$

est le laplacien de la fonction  $U$ .

En conclusion, pour trouver le champ de gravitation créé par la distribution de matière  $\rho(\mathbf{x})$ , il faut résoudre l'équation scalaire (C.5), en imposant par exemple  $U(\mathbf{x}) = 0$  à l'infini, puis on obtient  $\mathbf{g}$  à partir de (C.4).



## APPENDICE D

# THÉORÈMES GÉNÉRAUX

### D.1 EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES AUTONOMES (E.D.O.)

Dans cet appendice, nous considérons uniquement le cas d'E.D.O. autonomes et l'on écrira

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ f &= (f_1, \dots, f_n) \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Résoudre (D.1) signifie trouver  $n$  fonctions  $x_i = x_i(t)$  telles que

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et satisfaisant les conditions initiales  $x(t = 0) = x_0$ .

Pour mettre en évidence les conditions initiales on écrit cette solution sous la forme

$$x(t) = \Phi_t(x_0). \quad (\text{D.2})$$

On appelle **flot** l'application

$$\Phi : (t, x) \mapsto \Phi_t(x) = x(t)$$

qui associe, à l'état  $x$  à l'instant 0, l'état  $x(t)$  à l'instant  $t$ .

Finalement l'**orbite** du point  $x$ , sous l'action du flot, est la courbe orientée de l'espace de phase définie par

$$\{\Phi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{D.3})$$

#### **Théorème 1** *Existence et unicité*

Si les fonctions  $f_i(x)$  sont de classe  $C_1$ , alors pour tout  $x_0$  il existe un plus grand intervalle de temps  $I$  dans lequel l'équation (D.1) possède une solution et une seule  $x(t) = \Phi_t(x_0)$  satisfaisant  $x(t = 0) = x_0$ .

Il découle de ce théorème que par tout point  $x_0$  de l'espace de phase passe une orbite et une seule.

**Théorème 2** *Propriété de groupe*

La famille à 1 paramètre d'applications  $\{\Phi_t \mid t \in I\}$  définies sur l'espace de phase satisfait

$$\Phi_0(x) = x \qquad \Phi_{t_1} \cdot \Phi_{t_2} = \Phi_{t_1+t_2}.$$

En particulier si l'E.D.O. (D.1) possède une solution pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'évolution est définie par un groupe à 1 paramètre d'applications sur l'espace de phase.

**Théorème 3** *Homogénéité du temps*

Soit  $x(t) = \Phi_t(x)$  la solution de (D.1) de condition initiale  $x(0) = x$ , alors  $\tilde{x} = x(t - t_0)$  est la solution de (D.1) de condition initiale  $\tilde{x}(t_0) = x$  à l'instant  $t = t_0$ .

Le lecteur trouvera la démonstration de ces théorèmes dans les ouvrages standard sur les équations différentielles [33].

**Exemple singulier**

Pour illustrer l'importance de la condition de régularité introduite dans le théorème 1, considérons l'exemple suivant

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = x^\alpha \end{cases} \qquad \text{avec} \quad 0 < \alpha < 1.$$

On peut vérifier aisément qu'il existe deux solutions de conditions initiales  $(x_0 = 0, v_0 = 0)$  :

- 1. la solution d'équilibre  $(x(t) = 0, v(t) = 0)$  pour tout  $t$  ;
- 2.  $x(t) = At^\beta$ ,      où     $\beta = \frac{2}{1-\alpha}$     et     $A = [\beta(\beta - 1)]^{\frac{1}{\beta-1}}$ .

D.2 EQUILIBRE ET STABILITÉ

**D.2.1 Définition**

Le point  $\tilde{x}$  est un *point d'équilibre* de (D.1) si

$$f(\tilde{x}) = 0. \tag{D.4}$$

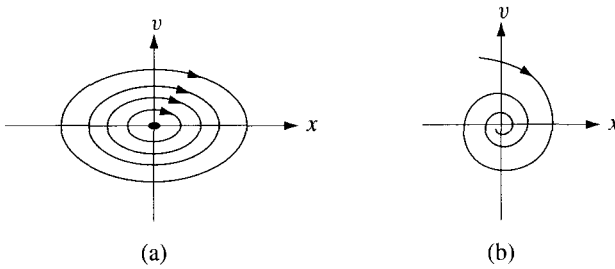
Dans ce cas,  $x(t) = \tilde{x}$  est la solution de condition initiale  $x(0) = \tilde{x}$ .

Le point d'équilibre  $\tilde{x}$  est dit *stable* si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta$  tel que  $|x_i(0) - \tilde{x}_i| < \delta, i = 1, \dots, n$ , entraîne  $|x_i(t) - \tilde{x}_i| < \varepsilon$  pour tout  $t$  ; il est dit



**instable** dans le cas contraire. Le point d'équilibre stable est **asymptotiquement stable** si, de plus,  $|x_i(t) - \tilde{x}_i|$  tend vers zéro lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Comme nous le voyons sur la figure D.1, l'origine ( $x = 0, v = 0$ ) est un point d'équilibre stable de l'oscillateur harmonique ; c'est de plus un point asymptotiquement stable dans le cas de l'oscillateur amorti.



**Fig. D.1** Orbits : (a) de l'oscillateur harmonique :  $\dot{x} = v, \dot{v} = -kx$  ; (b) de l'oscillateur amorti :  $\dot{x} = v, \dot{v} = -kx - \lambda v$ .

## D.2.2 Critère de stabilité de Liapunov [33]

Soit  $\tilde{x}$  un point d'équilibre de (D.1). Si il existe une fonction continue  $h(x)$ , définie sur un ouvert  $U$  contenant  $\tilde{x}$ , différentiable en dehors de  $\tilde{x}$ , telle que

a)  $h(\tilde{x}) = 0$  et  $h(x) > 0$  si  $x \neq \tilde{x}, x \in U$ ,

b)  $\dot{h} \leq 0$  dans  $U \setminus \tilde{x}$  où  $\dot{h}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(x)}{\partial x_i} f_i(x)$ ,

alors  $\tilde{x}$  est *stable* ;

c) si de plus  $\dot{h} < 0$  dans  $U \setminus \tilde{x}$ , alors  $\tilde{x}$  est *asymptotiquement stable*.

## D.2.3 Remarques

La notion de *stabilité* fait partie du domaine de la mécanique, tandis que la *stabilité asymptotique* est associée à la thermodynamique. Par exemple, dès qu'il y a des frottements, il y aura stabilité asymptotique, mais aussi dégagement de chaleur.

La fonction  $h$  (§ D.2.2) est appelée **fonction de Liapunov**. En mécanique, c'est l'énergie  $E$  (avec  $\dot{E} = 0$ ) ; en thermodynamique,  $h$  est l'opposé de l'entropie  $S$  ( le deuxième principe de la thermodynamique s'exprime par la condition  $\dot{S} > 0$  pour les systèmes isolés hors équilibre).

D.3 LINÉARISATION

D.3.1 Définition

Soit  $\tilde{x}$  un point d'équilibre de (D.1). Pour étudier les solutions de (D.1) *au voisinage* de  $\tilde{x}$ , on considère le développement de Taylor de  $f$  autour de  $\tilde{x}$

$$f_i(x) = f_i(\tilde{x}) + \sum_{j=1}^n A_{ij}(x - \tilde{x})_j + \dots \tag{D.5}$$

où  $f_i(\tilde{x}) = 0$  car  $\tilde{x}$  est un point d'équilibre et

$$A_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) (\tilde{x}). \tag{D.6}$$

Par définition, la **linéarisation** de (D.1) autour de  $\tilde{x}$  se traduit par l'équation différentielle linéaire

Équation linéarisée

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij}y_j, \quad \text{où } y_i = x_i - \tilde{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{D.7}$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \tag{D.8}$$

La solution de l'équation linéarisée (D.8), de condition initiale  $y(0) = y_0$  est donnée par

$$y(t) = e^{tA}y_0. \tag{D.9}$$

Cette solution fournit une approximation de la solution de (D.1) de condition initiale  $x_0 = \tilde{x} + y_0$  avec  $|y_0| \ll 1$  en vertu du théorème suivant.

D.3.2 Théorème [33]

Pour tout  $T > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que si  $|x_0 - \tilde{x}| < \delta$ , alors  $|x(t) - \tilde{x} - y(t)| < \varepsilon\delta$  quel que soit  $t$  dans l'intervalle  $[0, T]$ .

Dans le cas où  $\tilde{x}$  est un point d'équilibre *stable*, on dit que (D.9) décrit les **petits mouvements** au voisinage de  $\tilde{x}$ .

## APPENDICE E

# CALCUL DES VARIATIONS

La formulation la plus générale des lois du mouvement de systèmes matériels est donnée par le principe de moindre action de Hamilton (§ 22.1.7). Pour comprendre la démarche conduisant à ce principe, nous considérons d'abord deux problèmes de calcul des variations puis nous démontrons les équations d'Euler- Lagrange nécessaires à la résolution de ces deux problèmes ; enfin, nous revenons à la mécanique, aux équations de Lagrange, et au principe de moindre action.

## E.1 ILLUSTRATIONS

### E.1.1 Courbe de longueur minimale

Considérons la figure E.1, où l'on suppose que les points  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$  sont fixés. Le problème consiste à trouver la courbe de longueur minimale allant de  $P_1$  à  $P_2$ .

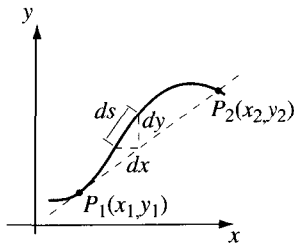
On voit sur la figure que

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx$$

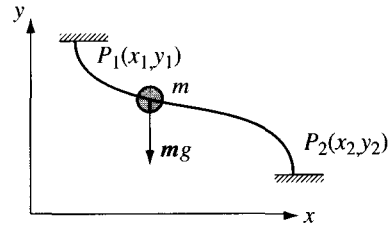
et la longueur de la courbe est donnée par

$$L = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y'^2)^{1/2} dx. \quad (\text{E.1}) \quad \text{Extrémalisation de } L$$

Par conséquent, le problème consiste à trouver la fonction  $y(x)$  qui rend minimale l'intégrale (E.1), avec  $y(x_1) = y_1$  et  $y(x_2) = y_2$ .



**Fig. E.1** Quel est le plus court chemin de  $P_1$  à  $P_2$  ?



**Fig. E.2** Perle glissant sans frottement sur un fil fixé en  $P_1$  et  $P_2$ .

### E.1.2 Problème du brachistochrone

La figure E.2 montre une perle de masse  $m$  qui glisse sans frottement sur un fil rigide sous l'action de la gravité. La perle étant lâchée sans vitesse initiale en  $P_1$ , on veut trouver la forme du fil, situé dans un plan vertical, telle que le temps pour atteindre  $P_2$  soit minimum. Historiquement, ce problème, appelé problème du brachistochrone, est celui pour lequel la méthode du calcul des variations a été développée.

Le temps est donné par

$$t = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v}$$

où  $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$  et  $v$ , la vitesse scalaire, est donnée par

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_1$$

d'où

$$\text{Extrémalisation de } t \quad t = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{2g(y_1 - y)} \right]^{1/2} dy. \quad (\text{E.2})$$

A nouveau le problème consiste à trouver la fonction  $x(y)$  qui minimise l'intégrale (E.2), soumise aux conditions  $x(y_1) = x_1$  et  $x(y_2) = x_2$ .

## E.2 EQUATIONS D'EULER-LAGRANGE

Les deux exemples précédents conduisent au problème général de trouver les conditions de stationarité de l'intégrale

$$\text{Extrémalisation de } I \quad I = I[y(\cdot)] = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) dx \quad (\text{E.3})$$

où  $x$  est la variable indépendante,  $y$  une fonction de  $x$  et  $y' = dy/dx$ .  $F$  est une fonction donnée. On fixe en outre les valeurs de  $x$  et de  $y$  aux bornes

d'intégration. L'intégrale (E.3) est un nombre qui dépend de la fonction  $y = y(x)$  : c'est donc une fonctionnelle. Le problème consiste à rechercher le ou les chemins d'intégrations,  $y = y(x)$ , qui rendent  $I$  stationnaire ( minimum ou maximum).

Soit  $y(x)$ , la fonction pour laquelle  $I$  est minimum. Cela signifie que  $I$  croît lorsqu'on remplace  $y(x)$  par une fonction quelconque  $y(x) + \delta y(x)$  où  $\delta y(x)$  est une fonction petite dans tout l'intervalle de  $x_1$  à  $x_2$ , et qui s'annule en  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0. \quad (\text{E.4})$$

Puisque la variation  $\delta$  est petite, nous pouvons évaluer la variation de  $I$ , en développant la fonction  $F$  en série, soit

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx = \\ &= \delta \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \end{aligned}$$

En intégrant par partie, il vient

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx$$

et compte tenu de (E.4)

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx.$$

La condition de stationnarité de  $I$  exige que  $\delta I$  soit nul et, par suite de l'arbitraire de  $\delta y$ , que l'intégrand soit égal à zéro.

En conclusion, la fonction  $y(x)$  rend stationnaire l'intégrale (E.3) si et seulement si elle est solution de l'**équation d'Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (\text{E.5}) \quad \text{Condition d'extrémalisation}$$

Ce résultat se généralise au cas où  $F$  est une fonction de  $(2n + 1)$  variables  $y_i, y'_i$  et  $x$ , c'est-à-dire que  $I$  dépend de  $n$  fonctions  $y_i = y_i(x)$ . On obtient alors  $n$  équations

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{E.6})$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange du problème (E.3).

### E.3 SOLUTIONS DES DEUX ILLUSTRATIONS

#### E.3.1 Courbe de longueur minimale

De (E.1) et (E.2), on a  $F = (1 + y'^2)^{1/2}$ . Dans ce cas, (E.5) implique

Quel chemin  
extrémalise la  
distance de  $P_1$  à  $P_2$  ?

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1 = \text{cste}$$

d'où

$$(1 + y'^2)^{-1/2} y' = c_1 \quad \text{et} \quad y' = c_1 \sqrt{1 - c_1^2} = c_2$$

et par intégration

$$y = c_2 x + c_3.$$

Comme prévu, le chemin le plus court de  $P_1$  à  $P_2$  est une droite passant par  $P_1$  et  $P_2$ .

#### E.3.2 Problème du brachistochrone

Dans le deuxième exemple, on a (E.2) :

$$F = \left[ \frac{1 + x'^2}{2g(y_1 - y)} \right]^{1/2}$$

On doit considérer ici que  $y$  est la variable indépendante et (E.5) s'écrit

Quel chemin  
extrémalise le temps  
mis pour glisser de  
 $P_1$  à  $P_2$  ?

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (\text{E.7})$$

Comme  $\frac{\partial}{\partial x} F = 0$ , l'équation (E.7) implique

$$\frac{\partial}{\partial x'} F = c_1 = \text{cste}$$

d'où

$$\frac{x'}{\{(1 + x'^2 [2g(y_1 - y)])\}^{1/2}} = c_1.$$

Par conséquent,

$$x' = \left( \frac{y_1 - y}{1/2 g c_1^2 - y_1 + y} \right)^{1/2} = \left( \frac{y_1 - y}{c_3 + y} \right)^{1/2}$$

avec  $c_3 = 1/2 g c_1^2 - y_1$ .

En effectuant le changement de variable

$$\begin{aligned} y_1 - y &= R(1 - \cos \alpha) \\ c_3 + y &= R(1 + \cos \alpha) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

avec  $R = (c_3 + y_1)/2$ , nous obtenons  $dy = -R \sin \alpha d\alpha$  et

$$dx = -R \left( \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \right)^{1/2} \sin \alpha d\alpha = R(1 - \cos \alpha) d\alpha. \quad (\text{E.9})$$

Par intégration de (E.9) on obtient

$$\begin{aligned} x &= x_0 + R(\alpha - \sin \alpha) \quad \text{et en outre (E.8),} \\ y &= y_1 - R(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Ces deux équations sont les équations paramétriques (§5.4.1) d'une cycloïde de tangente verticale en  $P_1$ .

#### E.4 PRINCIPE DE HAMILTON

Remarquons tout d'abord que le lagrangien tel qu'il est défini au § 22.1.3 a exactement la forme de  $F : L = L(q, \dot{q}, t)$ . En outre les équations de Lagrange étant les mêmes que (E.6), soit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{E.10})$$

on peut en conclure qu'elles sont les équations d'Euler-Lagrange d'un problème de calcul des variations où l'intégrale  $I$  est donnée par

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (\text{E.11}) \quad \text{Action de Hamilton}$$

Cette intégrale  $I$  est appelée **action de Hamilton**. L'évolution temporelle  $(q_1(t), \dots, q_k(t))$ , solution des équations de Lagrange (E.10), est donc celle qui extrémalise  $I$ . On l'exprime en écrivant

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0. \quad \text{Principe de moindre action}$$

C'est l'expression du **principe de moindre action de Hamilton** (§ 22.1.7).





# RÉPONSE AUX PROBLÈMES

- 1.8.1**  $\langle L \rangle = 1,5019 \text{ m}$ ,  $\Delta L = 0,0013 \text{ m}$  CHAPITRE 1  
 $\langle T \rangle = 2,458 \text{ s}$ ,  $\Delta T = 0,001 \text{ s}$ .
- 1.8.2**  $\Delta v = 30\,000 \text{ km/s}$ ;  $\Delta v = 300 \text{ m/s}$ ;  $\Delta v = 5 \cdot 10^{-17} \text{ m/s}$ .
- 1.8.3** Non; oui.
- 1.8.4**  $d = 264 \text{ \AA}$ ;  $d = 1,8 \mu$ .
- 2.10.1** 1)  $t' = 10^3 t$ ,  $x'_i = 10^2 x_i$ ,  $v'_i = 10^{-1} v_i$ ,  $a'_i = 10^{-4} a_i$ ,  $f'_i = 10^{-4} f_i$ ,  $g' = g$  CHAPITRE 2  
 2)  $\tilde{f}_i = 10^{-4} f_i$ ,  $\tilde{a}_i = 10^{-4} a_i$ ,  $\tilde{g} = g$   
 3) La transformation est une similitude. Non.
- 2.10.2** 1)  $t' = \tau t$ ,  $x'_i = \lambda x_i$ ,  $v'_i = \lambda \tau^{-1} v_i$ ,  $a'_i = \lambda \tau^{-2} a_i$ ,  $f'_i = \lambda \tau^{-2} f_i$ ,  
 $k' = \lambda^{1+n} \tau^{-2} k$   
 $k' = k$  si  $\tau = \lambda^{\frac{1+n}{2}}$   
 2)  $\tilde{f}_i = \lambda^{-n} f_i$ ,  $\tilde{a}_i = \lambda^{-n} a_i$   
 Si  $\tau = \lambda^{(1+n)/2}$  la transformation est une similitude :  
 Pesanteur ( $n = 0$ ) :  $\frac{t_1}{t_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$  (= rapport des temps de chute)  
 Gravitation ( $n = 2$ ) :  $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}$  (Loi de Képler pour des mouvements semblables)  
 Loi de Hooke ( $n = -1$ ) :  $T_1 = T_2$  (Isochronisme des oscillations).
- 2.10.3**  $1 \text{ C} \cong 3 \cdot 10^9 \text{ CGS-es}$ .
- 3.4.1**  $\text{H}_2$  :  $d \cong 33 \text{ \AA}$ ;  $\text{H}_2\text{O}$  :  $d \cong 3 \text{ \AA}$ ;  $\text{Fe}$  :  $d \cong 2,3 \text{ \AA}$  CHAPITRE 3
- 3.4.2** 1)  $d \cong 4,2 \cdot 10^{16} \text{ m}$ ; 2)  $1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$ .
- 3.4.3** 1)  $d \cong 2 \cdot 10^6 \text{ D}_0$ ; 2)  $p \cong 5 \cdot 10^{-15} \text{ atmosphère}$ .
- 4.10.2** 1)  $|\mathbf{OA}| = 8,12 [L]$ ;  $|\mathbf{OB}| = 6,16 [L]$ ;  $|\mathbf{AB}| = 9,27 [L]$ ;  $|\mathbf{OA} + \mathbf{OB}| = 11,04 [L]$  CHAPITRE 4  
 2)  $79,6^\circ$ ;  $40,8^\circ$   
 3)  $-7,02 \widehat{\mathbf{OA}}$   
 4)  $24,6 [L]^2$   
 5)  $(7, -23, 43)$   
 6)  $\mathbf{A} = (4, 7, 1)$ ;  $\mathbf{B} = (5, -2, 3)$ ;  $\mathbf{D}' = (23, -7, -43)$ ; non :  $\mathbf{OD}' = -\mathbf{OD}$ .
- 4.10.5**  $D_r = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_r = (x^2 - x^1) \cos \theta + (y^2 - y^1) \sin \theta$   
 $D_\theta = \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_\theta = -(x^2 - x^1) \sin \theta + (y^2 - y^1) \cos \theta$   
 où  $\cos \theta = x^1 / [(x^1)^2 \sin^2 \theta + (x^2)^2]^{1/2}$ .
- 4.10.6** Si  $1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$  :  $\mathbf{x} = \mathbf{c} - \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{a}$   
 Si  $1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  : si  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ , pas de solution  
 si  $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \lambda \mathbf{a}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$4.10.7 \quad \text{Si } \alpha \neq 0, \mathbf{x} = \frac{1}{\alpha^2 + |\mathbf{a}|^2} \left[ \alpha \mathbf{b} + \frac{1}{\alpha} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \right]$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \text{ et } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} + \lambda \mathbf{a}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.10.8 Soit  $[F] = \text{kgf}$  :

- 1)  $\mathbf{F}_B = (532,6; 7,5)$ ;  $|\mathbf{F}_B| \cong 533$ ;  $\mathbf{F}_C = (-532,6; 307,5)$ ;  
 $|\mathbf{F}_C| = 615$
- 2)  $\mathbf{F}_B = (532,6; 315)$ ;  $|\mathbf{F}| = 619$ ;  $\mathbf{F}_C = (-532,6; 0)$ ;  $|\mathbf{F}_C| = 532,6$
- 3)  $\mathbf{F}_B = (266,3; 161,2)$ ;  $|\mathbf{F}_B| = 311$ ;  $\mathbf{F}_C = (-266,3; 153,8)$ ;  
 $|\mathbf{F}_C| = 307$
- 4)  $\mathbf{F}_B = (727,5; 735)$ ;  $|\mathbf{F}_B| = 1033$ ;  $\mathbf{F}_C = (-727,5; -420)$ ;  
 $|\mathbf{F}_C| = 839$ .

$$4.10.9 \quad |\mathbf{F}| = 75 \text{ kgf}; \mathbf{F}_{A,2} = \frac{5}{3} \text{ kN}; \mathbf{F}_{B,2} = -\frac{13}{3} \text{ kN}; \mathbf{F}_{C,2} = \frac{8}{3} \text{ kN}.$$

$$4.10.10 \quad \text{Angle } BCP = \theta = 164,3^\circ.$$

$$4.10.11 \quad \delta = \frac{a}{2} + \left( h - \frac{b}{2} \right) \tan \alpha;$$

$$\max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left( b - \frac{a}{\tan \alpha} \right) \right\} \leq h \leq \min \left\{ b, \frac{1}{2} \left( b + \frac{a}{\tan \alpha} \right) \right\}$$

$$4.10.12 \quad \mathbf{F}_A = \frac{1}{3}(275 - 75d) \text{ kgf}; \mathbf{F}_B = \frac{1}{3}(100 + 75d) \text{ kgf};$$

$$d_{\max} = 3,66 \text{ m}.$$

$$4.10.13 \quad h = 90 \text{ mm}.$$

$$4.10.14 \quad T_B = 722 \text{ kgf}; T_C = 296 \text{ kgf}; T_D = 381 \text{ kgf}.$$

$$4.10.15 \quad \mathbf{F}_A = (0; 178; 322) \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_B = (0; 0; 368) \text{ N}$$

$$\mathbf{F} = (0; -178; 46) \text{ N}; |\mathbf{F}| = 184 \text{ N}.$$

$$4.10.16 \quad \mathbf{F} = (0; 100; 0) \text{ N}$$

$$\mathbf{M}_O = (15; 0; 12,5) \text{ Nm}.$$

4.10.17  $\mathbf{M}_C = -6,57 \cdot 10^{-20} \mathbf{e}_3 \text{ Nm}$ . Le torseur est équivalent à un seul vecteur, mais celui-ci n'est pas lié au centre du dipôle.

$$4.10.18 \quad \mathbf{F}_{A,2} = 125 \text{ N}; \mathbf{F}_{B,2} = -125 \text{ N}.$$

$$4.10.19 \quad \mathbf{F}_{A,2} = 1,67 \text{ kN}; \mathbf{F}_{B,2} = -4,33 \text{ kN}; \mathbf{F}_{C,2} = 2,66 \text{ kN}.$$

$$4.10.21 \quad \mathbf{R} = \frac{GMm}{a^2} \frac{1}{5\sqrt{5}} \left( -1; -1; 4 + \frac{25}{4}\sqrt{5} \right)$$

$$\mathbf{M}_{A_1} = \frac{GMm}{a} \frac{2}{5\sqrt{5}} (1; -1; 0)$$

$$\mathbf{M}_G = \frac{GMm}{a} \frac{1}{4} \left( \frac{3}{5\sqrt{5}} - \frac{5}{4} \right) (1; -1; 0)$$

Le torseur est équivalent à un seul vecteur, mais celui-ci n'est pas lié à G.

$$4.10.22 \quad |SG| = 6,5 \cdot 10^{-4} R_\odot; |OG| = 6,8 \cdot 10^{-2} |OH|;$$

$$|NG| = 6,3 \cdot 10^{-2} |NH|.$$

$$4.10.23 \quad |OG| = 53,3 \text{ cm}; \mathbf{R} = 74,1 \text{ e N}; \mathbf{M}_O = 39,5 \text{ e}_3 \text{ Nm}.$$

$$4.10.24 \quad \mathbf{OG} = \frac{15}{8} (1; -4)$$

$$4.10.25 \quad |CG| = \frac{4}{3\pi} R; |CG| = \frac{4}{3\pi} \sqrt{2} R; |CG| = \frac{4}{3\pi} \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}; |CG| =$$

$$\frac{2 \sin(\theta/2)}{3} \frac{\theta/2}{\theta/2} R$$

$$4.10.26 \quad |CG| = \frac{1}{2} R; |CG| = \frac{3}{8} R.$$

$$4.10.27 \quad |CG| = \frac{2}{\pi} R. 1) \mathbf{F}_A = mg \left( \mathbf{e}_2 - \frac{1}{\pi} \mathbf{e}_1 \right); \mathbf{F}_B = \frac{mg}{\pi} \mathbf{e}_1$$

$$2) \theta = 32,5^\circ$$

$$4.10.28 \quad \text{a) } T_1 = 294,2 \text{ kgf}; T_2 = 155,8 \text{ kgf}$$

$$\mathbf{R} = 474 \text{ e}_2 \text{ kgf}; \mathbf{M}_A = 658,5 \text{ e}_3 \text{ kgf m}.$$

b)  $R = (1317; 145) \text{ kgf}; M_A = 0$

5.7.2  $2) A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}; v_{\max} = \omega A.$

5.7.3 Soit  $\lambda = |AP|$

$$\mathbf{v} = (\dot{x}_A - \lambda \sin \theta \dot{\theta}, \lambda \cos \theta \dot{\theta})$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{x}_A - \lambda \cos \theta \dot{\theta}^2 - \lambda \sin \theta \ddot{\theta}, -\lambda \sin \theta \dot{\theta}^2 + \lambda \cos \theta \ddot{\theta}).$$

5.7.4  $s(t = 72) \cong 2218 \text{ m}; v(t = 72) = \frac{55}{3} \text{ m/s}$

5.7.5 a) 70 s; b) 130 s.

5.7.7  $a_m = 5,1 \text{ ms}^{-2}; v_0 = 52 \text{ km/h}; a_\tau = -\frac{v_0}{2\Delta t};$

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{R}(v_0 + a_\tau t)^2 \mathbf{e}_r + a_\tau \mathbf{e}_\tau, \text{ où } R = 40 \text{ m};$$

$$|\mathbf{a}|^2 = \frac{1}{R^2}(v_0 + a_\tau t)^4 + a_\tau^2.$$

5.7.8  $\mathbf{v}_B = (l_1 \cos \theta \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta \dot{\theta}_2; l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)$

$$\mathbf{a}_B = (-l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2; \dots).$$

5.7.9 Les mouvements de Vénus et Mars présentent une partie rétrograde.

5.7.10 1)  $|\mathbf{v}| \cong 0,47 \text{ km/s}, |\mathbf{a}| \cong 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$

2)  $|\mathbf{v}| \cong 30 \text{ km/s}, |\mathbf{a}| \cong 3,45 \cdot 10^{-2}(1 - 0,17 \sin \omega t) \text{ ms}^{-2}$  où  $\omega = 2\pi/86\,400$ .

5.7.11  $r(\theta) = \frac{v_0}{\omega_0} \theta$  (spirale d'Archimède)

$$\mathbf{v} = v_0 \mathbf{e}_r + v_0 \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \theta(t) = \omega_0 t,$$

$$\mathbf{a} = -\omega_0 v_0 \theta \mathbf{e}_r + 2v_0 \omega_0 \mathbf{e}_\theta$$

$$a_\tau = v_0 \omega_0 \theta / \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$a_n = v_0 \omega_0 (2 + \theta^2) / \sqrt{1 + \theta^2}$$

$$R = \frac{v_0}{\omega_0} \frac{(1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2 + \theta^2}.$$

5.7.12  $|\mathbf{v}| = 2\omega_0 C |\sin(\theta/2)|$ , où  $\theta(t) = \omega_0 t$

$$|\mathbf{a}| = \omega^2 C \sqrt{5 - 4 \cos \theta}$$

$$\text{orbite : } \left(\frac{r}{C} - 1\right)^2 + \left(\frac{\dot{r}}{C\omega_0}\right)^2 = 1 \text{ (ellipse)}$$

5.7.13  $\rho(t) = \rho_0 + C \frac{v_0 t}{\sqrt{1 + (1 + k^2)C^2}};$

$$\mathbf{a} = \rho \dot{\varphi}^2 (-\mathbf{e}_\rho + C \mathbf{e}_\phi) = \mathbf{a}_n;$$

$$R = \lambda \rho \text{ avec } \lambda = \frac{1 + C^2 + k^2 C^2}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

5.7.14 Equations (5.48) et (5.49) avec  $r = L, \dot{r} = \ddot{r} = 0, \dot{\varphi} = \omega_0, \ddot{\varphi} = 0.$

5.7.15  $r(t) = \frac{v_0}{\Omega_0 \sin \theta_0} \sin \left[ t \Omega_0 \sin \theta_0 + \arcsin \left( \frac{r_0 \Omega_0 \sin \theta_0}{v_0} \right) \right]$

5.7.16  $t = \frac{1}{\sqrt{AB}} \arctan \left( \omega_0 \sqrt{\frac{B}{A}} \right)$

6.10.1  $d = 543 \text{ m.}$

6.10.2  $L = 2\sqrt{hH} = 15,5 \text{ m. Pour } \alpha \cong 30^\circ, L = 122 \text{ m.}$

6.10.3  $h = 2,9 \text{ m.}$

6.10.4  $v_0 \geq 52,9 \text{ m/s.}$

6.10.5 Charge 5 :  $23^\circ < \alpha < 69^\circ$

pour  $10,1 \text{ km} < d < 10,8 \text{ km}; 1 \text{ angle de tir}$

pour  $10,9 \text{ km} < d < 15,2 \text{ km}; 2 \text{ angles de tir}$

CHAPITRE 5

CHAPITRE 6

Charge 8 :  $8^\circ < \alpha < 84^\circ$

pour  $10 \text{ km} < d < 12,8 \text{ km}$  ; 1 angle de tir

pour  $13,1 \text{ km} < d < 47,7 \text{ km}$  ; 2 angles de tir

(mais il n'est pas possible de négliger les frottements de l'air).

**6.10.6** Vitesse de la voiture = 89 km/h ; le piéton se trouvait à 4 m du passage.

**6.10.7**  $v_{\max} = 5,3 \text{ km/s}$ .

**6.10.8**  $v = 7,5 \text{ km/s}$  ;  $T = 1 \text{ h } 40 \text{ min}$  ;  $\dot{r}_0 = 3,5 \text{ km/s}$ .

**6.10.9** État lié.

**6.10.10**  $v_{\min} = 7,6 \text{ km/s}$  ;  $v_{\max} = 7,9 \text{ km/s}$  ;  $T = 1 \text{ h } 29 \text{ min}$ .

**6.10.11**  $v = 41,4 \text{ km/s}$  ;  $t = 31 \text{ ans}$  ;  $v)_T = 11,4 \text{ km/s}$ .

**6.10.12**  $\sin \alpha \geq 1 - \frac{R_T}{r_0}$  d'où  $\alpha \geq 5,7^\circ$ .

**6.10.13** Vénus :  $v_{\min} = 34,8 \text{ km/s}$ ,  $v_{\max} = 35 \text{ km/s}$

Terre :  $v_{\min} = 29,3 \text{ km/s}$ ,  $v_{\max} = 30,3 \text{ km/s}$

Mars :  $v_{\min} = 22 \text{ km/s}$ ,  $v_{\max} = 26,5 \text{ km/s}$ .

**6.10.14** A l'aphélie 1 jour solaire =  $(86\,400 - 8,4) \text{ s}$  ;

au périhélie 1 jour solaire =  $(86\,400 - 7,6) \text{ s}$ .

**6.10.15** Ellipse ;  $r_{\min} = 0,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ ,  $r_{\max} = 11,7 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

**6.10.17**  $h_{\max} = 42\,600 \text{ km}$  ;  $h_{\min} = 600 \text{ km}$

$|\alpha| \leq 9^\circ$  ;  $h_3 = 42\,800 \text{ km}$ .

**6.10.18** Paramètre d'impact =  $320 \text{ \AA}$

Ion négatif :  $r_{\min} = 245 \text{ \AA}$

Ion positif :  $r_{\min} = 418 \text{ \AA}$

**6.10.19**  $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$  où  $\omega = \sqrt{k}$  ;

$a = |x_0|$ ,  $b = \frac{v_0 d}{|x_0| \omega}$  ;  $T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ .

Mouvement circulaire :  $v_0 \perp x_0$  et  $|v_0| = \sqrt{k}|x_0|$ .

**6.10.21**  $r\dot{r} = r_0 \dot{r}_0$

**6.10.22**  $a = -\frac{C^2}{r^3} (k^2 + 1) e_r$  ;  $|a_r| = \frac{C^2}{r^3} k \sqrt{k^2 + 1}$  ;

$|a_n| = \frac{C^2}{r^3} \sqrt{k^2 + 1}$  ;  $R = r \sqrt{k^2 + 1}$ .

CHAPITRE 8 **8.6.1**  $\omega \cong 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ .

**8.6.2**  $\omega = \frac{1}{R} (u - v_C)$ .

**8.6.3**  $\omega = \dot{\theta} (1 + R/r) e_3$

$v_P = (R + r) \dot{\theta} e_0 + \dot{\theta} \left(1 + \frac{R}{r}\right) e_3 \wedge SP$

$a_P = -(R + r) \ddot{\theta} e_r - \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2 \dot{\theta}^2 SP$

où  $OS = (R + r) e_r$ ,  $e_3 = e_r \wedge e_0$ .

**8.6.4**  $r = 0,615 \text{ UA}$  (inférieur à la distance Soleil-Vénus ; une partie du mouvement de Vénus apparaît rétrograde).

**8.6.5**  $\omega = \dot{\theta} e_3$  ;  $\dot{\omega} = \ddot{\theta} e_3$ .

**8.6.6** Voir le paragraphe 5.5.3.

**8.6.7**  $v_{A_n} = v(2n \tan \theta ; -1)$ .

**8.6.8**  $\omega = \dot{\theta} u + \dot{\phi} e_3$ , où  $u$  est le vecteur unité dans la direction  $e_3 \wedge OP$ ,  $\dot{\omega} = \ddot{\theta} u + \ddot{\phi} e_3 \wedge u$ .

**8.6.9**  $v_P = v_0 + \omega |CP| e_0$  où  $\omega R = \frac{|v_0|}{R} \frac{R_1}{R_2}$  et  $C$  est le centre du cylindre ;

$a_P = -\omega^2 |CP| e_r$ .

**8.6.10**  $\omega = \frac{v_0}{R - r}$  ;  $v_B = v_0$  ;  $v_C = \frac{R}{R - r} v_0$  ;

$$a_A = \left( \frac{v_0}{R-r} \right)^2 R e_3; a_B = \left( \frac{v_0}{R-r} \right)^2 r e_3; a_C = 0.$$

$$8.6.13 \quad \omega = \frac{1}{R_e - R_i} (\omega_e R_e - \omega_i R_i) e_3 \text{ où } \omega_e = \omega e_3, \omega_i = \omega_i e_3.$$

$$9.9.1 \quad D \cong 97 \text{ m.}$$

$$9.9.2 \quad \delta = 2,8 \text{ cm.}$$

$$9.9.3 \quad t = 33,3 \text{ s}; \delta = 25 \text{ m.}$$

$$9.9.4 \quad t = 38,5 \text{ s.}$$

$$9.9.5 \quad u = \frac{d}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{t_a} - \frac{1}{t_r} \right), v = \frac{d}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_r^2}}, \text{ où } d = |AB|.$$

$$9.9.6 \quad \omega_p = \frac{v_0}{r} e_3, \omega = \frac{v_0}{r} e_3 + \frac{v_0}{r} e_3, \text{ où } r \text{ est le rayon de la roue.}$$

$$a_A = \frac{v_0^2}{r} \cos \theta e_3 + \frac{v_0^2}{r} \left[ \frac{r}{R} - \sin \theta \right] \widehat{OA}.$$

$$9.9.7 \quad \text{Soit } S \text{ le point de suspension du pendule, } C \text{ le centre de sa trajectoire et } \omega = \omega e_3;$$

$$v_p = \omega \wedge CS + l \dot{\psi} e_\psi + l \sin \psi \dot{\varphi} e_\varphi$$

$$a_p = -\omega^2 CS + l(-\dot{\psi}^2 - \sin^2 \psi \dot{\varphi}^2) e_r \\ + l(\ddot{\psi} - \sin \psi \cos \psi \dot{\varphi}^2) e_\psi \\ + l(\sin \psi \ddot{\varphi} + 2 \cos \psi \dot{\psi} \dot{\varphi}) e_\varphi$$

( $e_r, e_\psi, e_\varphi$  : repère au point P, associé aux coordonnées sphériques d'origine C).

$$9.9.8 \quad v_p = \omega_p R e_\psi + \Omega R \cos \psi e'_2$$

$$a_p = -(\omega_p^2 + \Omega^2 \cos^2 \psi) R e_r + \Omega^2 R \sin \psi \cos \psi e_\psi - 2\Omega \omega_p R \sin \psi e'_2$$

$$(e_r = \widehat{OP}, e'_2 = \widehat{AB}, e_\psi = e_r \wedge e'_2).$$

$$9.9.9 \quad v_p = (\omega_p + \Omega) \wedge CP + \Omega \wedge OC$$

$$a_p = -\omega_p^2 CP - \Omega^2 OP + (\Omega \cdot CP)[\Omega + 2\omega_p]$$

(C = centre du disque ; O = intersection des axes du disque et du support).

$$10.8.1 \quad v_0 = 64 \text{ m/s}; D = 420 \text{ m.}$$

$$10.8.2 \quad \text{Solution de l'équation}$$

$$\frac{1}{4} q x^4 + \frac{1}{2} k x^2 + M g \sin \alpha x = \frac{1}{2} M v_0^2.$$

$$10.8.3 \quad 1) A = 2F_0/k; 2) A = \frac{F_0}{k} \sqrt{1 + (2/\pi)^2} \cong 1,2F_0/k.$$

$$10.8.4 \quad 2) T = 2\pi \sqrt{R^3/(2GM)}; 3) v_L = 2\sqrt{GM/R}. (R = \text{rayon de la trajectoire des étoiles}).$$

$$10.8.5 \quad 2) T = 2\pi \sqrt{m/k}, A = v_0 \sqrt{m/k}, \text{ si } A \leq \delta$$

$$3) \Omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{\delta}{r_e} \right)} > 2\omega, \omega = \dot{\theta}, \delta \theta = \omega \cdot \frac{2\pi}{\Omega_r} < \pi.$$

$$10.8.8 \quad T' = mg; T'' = \frac{1}{2} mg; T_C = 2mg.$$

$$10.8.9 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R \tan \alpha}{g}}; T_r = \frac{1}{\sqrt{3} \sin \alpha} T;$$

$$R = -mg \left( g + \cos \alpha \frac{r^4 \dot{\varphi}_0^2}{r^3} \right) \sin \alpha e_0.$$

L'un des extrema est  $h_0$ , l'autre

$$h_1 = \frac{1}{4} \frac{v_0^2}{g} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{8gh}{v_0^2}} \right].$$

CHAPITRE 9

CHAPITRE 10

**10.8.10**  $|F| = 3,95 \text{ N}$ ; ( $v_r = 10,9 \text{ m/s}$ ;  $v_0 = 12,6 \text{ m/s}$ )  
 $(R_0 = 2m\Omega^2\sqrt{r^2 - r_0^2}, R_2 = mg).$

**10.8.11**  $\Omega_0 = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{k/m}.$

**10.8.12**  $\theta = 0, \pi \text{ et } \arccos\left(\frac{g}{\Omega^2 R}\right)$   
 $\omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2} \text{ si } \Omega^2 \leq \frac{g}{R}$   
 $\omega = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{g}{\Omega R}\right)^2} \text{ si } \Omega^2 \geq \frac{g}{R}.$

CHAPITRE 11 **11.8.1**  $\omega_f = \frac{1}{1 + I_a/I_c} \omega_i \text{ où } I_a/I_c = \frac{10mr^2}{3MR^2}; \text{ non.}$

**11.8.2**  $\cos \theta_1 = \frac{4}{7} \text{ d'où } \theta_1 \cong 55^\circ.$

**11.8.3** Mouvement uniformément accéléré, d'accélération

$$a = \frac{1}{1 + M/2m} g.$$

**11.8.4**  $a_G = g$ . Le mouvement relatif à  $G$  est oscillant autour de la direction  $E$ , identique à celui d'un pendule de longueur

$$l = d \frac{g}{qE} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

**11.8.5** Le mouvement de  $m_1$  est uniformément accéléré, avec

$$a = \frac{1}{1 + C} g, \text{ où } C = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{m_1 R^2} \sin^2 \alpha;$$

$$\text{Tension : } T = \frac{C}{1 + C} m_1 g.$$

$$F_A = -\frac{|BO|}{|BA|} T e_2 - \frac{1}{|BA|^4} \frac{1}{4} ml^2 \sin 2\alpha (\dot{\omega} e_1 + \omega^2 n),$$

$e_2$  définie par la direction du fil horizontal,  
 $e_1$  perpendiculaire au plan  $\pi$  défini par la tige et  $AB$ ,  
 $n$  perpendiculaire à  $AB$  dans le plan  $\pi$ .

**11.8.6**  $M = M_1 e_1$ , où  $M_1 = g(Ml + mL) + a\left(\frac{l}{R} + mL\right).$

**11.8.7**  $x(t) = l + \frac{m}{2m + M} gt^2 + \frac{g}{k} \frac{mM^2}{(2m + M)^2} (1 - \cos \omega t)$   
 $\omega^2 = k \frac{2m + M}{mM}.$

CHAPITRE 12 **12.8.1** 1)  $t = 806 \cdot \pi \text{ s}$ ; 2)  $t = 806 \cdot \Delta\theta \text{ s}.$

**12.8.2** La masse de la Galaxie est  $1,5 \cdot 10^{11}$  fois la masse du Soleil;  $v_L = 110 \text{ km/s}$  (en tenant compte de la vitesse d'entraînement du système solaire).

**12.8.3** Modèle de Bohr :  $r_n = n^2 0,53 \text{ \AA}$   
 Modèle de Thomson :  $r_n = \sqrt{n} r_1$ ;  $r_1 = 2,7 \cdot 10^{-3} r_B^{\frac{3}{4}}$

**12.8.4**  $B_0 = 27,8 \cdot 10^{-5} \text{ Tesla. Non.}$

**12.8.5**  $\frac{1}{\gamma} \left( \dot{\theta}_0 + \frac{qE_0}{mR\gamma} \right)$  rationnel.

**12.8.7**  $t = 42,4 \text{ s}$ ;  $d_1 = 128 \text{ m}$ ;  $d_2 = 167 \text{ m}.$

**12.8.9**  $381 \text{ m/s}.$

$$12.8.10 \quad \lambda = 0,28 \text{ kgm}^{-1}; t = 22,6 \text{ s}; v = 189,9 \text{ km/h.}$$

$$12.8.11 \quad n = 1, \Delta t \cong 0,003 \text{ s}; n = 2, \Delta t \cong 0,139 \text{ s.}$$

$$12.8.12 \quad d = 109 \text{ m.}$$

$$12.9.13 \quad v_1 = 19 \text{ km/h}; v_2 = 24 \text{ km/h.}$$

$$12.9.14 \quad a_{\max} = 6,4 \text{ ms}^{-2}; N_B = 0,8 \cdot \text{poids.}$$

$$12.9.15 \quad a_1 = -2,8 \text{ ms}^{-2}; a_2 = -6,4 \text{ ms}^{-2}; a_3 = -7,8 \text{ ms}^{-2}; \\ a_4 = -2,3 \text{ ms}^{-2}.$$

$$12.9.16 \quad F_1 = 400 \text{ kgf}; F_2 = 20 \text{ kgf.}$$

$$12.9.17 \quad F = mg(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha)$$

$$\max \left\{ 0, \frac{b \tan \alpha - a}{2(\tan \alpha + \mu_s)} \right\} < h < \min \left\{ b, \frac{b \tan \alpha + a}{2(\tan \alpha + \mu_s)} \right\}$$

$$12.9.19 \quad t_0 = \frac{2\mu}{7\mu_c g}; v_f = \frac{2}{7}u; \omega_f = \frac{5}{7}\frac{u}{R}.$$

$$12.9.20 \quad \alpha = 5,4^\circ; \delta = 0,91 \text{ m.}$$

$$12.9.21 \quad \theta_1 = 0,57^\circ; \theta_2 = 42^\circ; \theta_3 = 56,3^\circ.$$

$$12.9.23 \quad l = g/\Omega^2.$$

$$13.10.1 \quad 1) r_e^6 = 2a/b; \omega^2 = 36 \frac{b}{m} \left( \frac{b}{2a} \right)^{\frac{4}{3}}; v_D = \sqrt{\frac{b^2}{2ma}};$$

$$3) r_e < R < \left( \frac{5}{2} \right)^{\frac{1}{6}} r_e$$

$$13.10.2 \quad 2) \text{ si } L_0^2 = km, r(t) = r_0 + \dot{r}_0 t;$$

$$\text{si } L_0^2 \neq km, r^2(t) = 2Kt^2 + 2r_0 \dot{r}_0 t + r_0^2 \text{ où } \frac{1}{2} \dot{r}_0^2 + \frac{1}{2} \frac{L_0^2 - km}{m^2 r_0^2} = K$$

$$3) 0 < L_0^2 < km : \frac{1}{r} = Ae^{\Omega \theta} + Be^{-\Omega \theta}$$

$$\Omega^2 = \frac{km}{L_0^2} - 1$$

$$L_0^2 = km : \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \dot{r}_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \theta$$

$$L_0^2 > km : \frac{1}{r} = \frac{1}{r_{\min}} \cos(\omega \theta)$$

$$\omega^2 = 1 - \frac{km}{L_0^2}.$$

$$13.10.3 \quad P = 77 \text{ kW}; v_{\max} = 210 \text{ km/h}; t_1 = 5,3 \text{ s}; t_2 = 5,9 \text{ s.}$$

$$13.10.4 \quad C_x = 0,37; t = 3,8 \text{ s}; \text{ la puissance dissipée est inférieure aux 7\% de la puissance du moteur.}$$

$$13.10.5 \quad 154 \text{ km/h.}$$

$$13.10.6 \quad P = 0; P = 12 \text{ W.}$$

$$13.10.7 \quad P = \rho p l u (\frac{1}{2} u^2 + gh) = 36 \text{ MW.}$$

$$13.10.8 \quad v_L = 617 \text{ km/s}; R = 3 \text{ km.}$$

$$13.10.9 \quad E^{\text{liaison}} = \frac{b^2}{4a}; \Delta W^{\text{ext}} = \frac{b}{d} \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{r_e}{d} \right) - 2 \right];$$

$$\text{Endothermique si } d < \left( \frac{5}{4} \right)^{1/6} r_e,$$

$$\text{Exothermique si } d > \left( \frac{5}{4} \right)^{1/6} r_e.$$

$$13.10.10 \quad E_f = 3 \text{ MeV.}$$

$$13.10.11 \quad \mathbf{v}'_\alpha = \frac{m_\alpha - m_N}{m_\alpha + m_N} \mathbf{v}'_\alpha; m_N = 3m_\alpha.$$

$$13.10.12 \quad \Delta W^{\text{ext}} = - \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} U_{ij} (|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|).$$

$$13.10.13 \quad \Delta E^{\text{cin}} = \frac{1}{2} \frac{m_1(m_2 - m)v_1^2 + m_2(m_2 + m)v_2^2}{m + m_1 - m_2}.$$

$$13.10.16 \quad m > \frac{1}{2}M.$$

CHAPITRE 13

$$13.10.17 \quad \ddot{z} = \frac{g}{1 + I_G/(mr^2)}; T = -\frac{mg}{1 + I_G/(mr^2)}; I_G = \frac{1}{2}mr^2 + MR^2$$

$$13.10.18 \quad 1) a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_G}{mR^2}}; \text{ cylindre homogène : } a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$2) a = g(\sin \alpha - \mu_c \cos \alpha).$$

$$13.10.19 \quad 2\mu z(t) = -(m_2 - m_1 - \mu \bar{l}) + (m_2 - m_1 - \mu \bar{l} + 2\mu z_0) \cosh\left(\sqrt{\frac{2\mu g}{A}}\right) \text{ où}$$

$$A = m_1 + m_2 + \mu l + \frac{1}{2}M, \bar{l} = l - \pi R.$$

$$13.10.20 \quad T' = 3 \text{ mg}; T'' = mg\left(1 + 2\frac{l}{R}\right); R_0 = \frac{2}{5}l.$$

13.10.21  $|F_B| = 5,6 \cdot \text{poids}$ . Soit  $H' = H + (R_1 + R_2) \cos \theta_2 - R_1$  la hauteur calculée depuis le centre  $C_2$ ; le skieur décolle si  $H' > \frac{3}{2}R_2 \cos \theta_2$ ; il passe la bosse sans décoller si  $R_2 < H' < \frac{3}{2}R_2 \cos \theta_2$ ; il s'arrête et revient en arrière si  $H' < \min\{R_2, \frac{3}{2}R_2 \cos \theta_2\}$ .

13.10.22 Soit  $x_1 < 0$  et  $x_2 > 0$  les solutions de  $\frac{1}{4}qx^4 + \frac{1}{2}kx^2 = mg(\sin \alpha)x + mgh$ ; alors  $x_{\max} = x_2$  et  $A = x_2 - x_1$ .

CHAPITRE 14 14.10.1  $I_3 = \frac{1}{2}M(R^2 + R_e^2); I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{12}ML^2.$

$$14.10.3 \quad I_\Delta = \frac{1}{2}MR^2 + (-\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}L^2)M \sin^2 \alpha.$$

$$14.10.4 \quad I_1 = I_2 = \frac{1}{4}MR^2; I_3 = \frac{1}{2}MR^2.$$

$$14.10.5 \quad I_G = \rho[\frac{1}{12}a^4 - \pi R^2(R^2 + 2d^2)] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$14.10.6 \quad a) I_{ij} = 2I_i \delta_{ij}$$

$$b) I_{11} = I_{22} = n\frac{1}{2}(I_1 + I_2); I_{33} = nI_3$$

$$I_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

$$14.10.7 \quad \text{Non}; |F'_A| = |F'_B| = \frac{1}{2} \frac{(I_3 - I_1)}{|AB|} \sin(2\alpha)\omega^2 \cong 41 \text{ kgf.}$$

$$14.10.8 \quad |F'_A| = |F'_B| = 8 \text{ kgf.}$$

$$14.10.9 \quad |F'(t=0)| = 0,395 \text{ mg}; \text{ angle entre } AG \text{ et l'horizontale} = 8,4^\circ; M = 2,05 \text{ m.}$$

14.10.11 Soit  $(\mathbf{u}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)$  la base orthonormale fixée à l'avion où  $\mathbf{e}_3$  est l'axe de l'hélice et  $\mathbf{e}_3$  la direction verticale vers le haut :

$$\mathbf{M}_O^{\rightarrow \text{avion}} = M_u \mathbf{u} + M_3 \mathbf{e}_3 + \tilde{M}_3 \mathbf{e}_3$$

$$M_u = \omega_p \Omega I_3 + \omega_p \Omega (I_1 - I_2) \cos(2\omega_p t)$$

$$M_3 = \frac{1}{2} \Omega^2 (I_1 - I_2) \sin(2\omega_p t)$$

$$\tilde{M}_3 = -\omega_p \Omega (I_1 - I_2) \sin(2\omega_p t)$$

$$\text{Hélice tripale : } \mathbf{M}_O^{\rightarrow \text{avion}} = \omega_p \Omega I_3 \mathbf{u}$$

$$|\mathbf{M}_O^{\rightarrow \text{avion}}| \cong 90 \text{ Nm}$$

$$\text{Hélice bipale : } \mathbf{M}_O^{\rightarrow \text{avion}} \cong 120 \sin^2(250t) \mathbf{u} + 60 \sin(500t) \mathbf{e}_3$$

$$(I_1 \cong 0; I_2 \cong I_3).$$

$$14.10.12 \quad N_B = Mg - N_A; N_A = \frac{1}{2}Mg - \frac{1}{d} \left( hm + \frac{2I_1}{r} \right) \frac{v^2}{R}$$

$$14.10.15 \quad \text{Voir le paragraphe 20.6.3 avec } I_3 = \frac{1}{2}MR^2,$$

$$I_1 = \frac{1}{4}MR^2 + Ml^2 + \frac{1}{3}ml^2.$$

$$14.10.16 \quad 1) h \geq 2,5(R - r); 2) h \geq 2,75(R - r).$$



$$14.10.17 \quad \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = E_0 - g \left( m R \theta + m_1 \frac{l}{2} \cos \theta \right),$$

où  $I = (m + \frac{1}{2} m_2) R^2 + \frac{1}{3} m_1 l^2$ .

$$14.10.18 \quad v^2 = 4n\pi \frac{mgR^3 \sin \alpha}{I + m(\delta + R)^2};$$

$$N = mg \left[ \cos \alpha - \frac{4n\pi m \delta R \sin \alpha}{I + m(\delta + R)^2} \right].$$

$$14.10.19 \quad \dot{\theta} = - \sqrt{\frac{2gd(1 - \sin \theta)}{d^2 \cos^2 \theta + I_G/m}}.$$

Le point A reste sur la table.

$$14.10.20 \quad \mu_s \geq \frac{pi}{\pi^2 - 2} = 0,4.$$

$$14.10.21 \quad \text{Si } \mu_c \geq 0,13 : v_G = \frac{2}{3} v_0, \omega = \frac{v}{r};$$

$$\text{Si } \mu_c \leq 0,13 : v_G = v_0 e^{-\pi \mu_c}, \omega = \frac{2v_0}{r} (1 - e^{-\pi \mu_c})$$

( $\mu_c$  = coefficient de frottement entre le puck et le bord de la table).

$$15.8.1 \quad z = -l_0 - \frac{m}{k}(g + a_e) \quad \text{où } g = -ge_3; T = 2\pi \sqrt{m/k}.$$

CHAPITRE 15

$$15.8.2 \quad \text{Identique au problème du pendule mathématique en remplaçant } g \text{ par } g' = g - a_e.$$

$$15.8.3 \quad m\ddot{x}' + \lambda \dot{x}' + k \left( x' - l - \frac{mg}{k} \right) = m\gamma^2 h \cos(\gamma t) + \lambda \gamma h \sin(\gamma t)$$

$$15.8.4 \quad I_C = \frac{2}{3} M R^2; \dot{x}_G(t_1) = 1,14 \text{ ms}^{-1}; \omega(t_1) = \frac{1,7}{R} \text{ s}^{-1}; D \cong 1 \text{ m}.$$

$$15.8.5 \quad \ddot{\theta} = -\sin \theta \left[ \left( \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \right) - \left( \Omega^2 + 2 \frac{k}{m} \right) \cos \theta \right];$$

$$\cos \bar{\theta} = \frac{g/l + 2k/m}{\Omega^2 + 2k/m}; \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{(\Omega^2 + 2k/m)^2 - (g/l + 2k/m)^2}{\Omega^2 + 2k/m}.$$

$$15.8.8 \quad |F| \cong 300 \text{ kgf}.$$

$$15.8.9 \quad |F| = 1,9 \text{ N}; \alpha = 0,04^\circ.$$

$$15.8.10 \quad \delta = 1,5 \text{ cm}; \Delta = 17,2 \text{ cm}.$$

$$15.8.11 \quad \tan \alpha = \frac{v^2}{Rg} \text{ d'où } \alpha = 6,5^\circ; y' = -2,3 \text{ cm}, x' = -3 \text{ mm}.$$

$$16.6.1 \quad 1) \theta = \alpha, \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha : \text{stables}; \theta = \frac{\pi}{2} + 2\alpha : \text{instable}$$

CHAPITRE 16

$$2) \theta = \alpha, \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha : \text{instables}; \theta = \frac{\pi}{2} + 2\alpha : \text{stable où } 2\alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$16.6.3 \quad l \leq 2R, l \geq 4R : \theta_1 = 0;$$

$$1,63R < l \leq 4R : \cos \theta_2 = \frac{l}{16R} + \sqrt{\left( \frac{l}{16R} \right)^2 + \frac{1}{2}}.$$

$$16.6.4 \quad l \cong 51 \text{ cm}.$$

$$16.6.5 \quad l_n = l_0 + \frac{0,15}{4} n^2; l_{20} = (l_0 + 16)m.$$

$$16.6.6 \quad L = 50,21 \text{ m}; F = (626,6; -98,5) \text{ N}; l \cong 11,185 \text{ m}.$$

$$16.6.7 \quad L = 102,8 \text{ m}; f = 10,4 \text{ m}; T = 1,3 \cdot \text{poids} = 976 \text{ N}.$$

$$16.6.8 \quad L = 125,8 \text{ m}; f = 33,8 \text{ m}; T = 0,33 \cdot \text{poids} = 208 \text{ kgf}.$$

$$16.6.9 \quad F_i = (n - i + 1)mg; x_i = il_0 + i \frac{mg}{k} \left( n + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right).$$

$$16.6.10 \quad y_1(x_1) = \frac{\rho g}{E} (Lx_1 - \frac{1}{2} x_1^2); y_1(L) = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

$$R(x_1) = R \left[ 1 - \frac{\nu}{E} \rho g (L - x_1) \right] \cong R.$$

$$16.6.11 \quad r = R \exp \left( -\frac{\rho g}{2\sigma} x_1 \right) \text{ avec } \sigma = \frac{Mg}{\pi R^2} e^{\frac{\rho g}{\sigma} L}$$

$$16.6.12 \quad F_A = - \left[ m \left( 1 - \frac{d}{L} \right) + \frac{1}{2} M \right] g ; F_B = - \left[ m \frac{d}{L} + \frac{1}{2} M \right] g$$

$$|\sigma^{\max}| = \frac{aL}{16I} [2m + M]g$$

Section 1 :  $m < 1200 \text{ kg}$ ,  $f = 109 \text{ mm}$

Section 2 :  $m < 1840 \text{ kg}$ ,  $f = 62 \text{ mm}$ .

$$16.6.13 \quad \text{a) } |\sigma^{\max}| = 9,85 \text{ kgf/mm}^2, f = 4,4 \text{ cm}$$

$$\text{b) } |\sigma^{\max}| = 29,55 \text{ kgf/mm}^2, f = 39,6 \text{ cm}$$

$$16.6.14 \quad |\sigma^{\max}| = 4 \text{ kgf/mm}^2 ; f = 3,1 \text{ cm.}$$

$$16.6.15 \quad F = mg \exp \left( -\mu_s \frac{\pi}{2} \right) ; F = (\lambda l + \lambda R + m)g.$$

CHAPITRE 17  $17.8.1 \quad 1) a = 0,68 \text{ m/s}^2 ; 2) a = 0,17 \text{ m/s}^2 ; 3) a = -1,54 \text{ m/s}^2.$

$$17.8.2 \quad A = \frac{mg}{2k} ; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

$17.8.4 \quad C'$  est un oscillateur harmonique isotrope, de centre  $\mathbf{y} = (\sum_i k_i)^{-1} (\sum_i k_i \mathbf{x}_i)$  et constante  $k = \sum_i k_i$ .

$$17.8.7 \quad \Omega_r = 173 \text{ t/min.}$$

$$17.8.8 \quad v_0 = 400 + 5 \cdot 10^{-9} ; v_r = 400 - 5 \cdot 10^{-9}.$$

$$17.8.9 \quad \text{Pour } k \rightarrow \infty, \omega_+^2 = \infty, \omega_-^2 = \frac{3g}{2} \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

CHAPITRE 18  $18.5.2 \quad d = 11,6 \text{ \AA} ; r_{\min} = 20,6 \text{ \AA}.$

$$18.5.3 \quad \omega^2 = \frac{2U_0}{m_N} \frac{(r + r_0)}{r^3} e^{-\frac{r}{r_0}} ; T = \frac{2\pi}{\omega} ;$$

$$\Delta W^{\text{ext}} = \frac{1}{2} \frac{r_0 - r}{r} U_0 e^{-\frac{r}{r_0}}.$$

$$18.5.4 \quad r_e^6 = \frac{2a}{b} ; E^{\text{liaison}} = \frac{b^2}{4a}.$$

$$18.5.6 \quad \Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} v_A^2 \left( \frac{\rho^2}{\delta^2} - 1 \right).$$

$$18.5.8 \quad R = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{2\varepsilon_0} \frac{T^2}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} ; \mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

$$18.5.10 \quad \ddot{x}_G = 0 ; \ddot{y}_G = - \frac{m_1 \sin^2 \alpha}{m_2 + m_1 \sin^2 \alpha} g. \text{ Soit } \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 :$$

$$\ddot{x} = - \frac{(m_1 + m_2) \cos \alpha \sin \alpha}{m_2 + m_1 \sin^2 \alpha} g ; \quad \ddot{y} = - \frac{(m_1 + m_2) \sin^2 \alpha}{m_2 + m_1 \sin^2 \alpha} T.$$

$$18.5.11 \quad \dot{r}^2 = \omega_0^2 (I + \mu r_0^2) \cdot \frac{r^2 - r_0^2}{I + \mu r^2},$$

$$\text{où } r_0 = \frac{l}{2}, I = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} m l^2, \mu = \frac{m M}{m + M}.$$

$r$  est la distance entre les centres de masse du disque et de la tige.

CHAPITRE 19  $19.4.3 \quad \mathbf{v}'_G = \frac{\sqrt{3gh}}{\frac{3}{2} - \frac{h}{R}} ; \Delta E = -mgh \frac{h}{R} \frac{3 - h/R}{\left(\frac{3}{2} - \frac{h}{R}\right)^2}.$

$$19.4.5 \quad m_2 = 3m_1 ; \mathbf{v}'_1 = -2\mathbf{v}' ; \mathbf{v}'_2 = 0.$$

$$19.4.6 \quad (\mathbf{e}_1 = \text{ligne d'impact})$$

$$\mathbf{v}''_B = v_0 \cos \theta \mathbf{e}_1 ; \omega''_B = 0$$

$$\mathbf{v}''_A = v_0 \sin \theta \mathbf{e}_2 ; \omega''_A = \omega'_A = -\frac{v_0}{R} \sin \theta \mathbf{e}_1 + \frac{v_0}{R} \cos \theta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{e}_1 (v_0 \cos \theta - \mu_c g t) \text{ pour } t \leq \frac{2v_0 \cos \theta}{7\mu_c g} = \bar{t}$$

$$v_B(t) = e_1 \frac{5}{7} v_0 \cos \theta ; t \geq \bar{t}.$$

$$18.4.7 \quad v'' = 0 ; v_G'' = \frac{1}{4} v_0 ; \omega'' = \frac{3}{2} v_0 ; v_0 > 1,3 \text{ m/s.}$$

$$18.4.8 \quad |CD| = 0,8 \text{ m} ; |CD'| = 0,94 \text{ m.}$$

$$20.4.1 \quad v_{f,n} = v_i + n v_r \ln \frac{m_i}{m_f}, \text{ d'où } n \geq 2.$$

$$20.4.2 \quad v = 16 \text{ m/s.}$$

$$20.4.3 \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}^{S''} = \mathbf{F}^{S' \rightarrow S''} - \frac{M}{L} v^2 \mathbf{e}_1 ;$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}' = \mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'} + \frac{M}{L} z \mathbf{g} + \frac{M}{L} v^2 \mathbf{e}_3 \quad (\mathbf{g} = g \mathbf{e}_3)$$

$$\text{où } |\mathbf{F}^{S'' \rightarrow S'}| = |\mathbf{F}^{S' \rightarrow S''}| = M g \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L}\right).$$

$$20.4.4 \quad F_A = \frac{M}{2} g \left(1 + 3 \frac{x}{L}\right).$$

$$20.4.5 \quad P^{\text{mot}} = \left(\frac{dm}{dt}\right) v^2 ; \text{ il y a dissipation d'énergie : } P^{\text{dis}} = \frac{1}{2} P^{\text{mot}}.$$

$$20.5.6 \quad v = \sqrt{\frac{P^{\text{mot}}}{dm/dt} - gl \sin \theta}.$$

$$20.6.7 \quad v(t) = \frac{g}{c} - \frac{g}{c^2(m_0 + \alpha t)} [\alpha - (\alpha - m_0 c) e^{-ct}].$$

$$21.11.1 \quad \Delta = 3 \text{ h.}$$

$$21.11.2 \quad t_T = t - 36 \cdot 10^{-9} \text{ s} ; t_0 = t - 7 \cdot 10^{-9} \text{ s} ; t_E = t - 211 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$t = 30464 \text{ s.}$$

$$21.11.3 \quad d)_{\mathcal{R}} = 5,4 \cdot 10^{11} \text{ m} ;$$

$$d)_{\mathcal{R}'} = 6,23 \cdot 10^{11} \text{ m} ; d)_{\mathcal{R}''} = 5,94 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$v_2' = 0,3077 c$$

$$t)_{\mathcal{R}} = 3,5 \text{ h} ; t)_{\mathcal{R}''} = 2,5 \text{ h.}$$

$$21.11.5 \quad \Delta t' = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \frac{v}{c^2} L ; L' = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

$$21.11.6 \quad m = 100 m_0 ; v = 0,99995 c$$

$$E' = \frac{E}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[ 1 - \frac{u}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{E}\right)^2} \right] \cong E \sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}}.$$

$$21.11.7 \quad v_{\pi^+} = 0,8268 c ; v_{\pi^0} = 0,8355 c$$

$$l_{\pi^+} = 11 \text{ m} ; l_{\pi^0} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$$

$$21.11.8 \quad E_\mu = \frac{(m_{K^+}^0)^2 + (m_\mu^0)^2}{2m_{K^+}^0} c^2 = 258,3 \text{ MeV.}$$

$$21.11.9 \quad \psi = 29^\circ \left( \cos \psi = \frac{E_i^{\text{cin}}}{E_i^{\text{cin}} + 4m_0 c^2} \right).$$

$$21.11.11 \quad E' = E \sqrt{\frac{1+pc/E}{1-pc/E}} = 1670 \text{ GeV.}$$

$$22.10.1 \quad L = \frac{1}{2} m \left[ \left(1 + \alpha^2 \frac{A^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 \right] + mg \frac{A}{\rho^\alpha}$$

$$\phi \text{ est cyclique ; } m \rho^2 \dot{\phi} = \text{cste} ; \mathcal{H} = \text{cste.}$$

$$22.10.2 \quad H = \frac{p_\rho^2}{2m \left(1 + \frac{\alpha^2 A^2}{\rho^{2\alpha+2}}\right)} + \frac{p_\phi^2}{2m \rho^2} - mg \frac{A}{\rho^\alpha}.$$

$$\phi \text{ est cyclique ; } p_\phi = \text{cste} ; H = \text{cste}$$

$$22.10.3 \quad H = \frac{p_r^2}{2(m+m_1)} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + m_1 g r.$$

CHAPITRE 20

CHAPITRE 21

CHAPITRE 22

$$22.10.4 \quad H = \frac{p_0^2}{2I_3} - \frac{1}{2}I_1\Omega^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2}I_3\Omega^2 \sin^2 \theta - |OG|mg \cos \theta.$$

$$22.10.5 \quad L = ml^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\varphi}^2(L^2 + l^2 \cos^2 \theta)$$

$\varphi$  est cyclique ;  $p_\varphi = 2m\dot{\varphi}(L^2 + l^2 \cos^2 \theta) = \text{cste}$

$$\mathcal{H} = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\varphi^2}{4m(L^2 + l^2 \cos^2 \theta)} = \text{cste}.$$

$$22.10.6 \quad L = \frac{3}{4}M(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + Mg(R-r) \cos \varphi \text{ où } \varphi \text{ est l'angle entre } C_1C_2 \text{ et la verticale.}$$

$$22.10.7 \quad L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta \text{ où } (\theta, \varphi, \psi) \text{ sont les angles d'Euler, } l = \frac{3}{4}h,$$

$$I_1 = \frac{3}{5}M\left(h^2 + \frac{R^2}{4}\right), I_3 = \frac{3}{10}MR^2$$

$\varphi$  et  $\psi$  sont cycliques ;  $p_\varphi, p_\psi, \mathcal{H}$  sont constants.

$$22.10.8 \quad L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2$$

$$\omega_\pm^2 = \frac{m_1+m_2}{2m_1} \frac{g}{l_2} \left[ 1 + \frac{l_2}{l_1} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)^2 - 4 \frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{l_2}{l_1}} \right]$$

$$22.10.10 \quad L = \frac{1}{2}R^2 \left[ \left( \frac{M}{2} + m \sin^2 \theta \right) \dot{\varphi}^2 + m\dot{\psi}^2 \right] - mgR \cos \theta$$

$$\left( \frac{M}{2} + m \sin^2 \theta \right) \dot{\varphi} = K$$

$$\frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 = \frac{1}{R^2}(E - mg \cos \theta R) - \frac{K^2}{M + 2m \sin^2 \theta}.$$

$$22.10.11 \quad H = \frac{p_0^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} - R^2 \cos(\varphi - \theta) + Rd(\cos \varphi - \cos \theta)$$

Point d'équilibre stable :  $\theta = 0, \varphi = \pi$

$$\text{Petits mouvements : } \omega_+ = \frac{d}{mR}, \omega_- = \frac{d - 2R}{mR}$$

Modes normaux :  $\omega_+, \theta = \psi; \omega_-, \theta = -\psi$

Coordonnées normales :  $Q_1 = \theta + \psi; Q_2 = \theta - \psi.$

#### APPENDICE B B.4.1

$$F = P e_2; F^1 = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} P; F^2 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} P.$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \sin \alpha & \sin \beta \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{\sin(\alpha + \beta)} \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}^1 - \tilde{F}^2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\tilde{F}_2 = -\tilde{F}^1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \tilde{F}^2$$

$$(\tilde{P})^2 = (\tilde{F}^1)^2 + (\tilde{F}^2)^2 - 2\tilde{F}^1 \tilde{F}^2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2).$$

# BIBLIOGRAPHIE

## 1. OUVRAGES CONSEILLÉS

- M. ALONSO, J. FINN : *Physique Générale I*, Interéditions, Paris (1986).  
BERKELEY : *Cours de Physique, vol. I, Mécanique*, Armand Collin, Paris (1972).  
M. BERTIN, J.-P. FAROUX, J. RENAULT : *Mécanique I*, Dunod, Paris (1985) ; *Mécanique du solide et des systèmes*, Dunod, Paris (1982).  
W. CHESTER : *Mechanics*, G. Allen & Unwin, London (1979).  
A. DOUGLAS DAVIS : *Classical Mechanics*, Academic Press, New York (1986).  
R. FEYNMAN : *Le cours de physique, vol 1*, Addison et Wesley, Paris (1969).  
A. FRENCH : *Newtonian Mechanics*, W.W. Norton, New York (1971).  
J.-M. LÉVY-LEBLOND : *La physique en questions, Mécanique*, Vuibert, Paris (1981).  
W. PAULI : *Theory of Relativity*, Pergamon, New York (1958).  
J. PEREZ : *Mécanique*, Masson, Paris (1984).  
J.H. SMITH : *Introduction à la relativité*, Édiscience, Paris (1973).  
E.F. TAYLOR, J.A. WHEELER : *A la découverte de l'Espace-Temps et de la physique relativiste*, Dunod, Paris (1970).  
S. TRUESDELL : *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, New York (1977).  
L. VALENTIN : *L'univers mécanique*, Hermann, Paris (1983).

## 2. OUVRAGES POUR INGÉNIEURS

- F. BEER, E. RUSSEL-JOHNSTON : *Mécanique à l'usage des ingénieurs, Statique*, Mc Graw Hill, Montréal (1981).  
*Mechanics for Engineer, Static and Dynamics*, McGraw Hill, New York (1987, 4<sup>e</sup> édition).  
B.I. SANDOR : *Engineering Mechanics, Statics and Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1987, 2<sup>e</sup> édition).

## 3. OUVRAGES AVANCÉS (ET MÉCANIQUE ANALYTIQUE)

- V. ARNOLD : *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, Moscou (1976).  
Ph. CHOQUARD : *Mécanique analytique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne (1992). G. GALLAVOTTI : *The Elements of Mechanics*, Springer Verlag (1983).  
F. GANTMACHER : *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR, Moscou (1970).

- S. GOLDSTEIN : *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading (1980).  
L. LANDAU et E. LIFCHITZ : *Mécanique*, MIR, Moscou (1969).  
F. SCHECK : *Mechanics : from Newton's law to deterministic chaos*, Springer Verlag, Berlin (1990).  
A. SOMMERFELD : *Mechanics*, Academic Press, New York (1964).  
*Mechanics of Deformable Bodies*, Academic Press, New York (1964).

#### 4. OUVRAGES HISTORIQUES

- G. GALILÉE : *Dialogo sopra i due massimi sistemi del Mondo*, 1632 ; *Dialogues Concerning Two New Sciences*, Dover, New York (1982).  
I. NEWTON : *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres (1686). Traduction : *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, Marquise du Chastellet (1756), Fac simile, Librairie Scientifique et Technique, A. Blanchard, Paris (1966).  
J.L. LAGRANGE : *Mécanique Analytique*, 1788.  
H. POINCARÉ : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1897).  
E. MACH : *La Mécanique*, Hermann, Paris (1904).

#### 5. RÉFÉRENCES

- [1] A. EINSTEIN : *Comment je vois le monde*, E. Flammarion Éd., Paris (1934).  
[2] E. WIGNER : *Science*, 145 (1964), 995.  
[3] W. FELLER : *An introduction to probability theory*, J. Wiley, New York (1971), vol. 2.  
[4] E. KANT : *Critique de la raison pure* (1781).  
[5] R. FEYNMAN : voir ouvrages conseillés.  
[6] I. NEWTON : voir ouvrages historiques.  
[7] T. ALVÄGER *et al.* : *Phys. Letters* 12 (1964), 260.  
[8] J. BAILEY *et al.* : *Phys. Letters* 55B (1975), 420.  
[9] J.C. HAFELEY et R.E. KEATING : *Science*, 177 (1972), 166.  
[10] E.F. TAYLOR, J.A. WHEELER : *A la découverte de l'Espace-Temps et de la physique relativiste*, Dunod, Paris (1970).  
[11] M. HIRSH, S. SMALE : *Differential Equation, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York (1974).  
[12] J. SMITH : *Mathematical Ideas in Biology*, Cambridge (1968).  
[13] L. SEDOV : *Similitudes et dimension en mécanique*, MIR, Moscou (1977).  
[14] *Encyclopedia of Physics* : Mc Graw Hill, New York (1983)  
*La Physique : Encyclopédie scientifique de l'Univers*, Gauthier-Villars, Paris (1981).  
[15] W. PAULI : American Physical Society Meeting, Pasadena, USA (1931).  
Congrès Solvay, Bruxelles, Belgique (1933).  
[16] L.M. BROWN : *Physics Today*, 31 (1978), 23.  
C.P. ENZ : *Helv. Physica Acta*, 54 (1981), 411, et 56 (1983), 883.

- [17] E. RUTHERFORD : *Proc. Roy. Soc. A* 97 (1920), 374.
- [18] J. CHADWICK : *Proc. Roy. Soc. A* 136 (1932), 692.
- [19] W. HEISENBERG : *Zeit. für Phys.* 77 (1932), 1.
- [20] R.M. BIONTA et col. : *Phys. Rev. Letters* 51 (1983), 27.  
M. GOLDBERGER : *Phys. Today*, April (1983), 35.
- [21] N. MISTRY et col. : *Pour la Science*, septembre (1983), 60.  
*Physics Today*, April (1983), 20.
- [22] ABE et al. : *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994), 2 et 74 (1995), 2626.  
ABACHIS et al. : *Phys. Rev. Lett.* 72 (1994), 2138 et 74 (1995), 2632.
- [23] *Physics Today*, April (1983), 17.  
*Physics Letters*, 122B (1983), 103, et 122B (1983), 476.  
*Physics Letters*, 126B (1983), 398.
- [24] H. PAGELS : *L'Univers quantique*, Interéditions, Paris (1985).
- [25] *Les particules élémentaires*; Bibliothèque pour la science, Paris (1983), *Physical Review D : Review of Particle Physics* 54 (1996).
- [26] *Physics Letters*, 170B (1986).
- [27] J.R. ROY : *L'astronomie et son histoire*, Masson, Paris (1982).
- [28] G. GILMORE : *Nature* 328 (1987), 111.
- [29] R. GODEMENT : *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris (1980).
- [30] L. SCHWARTZ : *Les Tenseurs*, Hermann, Paris (1975).
- [31] A. STEYERL : 25<sup>e</sup> Cours de l'Association Vaudoise des Chercheurs en Physique, AVCP, Lausanne (1983).
- [32] E. ROGERS : *Physics for the Inquiring Mind*, Princeton University Press, Princeton (1960).
- [33] V. ARNOLD : *Equations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou (1974).
- [34] H. CARTAN : *Calcul différentiel*, Hermann, Paris (1971).
- [35] S. DRAKE : *Scientific American* 243 (1980), 122.
- [36] V. ARNOLD : *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, MIR, Moscou (1976).
- [37] M. HÉNON, C. HEILES : *Astron. Journ.* 69 (1964), 73.
- [38] F. KLEIN, A. SOMMERFELD : *Theorie des Kreisels*, vol. IV, 880.
- [39] J.M. LÉVY-LEBLOND : *Amer. J. Phys.* 46 (1978), 106.
- [40] G. GALILÉE : voir ouvrages historiques.
- [41] R.V. EÖTVÖS et col. : *Ann. Phys.* 68 (1922), 11.
- [42] R. DICKE : *Scientific American* 205 (1961), 84.
- [43] V.A BRAGINSKII, V.I. PANOV : *Sov. Phys. JETP* 34 (1972), 463.
- [44] E. FISHBACH et col. : *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986), 3.
- [45] J.P. ECKMANN : *Helv. Phys. Acta* 56 (1983), 805, et communication privée (figure 16.20).
- [46] M. GOLDSTEIN : *Classical Mechanics*, 2nd edition, Addison-Wesley, Reading (1980).
- [47] W. PAULI et G. WESSEL : *Zeit. für Phys.* 124 (1948), 691.

- [48] H. FIZEAU : *Comptes Rendus* 33 (1851), 349.
- [49] A.A. MICHELSON : *Am. Journ. of Science* 22 (1881), 20.
- [50] A.A. MICHELSON, E.W. MORLEY : *Am. Journ. of Science* 34 (1887), 333.
- [51] A. EINSTEIN : *Ann. der Phys.* 17 (1905), 891.
- [52] M. BORN : *Ann. der Phys.* 33 (1910), 1.  
A. SOMMERFELD : *Ann. der Phys.* 33 (1910), 670.
- [53] A.H. BUCHERER : *Ann. der Phys.* 28 (1909), 513.
- [54] A. EINSTEIN : *La théorie de la relativité restreinte et générale*, Gauthier-Villars, Paris (1976).  
Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie, *Ann. der Phys.* 49 (1916).
- [55] J. EISENSTAEDT : *Archive for History of Exact Sciences*, Springer, 35 (1986), 115.
- [56] I.M. GELFAND, S.V. FOMIN : *Calculus of Variations*, Prentice Hall, 1963.
- [57] E.C.G. STUECKELBERG DE BREIDENBACH, P.B. SCHEURER : *Thermocinétique phénoménologique galiléenne*, Birkhäuser, Basel (1974).
- [58] K. LAWS : *Physics Today*, February (1985), 24.
- [59] E. IACOPIN : *Nature* 328 (1987), 578.
- [60] J.K. BEATTY : *The new solar system*, Cambridge Univ. Press (1981).
- [61] J. LASKAR : Stabilité du système solaire, in *Chaos et déterminisme*, Ed. Le Seuil, Paris (1992), pp. 170-211.
- [62] E. SEGRÈ : *Les physiciens modernes et leurs découvertes*, Fayard, Paris, vol. 1 (1984), vol. 2 (1987).
- [63] *Physics Today*, August (1993), BG9.
- [64] P. BÉREST : *Calcul des variations : application à la mécanique et à la physique*, Ellipse, Paris (1997).
- [65] R. HAKIM : *Gravitation relativiste*, Interéditions, 1994.
- [66] P. TOURENC : *Relativité et gravitation*, Collection S, Colin, Paris (1992).
- [67] N. BERGLUND, H. KUNZ : Chaotic Hysteresis in an Adiabatically Oscillating Double Well, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), 1691. [Ce paragraphe a été écrit par M. Berglund que nous remercions pour sa collaboration.]



## NOTATIONS

- Seuls les symboles apparaissant à plusieurs endroits dans l’ouvrage sont mentionnés.
- Le signe  $\Delta \dots$  placé devant une grandeur signifie « variation » de cette grandeur.
- Le signe  $\Delta \dots$  placé devant une grandeur signifie « quantités » de cette grandeur (utilisé pour le travail  $\Delta W$  et la chaleur  $\Delta Q$ ).
- Les symboles  $i$  et  $f$  associés à une grandeur signifient « valeur initiale » et « valeur finale », par exemple  $\Delta E = E_f - E_i$ .

### Minuscules

Symbole	Signification	Symbole	Signification
$\mathbf{a}$	accélération vectorielle	$m^*$	masse gravifique
$a, b$	demi-axes d’une conique	$m(v)$	masse relativiste
$a, b$	constantes de la force de Lennard-Jones	$m_0$	masse de repos
$\mathbf{a}_n$	accélération normale	$\mathbf{p}$	quantité de mouvement d’un système
$\mathbf{a}_r$	accélération radiale	$p$	paramètre d’une conique
$\mathbf{a}_t$	accélération tangentielle	$\mathbf{p}_\alpha$	quantité de mouvement du point $P_\alpha$
$c$	vitesse de la lumière	$p_j$	moment conjugué à la coordonnée $q_j$
$d\mathbf{x}^{(\alpha)}$	déplacement réel de $\alpha$	$q_j$	coordonnées généralisées
$e$	excentricité	$\tilde{q}_j$	position d’équilibre
$e$	charge du proton	$q$	charge électrique
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	repère orthonormé	$(r, \theta, \varphi)$	coordonnées sphériques
$f^{(v)}(q, \dot{q}, t)$	équation de liaison	$s$	abscisse curviligne
$\mathbf{g}, g$	accélération terrestre	$t$	temps
$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$	champ de gravitation	$\mathbf{u}$	vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$
$i, j, k = 1, 2, 3$	index associé aux coordonnées cartésiennes	$\mathbf{v}, \mathbf{v}_{ \mathcal{R}}$	vecteur vitesse par rapport à $\mathcal{R}$
$j = 1, \dots, k$	index associé aux coordonnées généralisées	$v$	vitesse scalaire
$k$	constante de la loi de Stokes	$v_L$	vitesse limite
$k$	constante de l’oscillateur isotrope		
$k$	constante de rappel		
$m, m_\alpha$	masse d’inertie, du point $P_\alpha$		

Symbole	Signification
$v_i$	composante covariante de $\boldsymbol{v}$
$v^i$	composante contravariante de $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{v}_G$	vitesse du centre de masse
$\boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}'$	vitesse relative
$\boldsymbol{v}_e$	vitesse d'entraînement
$w, w_\mu$	quadrivecteur vitesse
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(P)}$	rayon-vecteur du point $\boldsymbol{P}$
$x_0$	coordonnée associée au temps
$x_i^{(\alpha)}$	coordonnée cartésienne du point $\boldsymbol{P}_\alpha$ , $i = 1, 2, 3$
$x_\mu^{(\alpha)}$	coordonnée relativiste du point $\boldsymbol{P}_\alpha$ , $i = 0, 1, 2, 3$
$(x_1, \dots, x_n)$	variables d'état

Majuscules

Symbole	Signification / Page
$A$	amplitude des oscillations
$A(\boldsymbol{x}, t)$	potentiel vecteur électromagnétique
$\boldsymbol{A}$	matrice de transformation
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t)$	champ magnétique
$C$	constante des aires
$C_j$	amplitude des petits mouvements
$C_x$	coefficient de traînée
$\boldsymbol{D}, D_{ij}$	tenseur des déplacements
$E$	énergie totale
$E$	module d'Young
$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$	champ électrique
$E^{\text{cin}}$	énergie cinétique
$E^{\text{méc}}$	énergie mécanique
$E^{\text{pot}}$	énergie potentielle
$E^{\text{pot ext}}$	énergie potentielle extérieure
$E^{\text{int}}$	énergie interne

Symbole	Signification
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_\alpha$	force, sur le point $\boldsymbol{P}_\alpha$
$\boldsymbol{F}^{\text{ext}}$	force extérieure
$\boldsymbol{F}^{\text{int}}$	force intérieure
$\boldsymbol{F}^{\text{nc}}$	force non conservative
$\boldsymbol{F}(r), F(r)$	force centrale
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$	champ de force
$\boldsymbol{F}^{\text{fr}}$	force de frottement
$\boldsymbol{F}^{\alpha \rightarrow \beta}$	force exercée par $\alpha$ sur $\beta$
$\mathcal{F}_\mu$	quadrivecteur force
$G, G_\alpha$	centre de masse, du système $S_\alpha$
$G$	constante de la gravitation
$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$	constante du mouvement (cinématique)
$G$	module de cisaillement
$H$	hamiltonien
$\mathcal{H}$	hamiltonien en fonction des $(q, \dot{q})$
$I$	action
$\boldsymbol{I}_C, I_{C,ij}$	tenseur d'inertie au point $C$
$I_{C,i}$	moment d'inertie principal
$I_\Delta$	moment d'inertie par rapport à l'axe $\Delta$
$K$	valeur numérique d'une constante du mouvement
$L_O$	moment cinétique
$L_C^{\text{rot}}$	moment cinétique de rotation
$L'_G, L_G)_{\mathcal{R}_G}$	moment cinétique par rapport au référentiel du centre de masse
$\boldsymbol{L}$	transformation de Lorentz
$M$	masse (quantité de matière)
$\boldsymbol{M}_O$	moment des forces par rapport au point $O$
$N, N$	réaction normale
$O$	observateur
$O$	origine du repère

Symbole	Signification
$P, P^{\text{ext}}, P^{\text{int}}$	puissance, extérieure, intérieure
$P^{\text{nc}}$	puissance des forces non conservatives
$P, P_\alpha$	point du système, $\alpha = 1, \dots, N$
$P_i, P(t)$	point coïncidant
$Q$	facteur de qualité
$Q_j$	force généralisée
$\mathbf{R}, \mathbf{R}^{(\alpha)}$	force de réaction ou de liaison
$\mathbf{R}$	matrice de rotation
$\mathcal{R}$	référentiel
$\mathcal{R}_G$	référentiel du centre de masse
$R_e$	nombre de Reynolds
$S$	entropie
$T$	énergie cinétique
$T$	période
$T$	tension (câble)
$T$	température
$U(r)$	potentiel d'une force centrale
$U(\mathbf{x})$	potentiel d'une force conservative
$U^{\text{eff}}$	potentiel effectif
$\Delta W$	travail

## Lettres grecques

Symbole	Signification
$\alpha = 1, \dots, N$	indice numérotant les points matériels
$\delta$	déphasage
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\delta \mathbf{x}^{(\alpha)}$	déplacement virtuel de $P_\alpha$
$\varepsilon_0$	constante électrique
$\varepsilon, \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$	tenseur des déformation

Symbole	Signification
$\eta$	coefficient de viscosité
$(\theta, \varphi, \psi)$	angles d'Euler
$\kappa$	coefficient d'amortissement
$\kappa$	constante associée au mouvement en $r^{-2}$
$\kappa_S, \kappa_T$	constante associée au Soleil et à la Terre
$\lambda$	coefficient de frottement
$\mu$	masse réduite
$\mu_C, \mu_S$	coefficient de frottement
$\nu$	fréquence
$\nu_0$	fréquence propre
$\rho$	masse spécifique
$(\rho, \varphi, z)$	coordonnées cylindriques
$\sigma$	section efficace
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	tenseur des tensions
$\tau$	paramètre d'évolution temporelle
$\tau$	temps propre
$\boldsymbol{\tau}$	vecteur unité tangent à la trajectoire
$\chi$	angle de diffusion
$\boldsymbol{\omega}, \omega$	vitesse angulaire
$\boldsymbol{\omega}$	vitesse de rotation d'un solide
$\omega$	pulsation
$\omega$	pulsation cyclotron
$\omega_0, \omega_\alpha$	pulsation propre
$\omega_p$	vitesse de rotation propre
$\Delta$	axe de rotation
$T$	torseur
$\Phi(\mathbf{x}, t)$	potentiel électrique
$\Omega$	vitesse de rotation propre de la Terre
$\Omega$	pulsation de la force appliquée
$\Omega_{\text{cr}}$	pulsation critique
$\Omega_r$	pulsation de résonance



## INDEX ALPHABÉTIQUE

- Abscisse curviligne, 107
- Accélération
- absolue, 228
  - angulaire, 153
  - complémentaire, 228
  - d'entraînement, 228
  - de Coriolis, 228
  - de pesanteur, 143
  - de rotation (d'un solide), 208
  - d'un point, 113
  - normale, 115
  - radiale, 129, 131
  - relative, 228
  - scalaire
  - tangentielle, 114
- Accéléromètre, 485
- Actif (point de vue), 38, 239
- Action de Hamilton, 654, 702
- Action et réaction, 255
- Active
- (force), 380
  - (transformation de coordonnées), 682
  - (transformation de référentiel), 239
  - (transformation d'unités), 38
- Adhérence, 410
- Adiabatiquement fermé, 412
- Ailleurs d'un événement, 616
- Aires
- (constante des), 157
  - (loi des), 155, 157
- d'Alembert (équation de), 646
- Amas, 57
- Amortissement
- critique, 533
  - (coefficient d'), 531
- Amplitude, 148
- Andromède, 58
- Angle
- de diffusion, 178, 560
  - de frottement, 336
  - d'Euler, 209
  - de frottement, 336
  - solide, 566
- Année lumière, 56
- Apesanteur, 484
- Application de Poincaré, 275
- Archimède, 80
- (force d'), 325
  - (poussée d'), 487
- Aréolaire (vitesse), 156
- Asymptotiquement stable, 509
- Atomes, 47
- Attraction universelle, 314
- Autonomes (équations différentielles), 188
- Avance du périhélie, 563
- Avion, 473
- Axe
- central (torseur), 83
  - de rotation, 207
  - d'une conique, 160
  - principal (solide), 437
  - principal (tenseur), 686
- Axiome
- de la relativité restreinte, 600
  - non relativiste
    - (longueur), 224
    - (masse), 246
    - (temps), 223
- Balançoire, 543
- Balistique, 241
- Barrière centrifuge, 400
- Base et roulante, 215
- Base (vecteurs de), 78
- Battements, 541, 548
- Bertrand (théorème de), 562

- Bielle, 215
- Bilan (équation du), 592
- Billard, 347, 582
- Binet (formule de), 159
- Bobine (essieu), 219
- Bohr (quantification de), 373
- Boltzmann (constante de), 415
- Bowling, 347
- Boyle (loi de), 60
- Brachistochrone, 698
  
- Câble(s)
  - sur une poulie, 343
  - (définition), 512
  - (équation des), 513
  - (mouvement d'un), 407
- Came, 131
- Caractéristique (équation), 530, 546, 551, 653
- Cardioïde, 137
- Centre de courbure, 112
- Centre de gravité, 89
- Centre de masse, 89, 289
  - (définition), 89
  - (théorème du), 289
- Centre de percussion, 576
- Centre instantané de rotation, 215
- Centrifuge
  - (effet), 446
  - (force) 144, 282, 487, 491
- Centrifugeuse, 68, 269, 285, 358, 486
- Cerceau, 219
- Chaînette (équation de la), 515
- Chaleur, 414
- Champ
  - de force, 379
  - de gravitation, 315, 689
  - de gravitation apparent, 478
  - de pesanteur terrestre, 489
  - électrique, 317, 393
  - électromagnétique, 633, 659, 668
  - gravifique, 315
  - magnétique, 318
  - (lignes de), 315
- Chandler (période de), 465
- Chaos, 113, 276, 544
- Chaotique, 449
- Cheminée, 305
- Choc, 118, 573
  - de deux sphères, 581
  - élastique, 248, 406, 575, 582
  - inélastique, 406, 575
  - mou, 248, 406, 575
  - sur une tige, 579
  - (équation des), 576
  - (modèle des), 575
- Cisaillement
  - (force de), 518
  - (loi de Hooke), 364, 370
- Coefficient
  - d'amortissement, 531
  - de compressibilité, 367
  - de frottement, 327
  - de frottement cinétique, 334
  - de frottement statique, 336
  - de Lamé, 371
  - de Poisson, 366
  - de portance, 332
  - de résistance au roulement, 340
  - de restitution, 488
  - de traînée ( $C_x$ ), 326
  - de viscosité, 325
- Collision relativiste
  - élastique, 574
  - inélastique, 639
- Complémentarité (principe de), 3
- Composante
  - contravariante, 80, 679
  - covariante, 80, 681
- Composition
  - des accélérations, 228
  - des vitesses, 226
  - relativistes, 614
  - de rotation, 227
- Compression, 366, 370
- Condensation, 589
- Conditions initiales, 22, 188, 261
- Cône de lumière, 602, 616
- Cône (frottement sec), 337
- Configuration (espace de), 69
- Coniques, 160
- Conservation
  - de la quantité de mouvement, 291, 308
  - de l'énergie, 141, 391, 404, 308
  - de la masse, 246, 309, 420
  - du moment cinétique, 158, 291, 308
  - (lois de), 291

- Conservative (force), 387  
 Conservée (grandeur), 245  
 Constante(s)  
   — des aires, 158  
   — de la gravitation, 314  
   — de temps, 329  
   — du mouvement, 135, 141, 144, 151, 165, 189, 291  
   — physiques, 59  
 Contact (solide en), 211  
 Contraction des longueurs, 619  
 Contraintes, 350  
 Contravariant (vecteur), 684  
 Coordonnées  
   — cartésiennes, 64  
   — contravariantes, 66  
   — covariantes, 681  
   — curvilignes, 125  
   — cylindriques, 65, 129  
   — elliptiques, 66  
   — généralisées, 68, 133  
   — normales, 547  
   — polaires, 65, 128  
   — sphériques, 65, 130, 234  
   — (lignes de), 66  
 Copernic (référentiel), 64  
 Corde  
   — (mouvement d'une), 407  
   — (vibration), 45  
 Coriolis (force de), 477, 492  
 Cosmique (vitesse), 173  
 Coulomb  
   — (loi de l'électrostatique de), 317  
   — (loi du frottement dynamique de), 334  
   — (loi du frottement statique de), 336  
 Couple, 83  
 Covariant  
   — hamiltonien, 671  
   — lagrangien, 670  
   — (vecteur), 684  
 Critique (rotation), 359  
 Culbute, 347  
 Curie (principe de), 458  
 Cyclique (variable), 359  
 Cycloïdal (mouvement), 120  
 Cyclones, 496  
 Cyclotron (pulsation), 323  
 Cylindre  
   — creux, 299  
   — sur plan incliné, 299  
 Décrément logarithmique, 532  
 Déformation  
   — d'une poutre, 517  
   — élastique, 365  
   — plastique, 365  
   — (tenseur de), 369  
 Degrés de liberté, 69  
 Demi-grand axe, 160  
 Demi-petit axe, 160  
 Densité, 252  
 Déphasage, 148, 536  
 Déplacement  
   — d'un point, 69  
   — libre, 70  
   — réel, 350, 354  
   — virtuel compatible, 350, 354  
   — (tenseur des), 368  
 Dérivée partielle, 125  
 Désintégration (relativiste), 574, 640  
 Déterminisme, 2, 19, 188  
 Déviation vers l'Est, 492  
 Différentiel (d'un véhicule), 244  
 Diffusion, 176, 566  
   — de Rutherford, 567  
   — d'une particule chargée, 176  
   — élastique, 407, 563  
   — (angle de), 560  
   — (état de), 167  
 Dilatation, 370  
 Dilatation du temps, 621  
 Dimensions (équation aux), 28  
 Directrice (d'une conique), 160  
 Dissipatif, 382, 392, 409, 411, 540  
 Distribution  
   — de probabilité, 11  
   — des accélérations, 208  
   — des vitesses, 205  
 Divergence, 691  
 Durée de vie, 25, 50, 621, 630  
 Dynamomètre, 252  
 Écart quadratique moyen, 13  
 Échelle (changement d'), 38  
 E.D.O., 188  
 Einstein  
   — (convention), 80

- (jouet), 484
- (principe d'équivalence), 485
- (relativité), 600
- Électrons, 48
- Ellipsoïde d'inertie, 456
- Énergie chimique, 417
- Énergie cinétique, 384
  - d'un solide, 451
  - non relativiste, 384
  - relativiste, 626
  - (théorème de l'), 450
- Énergie d'agitation thermique, 415
- Énergie de liaison, 417
- Énergie de libération, 418
- Énergie de repos, 419, 626
- Énergie dissipée, 540
- Énergie interne, 412
- Énergie mécanique, 403
  - d'un point, 390
  - d'un système, 403
- Énergie nucléaire, 418
- Énergie potentielle
  - d'interaction, 403
  - d'un point, 390
  - extérieure, 401
- Énergie relativiste, 626
- Énergie (conservation de l'), 363, 372, 391, 404
- Énergie (théorème de l'), 403
- Entropie, 412
- Eötvös (expérience de), 497
- Épicycloïde, 154
- Équations différentielles, 188, 191
- Équation
  - d'état d'un gaz, 416
  - d'Euler, 461
  - d'Euler-Lagrange, 468, 699
  - de d'Alembert, 646
  - de Hamilton, 665
  - de la gravitation newtonienne, 691
  - de la poutre, 520
  - de Lagrange, 647, 648
  - de liaison, 352
  - des câbles, 513
  - des chocs, 576
  - horaire, 108
  - paramétrique, 107
- Équilibrage
  - dynamique, 303, 431
  - statique, 303
- Équilibre
  - et stabilité, 193, 198, 509, 694
  - (conditions d'), 506
  - (définition), 289
  - (point d'), 193, 198
- Équinoxes (précession des), 154, 472
- Équipartition de l'énergie, 529
- Équivalence
  - de la masse d'inertie et pesante, 278
  - des masses, 278, 314, 496
  - masse-énergie, 418
  - des torseurs, 84
  - (principe d'), 485
- Espace
  - en physique classique, 21, 188
  - (propriété de l'), 16
- Espace de configuration, 69
- Espace de phase, 21, 112
  - du point matériel, 112
  - formalisme hamiltonien, 664
  - formalisme lagrangien, 649
  - mécanique newtonienne, 133
- Espace-temps, 15, 17, 616
- Espérance mathématique, 11
- Essieu, 220
- État, 11
  - de diffusion, 167, 560
  - de mélange, 14
  - du point matériel, 261
  - instantané, 20
  - lié, 167, 559, 561
  - pur, 14
  - (équation d'), 416
- Ether, 17
- Euler
  - -Lagrange (équation d'), 468, 699
  - (angles d'), 209
  - (équations d'), 461
- Événement, 15, 599
- Évolution temporelle, 19, 20, 107, 261
- Excentricité, 160
- Extensive (grandeur), 245
- Facteur
  - de qualité ( $Q$ ), 532
  - de restitution, 581
- Fatigue, 365



- Fermé (système), 245  
 Fil  
   — à plomb, 490  
   — souple, 252, 268, 512  
 Flèche, 516  
 Fléchissement (expérience), 363  
 Flexion (moment de), 518  
 Flot, 693  
 Fluctuations, 10  
 Fonction de Liapunov, 695  
 Force, 250  
   — active, 380  
   — centrale, 380, 382  
   — conservative, 387  
   — d'Archimède, 325, 487  
   — d'arrachement, 336  
   — d'inertie, 477  
   — de cisaillement, 518  
   — de Coriolis, 477, 492, 494, 502  
   — de frottement  
     — sec, 334, 382, 446  
     — visqueux, 325, 382  
   — de gravitation, 314  
   — de Lennard-Jones, 324  
   — de liaison, 350  
   — de Lorentz, 321  
   — de portance, 332  
   — de traction, 518  
   — de Van der Waals, 324  
   — électrostatique, 317  
   — extérieure, 228  
   — généralisée, 506, 647  
   — impulsioneelles, 574  
   — intérieure, 253, 385, 402, 450  
   — magnétique, 318  
   — passive, 380  
 Forme différentielle, 379  
 Foucault (pendule de), 493  
 Fourche, 236  
 Frénet (repère de), 116  
 Fréquence, 148  
   — propre, 528, 547  
 Frottement  
   — sec, 333  
   — visqueux, 325  
 Fusée, 589, 593  
 Fusion, 418  
 Futur d'un événement, 616  
 Galaxie, 56  
 Galilée  
   — (groupe de), 232  
   — (référentiel de), 262  
   — (relativité de), 280, 480  
   — (transformation de), 229, 309  
 Gaz (équation d'état), 416  
 Géostationnaire, 174  
 Glissement (vitesse de), 212, 341  
 Gradient, 387, 691  
 Gravitation  
   — (constante de la), 314  
   — (équation de la), 691  
   — (force de), 314  
   — (potentiel de), 691  
 Groupe  
   — de Galilée, 232  
   — de symétrie, 661  
 Groupe local, 58, 264  
 Gyroscope, 467, 474  
 Gyroscopiques (effets), 295, 443, 474  
 Hadrons, 50  
 Haltère, 428  
 Hamilton (équations de), 665, 669  
 Hamiltonien  
   — dans l'espace de phase, 664  
   — étendu, 669  
   — relativiste, 671  
 Heisenberg (principe d'incertitude), 4, 14  
 Hélice, 132, 243  
   — bipale, 472  
 Hélicoïdal (mouvement), 132, 207  
 Helmholtz (théorème de), 370  
 Herpolhodie, 462  
 Histogramme, 10  
 Hodographe, 112  
 Holonôme  
   — (liaison), 352  
   — (système), 69, 646  
 Homogène (système), 93  
 Homogénéité  
   — de l'espace, 308, 479, 642  
   — du temps, 2, 20, 188, 308, 405  
   — (théorème), 34  
 Hooke (loi de), 364  
   — (cisaillement), 368  
   — (compression), 367

- (solide isotrope), 371
- (traction), 366
- Horaire (équation), 108
- Horizon artificiel, 293
- Horloge, 16
- Huygens-Steiner (théorème de), 439
- Hydrodynamique, 590
- Hyperbolique (mouvement), 632
- Hyperstatique, 504
- Impulsion, 261
  - d'une particule chargée, 660, 668
  - généralisée, 649
- Incertitude, 13
- Inélastique (collision), 406
- Inertie
  - (ellipsoïde d'), 456
  - (force d'), 477
  - (moment d'), 429
  - (principe d'), 256
  - (référentiel d'), 262, 264, 399, 479, 600
  - (repère d'), 437
  - (tenseur d'), 434
- Information, 11
- Instable, 509
  - (point d'équilibre), 193, 198
- Intégrabilité (critère), 352
- Intégrable
  - (liaison), 352
  - (système), 274, 320, 394, 469
- Intégrale première, 189
- Interactions, 53
- Interaction scalaire, 673
- Intervalle
  - de longueur, 16, 224
  - propre, 617
  - de temps, 16
  - propre, 616
- Invariance
  - et similitude, 39
  - et symétrie, 240, 661
  - (principe d'), 6, 308
- Invariants d'un torseur, 83
- Isochronisme, 455, 530
- Isotropie de l'espace, 308
- Joule, 8, 379
- Jour sidéral, solaire, 17, 183, 238
- Kepler (lois de), 40, 155
- Kilogramme, 42
- König
  - (premier théorème de), 297, 386
  - (second théorème de), 386
- Kronecker (symbole de), 78
- Lagrange (équations de), 647, 648
- Lagrangien, 648
  - (covariant), 670
  - (équivalent), 651
- Laminaire, 325
- Lavoisier (loi de), 247
- Lemme fondamental, 151
- Lennard-Jones (modèle de), 324
- Leptons, 49
- Lex
  - prima, 256
  - secunda, 260
  - tertia, 253
- Liaison(s), 350
  - bilatérales, 351, 356
  - holonômes, 352
  - indépendantes du temps, 353
  - intégrables, 352
  - non holonômes, 353
  - parfaites, 355
  - unilatérales, 351
  - (équation des), 352
- Liapunov (fonction de), 695
- Libération
  - (mouvement de), 267
  - (vitesse de), 173
- Libration, 267
- Ligne
  - de champ, 315
  - de coordonnées, 66
  - d'univers, 108, 604
- Limite d'adhérence, 347
- Linéarisation, 197, 696
- Lois
  - de composition, 612
  - de conservation, 291
  - de Coulomb
    - (électrostatique), 317
    - (frottement), 334, 336
  - de Kepler, 155
  - de la gravitation universelle, 314

- de Newton, 254, 257, 260
- de Stokes, 325
- des aires, 157
- naturelles, 2
- (définition), 30
- Lorentz
  - (force de), 321
  - (transformation de), 611
- Lune, 55
- Mach (principe de), 280
- Magnus (effet), 333
- Manivelle, 215
- Marée, 498
- Masse
  - de repos, 624, 639
  - gravifique, 314
  - linéique, 93, 247
  - pesante, 278
  - réduite, 556
  - relativiste, 624, 638
  - spécifique, 92, 246
  - surfacique, 93
  - (énergie), 419
  - (quantité de matière), 246
- Matrice
  - d'inertie, 435
  - orthogonale, 202, 682
- Métrique, 614
- Meule (problème de la), 213, 442
- Michelson-Morley (expériences de), 17, 597
- Mode(s)
  - acoustique, 547
  - normaux, 547, 552
  - propres, 547
  - optique, 547
- Modèle réduit, 39, 41
- Module
  - d'Young, 366
  - de cisaillement, 368
  - de compressibilité, 367
- Moindre action (principe de), 654, 702
- Molécule diatomique, 67, 422
- Moment, 80
- Moment cinétique, 261
  - de rotation, 434
  - de translation, 434
  - intrinsèque, 297
  - orbital, 297
  - total, 287
  - (conservation du), 158, 291
  - (théorème du), 262, 297
- Moment conjugué, 649
- Moment d'inertie, 433
  - d'une section, 519
  - par rapport à un axe, 429
  - par rapport à un point, 437
  - propriétés, 430
- Moment de flexion, 518
- Moment de torsion, 518
- Moment d'un vecteur, 80
- Moment d'un torseur, 82
- Moments principaux, 438
- Moto, 243, 345, 374, 410
- Mou (choc), 482
- Mouvement
  - balistique, 142
  - central, 157
  - central conservatif, 399
  - circulaire, 115, 152, 258
  - circulaire uniforme, 153
  - cycloïdal, 120
  - de rotation, 204
  - hélicoïdal, 132, 207
  - linéaire conservatif, 393
  - oscillatoire harmonique, 148
  - rectiligne, 117
  - uniforme, 116
  - uniformément accéléré, 138, 142
  - (plan d'un solide), 214
  - (équations du), 261, 288
- Moyenne, 11
- Muon, 49
- Nageur, 235
- Neutrino, 48
- Neutron, 48
- Newton
  - (lois de), 254, 257, 260
  - (théorème de), 316
  - (tube de), 144
  - (unité de force), 260
- Noether (théorème de), 662
- Nœuds (ligne des), 209
- Nombre de Reynolds, 326
- Non conservative (force), 408

- Non holonôme, 353, 357
- Non-isochronisme, 453
- Noyau, 48
- Nutation
  - (angle de), 209, 471
  - (mouvement de), 471
- Objectivité, 21
- Observables, 7, 8
- Orbites
  - d'un point, 112
  - d'un système, 133
  - et équations différentielles, 193, 197, 693
  - géostationnaire, 173
  - polaire, 174
- Orbites (illustrations d')
  - centrifugeuse, 269
  - électron dans un champ **B** inhomogène, 320
  - Lennard-Jones, 559
  - mouvement en  $r^{-2}$ , 167, 169
  - mouvement oscillant, 534
  - mouvement oscillatoire harmonique, 150, 695
  - mouvement uniformément accéléré, 141
  - oscillateur amorti, 695
  - pendule, 267, 569
  - pendule en rotation, 445
  - point sur une surface de révolution, 396–398
  - points reliés par un fil, 273–275
  - solide soumis à des frottements, 331, 342
- Oscillateurs
  - amortis, 412, 530, 695
  - couplés, 546, 549
  - électriques, 151
  - forcés, 535, 549
  - harmoniques, 147, 528, 695
  - isotropes, 181
  - non linéaires, 542
- Osculateur (plan), 116
- Pappus-Guldin (théorème de), 96
- Parabole de sécurité, 146
- Paradoxe des jumeaux, 621
- Parallaxe, 60
- Paramètre
  - d'impact, 177
  - d'une conique, 160
- Parfaites (liaisons), 355
- Particules élémentaires (tableau), 52
- Parsec, 56
- Passé d'un événement, 616
- Passif (point de vue)
  - (transformation de coordonnées), 682
  - (transformation de référentiel), 239
  - (transformation d'unités), 36
- Passive (force), 380
- Patineurs, 408
- Pendule, 265
  - balistique, 578
  - cycloïdal, 529
  - couplé, 547
  - de Foucault, 493
  - de Thomson-Tait, 674
  - de Wilberforce, 404
  - double, 136
  - elliptique, 452
  - en rotation, 488
  - et similitude, 34
  - isochrone, 529
  - mathématique, 34, 265
  - physique, 305
  - sphérique, 568
- Percussion, 574, 576
  - (centre de), 576
- Périgée, 560
- Périhélie (avance du), 563
- Période
  - d'un oscillateur, 148
  - du mouvement de Kepler, 163
  - d'un pendule, 267
- Permanent (régime), 536
- Petits mouvements, 321, 446, 453, 550, 651, 696
- Photons, 308
- Piston, 215
- Pivotement
  - (résistance au), 334, 339
  - (vitesse de), 212, 339
- Plan (mouvement), 214
- Plan osculateur, 115
- Planètes, 55, 136, 154
- Poids, 252, 490
  - apparent, 484
- Poincaré (application de), 274
- Point
  - coïncidant, 63, 106, 222, 226, 228

- d'équilibre, 193, 652, 694
- Point de vue
  - actif, 240, 682
  - de Mach, 280
  - passif, 239, 682
- Point matériel, 245, 255, 299
- Poisson
  - (coefficient de), 366
  - (formule de), 207
  - (loi de), 366
- Polhodie, 462
- Pont suspendu, 513
- Portance
  - force de, 332
- Portée
  - balistique, 145
  - d'une force, 47, 407
- Postulat fondamental, 288
- Potentiel
  - de gravitation, 399, 691
  - des forces d'inertie, 478
  - d'une force
    - centrale, 399
    - conservative, 399
  - effectif, 400, 445
- Poulie (frottement sur), 343
- Poursuite, 235, 357
- Poussée
  - d'Archimède, 328, 487
  - (fusée), 591
- Poutre (équation d'une), 520
- Précession
  - des équinoxes, 154, 472
  - d'une toupie, 471
  - (angle de), 210
  - (vitesse de), 210
- Première vitesse cosmique, 173
- Pression, 416
  - hydrostatique, 371
- Probabilité, 11
- Produit
  - mixte, 76
  - scalaire, 74
  - vectoriel, 75
- Projection orthogonale, 75
- Protons, 48
- Pseudo-
  - période, 532
  - scalaire, 77
  - vecteur, 76
- Puissance, 378
  - dissipée, 392
- Pulsation, 148
  - critique, 359, 447
  - cyclotron, 323
  - de résonance, 538
  - propre, 528, 550, 551
- Quadrivecteur
  - contravariant, 615
  - (force), 629
  - (potentiel électromagnétique), 670
  - (quantité de mouvement), 673
  - (vitesse), 628
- Qualité (facteur de), 532
- Quantification de Bohr, 373
- Quantique (Physique), 8
- Quantité
  - de matière, 246
  - de mouvement, 247
    - de la lumière, 308
    - d'un point, 249, 628
    - totale, 287
    - (théorème de la), 249
    - (torseur des), 288
- Quarks, 50
- Rapidité  $\eta$ , 611
- Rayon
  - de courbure
    - d'une trajectoire, 116
    - d'une poutre, 520
  - de giration, 430
- Rayon vecteur, 70
- Réaction
  - normale, 334
  - sur un axe, 301
  - (action et), 255
  - (force de), 591
- Réalité, 2
- Red shift, 622
- Réduction (éléments de), 82
- Référentiel
  - d'inertie (ou de Galilée), 262, 264, 399, 479, 600
  - de repos, 639
  - du centre de masse, 296

- inertiel local, 485
- (changement de), 222, 226, 228, 232
- (définition), 63, 64
- Régulateur de Watt, 501, 657
- Relation d'incertitude, 14
- Relative
  - (accélération), 228
  - (variable), 556
  - (vitesse), 226
- Relativité (principe de la)
  - de Galilée, 280, 480
  - générale, 282, 498, 641
  - restreinte d'Einstein, 600
- Relaxation (temps de), 532
- Répercussion, 576
- Repère
  - de Frénet, 116
  - d'inertie (d'un solide), 437
  - naturel tangent, 127
  - orthonormé, 78
  - (changement de), 679
- Résistance
  - au pivotement, 324, 339
  - au roulement, 324, 339
- Résonance, 537, 550, 552
  - paramétrique, 543
  - (largeur de), 539
- Restitution (facteur de), 581
- Résultante (d'un torseur), 82
- Rétrograde (mouvement), 137
- Reynolds (nombre de), 36, 326
- Robot, 243
- Rotateur, 68, 430, 568
- Rotation(s)
  - autour d'un axe, 200
  - de la Terre, 238
  - infinitésimale, 202
  - instantanée, 205
  - propre
    - (angle de), 209
    - (vitesse de), 210
  - (centre instantané de), 215
  - (matrice des), 202
  - (mouvement de (pendule)), 267
  - (vitesse de), 205
- Rotationnel, 387
- Roues
  - motrices, 345
  - porteuses, 345
- Roulante, 215
- Roulement
  - à billes, 220
  - d'un disque sur un autre, 216
  - sans glissement, 212
  - (résistance au), 334
  - (vitesse de), 212
- Rutherford (formule de), 567
- Satellites artificiels, 171
- Saturne (fusée), 59
- Scalaire, 69, 683
- Seconde vitesse cosmique, 173
- Section efficace, 566
- Séparatrice, 267
- Shot without english*, 582
- Similitude, 39
- Simultanéité, 223
  - (axiome non relativiste), 223
  - (cas relativiste), 603
- Solide
  - idéal, 288
  - indéformable, 199
  - réel, 363, 517
- Spin, 308
- Stabilisation, 543
- Stabilité
  - des équilibres, 193, 509
  - de la matière, 318
  - du mouvement circulaire, 397
  - (critère de), 695
- Stable
  - (point d'équilibre), 194, 198, 509
- Statique (lois de la), 289, 503
  - des câbles, 512
  - des poutres, 516
- Statistique (mécanique), 14, 416
- Stévin (expérience de), 71
- Stokes (loi de), 325
- Superballes, 584
- Superlois, 6
- Superposition des déformations (principe de), 367
- Symétrie
  - de la mécanique newtonienne, 479
  - d'un solide, 457
  - éléments de, 90

- et principe d'invariance, 307
- (axes principaux et), 458
- (centre de masse et), 90
- (changement de référentiel), 239
- (théorème de Noether), 661
- Système(s)
  - d'unités, 28
  - fermés, 245
  - international d'unités, 42
  - isolés, 245
  - matériel, 249
  - mécaniques, 22
  - ouverts, 245, 417, 589
  - physiques, 6
  - solaire (tableau), 55
- Température
  - et entropie, 413
  - en mécanique statistique, 415
- Temps
  - de relaxation, 532
  - en relativité, 602
  - propre, 618
  - universel, 224
  - (espace), 15
  - (intervalle de), 16, 223
  - (unité de), 42
- Tenseur
  - co- et contravariant, 684
  - contravariant d'ordre 2, 685
  - d'inertie, 433, 441
  - des déformations, 369
  - des déplacements, 368
  - des tensions, 360
  - électromagnétique, 634
  - ellipsoïde, 686
  - métrique, 614
  - (axes principaux), 686
  - (définition), 682
  - (pseudo-), 687
- Tension(s)
  - dans un câble, 513
  - interne, 306, 360
  - (tenseur des), 361
- Terre, 55
- Théorème
  - de conservation de l'énergie, 404
  - de l'énergie cinétique, 385, 450, 626
  - de la quantité de mouvement, 249
  - du viriel, 416
  - fondamental, 288
- Thermodynamique (principes de la), 412
- Thomson J.J. (modèle de), 373
- Titius-Bode (loi de), 5
- Toricelli (principe de), 510
- Torseur
  - abstrait, 85, 207
  - des forces, 86, 254
    - extérieures, 288
    - intérieures, 288
  - de pesanteur, 288
  - des quantités de mouvement, 86, 288
  - équivalent, 84
  - (définition), 82
- Torsion (expérience), 364
  - (moment de), 518
- Toupie, 459
- Traction
  - (expérience de), 363
  - (loi de Hooke), 364
  - (force de), 518
- Trajectoire, 106
- Trajectoires (figures de)
  - Lennard-Jones, 560
  - mouvement central, 169
  - mouvement uniformément accéléré, 143
  - particule dans un champ **B** inhomogène, 320
  - particules dans les champs **E**, **B** constants, 322
  - patineurs, 409
  - points reliés par un fil, 273
- Transfert (théorème du), 82
- Transformation
  - de coordonnées, 679
  - de Galilée, 229
  - de Lorentz, 610
  - des vitesses relativistes, 614
  - orthogonale, 681
- Transitoire (régime), 536
- Translation, 200
  - (mouvement instantané de), 204
  - (vitesse de), 204
- Travail, 378
- Travaux virtuels
  - (condition des), 355, 503, 646

- (principe des), 505
- Trou noir, 422
- Tube de Newton, 143
- Tycho Brahé (modèle de), 218
- Ultracentrifugeuse, 488
- Unités
  - (changement d'), 32, 37
  - (systèmes d'), 27
  - (système international), 42
- Univers (ligne d'), 108
- Vagues (vitesse des), 46
- Valeur critique, 285, 398
- Variable(s), 21
  - cyclique, 649
  - du centre de masse, 556
  - relatives, 556
- Vecteur(s)
  - axial (ou pseudo-), 76
  - contravariant, 684
  - coplanaires, 87
  - covariant, 684
  - glissant, 73
  - libre, 73
  - lié, 73
  - parallèles, 88
  - polaires, 76
  - (accélération angulaire), 153
  - (lieu), 70, 109
  - (vitesse angulaire), 152
- Viriel (théorème du), 415–417
- Virtuel (déplacement), 350
- Viscosité, 325
- Vitesse(s), 109–110, 628
  - absolue, 226
  - angulaire, 152
  - aréolaire, 156
  - cosmique, 173
  - d'entraînement, 226
  - de glissement, 212
  - de libération, 173
  - de nutation, 210
  - de pivotement, 212
  - de précession, 210
  - de rotation
    - critique, 359
    - du solide, 205
    - propre, 210
  - de roulement, 212
  - de translation, 204
  - du système, 638
  - limite, 327
  - radiale, 127, 129
  - relative, 226
  - scalaire, 111
  - transverse, 127, 129
  - (composition non relativiste des), 226
  - (composition relativiste des), 614
  - (distribution dans un solide), 205
- Voie Lactée, 57
- Volant d'inertie, 431
- Watt (régulateur), 501, 657
- Wilberforce (pendule de), 404



## INDEX DES NOMS

- d'Alembert Jean Le Rond (1717–1783), 646  
 Archimède (~ 287–212 av. J.-C.), 80
- Bernouilli Jean (1667–1748), 147, 505  
 Bernouilli Daniel, fils de Jean (1700–1782), 517  
 Bernouilli Jacques, frère de Jean (1654–1705), 516  
 Birkhoff George David (1884–1944), 113  
 Bohr Niels (1885–1962), 3  
 Boltzmann Ludwig (1844–1906), 415  
 Brahé Tycho (1546–1601), 154
- Cavendish Henry (1731–1810), 317  
 Chardin J.S. (1699–1779), 468  
 Copernic Nicolas (1473–1543), 154  
 Coriolis Gaspard (1792–1843), 228  
 Coulomb C.-A. (1736–1806), 317  
 Curie Pierre (1859–1906), 458
- Descartes René (1596–1650), 247
- Einstein Albert (1879–1955), 18, 485, 599  
 von Eötvös Roland (1848–1919), 496  
 Euler Leonhard (1707–1783), 208, 461
- Fizeau Hippolyte (1819–1896), 597  
 Foucault Léon (1819–1868), 493
- Galileo Galilei, dit Galilée (1564–1642), 139  
 Gauss Carl Friedrich (1777–1825), 16  
 Guldin (1577–1649), 96
- Hamilton William R. (1805–1865), 665  
 Heisenberg Werner (1901–1976), 4  
 von Helmholtz (1821–1894), 370  
 Hooke Robert (1635–1703)  
 Huygens (1629–1695), 143
- Joule James Prescott (1818–1889), 379
- Kant Emmanuel (1724–1804), 16  
 Kepler Johannes (1571–1630), 155  
 König Johann Samuel (1712–1757), 297
- Lagrange Louis de (1736–1813), 368, 647  
 Laplace Pierre Simon (1749–1827), 19  
 Lavoisier Antoine (1743–1794), 247  
 Legendre A.M. (1752–1833), 664  
 Leibniz Gottfried Wilhelm (1646–1716), 110  
 Lejeune-Dirichlet G. (1805–1859), 509  
 Lennard-Jones (1894–1954), 324  
 Leonard de Vinci (1452–1519), 81  
 Lorentz H. (1853–1928), 321
- Mach Ernst (1838–1916), 262  
 Magnus H.-G. (1802–1870), 333  
 Maxwell James Clerk (1831–1879), 17  
 Michelson Albert (1852–1931), 17  
 Minkowski Hermann (1864–1909), 18
- Newcomb Simon (1835–1909), 465  
 Newton Isaac (1642–1727), 257  
 Noether Emmy (1882–1935), 661
- Pappus (III<sup>e</sup> s. ap. J.-C.), 96  
 Pauli W. (1900–1958), 49  
 Picard Jean (1620–1682), 171  
 Planck Max (1858–1947), 308  
 Poincaré Henri (1854–1912), 275  
 Poisson Denis (1781–1840), 207  
 Ptolémée (II<sup>e</sup> s. av. J.-C.), 64  
 Pythagore (VI<sup>e</sup> s. av. J.-C.), 7
- Ramuz Charles-F. (1878–1947), 15  
 Reynolds Osborne (1842–1912), 36  
 Rutherford Ernest (1871–1937), 48, 567
- Saint Augustin (354–430), 15  
 Steiner Jakob (1796–1863), 439  
 Stevin (1548–1620), 71

Stokes (1819–1903), 325

Tesla N. (1856–1943), 318

Thompson J.J. (1856–1940), 47

Torricelli E. (1608–1647), 510

Van der Waals (1837–1923), 324

Watt James (1736–1819), 379

Wigner Eugene (1902–1994), 5

Wilberforce Lionel Robert (1861–1944), 404

Young Thomas (1773–1829), 366

Zénon d'Élée (~ 460 av. J.-C.)

Dans la même collection:

**Abrégé de biophysique des radiations**

Guelfo Poretti

**Mécanique quantique**

Constantin Piron

**Introduction au génie nucléaire**

Jacques Ligou

**Problèmes à N-corps et champs quantiques**

Philippe A. Martin et François Rothen

**Introduction à la physique des solides**

Emanuel Mooser

**Cristallographie**

Dieter Schwarzenbach

*Illustration de couverture:* Comète Hale-Bopp

Photographie de E. et D. Pasche, prise à l'Isle (Suisse) le 30 mars 1997 à 22 h 30  
(document fourni par J. Thurnheer)

Les Presses polytechniques et universitaires romandes sont une fondation scientifique dont le but est principalement la diffusion des travaux de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, d'autres universités francophones ainsi que des écoles techniques supérieures. Le catalogue de leurs publications peut être obtenu par courrier aux Presses polytechniques et universitaires romandes, EPFL – Centre Midi, CH-1015 Lausanne, par E-Mail à [ppur@epfl.ch](mailto:ppur@epfl.ch), par téléphone au (0)21 693 41 40, ou par fax au (0)21 693 40 27.

**Vous pouvez consulter notre catalogue général sur notre serveur Internet**

**<http://sente.epfl.ch/webs/ppur/>**

© 1988, première édition, Presses polytechniques romandes

© 1998, **nouvelle édition revue et augmentée**, Presses polytechniques et universitaires romandes

CH – 1015 Lausanne

ISBN 2-88074-305-2



Imprimé en Suisse

Tous droits réservés.

Reproduction, même partielle, sous quelque forme

ou sur quelconque support que ce soit, interdite sans l'accord écrit de l'éditeur.