



SCIENCES SUP

Rappels de cours, méthodes, exemples et exercices corrigés

Licence • IUT

MANUEL DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

*Guy Chateigner
Michel Boës
Daniel Bouix
Jacques Vaillant
Daniel Verkindère*

DUNOD

MANUEL DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

Rappels de cours,
méthodes, exemples
et exercices corrigés

Guy Chateigner

Daniel Bouix

Professeurs de Génie Électrique
au lycée Jules Algoud (Valence)

Michel Boës

Jacques Vaillant

Daniel Verkindère

Professeurs de Physique Appliquée
au lycée Jules Algoud (Valence)

DUNOD

Consultez nos catalogues sur le Web



www.dunod.com

Illustration de couverture : *Digital Vision*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



Tirage corrigé 2007
© Dunod, Paris, 2006
ISBN 978-2-10-048499-7

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

AVANT-PROPOS	X
GRANDEURS – UNITÉS – PRÉFIXES SI	XI
PARTIE 1 • ÉLECTRICITÉ ET SIGNAUX	
CHAPITRE 1 • QU'EST-CE QUE L'ÉLECTRICITÉ ?	2
1.1 Particules, charges électriques et porteurs de charges	2
1.2 Phénomène de conduction : le courant électrique	4
1.3 Potentiel électrique d'une charge	9
CHAPITRE 2 • LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRICITÉ	12
2.1 Les dipôles	12
2.2 Théorèmes sur les circuits électriques	19
CHAPITRE 3 • ÉLECTROSTATIQUE	29
3.1 Champs électrique et d'induction électrique	29
3.2 Potentiel électrique	33
3.3 Principe des condensateurs	35
CHAPITRE 4 • ÉLECTROMAGNÉTISME – FERROMAGNÉTISME	39
4.1 Excitation magnétique	39
4.2 Induction magnétique	44
4.3 Milieux amagnétiques	44
4.4 Milieux ferromagnétiques	45
4.5 Flux d'induction magnétique	47
4.6 Réductance \mathfrak{R} d'un C.M.P.	48
4.7 Flux d'auto-induction	50
4.8 Circuits à flux variable	52

CHAPITRE 5 • RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT MONOPHASÉ – ÉTUDE EN FRÉQUENCE	54
5.1 Caractéristiques d'une grandeur sinusoïdale	54
5.2 Régime sinusoïdal permanent : Méthodes de calculs	56
5.3 Impédance et admittance complexes d'un dipôle	61
5.4 Puissances – Facteur de puissance	62
5.5 Facteur de qualité – Transformation série ↔ parallèle	67
5.6 Circuits résonants	69
5.7 Étude en fréquence – Fonction de transfert complexe	71
CHAPITRE 6 • RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT TRIPHASÉ	78
6.1 Installation triphasée – Définitions	78
6.2 Couplages	82
6.3 Puissances – Facteur de puissance	84
CHAPITRE 7 • RÉGIME VARIABLE – VALEURS MOYENNE ET EFFICACE	87
7.1 Régime variable	87
7.2 Valeur moyenne	88
7.3 Valeur efficace	89
7.4 Décomposition d'un signal périodique	91
7.5 Caractérisation d'un signal	92
CHAPITRE 8 • RÉGIME PÉRIODIQUE – SÉRIES DE FOURIER	95
8.1 Séries de Fourier	95
8.2 Régime périodique – Interprétation physique	99
8.3 Représentations graphiques – Spectres	105
8.4 Quelques signaux classiques	109
CHAPITRE 9 • ÉTUDE TEMPORELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE	112
9.1 Système linéaire	112
9.2 Principe général de l'étude temporelle	113
9.3 Système linéaire du premier ordre	116
9.4 Système linéaire du deuxième ordre	126
CHAPITRE 10 • ÉTUDE SYMBOLIQUE – TRANSFORMÉE DE LAPLACE	135
10.1 Causalité	135
10.2 Impulsion unité ou distribution de Dirac	137
10.3 Transformée de Laplace	140
10.4 Principes de l'étude symbolique d'un système linéaire	150
10.5 Système linéaire du premier ordre	158
10.6 Système linéaire du deuxième ordre	163

PARTIE 2 • COMPOSANTS ÉLECTRONIQUES

CHAPITRE 11 • RÉSISTANCES	168
11.1 Modèle de base	168
11.2 Limites et imperfections	170
11.3 Résistances variables et ajustables – Potentiomètres	173

CHAPITRE 12 • CONDENSATEURS	175
12.1 Modèle de base	175
12.2 Limites et imperfections	180
CHAPITRE 13 • BOBINES NON-COUPLÉES	184
13.1 Modèle de base	184
13.2 Limites et imperfections	189
CHAPITRE 14 • BOBINES COUPLÉES	194
14.1 Modèle de base	194
14.2 Limites et imperfections	201
CHAPITRE 15 • TRANSFORMATEURS	203
15.1 Introduction	203
15.2 Transformateur parfait (T.P.)	204
15.3 Transformateur sans fuite ni perte (T.S.F.P.)	207
15.4 Transformateur avec fuites et « pertes cuivre »	207
15.5 Transformateur avec fuites magnétiques, « pertes cuivre » et « pertes fer »	210
15.6 Transformateur dans l'hypothèse de Kapp	210
15.7 Transformateur réel – Effets non-linéaires	211
CHAPITRE 16 • DIODES	214
16.1 Diodes à jonction PN	214
16.2 Particularités de certaines diodes	223
CHAPITRE 17 • TRANSISTORS BIPOLAIRES	228
17.1 Symboles – Constitution	228
17.2 Transistor NPN	229
17.3 Transistor PNP	242
17.4 Transistors particuliers	242
CHAPITRE 18 • TRANSISTORS MOS	245
18.1 Symboles – Constitution	245
18.2 MOSFET canal N à enrichissement	246
18.3 MOSFET canal P à enrichissement	257
18.4 MOSFET à appauvrissement	258
18.5 L ² FET (Logic Level FET)	259
18.6 MOSFET à mesure de courant (SensorFET)	259
18.7 FREDFET (Fast Recovery Epitaxial Diode FET)	261
18.8 I.G.B.T.	261
CHAPITRE 19 • THYRISTORS	262
19.1 S.C.R. (redresseurs commandés)	262
19.2 G.T.O. Thyristors	267
19.3 TRIAC	267
19.4 DIAC	271
19.5 Contraintes de mise en œuvre des S.C.R. et TRIAC	272

CHAPITRE 20 • PHOTOCOMPOSANTS	277
20.1 Généralités	277
20.2 Diodes électroluminescentes (ou LED)	281
20.3 Diodes LASER	284
20.4 Photodiodes	285
20.5 Phototransistors	289
20.6 Photopiles ou piles solaires	290
20.7 Photocoupleurs	290
CHAPITRE 21 • AMPLIFICATEURS OPÉRATIONNELS	291
21.1 Symboles – Constitution	291
21.2 Modèle élémentaire – Modèle parfait	292
21.3 Limites et imperfections	293
CHAPITRE 22 • COMPAREURS ANALOGIQUES	301
22.1 Symboles - Description	301
22.2 Modèle élémentaire – Modèle parfait	302
22.3 Limites et imperfections	303
CHAPITRE 23 • DISSIPATION THERMIQUE	306
23.1 Analogie électrique du modèle thermique	306
23.2 Chaîne de dissipation thermique	307
23.3 Modèle thermique statique (ou continu)	307
23.4 Modèle thermique dynamique (ou transitoire)	308
23.5 Plusieurs composants sur un même refroidisseur	313

PARTIE 3 • ÉLECTRONIQUE DU SIGNAL

CHAPITRE 24 • FILTRAGE ANALOGIQUE	316
24.1 Fonction – Filtres idéaux	316
24.2 Fonctions de transfert élémentaires	317
24.3 Approximation des filtres analogiques idéaux	327
24.4 Fréquence d'échantillonnage – Filtre anti-repliement	331
CHAPITRE 25 • AMPLIFICATION ET OPÉRATIONS ANALOGIQUES	333
25.1 Généralités – Définitions	333
25.2 Amplification en tension	337
25.3 Amplification en courant	340
25.4 Conversion courant-tension (transimpédance)	341
25.5 Conversion tension-courant (transadmittance)	342
25.6 Amplification différentielle	344
25.7 Amplification de puissance	348
25.8 Adaptation d'impédance	353
25.9 Autres opérations analogiques sur les signaux	355

CHAPITRE 26 • CONDITIONNEMENT DES SIGNAUX	363
26.1 Introduction	363
26.2 Calcul différentiel – Sensibilité	364
26.3 Petites variations – Calcul approché	365
26.4 Erreurs – Incertitudes – Tolérances	367
26.5 Calibration	371
CHAPITRE 27 • SYSTÈMES BOUCLÉS : CONTRE RÉACTION – OSCILLATEURS	374
27.1 Principe des systèmes bouclés : la réaction	374
27.2 La contre-réaction appliquée à l'amplification	379
27.3 Oscillateurs sinusoïdaux	384
CHAPITRE 28 • COMPARAISON ANALOGIQUE	392
28.1 Comparaison	392
28.2 Comparaison à hystérésis	394
28.3 Comparaison à fenêtre	397
CHAPITRE 29 • GÉNÉRATION DE SIGNAUX « TOUT OU RIEN » (TOR)	400
29.1 Monostable	400
29.2 Astable	402
29.3 Retard – Temporisation	405
29.4 Conduite du raisonnement dans deux cas usuels	409
CHAPITRE 30 • CONVERSIONS NUMÉRIQUE ANALOGIQUE ET ANALOGIQUE NUMÉRIQUE	412
30.1 Définitions	412
30.2 C.N.A.	413
30.3 C.A.N.	415
30.4 Codes utilisés dans les C.N.A. et C.A.N.	416
30.5 Spécifications des C.N.A. et C.A.N.	421

PARTIE 4 • ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE

CHAPITRE 31 • REDRESSEMENT NON COMMANDÉ	428
31.1 Redressement monophasé simple alternance	429
31.2 Redressement monophasé double alternance	433
31.3 Redressement triphasé simple alternance	438
31.4 Redressement triphasé double alternance en pont	440
31.5 Principales caractéristiques des montages	443
CHAPITRE 32 • REDRESSEMENT COMMANDÉ	444
32.1 Redressement monophasé simple alternance	445
32.2 Redressement monophasé double alternance	449
32.3 Redressement triphasé simple alternance	458
32.4 Redressement triphasé double alternance	463
32.5 Facteur de puissance d'un redresseur	469
32.6 Critères de choix	471

CHAPITRE 33 • HACHEURS	472
33.1 Hacheur série ou dévolteur	472
33.2 Hacheur parallèle ou survolteur	477
33.3 Hacheur à accumulation inductive	484
33.4 Hacheur deux quadrants ou en demi-pont	485
33.5 Hacheur quatre quadrants ou en pont	488
CHAPITRE 34 • ALIMENTATIONS À DÉCOUPAGE	492
34.1 Convertisseurs sans isolation galvanique	492
34.2 Convertisseurs avec isolation galvanique	501
CHAPITRE 35 • RELAIS STATIQUES – GRADATEURS	512
35.1 Relais statiques	512
35.2 Gradateurs	523
CHAPITRE 36 • ONDULEURS AUTONOMES	528
36.1 Principe de base en monophasé	528
36.2 Principe d'un onduleur de tension en pont	529
36.3 Principe d'un onduleur triphasé	542

PARTIE 5 • MACHINES ÉLECTRIQUES

CHAPITRE 37 • ÉNERGÉTIQUE (CHARGES – COMPARAISON DES MOTEURS)	544
37.1 Bilan énergétique	544
37.2 Travail d'une force – Travail d'un couple	546
37.3 Équation de la dynamique	548
37.4 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe	549
37.5 Caractéristiques idéales de charges	551
37.6 Comparaison des moteurs	552
CHAPITRE 38 • TRANSFORMATEURS EN RÉGIME SINUSOÏDAL À FRÉQUENCE CONSTANTE	553
38.1 Utilisation – Schéma de principe – Fonctionnement	553
38.2 Transformateur parfait (T.P.)	554
38.3 Transformateur réel	555
38.4 Transformateur triphasé	557
CHAPITRE 39 • CHAMPS TOURNANTS	561
39.1 Organisation des machines tournantes alternatives	561
39.2 Distribution du champ magnétique dans l'entrefer	562
39.3 Création d'un champ tournant	565
39.4 Cas d'un enroulement monophasé	568
39.5 Cas d'un enroulement diphasé	568

CHAPITRE 40 • MACHINES SYNCHRONES TRIPHASÉES	569
40.1 Constitution – Principe – Excitation	569
40.2 Alternateur triphasé	571
40.3 Moteur synchrone	578
40.4 Moteur « brushless » ou à commutation électronique	579
40.5 Utilisation des machines synchrones	583
CHAPITRE 41 • MOTEURS ASYNCHRONES TRIPHASÉS	584
41.1 Constitution – Fonctionnement – Glissement	584
41.2 Bilan des puissances – Rendement	586
41.3 Modèle et caractéristiques	587
41.4 Démarrage	589
41.5 Réglage de la vitesse	590
41.6 Réversibilité et freinage	590
41.7 Moteur asynchrone monophasé	590
CHAPITRE 42 • MOTEURS PAS À PAS	591
42.1 Principe et définitions	591
42.2 Propriétés	595
42.3 Étage de puissance	595
42.4 Régimes statique et dynamique	596
42.5 Utilisation	598
CHAPITRE 43 • MACHINES À COURANT CONTINU	599
43.1 Principes généraux	599
43.2 Moteur à excitation indépendante ou séparée	603
43.3 Moteur à excitation série	605
INDEX	608



Avant-propos

Cet ouvrage réunit aide-mémoire et méthodes du génie électrique en 43 chapitres thématiques organisés en cinq parties :

- l'électricité et les signaux (phénomènes physiques, lois de l'électricité, régime sinusoïdal, régime périodique, réponses fréquentielles et temporelles, etc.) ;
- les composants électroniques (de la résistance à l'amplificateur opérationnel en passant par les bobines couplées, les thyristors et les photocomposants : leurs modèles et leurs limites, la dissipation thermique) ;
- l'électronique du signal (filtrage, amplification, conversion analogique numérique et numérique analogique, etc.) ;
- l'électronique de puissance (redressement, hacheurs, alimentations à découpage, gradateurs, onduleurs) ;
- les machines électriques (transformateurs, moteurs : synchrones, asynchrones, pas à pas, courant continu).

De nombreux exemples sont présentés sous la forme de questions-réponses.

Cet ouvrage a été conçu pour guider chaque étudiant, pour l'accompagner dans ses études après le bac. Il fait le lien entre les savoirs de l'enseignement secondaire et de l'enseignement supérieur. Plusieurs niveaux de lecture sont possibles. De nombreuses formulations sont compréhensibles dès la fin d'une terminale ou le début d'un premier cycle ; d'autres dévoileront leur intérêt par la suite.

Cet ouvrage s'adresse :

- aux étudiants des IUT, des BTS, des classes préparatoires, des écoles d'ingénieurs, des IUFM, dans les filières de génie électrique, GTR, électronique, électrotechnique, et d'informatique industrielle ;
- aux auditeurs libres de la formation continue pour qui la formation en autonomie est une nécessité ;
- aux professionnels en activité à la recherche de modèles et de méthodes de raisonnement.

Les auteurs

Grandeurs – Unités – Préfixes SI

- *Grandeurs et unités usuelles*

Grandeur		Unité	
Symbole	Nom	Symbole	Nom
a	Accélération	m/s ²	mètre par seconde carrée
B	Induction magnétique	T	tesla
C	Capacité électrique	F	farad
C _{Th} , C _θ	Capacité thermique	J/K	joule par kelvin
E	Champ électrique	V/m	volt par mètre
f	Fréquence	Hz	hertz
F	Force	N	newton
ε	Force magnéto-motrice	A	ampère
ε	Permittivité diélectrique	F/m	farad par mètre
G	Conductance électrique	S	siemens
H	Excitation magnétique	A/m	ampère par mètre
i, I	Courant électrique	A	ampère
ℓ, L	Longueur	m Å	mètre angström (1Å = 10 ⁻¹⁰ m)
L	Inductance propre	H	henry
m	Masse	kg	kilogramme
μ	Perméabilité magnétique	H/m	henry par mètre
M	Moment d'une force	Nm	newton-mètre

Grandeur		Unité	
Symbole	Nom	Symbole	Nom
M	Mutuelle inductance	H	henry
p, P	Puissance, flux thermique	W	watt
q, Q	Quantité d'électricité, charge électrique	C	coulomb
Q	Puissance réactive	var	volt-ampère-réactif
r, R	Résistance électrique	Ω	ohm
R_{Th} , R_{θ}	Résistance thermique	K/W	kelvin par watt
S	Surface	m ²	mètre carré
S	Puissance apparente	VA	volt-ampère
t	Temps	s	seconde
T, θ	Température	K °C	kelvin degré Celsius
u, U	Différence de potentiel, tension	V	volt
v, V	Potentiel électrique	V	volt
v	Vitesse	m/s	mètre par seconde
w, W	Énergie, travail, quantité de chaleur	J	joule
α	Accélération angulaire	rad/s ²	radian par seconde carrée
φ , Φ	Flux d'induction magnétique	Wb	weber
λ	Longueur d'onde	m	mètre
ω	Vitesse angulaire - Pulsation	rad/s	radian par seconde

• *Préfixes des unités du système international*

Préfixe		Facteur multiplicatif
Symbole	Nom	
E	exa	10 ¹⁸
P	peta	10 ¹⁵
T	téra	10 ¹²
G	giga	10 ⁹
M	méga	10 ⁶
k	kilo	10 ³
h	hecto	10 ²
da	déca	10 ¹

Préfixe		Facteur multiplicatif
Symbole	Nom	
d	déci	10 ⁻¹
c	centi	10 ⁻²
m	milli	10 ⁻³
μ	micro	10 ⁻⁶
n	nano	10 ⁻⁹
p	pico	10 ⁻¹²
f	femto	10 ⁻¹⁵
a	atto	10 ⁻¹⁸

• **Décibels.** On peut exprimer le rapport de deux grandeurs, soit par un simple quotient, soit par le logarithme de ce quotient. Le plus souvent, on utilise le logarithme décimal, noté \log_{10} ou plus simplement \log .

- Le rapport des puissances p_2 sur p_1 , exprimé en bels (B), de Graham Bell (1847-1922), est défini par :

$$\log \left| \frac{p_2}{p_1} \right|$$

- Le rapport des puissances p_2 sur p_1 , exprimé en décibels (dB), est défini par :

$$10 \log \left| \frac{p_2}{p_1} \right| \quad \text{avec} \quad 1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$$

En considérant que p_2 et p_1 sont les puissances dissipées dans deux résistances égales à R_0 , on a :

$$p_1 = \frac{u_1^2}{R_0} = R_0 i_1^2 \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{u_2^2}{R_0} = R_0 i_2^2$$

$$\Rightarrow 10 \log \left| \frac{p_2}{p_1} \right| = 20 \log \left| \frac{u_2}{u_1} \right| = 20 \log \left| \frac{i_2}{i_1} \right|$$

- En conséquence et par extension, le rapport des tensions u_2 sur u_1 , et le rapport des intensités des courants i_2 sur i_1 , exprimés en décibels (dB), sont définis par :

$$20 \log \left| \frac{u_2}{u_1} \right| \quad \text{et} \quad 20 \log \left| \frac{i_2}{i_1} \right|$$

Les définitions précédentes donnent des niveaux relatifs de p_2 par rapport à p_1 , de u_2 par rapport à u_1 , et de i_2 par rapport à i_1 . Pour obtenir des niveaux absolus, il faut fixer conventionnellement des valeurs de références.

- Pour une puissance de référence de 1 W, la puissance $p = p(t)$, exprimée en décibels par rapport à 1 W (dBW), est définie par :

$$p_{\text{(dBW)}} = 10 \log \frac{|p_{\text{(W)}}|}{1_{\text{(W)}}} = 10 \log |p_{\text{(W)}}|$$

- Pour une puissance de référence de 1 mW, la puissance $p = p(t)$, exprimée en décibels par rapport à 1 mW (dBm), est définie par :

$$p_{\text{(dBm)}} = 10 \log \frac{|p_{\text{(W)}}|}{10^{-3}_{\text{(W)}}} = 10 \log \frac{|p_{\text{(mW)}}|}{1_{\text{(mW)}}} = 10 \log |p_{\text{(mW)}}|$$

- Pour une tension de référence de 1 V, la tension $u = u(t)$, exprimée en décibels par rapport à 1 V (dBV), est définie par :

$$u_{(\text{dBV})} = 20 \log \frac{|u_{(\text{V})}|}{1_{(\text{V})}} = 20 \log |u_{(\text{V})}|$$

- Relation entre dBm et dBV. Soit u la tension aux bornes d'une résistance R_0 , la puissance dissipée est $p = u^2/R_0$. D'où :

$$p_{(\text{dBm})} = u_{(\text{dBV})} - 10 \log \frac{R_0}{1\,000} \implies P_{\text{Moy (dBm)}} = U_{\text{Eff (dBV)}} - 10 \log \frac{R_0}{1\,000}$$

$$R_0 = 600 \, \Omega \implies p_{(\text{dBm})} \approx u_{(\text{dBV})} + 2,22$$

$$R_0 = 50 \, \Omega \implies p_{(\text{dBm})} \approx u_{(\text{dBV})} + 13,01$$

- Pour une tension de référence de $\sqrt{0,6} \, \text{V} \approx 0,775 \, \text{V}$, la tension $u = u(t)$, exprimée en décibels par rapport à $\sqrt{0,6} \, \text{V} \approx 0,775 \, \text{V}$ (dBu), est définie par :

$$u_{(\text{dBu})} = 20 \log \frac{|u_{(\text{V})}|}{\sqrt{0,6}_{(\text{V})}} \approx 20 \log \frac{|u_{(\text{V})}|}{0,775_{(\text{V})}}$$

Remarque : En téléphonie, l'impédance de référence a été historiquement définie comme étant une résistance pure de $600 \, \Omega$ en Europe ($900 \, \Omega$ aux États-Unis) qui correspond grossièrement à l'impédance moyenne d'une ligne d'abonné dans la bande passante de fréquence allant de 300 Hz à 3 400 Hz. Pour une puissance de référence de 1 mW, on obtient alors une tension efficace de référence de $\sqrt{0,6} \, \text{V} \approx 0,775 \, \text{V}$; d'où la définition du dBu.

- Relation entre dBm et dBu. Soit u la tension aux bornes d'une résistance R , la puissance dissipée est $p = u^2/R$. D'où :

$$p_{(\text{dBm})} = u_{(\text{dBu})} - 10 \log \frac{R}{600} \implies P_{\text{Moy (dBm)}} = U_{\text{Eff (dBu)}} - 10 \log \frac{R}{600}$$

$$R = 600 \, \Omega \implies p_{(\text{dBm})} = u_{(\text{dBu})}$$

$$R = 150 \, \Omega \implies p_{(\text{dBm})} \approx u_{(\text{dBu})} + 6,02$$

- Relation entre dBu et dBV.

$$u_{(\text{dBu})} \approx u_{(\text{dBV})} + 2,22$$

PARTIE 1

Électricité et signaux

Chapitre 1

Qu'est-ce que l'électricité ?

1.1 PARTICULES, CHARGES ÉLECTRIQUES ET PORTEURS DE CHARGES

(Compléments, voir Chapitre 3 : Électrostatique)

1.1.1 Particules et charges électriques (Fig. 1.1)





Particules	Masses	Charges électriques en coulombs (C)	Remarques
Électron 	$m_e \approx 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$q_e = -e \approx -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse très petite. Charge électrique négative.
Proton 	$m_p \approx 16726 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$q_p = +e \approx +1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	Masse 1836,15 fois plus grande que celle de l'électron. Charge électrique positive.
Neutron 	$m_n \approx 16749 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	charge électrique nulle	Il assure la stabilité des noyaux atomiques; il est présent dans tous, sauf dans l'hydrogène. Masse 1838,68 fois plus grande que celle de l'électron.
Photon 	masse nulle	charge électrique nulle	Corpuscule de lumière, il se déplace dans le vide à la célérité : $c \approx 299792 \text{ km/s}$

Fig. 1.1 Électron – Proton – Neutron – Photon

Après la découverte de l'électron, de nombreuses particules ont été mises en évidence : les protons et neutrons qui composent le noyau de l'atome, les photons qui composent la lumière et toutes celles qui sont issues de la fission des noyaux atomiques : neutrinos, muons, kaons, gluons, etc. (une centaine environ).

1.1.2 Forces électrostatiques : Loi de Coulomb

- *Attraction et répulsion de deux charges électriques (Fig. 1.2).*

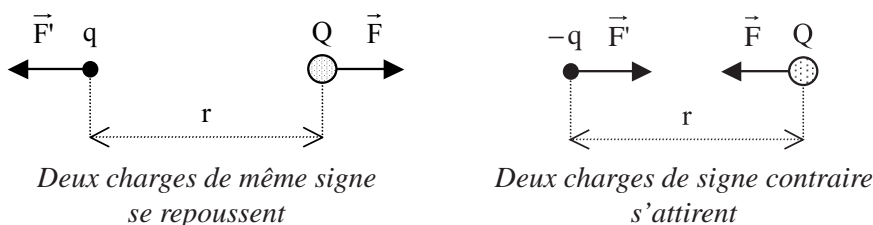


Fig. 1.2 Attraction et répulsion de deux charges électriques

- *Module des forces d'attraction et de répulsion.* Exprimé en newton (N), il est donné par la *loi de Coulomb* :

$$F = F' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r^2} \quad \text{Unités :} \quad N = \frac{1}{\text{F/m}} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}^2}{\text{Fm}}$$

où ϵ est la permittivité absolue du milieu. Dans le vide (et quasiment dans l'air sec) :

$$\epsilon = \epsilon_0 \approx 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Remarque : La théorie de la propagation des ondes électromagnétiques montre que les constantes ϵ_0 (permittivité du vide), μ_0 (perméabilité magnétique du vide) et c (vitesse de la lumière dans le vide) sont liées par la relation : $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Depuis que la vitesse de la lumière dans le vide est devenue une référence, la permittivité du vide est devenue une constante exacte définie par :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

avec

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \text{ (ou H/m)}$$

1.1.3 Champ électrique

La force \vec{F} qui agit sur la charge Q , résulte de l'action à distance de la charge q . Cette interprétation conduit à une nouvelle écriture de la *loi de Coulomb* :

$$\vec{F} = Q \vec{E} \quad \text{Unités : } N = C \frac{V}{m}$$

où l'intensité E , du vecteur champ électrique \vec{E} , est :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \quad \text{Unités : } V/m = \frac{1}{F/m} \frac{C}{m^2} = \frac{C}{Fm}$$

La charge Q , permet de détecter la présence d'un champ électrique (Fig. 1.3).

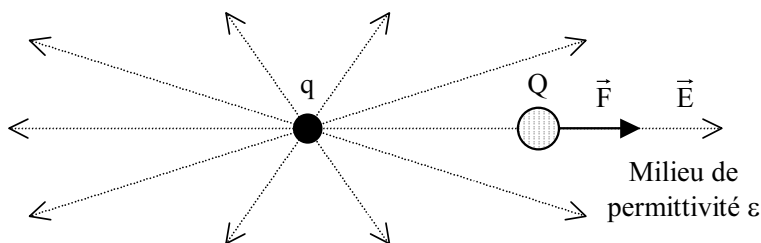


Fig. 1.3 Champ électrique dû à la charge q

1.2 PHÉNOMÈNE DE CONDUCTION : LE COURANT ÉLECTRIQUE

1.2.1 Le courant électrique

• **Courant électrique.** Les charges électriques, soumises à un champ électrique, subissent des forces électrostatiques : elles se déplacent. Le flux de charges à travers une surface S s'appelle *l'intensité du courant électrique*. On le note i et son unité est l'ampère (A).

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{Unités : } A = \frac{C}{s}$$

Remarque : Si le flux de charges est constant, on a : $I = \Delta Q / \Delta t$

• **Densité moyenne de courant.** On associe à cette grandeur fondamentale, la densité moyenne de courant rapportée à l'unité de surface, notée J :

$$J = \frac{I}{S} \quad \text{Unités : } A/m^2 = \frac{A}{m^2}$$

Question : Sachant qu'un conducteur de cuivre nu supporte approximativement une densité de courant $J = 5 \text{ A/mm}^2$, évaluer la section minimale S_{Min} des conducteurs nécessaire à l'alimentation d'une cuisinière électrique traversée par un courant nominal $I_{\text{Nom}} = 30 \text{ A}$.

Réponse : $S_{\text{Min}} = I_{\text{Nom}}/J = 6 \text{ mm}^2$

• Vitesse des charges – Loi d'Ohm

- Dans le vide, sous l'effet des forces électrostatiques, les charges atteignent couramment des vitesses de l'ordre de plusieurs milliers de m/s (tubes cathodiques).
- Dans la matière, en raison de la difficulté à se frayer un chemin entre les atomes ou molécules, les porteurs de charges, soumis à l'agitation thermique, atteignent rapidement une vitesse limite très faible de l'ordre de quelques mm/s (Cuivre).

C'est la loi d'Ohm qui traduit cette vitesse limite par l'intermédiaire de \vec{j} .

1) Sous forme microscopique (\vec{j} est la densité de courant et σ la conductivité du matériau) :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{Unités : } \text{A/m}^2 = (\Omega^{-1} \text{m}^{-1}) (\text{V/m})$$

2) Sous forme macroscopique (I est l'intensité du courant, U la tension aux bornes du conducteur, ℓ est la longueur du conducteur, S sa section et $\rho = 1/\sigma$ la résistivité du matériau) :

$$I = SJ = S\sigma E = S\sigma \frac{U}{\ell} = \frac{S\sigma}{\ell} U = \frac{U}{R}$$

La loi d'Ohm s'écrit alors :

$$U = RI$$

$$\text{Unités : } V = \Omega A \quad \text{avec}$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S} = \rho \frac{\ell}{S}$$

Remarque : Pour qu'il y ait un courant I , il faut que le milieu possède des charges libres (conductivité σ) soumises à un champ électrique \vec{E} (Fig. 1.4).

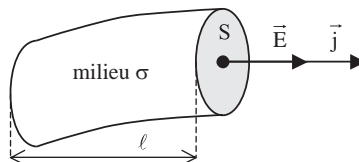


Fig. 1.4 Conduction électrique

1.2.2 Charges libres – Charges liées

Les atomes sont formés d'un noyau entouré d'un nuage électronique (Fig. 1.5).

Pour obtenir des charges électriques il faut arracher à l'atome un ou plusieurs électrons. Cela peut se faire de plusieurs manières :

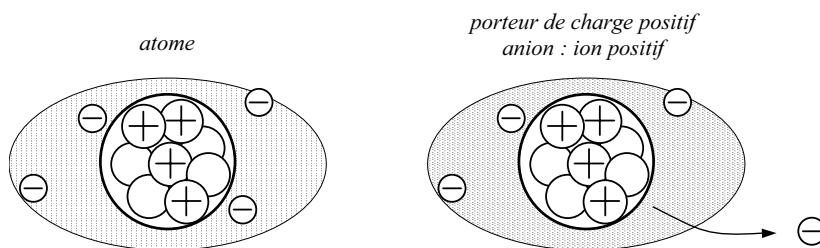


Fig. 1.5 Atome – Ion

1) Par apport d'une énergie extérieure.

- Mécaniquement par frottement : l'air sur la carrosserie d'une voiture.
- Électriquement : un champ électrique intense peut étirer un atome jusqu'à lui extraire un électron (diode Zener).
- Thermiquement : l'agitation thermique des atomes et molécules dans les gaz peut se traduire par l'ionisation de ceux-ci (plasma).

2) Par rapprochement des atomes (cristaux, polycristaux). Bien que les chaînes cristallines doivent leur cohésion à la mise en commun de leurs électrons, elles ne donnent pas toujours des matériaux conducteurs. On trouve : des conducteurs, des semi-conducteurs et des isolants.

1.2.3 Milieux électriques

• **Conducteurs.** Beaucoup d'électrons sont libres de se déplacer à l'intérieur du métal (Fig. 1.6).

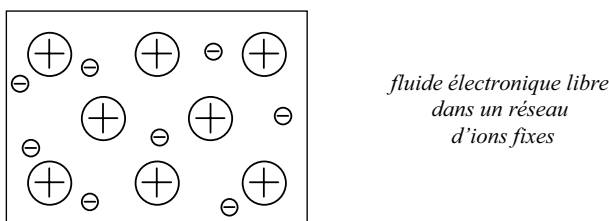


Fig. 1.6 Conducteurs

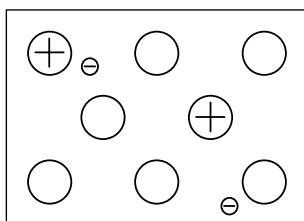
La conductivité d'un métal est grande. Cette conductivité s'exprime en fonction de la mobilité μ des porteurs et de leur concentration n .

$$\sigma = ne\mu \quad \text{Unités :} \quad \Omega^{-1}\text{m}^{-1} = \frac{1}{\text{m}^3} \text{C} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} = \frac{1}{\text{m}} \frac{\text{C}}{\text{Vs}} = \frac{1}{\text{m}} \frac{\text{A}}{\text{V}}$$

Exemple 1.2.1

Le cuivre a une conductivité $\sigma \approx 59 \cdot 10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$.

• **Semi-conducteurs.** Ce sont des monocristaux, extrêmement purs, dont quelques-uns seulement des atomes libèrent à la température ambiante ($T \approx 300 \text{ K}$) un électron, typiquement 1 électron pour plus de 100 millions d'atomes (Fig. 1.7). Les atomes des cristaux semi-conducteurs appartiennent à la colonne IV de classification périodique des éléments.



*fluide électronique et ionique
libre dans un réseau
d'atomes fixes*

Fig. 1.7 Semi-conducteurs intrinsèques

La conduction est assurée, à la fois par les électrons (porteurs négatifs) et les ions positifs qui donnent l'impression de se déplacer car, en raison de l'agitation thermique permanente, des électrons quittent un atome pour un ion, etc. On appelle ces ions positifs des *trous* (porteurs positifs). La conductivité du semi-conducteur est la somme de deux conductivités :

- La conductivité des porteurs positifs (faible) σ_p : les trous se déplacent moins facilement que les électrons.
- La conductivité des électrons (moins faible) σ_n .

Globalement la conductivité est bien plus faible que celle des métaux car les porteurs de charges sont peu nombreux (il y a autant de porteurs de charges positifs que négatifs).

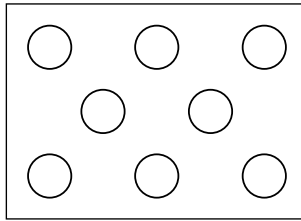
Question : Pour le silicium pur à température ambiante ($T \approx 300 \text{ K}$), on a :

$$\mu_n \approx 0,12 \text{ m}^2/\text{Vs}, \quad \mu_p \approx 0,05 \text{ m}^2/\text{Vs}, \quad \text{et} \quad n_p = n_n = n_i \approx 1,5 \cdot 10^{16} \text{ porteurs/m}^3.$$

Calculer la conductivité.

$$\text{Réponse : } \sigma = \sigma_n + \sigma_p = n_n e \mu_n + n_p e \mu_p \approx 4,08 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

• **Isolants.** Aucun électron libre à température ambiante ($T \approx 300 \text{ K}$), dans un isolant (Fig. 1.8). La conductivité est pratiquement nulle.



*Pas d'électron libre
dans un réseau
d'atomes fixes*

Fig. 1.8 Isolants

1.2.4 Influence de la température

● **Conducteurs.** L'agitation thermique augmente avec la température et rend plus difficile la circulation des charges électriques, de ce fait la conductivité des matériaux conducteurs diminue avec la température (σ_0 conductivité à 0 °C, θ température en °C, α coefficient de température négatif en °C⁻¹).

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \alpha\theta)$$

● **Semi-conducteurs.** Par contre, dans les matériaux semi-conducteurs à température ambiante, l'agitation thermique a une deuxième conséquence : elle crée de nouvelles charges libres (paires électrons-trous). D'où, à température moyenne, une propriété inverse de celle des conducteurs : La conductivité augmente de façon exponentielle avec la température.

- Pour le germanium la conductivité double tous les 10 °C environ.
- Pour le silicium la conductivité double tous les 6 °C environ.

Cette croissance exponentielle de la conductivité, transforme ces semi-conducteurs en conducteurs à environ 120 °C pour le germanium et 200 °C pour le silicium ! Les diodes, transistors et circuits intégrés perdent leurs propriétés spécifiques pour ces températures à ne jamais dépasser.

1.2.5 Influence de la fréquence – Effet pelliculaire dans un conducteur

Lorsque le courant est alternatif, les effets électromagnétiques chassent les charges du centre du conducteur, c'est ce que l'on appelle *l'effet de peau*. La densité de courant n'est plus uniforme : elle est plus élevée à la périphérie qu'au centre du conducteur (Fig. 1.9).

L'épaisseur de peau est définie par :

$$e = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \mu_r f \sigma}}$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m : perméabilité magnétique du vide, μ_r : perméabilité magnétique relative du matériau (sans unité), σ : conductivité du matériau en $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$, et f : fréquence en Hz.

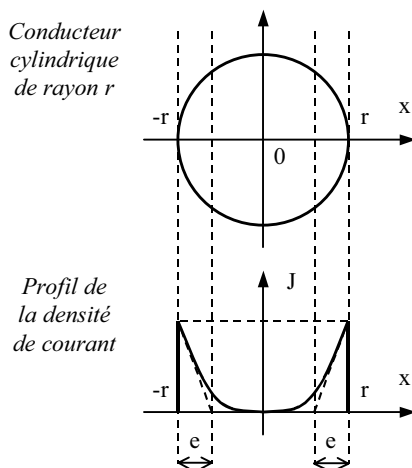


Fig. 1.9 Effet de peau dans un conducteur

Question : Calculer l'épaisseur de peau pour un conducteur en cuivre : ($\sigma \approx 59 \cdot 10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ et $\mu_r \approx 1$) à 50 Hz (réseau EDF).

Réponse : En appliquant la formule, on trouve $e \approx 9,2$ mm. Pour limiter cet effet, on réalise des conducteurs multibrins, et pour le transport d'énergie on utilise des conducteurs multicâbles. De même, les câbles haute-fidélité des enceintes sont multibrins.

Remarque : Plus la fréquence est élevée et plus l'épaisseur de peau diminue.

1.3 POTENTIEL ÉLECTRIQUE D'UNE CHARGE

(Compléments, voir Chapitre 3 : Électrostatique)

1.3.1 But

La charge étudiée q (Fig. 1.10) crée un champ électrique \vec{E} vectoriel. Par simplicité, on remplace ce champ électrique par une grandeur scalaire liée au travail qu'il faudrait fournir à une charge test Q pour l'amener de l'infini jusqu'à la distance r de la charge étudiée q . Cette grandeur s'appelle le *potentiel électrique* noté V .

Remarque : Ainsi défini, le potentiel à distance infinie est nul ; $V(\infty) = 0$.

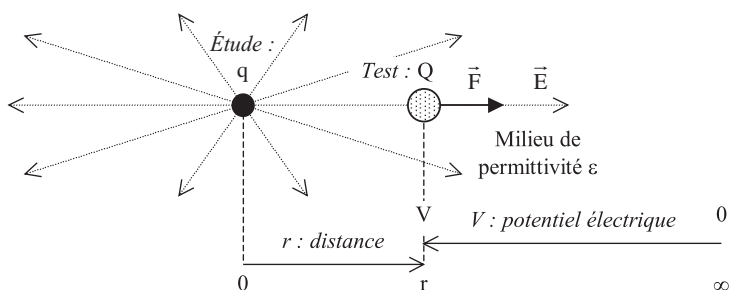


Fig. 1.10 Le potentiel électrique

1.3.2 Travail pour amener Q à distance r de q

- Travail élémentaire dW pour déplacer la charge Q de r à $r - dr$. La force F est supposée constante.

$$dW = -F dr = -QE dr \quad \text{Unités : } J = Nm = C \frac{V}{m}$$

- Travail $W_{A \rightarrow B}$ pour déplacer la charge Q d'une distance A à une distance B . En intégrant de A à B , on obtient :

$$W_{A \rightarrow B} = -Q \int_A^B E(r) dr \quad \text{Unités : } J = C \frac{V}{m}$$

En posant $dV = -E(r) dr$, l'intégrale s'écrit :

$$W_{A \rightarrow B} = Q \int_A^B dV = Q (V_B - V_A) \quad \text{Unités : } J = CV$$

- Travail $W_{\infty \rightarrow M}$ pour déplacer la charge Q de l'infini à M .

$$W_{\infty \rightarrow M} = Q \int_{\infty}^M dV = Q (V_M - V_{\infty}) = Q V_M \quad \text{Unités : } J = CV$$

1.3.3 Potentiel électrique

De ce qui précède, on déduit :

$$V_M = \frac{W_{\infty \rightarrow M}}{Q} \quad \text{Unités : } V = \frac{J}{C}, \quad \text{volt} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}}$$

La fonction $V_M(r)$ mesure le travail par unité de charge à fournir pour faire passer une charge de l'infini au point M (Fig. 1.11). On appelle V_M le *potentiel électrique* du point M , dû à la charge étudiée q .

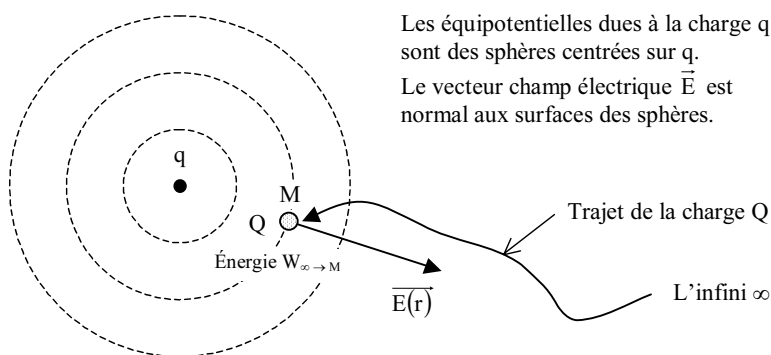


Fig. 1.11 Travail d'une force électrique

Remarques :

- Dès que la charge sera libérée de ses contraintes, elle retournera naturellement vers l'infini et restituera l'énergie qu'elle aura accumulée. Son potentiel sera nul.
- Le potentiel électrique $V_M(r)$ est une grandeur image de l'énergie potentielle électrique stockée par la charge Q , lorsqu'elle est située à distance r de la charge q : elle est indépendante de la charge Q ! C'est donc une notion fondamentalement énergétique.

1.3.4 Différence de potentiel (d.d.p.) électrique – Tension électrique

La circulation du courant dans un circuit ne peut avoir lieu que par un échange énergétique avec un milieu extérieur (Fig. 1.12). Ainsi, les porteurs de charges sont susceptibles de transférer une énergie $Q(V_B - V_A)$ vers le milieu extérieur. La d.d.p. est $V_B - V_A$ et la tension est $U_{BA} = V_B - V_A$.

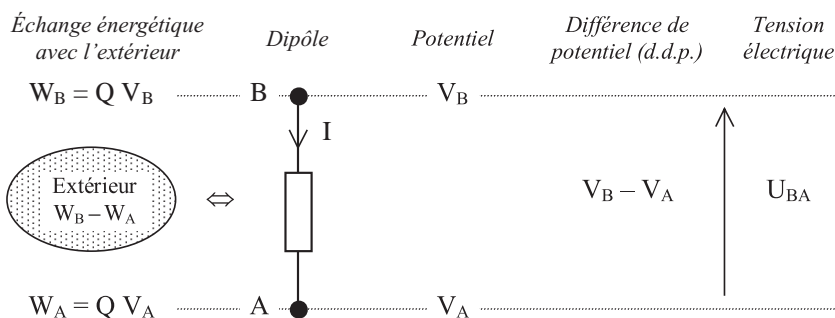


Fig. 1.12 Potentiel – d.d.p. – Tension

Remarque : Il faut imaginer qu'au cours du parcours du circuit électrique, les porteurs de charge voient leur potentiel (énergie) varier, en général diminuer.

Chapitre 2

Lois générales de l'électricité

2.1 LES DIPÔLES

2.1.1 Définition – Conventions

Un dipôle est un récepteur ou un générateur d'énergie électrique, susceptible de convertir l'énergie électrique en une énergie de type différent (chimique, mécanique, radiative, thermique). Il est relié à l'extérieur par deux bornes A et B (Fig. 2.1), le courant entrant par l'une est égal au courant sortant par l'autre. La tension u et le courant i sont des grandeurs algébriques.

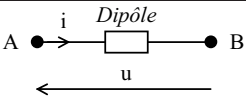
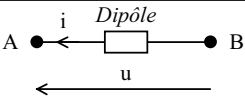
Convention récepteur	Convention générateur
	
La puissance (absorbée, transformée) est positive : $ui > 0$	La puissance (fournie, produite) est positive : $ui > 0$

Fig. 2.1 Conventions récepteur et générateur

2.1.2 Dipôle linéaire – Circuit linéaire

• **Dipôle linéaire.** Un dipôle de relation tension-courant $u = f(i)$ ou $i = g(u)$ est dit linéaire si, et seulement si, la fonction f ou g est linéaire, c'est-à-dire telle que :

$$f(\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2) = \alpha_1 f(i_1) + \alpha_2 f(i_2) \quad \text{ou} \quad g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2)$$

• **Circuit linéaire.** Si tous les dipôles constituant un circuit quelconque sont linéaires, alors l'équation permettant le calcul de la sortie $s = s(t)$ en fonction de l'entrée $e = e(t)$ est, dans le cas général, une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad (m \leq n)$$

On dit alors que le circuit est linéaire.

Exemple 2.1.1

La puissance $p = Ri^2$ est non linéaire car la fonction « carré » n'est pas linéaire, sa dérivée dp/di n'est pas indépendante de la valeur de i .

2.1.3 Dipôles élémentaires

a) Classification des dipôles

- Un *dipôle actif* est un dipôle susceptible de produire de l'énergie. *A contrario*, un *dipôle passif* ne peut pas produire de l'énergie.
- Un *dipôle symétrique* est un dipôle tel que :

$$f(i) = -f(-i) \quad \text{ou} \quad g(u) = -g(-u)$$

- *Dipôle linéaire* : voir § 2.1.2

b) Dipôles passifs

• **Éléments passifs linéaires** (Fig. 2.2). On adopte généralement la convention récepteur (u et i : flèches opposées), ce qui évite bien des erreurs.

Remarques :

- Pour un condensateur, la loi traduit le fait que le passage du courant i dans un condensateur, pendant un temps dt entraîne une variation de la tension électrique du qui va s'opposer à son passage. Cette loi s'écrit aussi sous forme intégrale :

$$u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t i \, d\tau + U_0 \quad \text{avec} \quad U_0 = u(t=0)$$

- Pour une bobine linéaire, la loi traduit la difficulté qu'a l'intensité du courant i à changer dans un circuit inductif. Cela se traduit par l'apparition d'une tension électrique qui s'oppose à la variation du courant ; c'est la loi de Lenz. Cette loi s'écrit aussi sous forme intégrale :

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u \, d\tau = \frac{1}{L} \int_0^t u \, d\tau + I_0 \quad \text{avec} \quad I_0 = i(t=0)$$

- Aspects énergétiques : voir Chapitre 12 : Condensateurs, et Chapitre 13 : Bobines non-couplées.

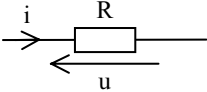
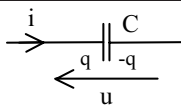
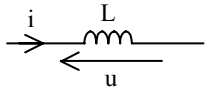
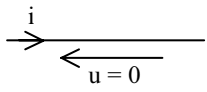
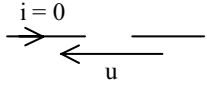
Composant	Symbole	Grandeur caractéristique et unité	Loi	Unités
Résistance (ou résistor)		R : Résistance en ohms (Ω)	$u = Ri$	$V = \Omega A$
Condensateur		C : Capacité en farads (F)	$i = C \frac{du}{dt}$	$A = F \frac{V}{s}$
Bobine		L : Inductance en henrys (H)	$u = L \frac{di}{dt}$	$V = H \frac{A}{s}$
Court-circuit			$\forall i, u = 0$	
Circuit ouvert			$\forall u, i = 0$	

Fig. 2.2 Dipôles passifs linéaires – Convention récepteur

• Éléments passifs non-linéaires

Exemple 2.1.2

- Une V.D.R. (*Voltage Dependant Resistor*) n'est pas un dipôle linéaire. Son équation $i = ku^n$ n'est pas une fonction linéaire de la tension u , et sa dérivée di/du n'est pas indépendante de la valeur de u .
- Une diode (voir Chapitre 16 : Diodes) n'est pas un dipôle linéaire. Son équation

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{u_D}{N U_T}} - 1 \right) \text{ n'est pas une fonction linéaire de la tension } u_D.$$

c) Dipôles actifs

- **Sources** (Fig. 2.3). On adopte indifféremment la convention générateur ou la convention récepteur selon le problème traité.

Remarque : Lorsqu'ils sont utilisés dans des schémas équivalents, les symboles (Fig. 2.3) représentent toujours des sources « idéales » et non « réelles ».

Une source réelle peut souvent être modélisée par une source de tension idéale, en série avec une résistance : c'est le modèle de Thévenin ; on peut aussi la modéliser par une source de courant idéale, en parallèle avec une résistance : c'est le modèle de Norton (voir § 2.2.4).

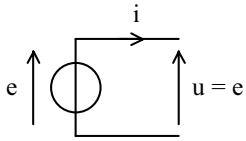
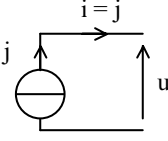
	Symbole	Grandeur caractéristique et unité	Loi
Source de tension		e : Tension en volts (V)	$\forall i, \quad u = e$
Source de courant		j : Intensité en ampères (A)	$\forall u, \quad i = j$

Fig. 2.3 Sources – Convention générateur

Exemple 2.1.3

La batterie de voiture est l'exemple type de la source de tension « presque idéale ». La charge qu'elle est capable de stocker se mesure usuellement en ampère × heure (Ah). Ainsi, une batterie de 12 V capable de stocker 60 Ah, peut délivrer pendant 6 h un courant de 10 A sous une tension de 12 V.

Question : Calculer l'énergie que peut délivrer la batterie de l'exemple précédent.

Réponse : $W = UIt = 12 \times 60 \times 3\,600 = 2\,592 \text{ kJ}$

Remarque : Pratiquement, il n'existe pas de source d'énergie du type « source de courant idéale ». En effet, cela supposerait que l'on soit capable de stocker l'énergie sous forme de courant à valeur constante j. Cependant, on peut réaliser des sources de courant constant en associant des sources d'énergie et des dipôles. C'est le cas d'un transistor associé à une source de tension ou encore d'une photodiode, éclairée par une source d'énergie lumineuse.

- **Source commandée – Source non commandée.** Une source commandée ou liée est une source dont la grandeur de sortie dépend d'une autre grandeur du circuit. Dans le cas contraire, la source est dite non-commandée ou indépendante.

Exemple 2.1.4

Le courant de sortie d'un transistor dépend d'une grandeur d'entrée qui est : le courant de base dans les transistors bipolaires, et la tension grille-source pour les transistors à effet de champ (Fig. 2.4).

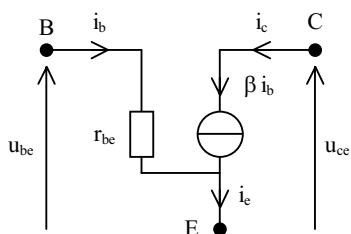
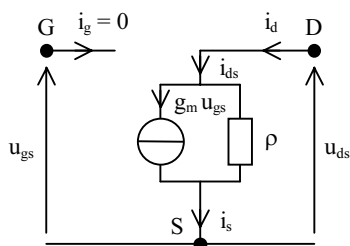
Schéma équivalent « petits signaux »
d'un transistor bipolaireSchéma équivalent « petits signaux »
d'un transistor à effet de champ

Fig. 2.4 Exemples de sources commandées

• **Source commandée linéaire – Source commandée non-linéaire.** Une *source commandée linéaire* est une source commandée dont la grandeur de sortie dépend linéairement de la grandeur de commande. *A contrario*, la source est *non-linéaire*.

2.1.4 Principales limites d'utilisation d'un dipôle

Les principales limites électriques et thermiques d'utilisation d'un dipôle sont : la tension maximale, le courant maximal et la puissance maximale. Ces limites dépendent du fonctionnement qui peut être : continu, alternatif, impulsionnel répétitif, impulsionnel non-répétitif, etc.

2.1.5 Caractéristique d'un dipôle

Selon le cas, la caractéristique d'un dipôle peut être relevée en continu (caractéristique statique), en alternatif, en impulsionnel (caractéristique dynamique « larges signaux »), etc.

Exemple 2.1.5

Le dipôle est ici uniquement récepteur car la puissance absorbée ne peut être que positive (Fig. 2.5).

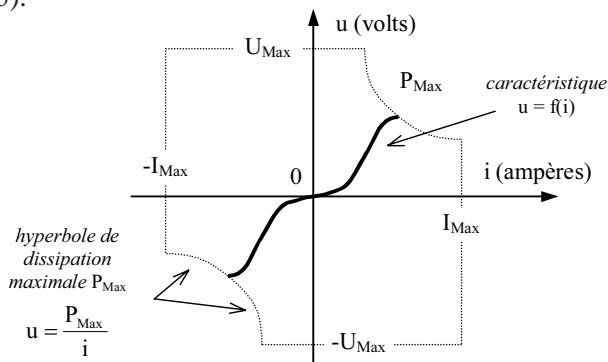


Fig. 2.5 Exemple de caractéristique d'un dipôle

2.1.6 Point de fonctionnement d'un dipôle

Exemple 2.1.6

L'alimentation d'un dipôle récepteur par un dipôle générateur fixe le point de fonctionnement (Fig. 2.6).

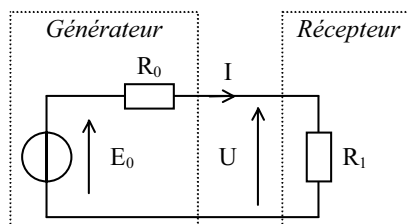


Fig. 2.6 Alimentation d'un récepteur par un générateur

Méthode

Le point de fonctionnement est déterminé par l'intersection des caractéristiques des dipôles générateur et récepteur. Ses coordonnées sont la tension U aux bornes des dipôles et le courant I qui les traverse.

1) D'une manière générale (dipôles non-linéaires ou linéaires), il faut tracer les caractéristiques dans un même repère (Fig. 2.7), ou bien recourir à un procédé informatique (simulation par exemple).

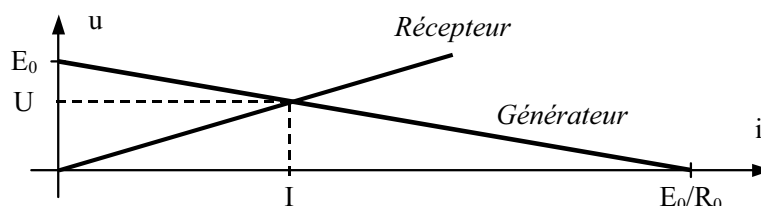


Fig. 2.7 Tracé des caractéristiques (Exemple de la Fig. 2.6)

2) Si les dipôles générateur et récepteur sont linéaires (ce qui est le cas Fig. 2.6 et Fig. 2.7), alors la résolution du système donne la solution :

- Équation du générateur, dite *droite de charge* : $u = E_0 - R_0 i$
- Équation du récepteur : $u = R_1 i$

$$\text{– Système : } \begin{cases} U = E_0 - R_0 I \\ U = R_1 I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = \frac{R_1 E_0}{R_0 + R_1} \\ I = \frac{E_0}{R_0 + R_1} \end{cases}$$

2.1.7 Association de dipôles

a) Association série de deux dipôles (Fig. 2.8)

Méthode

Deux dipôles sont en série s'ils sont traversés par le même courant. La loi des mailles permet d'écrire :

$$u_{\text{Tot}} = u_1 + u_2$$

1) D'une manière générale (dipôles non-linéaires ou linéaires), on construit point par point la caractéristique du dipôle équivalent.

$$\begin{cases} u_1 = f_1(i) \\ u_2 = f_2(i) \end{cases} \Rightarrow u_{\text{Tot}} = u_1 + u_2 = f_1(i) + f_2(i)$$

2) Si les dipôles sont linéaires, le dipôle équivalent est également linéaire. On peut alors déterminer une équation de la caractéristique du dipôle équivalent.

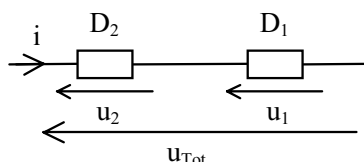


Fig. 2.8 Association série

Exemple 2.1.7

Voir Chapitres : 5, 11, 12, 13.

b) Association parallèle de deux dipôles (Fig. 2.9)

Méthode

Deux dipôles sont en parallèle s'ils sont alimentés sous la même tension. La loi des nœuds permet d'écrire :

$$i_{\text{Tot}} = i_1 + i_2$$

1) D'une manière générale (dipôles non-linéaires ou linéaires), on construit point par point la caractéristique du dipôle équivalent.

$$\begin{cases} i_1 = g_1(u) \\ i_2 = g_2(u) \end{cases} \Rightarrow i_{\text{Tot}} = i_1 + i_2 = g_1(u) + g_2(u)$$

2) Si les dipôles sont linéaires, le dipôle équivalent est également linéaire. On peut alors déterminer une équation de la caractéristique du dipôle équivalent.

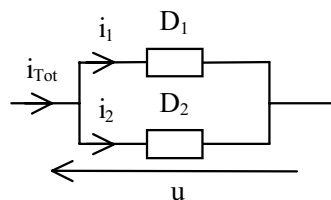


Fig. 2.9 Association parallèle

Remarque : On note souvent $D_1//D_2$ pour désigner la mise en parallèle des deux dipôles D_1 et D_2 .

Exemple 2.1.8

Voir Chapitres : 5, 11, 12, 13.

2.2 THÉORÈMES SUR LES CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Les lois et théorèmes ci-après sont présentés pour les valeurs instantanées. Elles peuvent être généralisées, dans les domaines d'utilisation des nombres complexes (voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé – Étude en fréquence) et de la transformée de Laplace (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace).

- Ces généralisations permettent de considérer tout dipôle linéaire au sens défini (§ 2.1.3), y compris condensateurs, bobines, etc.
- Pratiquement, ces généralisations s'effectuent en remplaçant, dans les lois et théorèmes, les résistances par des impédances complexes (nombres complexes) ou opérationnelles (transformée de Laplace), et les conductances par des admittances complexes ou opérationnelles. On adaptera en conséquence les théorèmes et notations.

2.2.1 Lois de Kirchhoff

Attention ! Courants et tensions sont des grandeurs algébriques. Le sens positif n'étant pas connu *a priori*, on flèche arbitrairement courants et tensions. Un résultat négatif indique simplement que le sens « réel » d'un courant ou d'une tension est opposé à celui fléché sur le schéma.

- **Loi des nœuds.** On peut la formuler de deux façons équivalentes :

1) La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent.

$$\sum i_{(\text{arrivant au nœud})} = \sum i_{(\text{partant du nœud})}$$

2) La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle.

Règle (arbitraire) d'attribution du signe : Le signe « + » est attribué à un courant qui arrive au nœud, et le signe « - » à un courant qui en part.

$$\sum (+i_{(\text{arrivant au nœud})} \quad \text{ou} \quad -i_{(\text{partant du nœud})}) = 0$$

Question : Écrire la loi des nœuds au nœud N (Fig. 2.10).

Réponse :

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad \text{ou bien} \quad i_1 + i_2 + (-i_3) = 0$$

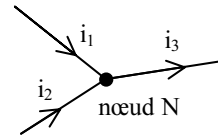


Fig. 2.10 Nœud N

• **Loi des mailles.** On peut la formuler de deux façons équivalentes :

1) La somme des tensions dans le sens de parcours de la maille est égale à la somme des tensions en sens inverse.

$$\sum u_{(\text{sens de parcours})} = \sum u_{(\text{sens inverse de parcours})}$$

2) La somme algébrique des tensions d'une maille est nulle.

Règle (arbitraire) d'attribution du signe : Le signe « + » est attribué à une tension dans le sens de parcours de la maille, et le signe « - » à une tension dans le sens inverse.

$$\sum (+u_{(\text{sens de parcours})} \quad \text{ou} \quad -u_{(\text{sens inverse de parcours})}) = 0$$

Question : Écrire la loi des mailles pour la maille M (Fig. 2.11).

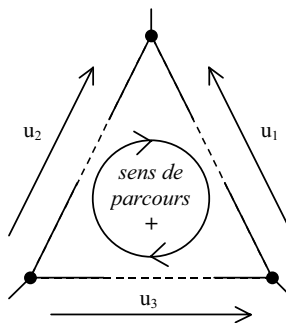


Fig. 2.11 Maille M

Méthode

On commence par orienter le sens de parcours de la maille.

Réponse :

$$u_2 = u_1 + u_3 \quad \text{ou bien} \quad u_2 + (-u_1) + (-u_3) = 0$$

Attention ! La loi des nœuds et la loi des mailles sont identiques dans leurs formes : *somme de valeurs instantanées*. En conséquence, dans le cas de signaux périodiques, ces lois s'appliquent aussi aux valeurs moyennes, MAIS PAS aux valeurs efficaces, NI aux valeurs maximales et minimales.

Exemple 2.2.9

Au nœud N (Fig. 2.10), on peut écrire : $I_1 \text{ Moy} + I_2 \text{ Moy} = I_3 \text{ Moy}$

2.2.2 Passivation d'une source

Méthode

D'une manière générale, rendre passive une source d'énergie « réelle », c'est la remplacer par sa résistance interne. Dans le cas des sources « idéales » définies au § 2.1.3, rendre passive une source de tension c'est la remplacer par un court-circuit, et rendre passive une source de courant c'est la remplacer par un circuit ouvert.

2.2.3 Théorème de superposition

Ce théorème résulte directement de la linéarité des dipôles actifs et passifs. Il est ici appliqué à un courant puis à une tension.

1) Dans un circuit linéaire, l'intensité du courant dans une branche est la somme algébrique des intensités des courants dus à chaque source indépendante prise séparément, les autres sources indépendantes étant rendues passives.

2) Dans un circuit linéaire, la tension entre deux bornes est la somme algébrique des tensions entre ces deux bornes dues à chaque source indépendante prise séparément, les autres sources indépendantes étant rendues passives.

Attention ! Les sources commandées ne doivent pas être rendues passives.

Question : Soit le circuit électrique à deux sources (Fig. 2.12). Exprimer la tension u et le courant i .

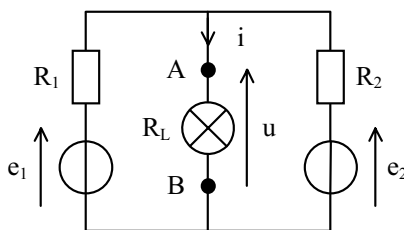


Fig. 2.12 Circuit à deux sources

Réponse :

1) Source 2 « passivée » (Fig. 2.13)

$$u_1 = \frac{R_2 R_L e_1}{R_2 R_L + R_1 (R_2 + R_L)} \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{R_2 e_1}{R_2 R_L + R_1 (R_2 + R_L)}$$

2) Source 1 « passivée » (Fig. 2.13)

$$u_2 = \frac{R_1 R_L e_2}{R_1 R_L + R_2 (R_1 + R_L)} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{R_1 e_2}{R_1 R_L + R_2 (R_1 + R_L)}$$

3) D'où (Fig. 2.13)

$$u = u_1 + u_2 = \frac{R_L (R_2 e_1 + R_1 e_2)}{R_1 R_2 + R_L (R_1 + R_2)} \quad \text{et} \quad i = i_1 + i_2 = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 R_2 + R_L (R_1 + R_2)}$$

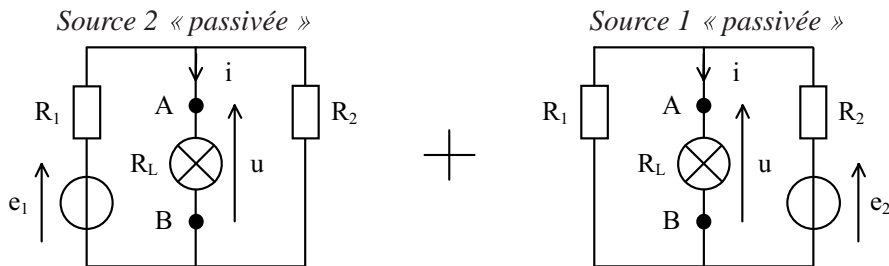


Fig. 2.13 Circuit à deux sources – Superposition des états

2.2.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Tout dipôle actif linéaire AB, composé de résistances, de sources indépendantes et/ou commandées (voir § 2.1.3), peut être représenté (Fig. 2.14) par :

1) un schéma équivalent série (modèle de Thévenin) comprenant une source de tension e_0 et une résistance R_0 , ou

2) un schéma équivalent parallèle (modèle de Norton) comprenant une source de courant i_0 et une résistance R_0 ; où

→ e_0 est la tension à vide du dipôle AB, c'est à dire la tension qui serait présente en l'absence de charge entre les bornes A et B, soit $e_0 = u$ à $i = 0$,

→ i_0 est le courant de court-circuit du dipôle AB, c'est à dire le courant qui circulerait entre les bornes A et B en les court-circuitant, soit $i_0 = i$ à $u = 0$, et

→ une résistance R_0 égale à la résistance équivalente vue des bornes A et B lorsque les sources non-commandées sont rendues passives.

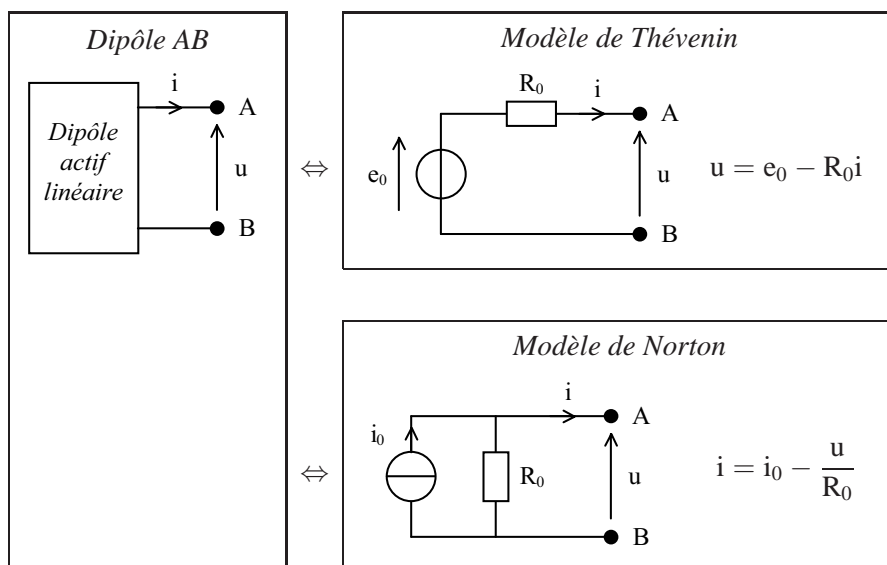


Fig. 2.14 Modèles de Thévenin et de Norton d'un dipôle

Méthode

Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents : même tension u et même intensité i pour une charge donnée. Le passage de l'un à l'autre s'effectue par la relation :

$$e_0 = R_0 i_0$$

Attention ! Pour la détermination de R_0 , seules les sources non-commandées (indépendantes) sont rendues passives, les sources commandées (liées) ne doivent pas être rendues passives.

Remarque : Les modèles de Thévenin et de Norton ne sont équivalents que pour l'extérieur. Ils ne rendent pas compte de la puissance dissipée par le circuit réel qu'ils remplacent. Il suffit pour le montrer de constater qu'à vide, le modèle de Thévenin ne dissipe pas de puissance !

Méthode

La première chose à faire est de bien délimiter le dipôle dont on cherche le modèle équivalent et de « déconnecter » la charge.

Question : Soit le circuit électrique à deux sources déjà étudié (voir Fig. 2.12). Déterminer ses modèles de Thévenin et de Norton.

Réponse :

1) Expression de e_0 (Fig. 2.15) :

C'est la tension à vide.

$$e_0 = u \text{ à } i = 0 \Rightarrow e_0 = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 + R_2}$$

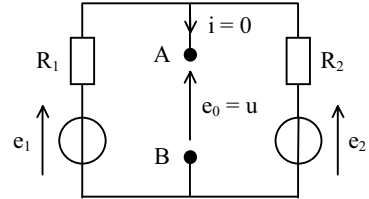


Fig. 2.15 Circuit à deux sources – Expression de e_0

2) Expression de i_0 (Fig. 2.16) :

C'est le courant de court-circuit.

$$i_0 = i \text{ à } u = 0 \Rightarrow i_0 = \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}$$

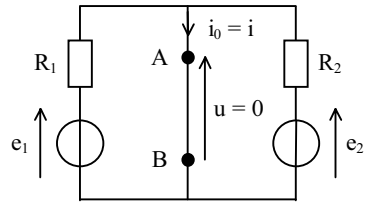


Fig. 2.16 Circuit à deux sources – Expression de i_0

3) Expression de R_0 (Fig. 2.17) :

C'est la résistance vue entre A et B, les sources non-commandées étant rendues passives.

$$R_0 = \frac{u}{-i} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

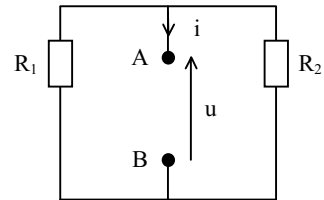


Fig. 2.17 Circuit à deux sources – Expression de R_0

4) Expression de u et de i : On établit le schéma équivalent de Thévenin ou de Norton (Fig. 2.18) et on ajoute la charge. Puis, à partir de l'un ou de l'autre des schémas, on en déduit :

$$u = \frac{R_L e_0}{R_0 + R_L} \quad \text{et} \quad i = \frac{R_0 i_0}{R_0 + R_L} \quad \text{avec} \quad e_0 = R_0 i_0$$

Et, finalement :

$$u = \frac{R_L (R_2 e_1 + R_1 e_2)}{R_1 R_2 + R_L (R_1 + R_2)} \quad \text{et} \quad i = \frac{u}{R_L} = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 R_2 + R_L (R_1 + R_2)}$$

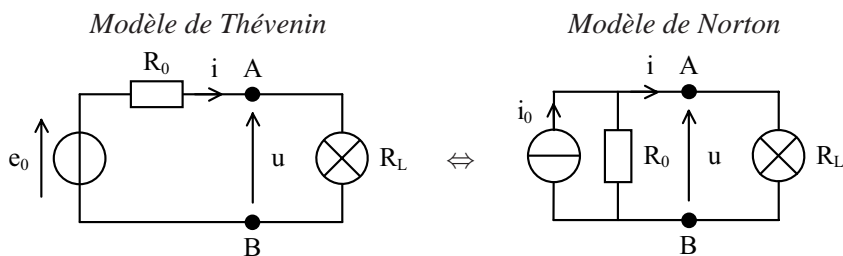


Fig. 2.18 Circuit à deux sources – Schémas équivalents avec la charge

Question : Soit le circuit pseudo-intégrateur RC (Fig. 2.19) traité par Laplace (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace). Déterminer ses modèles de Thévenin et de Norton.

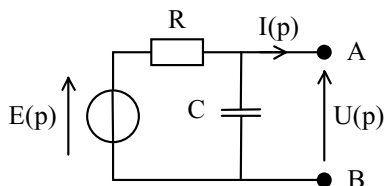


Fig. 2.19 Circuit pseudo-intégrateur RC

Réponse : En appliquant les théorèmes, on obtient :

$$E_0(p) = \frac{1}{1 + RCp} E(p) \quad \text{et} \quad I_0(p) = \frac{E(p)}{R}$$

$$Z_0(p) = R // \frac{1}{Cp} = \frac{R}{1 + RCp} \quad \text{avec} \quad E_0(p) = Z_0(p) I_0(p)$$

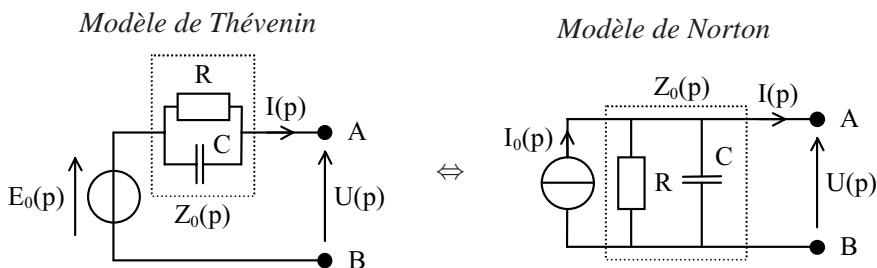


Fig. 2.20 Circuit pseudo-intégrateur RC – Schémas équivalents

2.2.5 Théorème de Millmann

D'après le théorème de Thévenin, les dipôles (Fig. 2.21) sont équivalents. Pour ce circuit type, le théorème de Millmann permet d'exprimer la tension à vide du dipôle AB, soit $e_0 = u$ à $i = 0$, par la formule :

$$e_0 = \frac{\sum_{k=1}^N e_k G_k}{\sum_{k=1}^N G_k} \quad \text{avec} \quad G_k = \frac{1}{R_k}$$

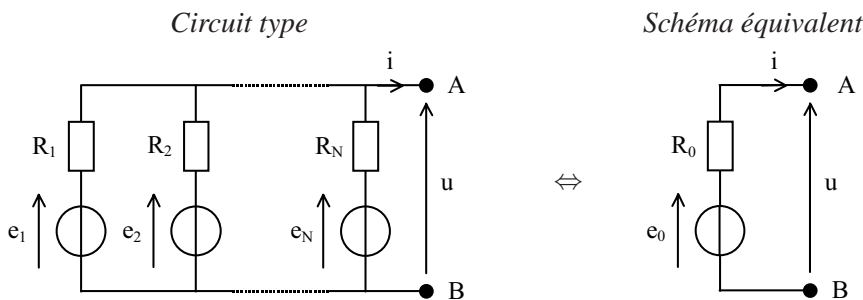


Fig. 2.21 Théorème de Millmann

En toute généralité, la résistance R_0 est donnée par le théorème de Thévenin. Cependant, dans le cas particulier où les sources e_1 à e_N sont indépendantes, alors la résistance R_0 est donnée simplement par $G_0 = \frac{1}{R_0} = \sum_{k=1}^N G_k$.

Question : Soit le circuit électrique à deux sources déjà étudié (voir Fig. 2.12). Exprimer la tension u et le courant i .

Réponse : Deux approches sont possibles.

1) On considère que la charge ne fait pas partie du dipôle. On retrouve alors le schéma équivalent du modèle de Thévenin (Fig. 2.18) avec :

$$e_0 = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad G_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

On exprime ensuite la tension u et le courant i .

2) On considère que la charge fait partie du dipôle. Ce théorème permet alors de calculer directement la tension u , et par suite le courant i .

$$u = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{0}{R_L}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L}} = \frac{R_L (R_2 e_1 + R_1 e_2)}{R_1 R_2 + R_L (R_1 + R_2)} \quad \text{et} \quad i = \frac{u}{R_L}$$

Attention ! Ne pas oublier au dénominateur les branches sans source.

2.2.6 Diviseur de tension – Diviseur de courant

Ces deux montages sont très utilisés (Fig. 2.22).

	Schéma	Relations
Diviseur de tension		$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_0$ $u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_0$
Diviseur de courant		$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_0$ $i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_0$

Fig. 2.22 Diviseur de tension – Diviseur de courant

Attention ! Les formules données (Fig. 2.22) ne sont valables que si aucune charge extérieure ne vient modifier le montage.

2.2.7 Théorème de Kennelly (équivalence triangle-étoile)

Le théorème de Kennelly permet de passer d'un schéma en triangle (ou montage en Π) à un schéma en étoile (ou montage en T) et réciproquement (Fig. 2.23).

Montage en étoile (ou T)	Montage en triangle (ou Π)

Fig. 2.23 Équivalence étoile-triangle

On a les relations :

$$R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$
$$R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

Et réciproquement :

$$G_{AB} = \frac{G_A G_B}{G_A + G_B + G_C} \quad G_{AC} = \frac{G_A G_C}{G_A + G_B + G_C} \quad G_{BC} = \frac{G_B G_C}{G_A + G_B + G_C}$$

Ou encore :

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \quad R_{AC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}$$

2.2.8 Principe de linéarité

Dans un circuit linéaire, la réponse d'un signal $s(t)$ est la somme algébrique des réponses dues à chaque source (indépendante ou liée) prise séparément, les autres sources étant rendues passives. Deux applications sont possibles :

1) On somme uniquement les réponses dues à chaque source indépendante (mais pas les liées), les autres sources indépendantes étant rendues passives (mais pas les liées). On retrouve alors le théorème de superposition (voir § 2.2.3).

2) On somme toutes les réponses dues à chaque source (y compris les liées), toutes les autres sources (y compris les liées) étant rendues passives. On ne trouve pas alors directement la réponse du signal $s(t)$ car les sources liées, qui sont inconnues puisqu'elles dépendent des autres sources, interviennent dans l'expression. Il faudra donc éliminer de l'expression obtenue les sources liées.

Chapitre 3

Électrostatique

3.1 CHAMPS ÉLECTRIQUE ET D'INDUCTION ÉLECTRIQUE

3.1.1 Intensité

• **Intensité du champ électrique.** Une charge électrique q modifie l'espace l'environnant en créant un champ électrique, ou électrostatique, dont l'intensité à distance r est donnée par la loi (voir Chapitre 1 : Qu'est-ce que l'électricité ?) :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \quad \text{Unités :} \quad \text{V/m} = \frac{1}{\text{F/m}} \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}}{\text{Fm}}$$

Cette loi s'écrit vectoriellement :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0 \quad \text{avec} \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \text{et} \quad \|\vec{r}_0\| = 1$$

où \vec{r}_0 est le vecteur unitaire (sa norme vaut 1) porté par la droite orientée de O vers M (voir Fig. 3.1 un peu après), ϵ est la permittivité absolue du milieu exprimé en F/m, ϵ_r est la permittivité relative du milieu par rapport au vide (sans unité), et ϵ_0 est la permittivité absolue du vide (et pratiquement dans l'air sec).

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \times c^2} \text{ F/m} \quad \text{où} \quad c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

soit $\epsilon_0 \approx 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

• **Champ électrique** (Fig. 3.1). À chaque point M de l'espace, on a un vecteur \vec{E} , parfois noté $\vec{E}(M)$. L'ensemble des vecteurs \vec{E} constitue un champ de vecteurs appelé *champ électrique*. Si on trace des lignes tangentes aux vecteurs \vec{E} , on obtient un ensemble de lignes orientées appelées *lignes de champ électrique*.

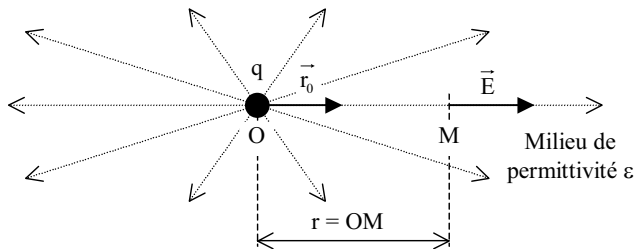


Fig. 3.1 Champ électrique créé par une charge q

• **Champ d'induction électrique.** Le champ électrique (vecteurs \vec{E}) peut être considéré comme « induit » par un champ d'induction électrique (vecteurs \vec{D}) dû à la charge q et indépendant du milieu électrique :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{Unités :} \quad \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{F}}{\text{m}} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

L'ensemble des vecteurs \vec{D} constitue aussi un champ de vecteurs appelé *champ d'induction électrique* ou *champ de déplacement électrique*.

Remarques :

- Dans certains milieux, les vecteurs champ électrique et champ induction électrique ne sont pas proportionnels : la permittivité ε n'est pas constante.
- Pour visualiser un champ électrique, on utilise de petits dipôles électriques isolants, qui s'orientent dans le champ électrique. Des petits morceaux de poils de chat ou de la semoule de blé, flottant à la surface de l'huile de ricin, permettent de visualiser les spectres du champ électrique au milieu d'un condensateur plan plongé dans cette huile.

3.1.2 Flux à travers une surface S

• **Orientation d'une surface S** (Fig. 3.2). On représente une surface par un vecteur \vec{S} dont le module est l'aire de la surface. Ce vecteur \vec{S} est normal à la surface. Son sens (conventionnel) est déterminé à l'aide d'une courbe fermée dessinée autour de l'origine du vecteur représentant la surface.

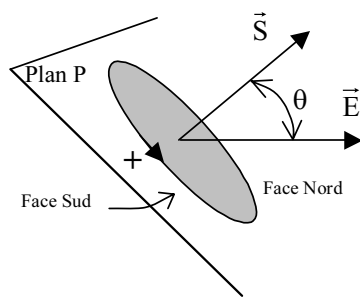


Fig. 3.2 Orientation de la surface S - Flux à travers la surface S

• **Flux à travers une surface** (Fig. 3.3). Le flux est une grandeur algébrique qui traduit la traversée d’un champ à travers la surface S. Son calcul nécessite l’orientation de S (voir Fig. 3.2).

	$\varphi_S(\vec{E})$: Flux du vecteur champ électrique \vec{E} à travers la surface S	$\varphi_S(\vec{D})$: Flux du vecteur induction électrique \vec{D} à travers la surface S
Unités	$Vm = (V/m) \, m^2$	$C = (C/m^2) \, m^2$
Forme algébrique	$\varphi_S(E) = ES \cos(\theta)$	$\varphi_S(D) = DS \cos(\theta)$
Forme vectorielle (produit scalaire)	$\varphi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{S}$	$\varphi_S(\vec{D}) = \vec{D} \cdot \vec{S}$
Forme intégrale	$\varphi_S(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$\varphi_S(\vec{D}) = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}$

Fig. 3.3 Définitions des flux des vecteurs \vec{E} et \vec{D} à travers la surface S

Remarque : Le flux du vecteur induction électrique \vec{D} à travers la surface S a la dimension d’une charge électrique (unité : coulomb). Cela « cautionne » l’expression du théorème de Gauss ci-après.

Exemple 3.1.1

Une charge électrique au centre d’une sphère de rayon R, induit une induction radiale de module :

$$D = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{R^2} \times 4\pi R^2 \times \epsilon = Q$$

3.1.3 Théorème de Gauss

• **Énoncé.** Une surface fermée S , enveloppant des charges électriques, est traversée par un flux d'induction électrique $\varphi_S(\vec{D})$, égal à la somme algébrique des charges intérieures q_{int} au volume limité par la surface.

$$\varphi_S(\vec{D}) = \sum q_{\text{int}} \quad \text{Unités : } C$$

Attention ! Dans cette formulation, les charges q_{int} doivent être à l'intérieur du volume limité par la surface S . Si des charges ponctuelles q_{surf} se situent sur la surface même, on les comptabilise pour moitié. D'où une deuxième formulation :

$$\varphi_S(\vec{D}) = \sum q_{\text{int}} + \frac{1}{2} \sum q_{\text{surf}}$$

Remarque : Le théorème de Gauss, ainsi énoncé, est valable pour un milieu quelconque, même si les vecteurs champ électrique et champ induction électrique ne sont pas proportionnels (permittivité ε non constante).

• **Application du théorème de Gauss.** C'est un outil efficace pour le calcul des champs qui possèdent des symétries spatiales.

Question : Calculer l'intensité E du vecteur champ électrique \vec{E} à distance r d'une charge ponctuelle q (Fig. 3.4).

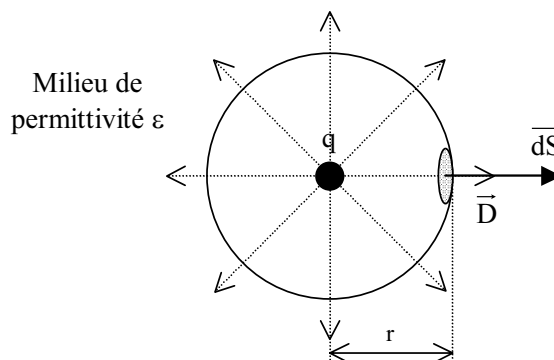


Fig. 3.4 Champs \vec{E} et \vec{D}

Réponse : Le champ d'induction électrique \vec{D} autour de q possède une symétrie radiale. En conséquence, son intensité D est la même en tout point d'une sphère de rayon r . Le flux élémentaire à travers dS est :

$$d\phi = D dS$$

Pour toute la sphère de rayon r le flux est :

$$\phi = \iint_S D \, dS = D \iint_S dS = 4\pi r^2 D$$

D'après le théorème de Gauss, on a : $4\pi r^2 D = q$

D'où : $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ (qui ne dépend pas du milieu)

Et : $E = \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon}$ (qui dépend du milieu)

3.2 POTENTIEL ÉLECTRIQUE

3.2.1 Définition

Au chapitre 1 : Qu'est-ce que l'électricité ? , il est dit que le déplacement élémentaire dr d'une charge électrique Q , dans un champ électrique E , nécessitait une énergie potentielle électrique, donnée par :

$$dW = -Q E(r) \, dr \quad \text{Unités : } J = C \frac{V}{m} \, m = CV$$

On a défini le potentiel, comme étant le travail par unité de charge :

$$dV = \frac{dW}{Q} = -E(r) \, dr$$

L'intégration de cette expression définit le potentiel électrique :

$$V(r) = - \int_{\infty}^r E(r) \, dr \quad \text{Unités : } V = \frac{V}{m} \, m$$

Remarque : À l'infini, le potentiel est nul ; $r \rightarrow \infty \Rightarrow V(\infty) = 0$.

Question : Calculer le potentiel V à une distance r dû à une charge q .

Réponse : L'intensité du champ électrique est :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

En intégrant, on obtient :

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \, dr \quad \text{soit} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

3.2.2 Calcul du champ électrique $\vec{E}(\mathbf{r})$ à partir du potentiel $V(\mathbf{r})$

Le potentiel étant une fonction scalaire, il est aisé de calculer le potentiel d'un point donné de l'espace $V(\mathbf{r})$, à partir d'une distribution spatiale de charges. L'utilisation de la relation : $dV = -E(\mathbf{r}) dr$, permet le calcul de $\vec{E}(\mathbf{r})$. En utilisant l'opérateur vectoriel « gradient », cela s'écrit :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

Remarque : L'opérateur vectoriel $\vec{\text{grad}} V$, qui se lit « gradient de V », est un opérateur vectoriel à trois dimensions : son expression mathématique dépend du système de coordonnées (Fig. 3.5).

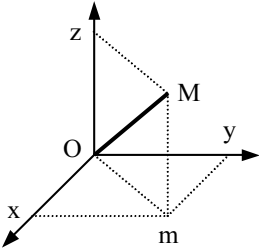
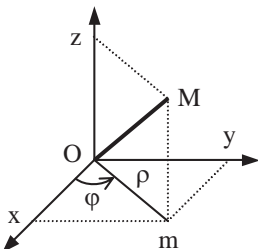
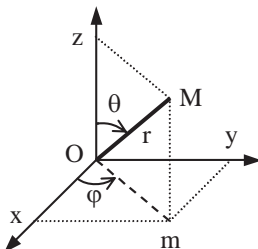
Coordonnées cartésiennes $V(x, y, z)$	Coordonnées cylindriques $V(\rho, \varphi, z)$	Coordonnées sphériques $V(r, \theta, \varphi)$
		
$\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$	$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$
	$0 \leq \varphi \leq 2\pi$	$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi$
$\vec{\text{grad}} V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$	$\vec{\text{grad}} V(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$	$\vec{\text{grad}} V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$

Fig. 3.5 Systèmes de coordonnées directs et $\vec{\text{grad}} V$

Question : Calculer le champ électrique, créé par une charge ponctuelle q .

Réponse : Le potentiel vaut :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$$

En coordonnées sphériques, l'équation $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ s'écrit :

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = -\vec{\text{grad}} V(r, \theta, \varphi) \Leftrightarrow \begin{cases} E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E(\theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ E(\varphi) = -\frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Compte tenu des symétries dans ce système de coordonnées, le potentiel V dépend uniquement de la distance r (composante radiale). Il ne dépend ni de θ , ni de φ . D'où :

$$\begin{cases} E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \\ E(\theta) = 0 \\ E(\varphi) = 0 \end{cases}$$

3.3 PRINCIPE DES CONDENSATEURS

(Voir aussi Chapitre 12 : Condensateurs)

3.3.1 Constitution et fonctionnement

Un condensateur est constitué de deux armatures métalliques, séparées par un diélectrique de permittivité absolue ϵ . Le diélectrique est un isolant : aucun porteur de charge ne circule entre les atomes ou les molécules, sa conductivité est théoriquement nulle.

Lorsque l'on applique aux armatures A et B du condensateur, une tension ($V_A - V_B$), le nuage électronique des atomes s'étire, remonte le champ électrique, laissant derrière lui une partie de l'atome ionisé positivement : on obtient un dipôle électrique (Fig. 3.6).

Le diélectrique, globalement neutre, a ses côtés (proches des armatures) polarisés par les dipôles électriques. Les charges : $-Q$ et $+Q$ sont fixes.

À cette polarisation des faces latérales, correspond une polarisation opposée des armatures métalliques A et B ; chargées $+Q$ et $-Q$. Ces charges sont surfaciques et mobiles.

Remarque : Les armatures, ne servent qu'à créer le champ électrique \vec{E} , appliqué au diélectrique. Les charges $+Q$ et $-Q$, portées par les armatures ne dépendent que du diélectrique.

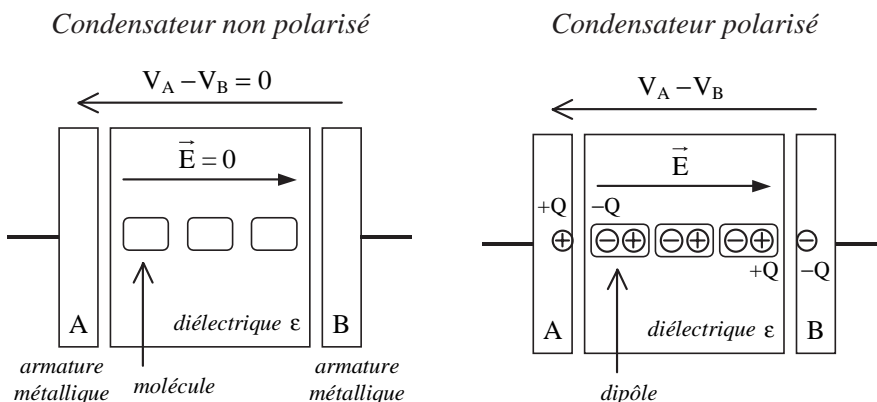


Fig. 3.6 Constitution et fonctionnement

3.3.2 Rigidité diélectrique

Lorsque la tension appliquée aux armatures du condensateur augmente, le champ électrique croît. Au delà d'une valeur limite E_{Lim} , appelée *rigidité diélectrique*, les molécules étirées se « cassent », et libérant des électrons, s'ionisent. Les ions créent un courant qui détruit localement l'isolant. On dit que le diélectrique est « percé », ou encore que le condensateur est « claqué ». Il est inutilisable. À ce champ électrique maximal, correspond une tension : $(V_A - V_B)_{\text{Lim}}$

Question : Sachant que la rigidité diélectrique vaut $E_{\text{Lim}} \approx 3,4 \text{ kV/mm}$ pour l'air, calculer la tension minimale à appliquer entre les électrodes d'une bougie d'un moteur à explosions pour un écartement des électrodes $d = 0,75 \text{ mm}$.

Réponse : $U_{\text{Lim}} = E_{\text{Lim}}d \approx 2,55 \text{ kV}$

3.3.3 Capacité et charge stockée par un condensateur

On néglige les effets de bord, et on suppose \vec{D} uniforme (Fig. 3.7).

La surface de Gauss est un parallélepède dont les 6 faces sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur (vecteur \vec{S}). Le flux latéral est nul car \vec{D} est normal à \vec{S} .

Le flux est nul dans le métal, car \vec{D} y est nul.

Le flux sortant du diélectrique vaut (théorème de Gauss) :

$$\vec{D} \cdot \vec{S} = DS = \epsilon ES = +Q$$

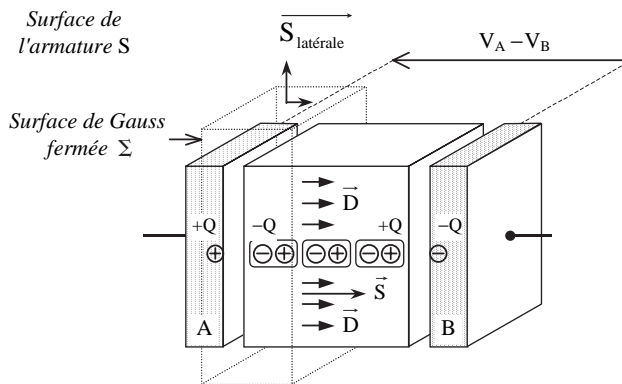


Fig. 3.7 Charge stockée par un condensateur

La charge stockée Q , sur chaque armature vaut donc : $Q = \epsilon ES$

Le champ électrique est : $E = \frac{V_A - V_B}{e}$ où e est l'épaisseur du diélectrique.

D'où : $Q = \frac{\epsilon S}{e} (V_A - V_B)$ Unités : $C = \frac{(F/m)m^2}{m} V$

Cette formule montre que la charge stockée Q sur les armatures, ne dépend que de la géométrie du diélectrique (S et e) et de sa nature par sa permittivité absolue. Cette propriété que possède le diélectrique à stocker de l'énergie, est définie par la capacité du condensateur qui s'exprime en « farads ». On pose :

$$C = \frac{\epsilon S}{e} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e} \quad \text{Unités :} \quad F = \frac{(F/m) m^2}{m}$$

D'où :

$$Q = C (V_A - V_B) \quad \text{Unités :} \quad C = FV$$

Le farad étant une unité de capacité très grande, on le décline couramment en :

$$mF = 10^{-3} F, \quad \mu F = 10^{-6} F, \quad nF = 10^{-9} F \quad \text{et} \quad pF = 10^{-12} F.$$

3.3.4 Énergie électrique stockée par un condensateur

À partir de l'état 1 (Fig. 3.8), pour que les armatures métalliques se chargent d'un supplément de charge dq , et passent à l'état 2 (Fig. 3.8), il faut que le diélectrique soit soumis à une augmentation du champ électrique de $d\vec{E}$, auquel correspond, un accroissement de tension :

$$du = dq/C$$

La charge dq , passe du potentiel 0 (l'infini) au potentiel u , soit un apport énergétique :

$$dw = u dq = C u du$$

Finalement, l'énergie totale pour charger le condensateur sous la tension U est :

$$W = \int_0^U C u \, du = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{Unités : } J = FV^2 = \frac{C^2}{F}$$

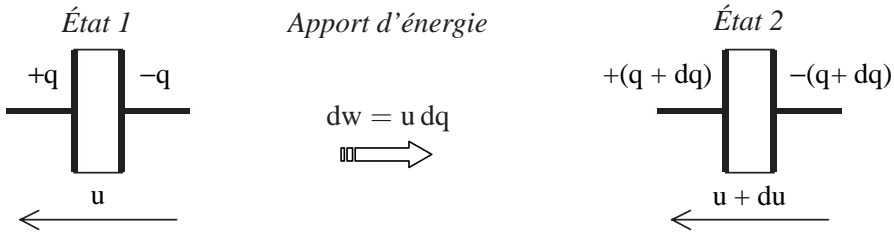


Fig. 3.8 Énergie électrique stockée par un condensateur

Remarque : De cette formule, on déduit facilement la force s'exerçant sur les armatures d'un condensateur. On a :

$$\left. \begin{aligned} dW &= F \, de \\ W &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 e}{\varepsilon S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F = \frac{dW}{de} = \frac{d}{de} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2 e}{\varepsilon S} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon S}$$

En définissant la densité surfacique de charge par :

$$\sigma = \frac{Q}{S} \quad \text{Unités : } C/m^2 = \frac{C}{m^2}$$

La force attractive entre les armatures s'écrit :

$$F = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S}{\varepsilon} \quad \text{Unités : } N = \frac{(C/m^2)^2 \, m^2}{F/m} = \frac{C^2}{mF} = \frac{CV}{m} = \frac{J}{m}$$

Chapitre 4

Électromagnétisme – Ferromagnétisme

4.1 EXCITATION MAGNÉTIQUE

4.1.1 Phénomène physique

Un mouvement ordonné de charges électriques (courant électrique i) crée dans l'espace qui l'entoure un *champ d'excitation magnétique*. Cette circulation de charges constitue une *source d'excitation magnétique*. En tout point de l'espace, le champ d'excitation magnétique est décrit par un vecteur (direction, sens et intensité) appelé *vecteur excitation magnétique* \vec{H} . C'est l'ensemble des vecteurs \vec{H} qui constitue le champ d'excitation magnétique (champ de vecteurs).

De la limaille de fer (détecteur), saupoudrée au voisinage de la source, permet de visualiser (spectre magnétique) le champ d'excitation magnétique.

4.1.2 Sources d'excitation magnétique

- *Orbitale électronique (Fig. 4.1)*

L'électron gravitant autour d'un noyau atomique est une source d'excitation magnétique. Le champ magnétique créé est extrêmement faible, mais cumulé à des milliards de milliards d'autres champs aux directions voisines, il permet d'obtenir un aimant.

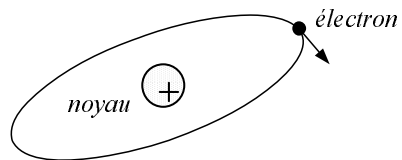


Fig. 4.1 Orbitale électronique

• **Aimants (Fig. 4.2)**

Un aimant est constitué d'une pièce d'acier qui a conservé la mémoire d'un traitement magnétique antérieur. Il peut être plat, avoir la forme d'un fer à cheval ou d'un barreau. Les effets magnétiques des aimants sont dus à l'orientation d'une majorité des orbitales électroniques des atomes les constituant suivant une direction privilégiée.

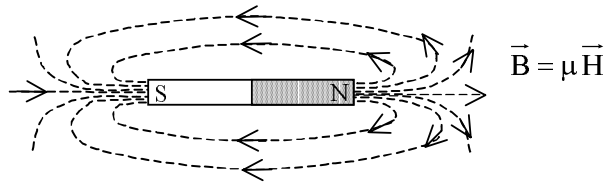


Fig. 4.2 Champ d'excitation magnétique d'un aimant droit

Propriétés des aimants :

- Un aimant attire les objets ferromagnétiques placés à proximité de ses pôles.
- Placé dans le champ magnétique terrestre, un aimant droit s'oriente spontanément dans la direction nord-sud. Par convention, l'extrémité de l'aimant tournée vers le nord géographique s'appelle « pôle nord » et l'extrémité de l'aimant tournée vers le sud géographique s'appelle « pôle sud ».
- Les effets magnétiques d'un aimant sont localisés à proximité de ses pôles.
- Il est impossible d'isoler un pôle nord ou un pôle sud : la cassure d'un aimant ne provoque pas la séparation de ses pôles mais l'apparition de deux aimants.
- Deux pôles d'aimants de même type se repoussent ; s'ils sont de types contraires, ils s'attirent.

Remarque : Notre globe terrestre, peut être considéré comme un gigantesque aimant, à deux pôles, nord et sud.

• **Solénoïde (Fig. 4.3)**

(Un solénoïde, parcouru par un courant i , constitue une source d'excitation magnétique. Le solénoïde donne un champ analogue à celui d'un aimant droit.

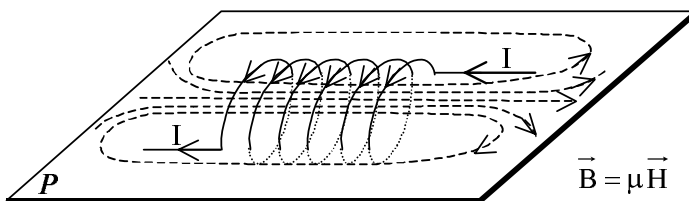


Fig. 4.3 Champ d'excitation magnétique d'un solénoïde

4.1.3 Calcul de \vec{H} : Théorème d'Ampère

Les lignes de champ magnétique, orientées conventionnellement du Nord vers le Sud sont des lignes fermées. La loi de Biot et Savart permet de déterminer le sens et la direction du vecteur excitation magnétique \vec{H} , mais le calcul de son intensité est souvent difficile, voire impossible sans ordinateur. Le théorème d'ampère permet de calculer l'intensité du vecteur excitation magnétique \vec{H} , le long d'une de ces lignes, lorsque des symétries existent.

a) Loi élémentaire de Biot et Savart (Fig. 4.4)

$$\vec{dH} = \frac{i \vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{4\pi PM^3} = \frac{i \vec{d\ell} \wedge \vec{r_0}}{4\pi r^2}$$

$$\text{Unités : } \frac{A}{m} = \frac{Am}{m^2}$$

où \wedge est le produit vectoriel, $\vec{r_0}$ est le vecteur unitaire porté par la droite orientée de P vers M : sa norme vaut $\|\vec{r_0}\| = 1$, et $\vec{d\ell}$ est l'élément du conducteur dans lequel circule le courant i .

Cette loi peut s'interpréter en considérant que l'élément $\vec{d\ell}$ du conducteur dans lequel circule le courant i produit une excitation magnétique \vec{H} , perpendiculaire à $\vec{d\ell}$, perpendiculaire à $\vec{r_0}$ et donc normal au plan $(\vec{d\ell}, \vec{r_0})$. Le trièdre $(\vec{d\ell}, \vec{r_0}, \vec{dH})$ est direct, (Fig. 4.5). Intensité (module) du vecteur excitation magnétique :

$$dH = \frac{i \sin(\vec{d\ell}, \vec{r_0}) d\ell}{4\pi r^2}$$

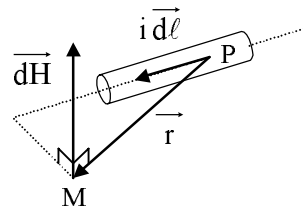


Fig. 4.4 Loi de Biot et Savart

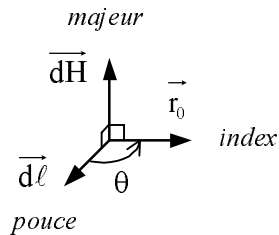


Fig. 4.5 Trièdre direct $(\vec{d\ell}, \vec{r_0}, \vec{dH})$

Méthode

Règle des trois doigts de la main droite. Le pouce indique $i \vec{d\ell}$, l'index indique $\vec{r_0}$ et le majeur \vec{dH} (voir Fig. 4.5).

b) Circulation du vecteur excitation magnétique (Fig. 4.6)

On appelle circulation élémentaire de \vec{H} sur le parcours $\vec{d\ell}$ le produit scalaire :

$$dC = \vec{H} \cdot \vec{d\ell}$$

La circulation de \vec{H} le long d'un contour fermé Γ est donc :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

Unités : $A = \frac{A}{m}$

où \oint est l'intégrale curviligne (c'est-à-dire le long du contour fermé Γ)

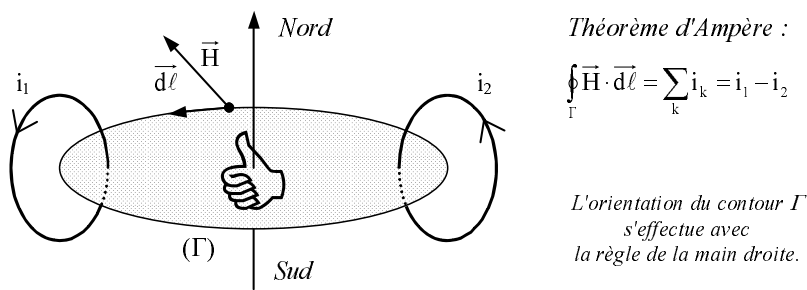


Fig. 4.6 Circulation de \vec{H} - Théorème d'Ampère

Remarque : Seule la composante de \vec{H} tangentielle au parcours « circule ».

$\vec{H}_t \cdot d\vec{\ell} = \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$ où \vec{H}_t est la composante tangentielle de \vec{H}

$\vec{H}_n \cdot d\vec{\ell} = 0$ où \vec{H}_n est la composante normale de \vec{H}

c) Énoncé du théorème d'Ampère (voir Fig. 4.6)

La circulation du vecteur excitation magnétique \vec{H} le long d'un contour Γ fermé et orienté est égale à la somme algébrique des intensités des courants qui traversent la surface s'appuyant sur Γ . On compte positivement l'intensité d'un courant traversant par la face sud, et négativement l'intensité d'un courant traversant par la face nord. Formulations mathématiques : (Fig. 4.7).

	Formulations mathématiques	Conditions d'application
Forme algébrique	$H\ell = \sum_k i_k$	\vec{H} et $\vec{\ell}$ sont colinéaires
Forme vectorielle (produit scalaire)	$\vec{H} \cdot \vec{\ell} = \sum_k i_k$	\vec{H} est constant et le circuit est à géométrie simple
Forme intégrale	$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum_k i_k$	Formulation générale
Unités	$(A/m) m = A$	

Fig. 4.7 Formulations mathématiques du théorème d'Ampère

Remarque : Le théorème d'Ampère montre que le champ excitation magnétique est indépendant du milieu, et qu'il s'exprime en A/m.

Méthodes

Règles d'orientation du vecteur excitation magnétique. Parmi toutes celles existantes, on en présente deux utiles.

- **Règle de la main droite.** On serre avec la main droite le fil, le pouce indiquant le sens du courant i , alors l'enroulement des doigts indique le sens de \vec{H} (voir Fig. 4.8).
- **Règle des trois doigts de la main droite.** Le pouce sur le fil indique le sens du courant i , l'index indique le point où on cherche \vec{H} et le majeur le sens de \vec{H} . Cette dernière règle vient de la loi de Biot et Savart (voir Fig. 4.5).

Question : Déterminer l'excitation magnétique autour d'un fil rectiligne infini de rayon a (Fig. 4.8.).

Réponse :

Le fil rectiligne infini admet l'axe Oz comme axe de symétrie : les lignes de champ forment des cercles de centre O . Le théorème d'Ampère donne l'intensité du vecteur excitation magnétique pour une ligne de champ de rayon r .

$$\begin{cases} H\ell = i \\ \ell = 2\pi r \end{cases} \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi r} \quad (\text{pour } r \geq a)$$

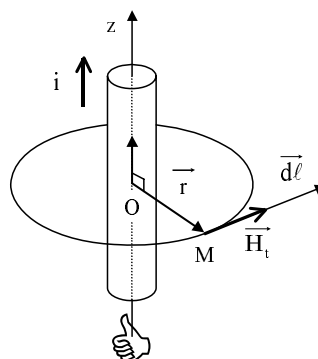


Fig. 4.8 Fil rectiligne infini

Question : Déterminer l'excitation magnétique dans un tore de N spires (Fig. 4.9).

Réponse :

Pour tout point M à l'intérieur du tore, le théorème d'Ampère donne l'intensité du vecteur excitation magnétique pour une ligne de champ de rayon r . À l'extérieur du tore, le champ est nul.

$$\begin{cases} H\ell = Ni \\ \ell = 2\pi r \end{cases} \Rightarrow H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad (\text{à l'intérieur du tore})$$

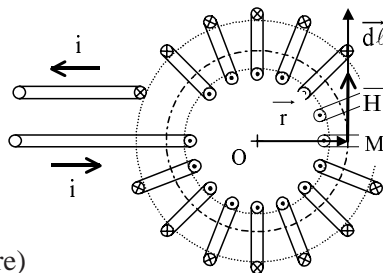


Fig. 4.9 Tore

Question : Déterminer l'excitation magnétique à l'intérieur d'un solénoïde « long » de longueur L possédant N spires (voir Fig. 4.3).

Réponse : En supposant que le solénoïde possède un diamètre petit par rapport à sa longueur L , l'application du théorème d'Ampère donne l'intensité du vecteur excitation magnétique à l'intérieur du solénoïde. On peut aussi imaginer qu'il s'agit d'un tore déplié tel que $L = 2\pi r$. D'où :

$$H = \frac{Ni}{L} \quad (\text{à l'intérieur du solénoïde})$$

4.2 INDUCTION MAGNÉTIQUE

D'une façon générale, le champ excitation magnétique modifie les propriétés du milieu dans lequel il agit. Il induit un champ induction magnétique. Ainsi, au vecteur excitation magnétique \vec{H} correspond le vecteur induction magnétique \vec{B} tel que :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{Unités :} \quad T = \frac{H}{m} \frac{A}{m} = \frac{Wb}{m^2}$$

où

\vec{B} s'exprime en teslas (T)

μ est la perméabilité magnétique absolue du milieu et s'exprime en H/m

Remarque : Un aimant ticonal, peut induire dans l'air des champs de plusieurs teslas. La terre induit dans l'espace qui l'entoure un champ très faible, inférieur au millionième de tesla. Bien que faible ce champ a permis pendant des siècles aux navigateurs terrestres, aériens et marins, de s'orienter sur la surface de notre globe terrestre, la boussole étant utilisée comme détecteur.

4.3 MILIEUX AMAGNÉTIQUES

– Dans le vide, les vecteurs excitation magnétique et induction magnétique sont proportionnels et colinéaires :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{Unités :} \quad T = \frac{H}{m} \frac{A}{m} = \frac{Wb}{m^2}$$

où

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \quad \text{est la perméabilité absolue du vide}$$

– Lorsque les milieux sont peu perturbés par l'excitation magnétique, on dit qu'ils sont amagnétiques (air, eau, homme, cuivre, acier inox, aluminium, bois, etc.).

La perméabilité est alors voisine de la perméabilité absolue du vide. Les vecteurs excitation magnétique et induction magnétique sont quasiment proportionnels et colinéaires.

$$\mu \approx \mu_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$$

4.4 MILIEUX FERROMAGNÉTIQUES

À *contrario*, lorsque les milieux sont fortement modifiés par l'excitation magnétique, on dit qu'ils sont ferromagnétiques, même s'ils ne contiennent pas de fer ! (fer doux, acier, nickel, chrome, ferrites, cobalt, etc.). Dans ces milieux, le champ induction magnétique dépend de l'intensité de l'excitation magnétique et du passé magnétique du milieu.

Attention !

Dans un milieu ferromagnétique, les vecteurs excitation magnétique et induction magnétique ne sont pas proportionnels. Pour une faible intensité H de l'excitation magnétique, l'intensité B de l'induction magnétique est sensiblement proportionnelle à H . Au-delà, l'intensité B n'est pas proportionnelle à H . Et pour une forte intensité de H , B n'augmente pratiquement plus : le milieu est saturé (Fig. 4.10).

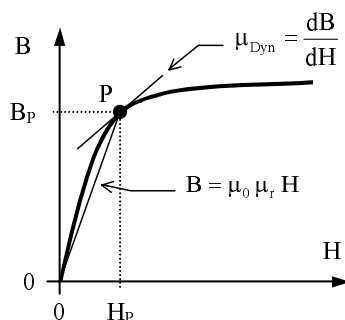


Fig. 4.10 Courbe de première aimantation

4.4.1 Calcul de l'intensité de l'induction magnétique

Méthode

Il faut d'abord calculer l'intensité H de l'excitation magnétique, puis, à partir de la courbe dite de « première aimantation » $B = f(H)$ du milieu, en déduire l'intensité B de l'induction magnétique (voir Fig. 4.10).

4.4.2 Perméabilité relative μ_r d'un milieu

Pour un point P de la courbe d'aimantation (voir Fig. 4.10), on peut écrire :

$$B = \mu H \quad \text{avec} \quad \mu = \mu_r \mu_0 \quad \text{Unités :} \quad H/m$$

où μ_r est la perméabilité relative du milieu par rapport au vide

Exemple 4.4.1

Pour le fer μ_r est de l'ordre de 1 000, et pour des ferrites HF il est de l'ordre de 10 000.

Attention ! La perméabilité relative d'un milieu ferromagnétique n'est pas constante. C'est la fonction :

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \quad \text{qui dépend de } H$$

4.4.3 Perméabilité dynamique

Pour de petites variations de H autour d'un point donné (voir Fig. 4.10) on peut définir une perméabilité magnétique dynamique :

$$\mu_{\text{Dyn}} = \frac{dB}{dH}$$

4.4.4 Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique

Lorsqu'un matériau magnétique a été soumis plusieurs fois à un champ magnétique intense et changeant de sens périodiquement, sa courbe d'aimantation se stabilise en un cycle d'hystérésis (Fig. 4.11).

- **Saturation d'un matériau ferromagnétique.** Dès que l'intensité H de l'excitation magnétique dépasse H_{Sat} (intensité de saturation) en valeur absolue, l'intensité B de l'induction magnétique ne croît plus : le matériau est saturé.

- **Induction rémanente.** Si on supprime le champ magnétique ($H = 0$), il subsiste une induction magnétique non nulle, appelée induction rémanente (B_r). Cette propriété est utilisée pour fabriquer les aimants permanents et les supports d'enregistrements magnétiques (Effet mémoire).

- **Désaimantation d'un matériau ferromagnétique.** Pour annuler l'induction rémanente, il faut appliquer une excitation opposée, dite *excitation coercitive* (H_C). Mais sa suppression, ré-aimante le matériau dans l'autre sens. La seule solution consiste à parcourir plusieurs fois le cycle d'hystérésis, en diminuant progressivement l'intensité H , jusqu'à l'annuler (tête d'effacement des magnétoscopes et magnétophones).

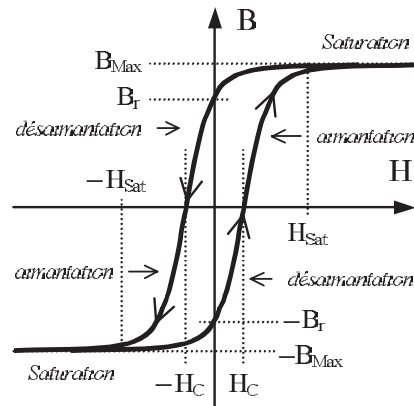


Fig. 4.11 Cycle d'hystérésis

Remarque : Les matériaux magnétiques « doux » (le fer par exemple) possèdent des cycles d'hystérésis étroits : la désaimantation s'effectue assez facilement. Tandis que les matériaux magnétiques « durs » (l'acier par exemple) possèdent des cycles d'hystérésis larges : la désaimantation nécessite de fortes excitations magnétiques. C'est pourquoi les aimants sont réalisés avec des matériaux magnétiques « durs ».

4.4.5 Pertes magnétiques

- Le parcours du cycle d'hystérésis se traduit par des pertes énergétiques, (aimantation dans un sens puis dans l'autre).
- Il faut souligner également des pertes ferromagnétiques dues au déplacement des électrons de conduction des matériaux, qui décrivent des cercles (Courants de Foucault).
- Ces pertes P_{Fer} provoquent un échauffement du matériau, proportionnel au carré de la fréquence du courant d'excitation. En première approximation, on peut représenter ces pertes par une résistance fictive R_F dissipant la même puissance thermique.

4.5 FLUX D'INDUCTION MAGNÉTIQUE

4.5.1 Orientation d'une surface S (Fig. 4.12)

On représente une surface par un vecteur \vec{S} dont le module est l'aire de la surface. Ce vecteur \vec{S} est normal à la surface. Son sens (conventionnel) est déterminé à l'aide d'une courbe fermée et orientée dessinée autour de l'origine du vecteur représentant la surface.

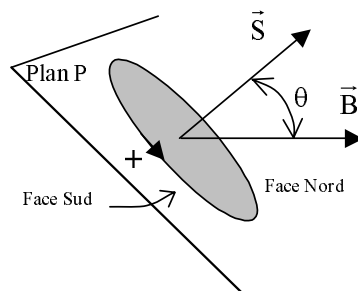


Fig. 4.12 Orientation de la surface S .
Flux à travers la surface S

4.5.2 Flux à travers une surface : Définitions (Fig. 4.13)

Le flux est une grandeur algébrique qui traduit la traversée d'un champ à travers la surface S . Son calcul nécessite l'orientation de S (voir Fig. 4.12).

4.5.3 Circuit magnétique parfait : C.M.P.

C'est un circuit où toutes les lignes d'induction sont confinées dans le matériau, on dit que le circuit est sans fuite magnétique. Il a néanmoins des pertes magnétiques P_{Fer} .

Exemple 4.5.2

Un tore (voir Fig. 4.9) constitue un circuit magnétique presque parfait.

$\varphi_S(\vec{B})$: Flux du vecteur induction magnétique \vec{B} à travers la surface S Unités : $\text{Wb} = \text{Tm}^2$ (Wb : webers)	
Forme algébrique	$\varphi_S(B) = BS \cos(\theta)$
Forme vectorielle (produit scalaire)	$\varphi_S(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$
Forme intégrale	$\varphi_S(\vec{B}) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Fig. 4.13 Définitions du flux du vecteur \vec{B} à travers la surface S

Remarque : Le flux d'induction magnétique est conservatif (Fig. 4.14) dans un C.M.P. Autrement dit, le flux sortant à travers la surface latérale ($S_{\text{latérale}}$) est nul.

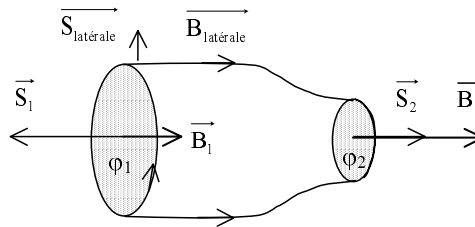


Fig. 4.14 C.M.P. - Le flux d'induction magnétique est conservatif

D'où :

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Leftrightarrow \quad B_1 S_1 = B_2 S_2$$

En conséquence, lorsque la section diminue l'induction magnétique augmente.

$$\begin{cases} S_1 > S_2 \\ B_1 S_1 = B_2 S_2 \end{cases} \Rightarrow B_1 < B_2$$

Remarque : Un C.M.P. est nécessairement fermé sur lui-même.

4.6 RÉLUCTANCE \mathfrak{R} D'UN C.M.P.

• **Loi d'Hopkinson.** Soit un C.M.P. enlacé par N spires parcourues par un courant i , cette source d'excitation magnétique crée une induction magnétique.

L'intensité H du vecteur excitation magnétique le long d'une ligne de champ fermée (théorème d'Ampère) est : $H\ell = Ni$. Cette excitation magnétique crée une induction magnétique dans le C.M.P. d'intensité : $B = \mu H$. Le flux magnétique à travers une section du circuit magnétique s'écrit :

$$\varphi = BS = \mu HS = \frac{\mu NiS}{\ell} \quad \text{D'où : } Ni = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S} \varphi$$

C'est la *relation d'Hopkinson*, qui s'écrit :

$$\varepsilon = \Re \varphi$$

avec $\varepsilon = Ni$

et $\Re = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S}$

Unités : $A = H^{-1} \text{ Wb}$

Unités : A

Unités : $H^{-1} = \frac{1}{H/m} \frac{m}{m^2}$

où ε s'appelle la force magnétomotrice et s'exprime en ampères (A), φ est le flux magnétique et s'exprime en webers (Wb), et \Re s'appelle la réluctance et s'exprime en inverse d'henrys (H^{-1}).

• *Analogie avec la loi d'Ohm*

Loi d'Hopkinson		Loi d'Ohm
$\varepsilon = \Re \varphi$ Unités : $A = H^{-1} \text{ Wb}$	\leftrightarrow	$u = Ri$ Unités : $V = \Omega A$
ε : force magnétomotrice en ampères (A) ou ampères-tours (A trs)	\leftrightarrow	u : tension en volts (V)
φ : flux magnétique en webers (Wb)	\leftrightarrow	i : intensité en ampères (A)
\Re : réluctance en henrys ⁻¹ (H^{-1}) $\Re = \frac{1}{\mu} \frac{\ell}{S}$ Unités : $H^{-1} = \frac{1}{H/m} \frac{m}{m^2}$	\leftrightarrow	R : résistance en ohms (Ω) $R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$ Unités : $\Omega = \Omega m \frac{m}{m^2}$

Méthode

Des lois et théorèmes analogues aux lois et théorèmes vus au Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité, peuvent être établis.

Question : Soit le circuit magnétique (Fig. 4.15). Dessiner son schéma analogue équivalent. Puis, exprimer la réluctance équivalente à l'ensemble du circuit magnétique.

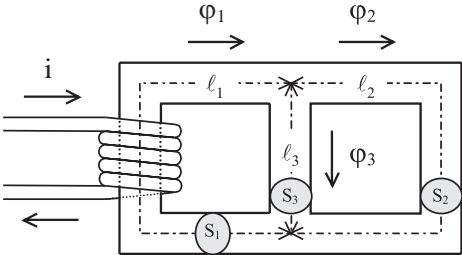


Fig. 4.15 Exemple d'un circuit magnétique

Réponse :

Le schéma analogue équivalent du circuit magnétique est représenté (Fig. 4.16). La réluctance équivalente est :

$$\mathfrak{R}_{\text{Équ}} = \mathfrak{R}_1 + (\mathfrak{R}_2 // \mathfrak{R}_3)$$

(// signifie en parallèle) avec

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{\mu_1} \frac{\ell_1}{S_1} \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{1}{\mu_2} \frac{\ell_2}{S_2} \quad \mathfrak{R}_3 = \frac{1}{\mu_3} \frac{\ell_3}{S_3}$$

Équation analogue à la loi des nœuds : $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_3$

Équation analogue à la loi des mailles :

$$\varepsilon - \mathfrak{R}_1 \varphi_1 = \mathfrak{R}_2 \varphi_2 = \mathfrak{R}_3 \varphi_3 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \mathfrak{R}_{\text{Équ}} \varphi_1$$

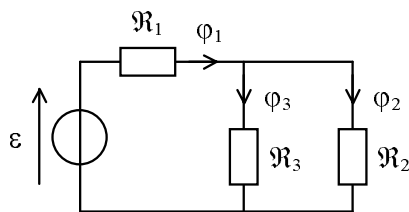


Fig. 4.16 Schéma analogue équivalent de l'exemple

Remarque : Le calcul des réluctances nécessite la connaissance des perméabilités magnétiques. Si on peut considérer que les perméabilités magnétiques sont constantes, alors le problème se résout facilement. Mais, d'une manière générale (matériaux ferromagnétiques), la perméabilité magnétique d'un milieu est une fonction de l'intensité H de l'excitation magnétique : Il faudra donc prendre le problème par le « bon bout », en commençant par récapituler données connues et inconnues.

4.7 FLUX D'AUTO-INDUCTION

4.7.1 Phénomène physique

Si un circuit électrique, parcouru par un courant i , induit dans le milieu qui l'entoure une induction magnétique, alors le flux magnétique créé se reboucle dans le circuit électrique lui-même. On dit que l'on a un flux magnétique *d'auto-induction* ou *de self-induction*.

Si le circuit comporte N spires de surface S , la surface totale, effectivement traversée par le flux est : $S_{\text{Totale}} = NS$

4.7.2 Inductance : définition

Le flux total est fonction du courant i et des caractéristiques géométrique et magnétique (μ) du circuit. Cette grandeur caractéristique du circuit et de son milieu magnétique s'appelle : *inductance* ou *inductance propre* ou *auto-inductance* ou *self-inductance*.

$$\varphi_{\text{Total}} = Li$$

$$\text{Unités : } \text{Wb} = \text{HA}$$

où φ_{Total} est le flux total à travers S_{Totale} et s'exprime en webers (Wb) et L est l'inductance et s'exprime en henrys (H).

L'inductance peut s'exprimer en fonction de la réluctance :

$$\begin{cases} N i = \mathfrak{R} \varphi \\ \varphi_{\text{Total}} = L i \end{cases} \Rightarrow L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad \text{Unités :} \quad H = \frac{1}{H^{-1}}$$

Attention ! Une inductance L est constante si la perméabilité magnétique du milieu est constante et si le circuit magnétique est indéformable. Dans le cas contraire, L dépend de l'intensité de l'excitation magnétique et donc du courant i .

Question : Soit un tore comportant N spires, de section S et de rayon moyen r_{Moy} (voir Fig. 4.9). Exprimer son inductance.

Réponse : À l'intérieur du tore, l'intensité de l'excitation magnétique est :

$$H = \frac{N i}{2 \pi r} \quad \text{pour une ligne de champ de rayon } r$$

$$\text{L'intensité de l'induction magnétique est : } B = \mu H = \frac{\mu N i}{2 \pi r}$$

Hypothèse simplificatrice : On considère que l'intensité moyenne du champ induction magnétique dans le tore est égale à sa valeur sur le rayon moyen.

$$B_{\text{Moy}} \approx \frac{\mu N i}{2 \pi r_{\text{Moy}}}$$

Le flux à travers la surface S , c'est à dire pour une spire, est :

$$\varphi = B_{\text{Moy}} S \approx \frac{\mu N S}{2 \pi r_{\text{Moy}}} i$$

Le flux total à travers $S_{\text{Totale}} = N S$, c'est à dire pour les N spires, est :

$$\varphi_{\text{Total}} = B_{\text{Moy}} S_{\text{Totale}} \approx \frac{\mu N S_{\text{Totale}}}{2 \pi r_{\text{Moy}}} i = \frac{\mu N^2 S}{2 \pi r_{\text{Moy}}} i$$

D'où l'inductance :

$$L \approx \frac{\mu N^2 S}{2 \pi r_{\text{Moy}}} \quad \text{qui s'écrit aussi : } L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad \text{avec } \mathfrak{R} \approx \frac{1}{\mu} \frac{2 \pi r_{\text{Moy}}}{S}$$

4.8 CIRCUITS À FLUX VARIABLE

4.8.1 Phénomène physique : la loi de Lenz

L'idée : Toute *action* sur un milieu se traduit par une *réaction* de celui-ci, ayant tendance à s'opposer à l'action qui lui a donné naissance. En électromagnétisme, si un circuit de section S est parcouru par un courant i , il en résulte un flux d'auto-induction φ_{Total} traversant le circuit électrique. Alors, toute action tendant à modifier ce flux provoque l'apparition d'une grandeur électrique qui tend à s'opposer à cette modification (Action \Rightarrow Réaction). Cette réaction peut prendre plusieurs aspects : modification d'une grandeur géométrique du circuit (déplacement ou déformation), apparition d'un courant i_R opposé à i . On peut considérer que ce courant i_R a pour origine une tension : c'est la loi de Faraday.

4.8.2 Loi de Faraday

Lors d'une variation du flux du champ d'induction magnétique dans un circuit fixe, ou de la modification d'une grandeur géométrique du circuit (déplacement ou déformation) dans un champ d'induction magnétique, une tension induite apparaît. Cette tension est donnée, en convention récepteur, par :

$$d\varphi_{\text{Total}} = u \, dt \quad \text{Unités : } \text{Wb} = \text{Vs}$$

Dans le cas d'un circuit fermé, cette tension donne naissance à un courant tel que :

$$\varphi_{\text{Total}} = Li \quad \Rightarrow \quad u = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt}$$

Dans le cas où l'inductance L est constante (μ constante et circuit indéformable), on obtient la relation classique :

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \text{Unités : } \text{V} = \text{H} \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Remarque : La tension u s'oppose à la variation du flux φ_{Total} (et donc du courant i) qui lui donne naissance.

Exemple 4.8.3

Voir Chapitre 13 : Bobines non-couplées.

4.8.3 Règle du flux maximum

Lorsque cela est possible, la géométrie (section, longueur) ou le milieu magnétique d'un C.M.P. évoluent (déplacement ou déformation) de manière à rendre le flux traversant le circuit maximum. Cela se traduit par une diminution de la réluctance et par l'apparition de forces électromagnétiques.

4.8.4 Electroaimants

- **Constitution et fonctionnement.** Un électroaimant est constitué d'un noyau ferromagnétique, enlacé par un solénoïde possédant un grand nombre de spires (de quelques centaines à quelques milliers). Il peut être alimenté en courant alternatif ou continu. Sous l'influence du champ magnétique créé par le bobinage, le noyau s'aimante. Il crée une induction magnétique. Le flux ayant tendance à être maximum, il attire toute pièce ferromagnétique susceptible de l'accroître (diminution de la réluctance par augmentation de la perméabilité magnétique). Il attire ainsi la partie mobile qui ferme ou ouvre des contacts.

- **Force portante d'un électroaimant.** Lorsque les pièces sont en contact (entrefer nul), la force portante vaut :

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0}$$

où F : force portante en newtons (N), B : intensité de l'induction magnétique à l'extrémité du noyau en teslas (T), et S : surface totale de contact entre le noyau et la pièce ferromagnétique qu'il attire (m^2).

Remarque : Dans les électroaimants et les transformateurs, les forces électromagnétiques qui tendent à augmenter le flux, sont proportionnelles au carré de l'induction B qui est sinusoïdale :

$$B = B_{\text{Max}} \cos(2\pi ft) \Rightarrow F \approx F_{\text{Max}} \cos^2(2\pi ft) = \frac{F_{\text{Max}}}{2} [1 + \cos(4\pi ft)]$$

Ces forces ont une composante continue et une composante vibratoire dont la fréquence est $2f$, soit 100 Hz en électricité industrielle. Cela correspond au bruit qu'émettent les tôles des transformateurs monophasés et les électroaimants.

Chapitre 5

Régime sinusoïdal permanent monophasé – Étude en fréquence

5.1 CARACTÉRISTIQUES D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

• **Tension sinusoïdale.** Diagramme temporel (Fig. 5.1). Terminologie (Fig. 5.2).
Expression temporelle :

$$u = u(t) = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u}) = U_{\text{Max}} \sin(\omega(t + t_{0,u})) \quad \text{avec} \quad \varphi_{0,u} = \omega t_{0,u}$$

où $\omega = 2\pi f$ Unités : rad/s = rad Hz $f = \frac{1}{T}$ Unités : Hz = $\frac{1}{s}$

$\omega T = 2\pi$ Unités : (rad/s) s = rad

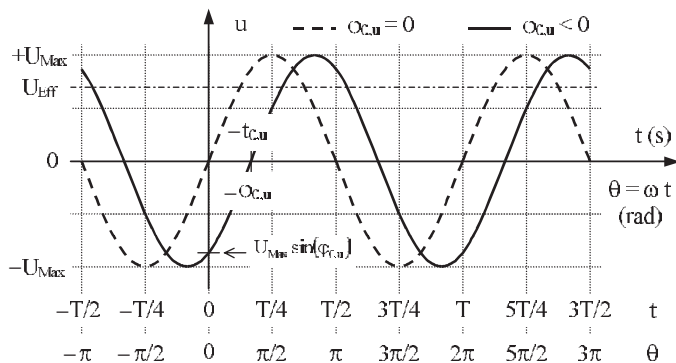


Fig. 5.1 Chronogramme de $u = u(t) = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$

Attention ! Il faut être vigilant, car on trouve indifféremment $\varphi_{0,u}$ précédée d'un signe plus à l'intérieur du sinus comme ici, ou bien précédée d'un signe moins.

Valeur moyenne et valeur efficace (sur un nombre entier de périodes) :

$U_{Moy} = 0$

et

$U_{Eff} = \frac{U_{Max}}{\sqrt{2}}$

Symbole	Nom	Unité
t	temps	seconde (s)
$u = u(t)$	valeur instantanée de la tension : amplitude à l'instant t	volt (V)
U_{Max}	valeur maximale de la tension : amplitude maximale	volt (V)
U_{Moy}	valeur moyenne de la tension	volt (V)
U_{Eff}	valeur efficace de la tension	volt (V)
ω	pulsation	radian par seconde (rad/s)
$\varphi_{0,u}$	phase de u à l'origine des temps, c'est à dire à l'instant t = 0	radian (rad)
$\varphi_u = \varphi_u(t) = \omega t + \varphi_{0,u}$	phase de u à l'instant t	radian (rad)
T	période	seconde (s)
f	fréquence	hertz (Hz)

Fig. 5.2 Terminologie

Exemple 5.1.1

La tension secteur délivrée par EDF a les caractéristiques suivantes :

$U_{Eff} \approx 230 \text{ V}$

$U_{Max} \approx 325 \text{ V}$

$f = 50 \text{ Hz}$

$T = 20 \text{ ms}$

$\omega = 314,16 \text{ rad/s}$

- **Signal sinusoïdal quelconque.** Les expressions et définitions données pour une tension sinusoïdale restent valables quelle que soit la grandeur sinusoïdale.

$s = s(t) = S_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,s})$

Exemple 5.1.2

Expression temporelle d'un courant sinusoïdal :

$i = i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,i})$

• **Déphasage.** On appelle déphasage d'un signal sinusoïdal par rapport à un autre signal sinusoïdal, la différence entre les phases.

Exemple 5.1.3

Le déphasage de la tension u par rapport au courant i est :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} = \omega (t_{0,u} - t_{0,i})$$

Si $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} > 0$ alors la tension u est en avance par rapport au courant i .

Si $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i} < 0$ alors la tension u est en retard par rapport au courant i .

Méthode

Pour définir la référence de phase, il est commode d'attribuer une phase nulle au signal pris pour référence.

Exemple 5.1.4

En choisissant arbitrairement $\varphi_{0,i} = 0$ on a $\varphi = \varphi_{0,u}$. D'où :

$$i = i(t) = I_{\text{Max}} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad u = u(t) = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi)$$

5.2 RÉGIME SINUSOÏDAL PERMANENT : MÉTHODES DE CALCULS

Lorsqu'un circuit électrique linéaire (c'est-à-dire composé de dipôles linéaires) est alimenté en permanence (tout régime transitoire a donc cessé) par une source d'énergie électrique sinusoïdale, les grandeurs électriques du circuit sont toutes sinusoïdales de même fréquence égale à celle de la source. On dit alors que l'on est en *régime sinusoïdal forcé et établi* ou *régime sinusoïdal permanent*.

Bien entendu, les calculs sur les valeurs instantanées restent possibles, mais ils deviennent vite délicats. Afin de faciliter les calculs, on utilise deux outils, qui font abstraction du temps : le formalisme complexe, ou la construction vectorielle de Fresnel.

Attention ! Les lois (nœuds et mailles) et théorèmes (Superposition, Thévenin, Norton, Millmann, etc.) vus au Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité, restent valables à condition de les appliquer aux valeurs instantanées, ou bien, de les transposer au calcul complexe ou au calcul vectoriel.

Remarque : Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, elles doivent être synchrones et de même fréquence.

5.2.1 Construction vectorielle de Fresnel

Méthode

À chaque grandeur sinusoïdale on associe un vecteur, et réciproquement (Fig. 5.3).

Grandeur sinusoïdale		Vecteur associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$	\leftrightarrow	Vecteur : \vec{U}
Amplitude : U_{Max}	\leftrightarrow	Norme : $\ \vec{U}\ = U_{\text{Max}}$
Phase à $t = 0$: $\varphi_{0,u}$	\leftrightarrow	Angle polaire : $\varphi_{0,u}$

Fig. 5.3 Vecteur associé à une grandeur sinusoïdale

Question : Soit le schéma (Fig 5.4). Déterminer l'intensité du courant traversant la lampe L, sachant que les courants sinusoïdaux triphasés équilibrés sont :

$$i_1 = I_{\text{Max}} \sin(\omega t) \quad i_2 = I_{\text{Max}} \sin(\omega t + 2\pi/3) \quad i_3 = I_{\text{Max}} \sin(\omega t + 4\pi/3)$$

avec

$$I_{\text{Max}} = 1 \text{ A} \quad \text{et} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

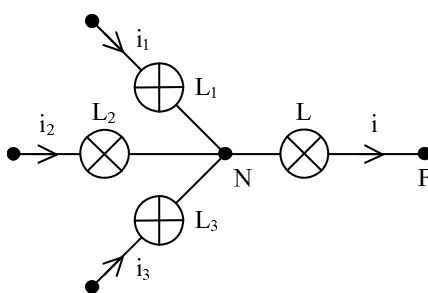


Fig. 5.4 Exemple de courants sinusoïdaux triphasés

Réponse :

– À chaque courant, on associe un vecteur :

$$i_1 \leftrightarrow \vec{I}_1, \quad i_2 \leftrightarrow \vec{I}_2, \quad i_3 \leftrightarrow \vec{I}_3 \quad \text{et} \quad i \leftrightarrow \vec{I}$$

– Loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad \leftrightarrow \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3$$

- On construit graphiquement la somme vectorielle des courants (Fig. 5.5), sachant que chaque vecteur a pour longueur I_{Max} . Le vecteur résultant étant nul, on en déduit que l'amplitude du courant i est nulle.

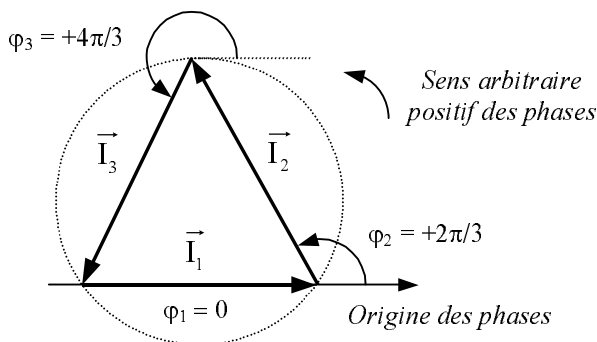


Fig. 5.5 Construction vectorielle de Fresnel

Remarque : La lampe L ne s'allume pas et le fil F est inutile. L'application directe est le transport de l'énergie électrique à l'aide de lignes triphasées, sans retour de courant : des millions de kilomètres de câbles électriques économisés !

5.2.2 Utilisation des nombres complexes

Afin de faciliter les calculs, on associe une fonction complexe du temps $\underline{u} = \underline{u}(t)$ à chaque grandeur réelle sinusoïdale du temps $u = u(t)$. Si la grandeur est un sinus (respectivement cosinus), alors elle est donnée par la partie imaginaire (respectivement réelle) de la fonction complexe (Fig. 5.6).

Grandeur sinusoïdale		Fonction complexe associée
Si $u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$ alors $u = \text{Im}(\underline{u})$	\leftrightarrow	$\underline{u} = U_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi_{0,u})}$
Si $u = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \varphi_{0,u})$ alors $u = \text{Re}(\underline{u})$		$= U_{\text{Max}} e^{j\varphi_{0,u}} e^{j\omega t}$

Fig. 5.6 Fonction complexe associée à une grandeur sinusoïdale

On définit l'amplitude complexe de $\underline{u} = \underline{u}(t)$:

$$\underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\varphi_{0,u}} \quad (\text{c'est un nombre complexe})$$

Attention ! Le module de \underline{U} , noté $|\underline{U}|$, est ici égal à U_{Max} (valeur maximale) ; et non à U_{Eff} (valeur efficace) comme cela est parfois le cas lorsque le coefficient $\sqrt{2}$ est arbitrairement introduit.

Remarque : Dans le cas d'un système linéaire où toutes les sources sont synchrones (même temps) et de même fréquence, on peut faire abstraction du terme $\exp(j\omega t)$, ce qui revient à travailler avec les seules amplitudes complexes.

Méthode

À chaque grandeur sinusoïdale on associe un nombre complexe, et réciproquement (Fig. 5.7).

Grandeur sinusoïdale		Nombre complexe associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$	\leftrightarrow	Nombre complexe : $\underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\varphi_{0,u}}$
Amplitude : U_{Max}	\leftrightarrow	Module : $ \underline{U} = U_{\text{Max}}$
Phase à $t = 0$: $\varphi_{0,u}$	\leftrightarrow	Argument : $\text{Arg}(\underline{U}) = \varphi_{0,u}$

Fig. 5.7 Nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale

Question : On reprend l'exemple précédent (voir schéma Fig. 5.4). Déterminer l'intensité du courant traversant la lampe L.

Réponse :

– À chaque courant, on associe un nombre complexe :

$$\begin{aligned} i &\leftrightarrow \underline{I} = I_{\text{M}} e^{j\varphi} & i_1 &\leftrightarrow \underline{I}_1 = I_{\text{Max}} \\ i_2 &\leftrightarrow \underline{I}_2 = I_{\text{Max}} e^{j2\pi/3} & i_3 &\leftrightarrow \underline{I}_3 = I_{\text{Max}} e^{j4\pi/3} \end{aligned}$$

– Loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad \leftrightarrow \quad \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

D'où :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= I_{\text{Max}} [1 + e^{j2\pi/3} + e^{j4\pi/3}] \\ &= I_{\text{Max}} [1 + \cos(2\pi/3) + j \sin(2\pi/3) + \cos(4\pi/3) + j \sin(4\pi/3)] = 0 \end{aligned}$$

5.2.3 Formulaire sur les nombres complexes

Forme cartésienne : $\underline{Z} = (a, b) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$	$\underline{Z} = a + jb$
Forme polaire : $\underline{Z} = [\rho ; \varphi] \quad \rho \geq 0$	$\underline{Z} = \rho e^{j\varphi} = \rho [\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)]$
Complexe conjugué : $\overline{\underline{Z}}$	$\overline{\underline{Z}} = a - jb = \rho e^{-j\varphi}$
Partie réelle : $a = \text{Re}(\underline{Z})$	$a = \rho \cos(\varphi) = \frac{1}{2} (\underline{Z} + \overline{\underline{Z}})$
Partie imaginaire : $b = \text{Im}(\underline{Z})$	$b = \rho \sin(\varphi) = \frac{1}{2j} (\underline{Z} - \overline{\underline{Z}})$
Module : $ \underline{Z} = \rho \quad (\rho \geq 0)$	$\rho^2 = \underline{Z} \overline{\underline{Z}} = a^2 + b^2$
Argument : $\text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi \quad (\text{modulo } 2\pi)$	$\rho \neq 0 \Rightarrow \cos(\varphi) = a/\rho \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = b/\rho$
	$a \neq 0 \Rightarrow \tan(\varphi) = b/a$
	$\begin{cases} a > 0 & \Rightarrow \varphi = \text{Arc tan}(b/a) \\ a < 0 & \Rightarrow \varphi = \pm\pi + \text{Arc tan}(b/a) \end{cases}$
Notation exponentielle :	$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$
Formules d'Euler :	$\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$
Formule de Moivre :	$(e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi} \quad (n \in \mathbb{N})$
Somme (forme cartésienne) :	$\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
Produit (forme polaire) :	$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Quotient (forme polaire) :	$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\underline{Z}_2 \neq 0)$
Puissance n ^{ième} ($n \in \mathbb{N}$) :	$(\underline{Z})^n = \rho^n e^{jn\varphi}$
Les n racines n ^{ières} ($n \in \mathbb{N}$) :	$(\sqrt[n]{\underline{Z}})_k = \sqrt[n]{\rho} e^{j(\varphi + 2k\pi)/n} \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
Produit des parties réelles :	$a_1 a_2 = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \overline{\underline{Z}_2})$
Produit des parties imaginaires :	$b_1 b_2 = \frac{-1}{2} \text{Re}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_1 \overline{\underline{Z}_2})$
Produits croisés :	$b_1 a_2 = \frac{1}{2} \text{Im}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \overline{\underline{Z}_2})$ $a_1 b_2 = \frac{1}{2} \text{Im}(\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_1 \overline{\underline{Z}_2})$

Attention ! La fonction Arc-tangente renvoie une valeur comprise entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

5.3 IMPÉDANCE ET ADMITTANCE COMPLEXES D'UN DIPÔLE

Soit le dipôle linéaire (Fig. 5.8). La convention récepteur est adoptée.

• Définitions

L'impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle est le rapport de $\underline{u}(t)$ par $\underline{i}(t)$.

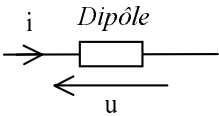


Fig. 5.8 Dipôle linéaire

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} e^{j\varphi} = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} e^{j\varphi} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} = R + jX$$

avec

$$\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i}$$

où $R = \text{Re}(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \cos(\varphi)$: résistance, $X = \text{Im}(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \sin(\varphi)$: réactance. $|\underline{Z}|$, R et X s'expriment en ohms (Ω).

L'admittance complexe \underline{Y} est l'inverse de l'impédance complexe.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jB$$

où $G = \text{Re}(\underline{Y}) = \frac{R}{R^2 + X^2}$: conductance, $B = \text{Im}(\underline{Y}) = \frac{-X}{R^2 + X^2}$: susceptance. $|\underline{Y}|$, G et B s'expriment en siemens (S) ou en $\text{ohms}^{-1} (\Omega^{-1})$.

• Schéma électrique et notations complexes – « Loi d'Ohm » (Fig. 5.9)

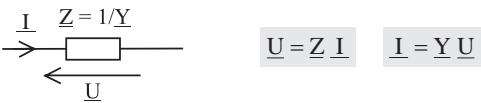


Fig. 5.9 Notations complexes – « Loi d'Ohm »

• Dipôles linéaires élémentaires (Fig. 5.10)

	Impédance complexe	Représentation de Fresnel
Résistance 	$\underline{Z}_R = R$	
Inductance 	$\underline{Z}_L = jL\omega$ $= L\omega e^{+j\pi/2}$	
Capacité 	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ $= \frac{1}{C\omega} e^{-j\pi/2}$	

Fig. 5.10 Dipôles linéaires élémentaires

• **Association d'impédances en série** (Fig. 5.11). Deux dipôles sont en série s'ils sont traversés par le même courant.

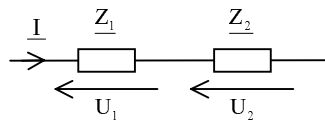


Fig. 5.11 Mise en série

Pour 2 impédances :

$$\underline{U}_{\text{Tot}} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_{\text{Equ}} \underline{I} \quad \text{avec}$$

$$\underline{Z}_{\text{Equ}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

Pour n impédances :

$$\underline{U}_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \underline{Z}_{\text{Equ}} \underline{I} \quad \text{avec}$$

$$\underline{Z}_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

• **Association d'impédances en parallèle** (Fig. 5.12). Deux dipôles sont en parallèle s'ils sont alimentés sous la même tension.

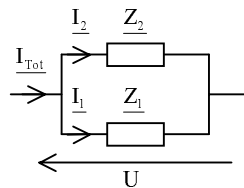


Fig. 5.12 Mise en parallèle

Pour 2 impédances :

$$\underline{I}_{\text{Tot}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{Equ}}} \quad \text{avec}$$

$$\underline{Z}_{\text{Equ}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\text{ou} \quad \underline{Y}_{\text{Equ}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

Pour n impédances :

$$\underline{I}_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{Equ}}} \quad \text{avec}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{Equ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

$$\text{ou} \quad \underline{Y}_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$$

5.4 PUISSANCES – FACTEUR DE PUISSANCE

• **Puissance instantanée.** Soit le dipôle linéaire réactif (Fig. 5.13) alimenté par un courant sinusoïdal monophasé.

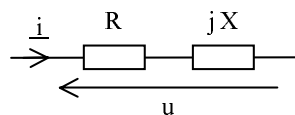


Fig. 5.13 Dipôle linéaire réactif

On a :

$$i = I_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,i}) \quad \text{et} \quad u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$$

À ces grandeurs temporelles, on associe les fonctions complexes :

$$\underline{i} = I_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi_{0,i})} \quad \text{et} \quad \underline{u} = U_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi_{0,u})}$$

La puissance instantanée est :

$$p = ui = \text{Im}(\underline{u}) \text{Im}(\underline{i}) = \frac{-1}{2} \text{Re}(\underline{u} \underline{i} - \underline{u} \bar{\underline{i}}) \quad \text{avec} \quad \underline{u} = (R + jX) \underline{i}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$p = \frac{RI_{\text{Max}}^2}{2} [1 - \cos[2(\omega t + \varphi_{0,i})]] + \frac{XI_{\text{Max}}^2}{2} \sin[2(\omega t + \varphi_{0,i})]$$

Ainsi, la puissance instantanée (p) est la somme d'une puissance transmise à la résistance, appelée *puissance active instantanée* (p_A), et d'une puissance transmise à la réactance, appelée *puissance réactive instantanée* (p_R). On écrit :

$$p = p_A + p_R$$

avec

$$p_A = P [1 - \cos[2(\omega t + \varphi_{0,i})]] \quad \text{où} \quad P = \frac{RI_{\text{Max}}^2}{2}$$

$$p_R = Q \sin[2(\omega t + \varphi_{0,i})] \quad \text{où} \quad Q = \frac{XI_{\text{Max}}^2}{2}$$

On appelle P *puissance active*, et Q *puissance réactive*.

• **Puissance moyenne.** Par définition :

$$P_{\text{Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (p_A + p_R) \, dt$$

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale étant nulle, on obtient :

$$P_{\text{Moy}} = P \quad (\text{la puissance moyenne est égale à la puissance active})$$

Remarque : Après transformation, la puissance instantanée s'écrit aussi :

$$p = P - S \cos(2\omega t + \varphi_{0,u} + \varphi_{0,i})$$

En conséquence, la puissance instantanée (p) transmise au dipôle peut aussi être vue comme la somme : *puissance moyenne* plus *puissance fluctuante*, la puissance dite fluctuante étant sinusoïdale de pulsation 2ω et d'amplitude $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ appelée *puissance apparente*.

• **Formules et relations** (Fig. 5.14)

Amplitudes complexes : $\underline{U} = U_{\text{Max}} e^{j\varphi_{0,u}}$ et $\underline{I} = I_{\text{Max}} e^{j\varphi_{0,i}}$

Déphasage de u par rapport à i : $\varphi = \varphi_{0,u} - \varphi_{0,i}$

Remarque :

$$\underline{Z} = R + jX = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} e^{j\varphi} \Rightarrow R = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad X = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} \sin(\varphi)$$

Puissance	Unité	Formules	Relations
apparente complexe	volt-ampère (VA)	$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{U} \overline{I} = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} e^{j\varphi}$	$\underline{S} = P + jQ$
active ou moyenne	watt (W)	$P = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos(\varphi)$ $= R I_{\text{Eff}}^2$	$P = \text{Re}(\underline{S})$ $P = P_{\text{Moy}}$
réactive	volt-ampère -réactif (var)	$Q = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \sin(\varphi)$ $= X I_{\text{Eff}}^2$	$Q = \text{Im}(\underline{S})$ $Q = P \tan(\varphi)$
apparente	volt-ampère (VA)	$S = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}}$	$S = \underline{S} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Fig. 5.14 Puissances : formules et relations

- **Facteur de puissance.** Caractérise le taux d'utilisation du réseau.

Définition générale	Régime sinusoïdal et linéaire
$f_P = \frac{P}{S}$	$f_P = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)$

- **Puissances de dipôles linéaires élémentaires** (Fig. 5.15).

Dipôle élémentaire	Puissance active	Puissance réactive
R	$P = R I_{\text{Eff}}^2 = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{R}$	0
L	0	$Q = L \omega I_{\text{Eff}}^2 = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{L \omega}$
C	0	$Q = \frac{-I_{\text{Eff}}^2}{C \omega} = -C \omega U_{\text{Eff}}^2$

Fig. 5.15 Puissances de dipôles linéaires élémentaires

- **Interprétation physique**

À la puissance active correspond une énergie active qui est absorbée et transformée dans le récepteur en énergie thermique, mécanique, chimique, etc.

A contrario, à la puissance réactive correspond une énergie réactive qui va périodiquement de la source vers le récepteur puis du récepteur vers la source, et ainsi de suite sans ne jamais être absorbée par le récepteur.

L'existence d'une puissance réactive conduit à une augmentation du courant dans le générateur et la ligne alimentant le récepteur. Cette augmentation engendre un surcroît de pertes et nécessite un surdimensionnement des moyens de transport. La puissance apparente est un élément de dimensionnement de la ligne et du générateur. Pour une puissance active donnée, plus le facteur de puissance est faible et plus le courant est élevé. C'est pourquoi EDF impose un facteur de puissance élevé et pénalise financièrement les consommateurs d'énergie réactive.

• **Théorème de Boucherot.** La puissance active totale (respectivement réactive totale) consommée par un ensemble de récepteurs est égale à la somme des puissances actives (respectivement réactives) consommées par chaque récepteur.

Ainsi, une installation comportant n récepteurs, alimentée sous une tension U_{Eff} et consommant un courant I_{Eff} , absorbe une puissance active P_{Tot} et une puissance réactive Q_{Tot} avec un facteur de puissance $f_p = \cos(\varphi)$ tels que :

$$P_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n P_k = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos(\varphi) \quad Q_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n Q_k = U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \sin(\varphi)$$

Attention ! Les puissances apparentes ne s'additionnent pas.

• **Relèvement du facteur de puissance.** S'il est inférieur à la norme, le facteur de puissance d'une installation doit être relevé. Une méthode simple consiste à brancher en parallèle des condensateurs sur l'installation généralement inductive.

Méthode

Les puissances actives d'une part et réactives d'autre part s'ajoutent (théorème de Boucherot). La puissance active totale est la même avec ou sans condensateur, car un condensateur supposé parfait ne consomme pas de puissance active. Ce n'est pas le cas de la puissance réactive totale qui est réduite par la présence du condensateur (installation inductive).

Question : Un moteur de puissance utile $P_U = 4 \text{ kW}$, de facteur de puissance $\cos(\varphi_1) = 0,7$ et de rendement $\eta = 0,85$, est branché sur le réseau 230 V, 50 Hz.

- 1) Calculer les puissances active et réactive, puis le courant efficace.
- 2) Calculer la capacité des condensateurs à placer en parallèle sur le moteur pour relever le facteur de puissance à 0,9. En déduire le nouveau courant efficace.

Réponse :

1° Puissances active et réactive – Courant efficace

$$P_1 = \frac{P_U}{\eta} \approx 4,7 \text{ kW} \quad Q_1 = P_1 \tan(\varphi_1) \approx 4,8 \text{ kvar}$$

$$I_{1 \text{ Eff}} = \frac{P_1}{U_{\text{Eff}} \cos(\varphi_1)} \approx 29,2 \text{ A}$$

2° Calcul de C (Fig. 5.16) – Courant efficace

Puissances du moteur (sans C) :

$$\begin{cases} P_1 = U_{\text{Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \cos(\varphi_1) \\ Q_1 = U_{\text{Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \sin(\varphi_1) = P_1 \tan(\varphi_1) \end{cases}$$

Puissances du condensateur C (supposé parfait) :

$$\begin{cases} P_C = 0 \\ Q_C = -C\omega U_{\text{Eff}}^2 \end{cases}$$

Puissances totales avec C :

$$\begin{cases} P_2 = U_{\text{Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\varphi_2) = P_1 + P_C = P_1 \\ Q_2 = U_{\text{Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \sin(\varphi_2) = Q_1 + Q_C = P_2 \tan(\varphi_2) \end{cases}$$

D'où $Q_C = Q_2 - Q_1 = P_1 [\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)]$

Et finalement

$$C = \frac{P_1 [\tan(\varphi_1) - \tan(\varphi_2)]}{2\pi f U_{\text{Eff}}^2} \approx 150 \mu\text{F}$$

Courant efficace nécessaire après relèvement du facteur de puissance :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= U_{\text{Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \cos(\varphi_1) \\ P_2 &= U_{\text{Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\varphi_2) = P_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_{2 \text{ Eff}} = I_{1 \text{ Eff}} \frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} \approx 22,7 \text{ A}$$

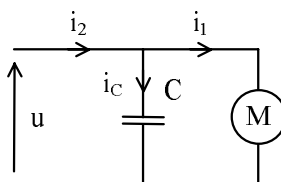


Fig. 5.16 Relèvement du facteur de puissance

Attention ! La loi des nœuds s'applique aux valeurs instantanées ($i_2 = i_1 + i_C$) mais pas aux valeurs efficaces (du fait des déphasages) !

• **Adaptation d'impédance en puissance.** Un générateur et une charge sont adaptés en puissance lorsque le transfert de puissance est maximal du générateur vers la charge.

– *Cas d'une source de tension* (Fig. 5.17). La puissance active absorbée par le récepteur est :

$$P = R I_{\text{Eff}}^2 = \frac{R E_0^2}{(R_0 + R)^2 + (X_0 + X)^2}$$

L'adaptation d'impédance en puissance est réalisée si et seulement si :

$$\underline{Z} = \overline{\underline{Z}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} R = R_0 \\ X = -X_0 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{Max}} = P_{0 \text{ Max}} = \frac{E_0^2}{4R}$$

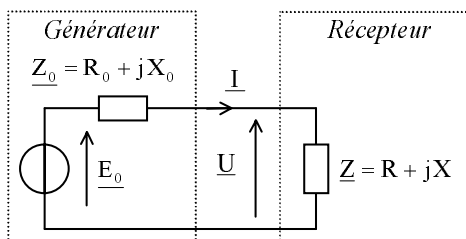


Fig. 5.17 Adaptation en puissance – Source de tension

- Cas d’une source de courant (5.18). La puissance active absorbée par le récepteur est :

$$P = GU_{\text{Eff}}^2 = \frac{G I_0^2_{\text{Eff}}}{(G_0 + G)^2 + (B_0 + B)^2}$$

L’adaptation d’impédance en puissance est réalisée si et seulement si :

$$\underline{Y} = \overline{\underline{Y}_0} \Leftrightarrow \begin{cases} G = G_0 \\ B = -B_0 \end{cases} \Rightarrow P_{\text{Max}} = P_{0 \text{ Max}} = \frac{I_0^2_{\text{Eff}}}{4G}$$

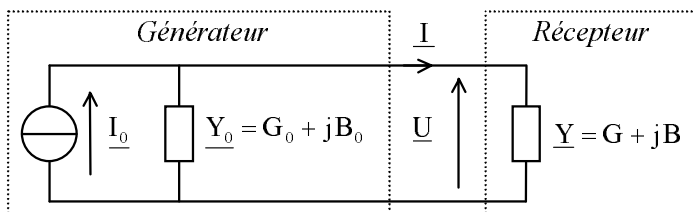


Fig. 5.18 Adaptation en puissance – Source de courant

5.5 FACTEUR DE QUALITÉ – TRANSFORMATION SÉRIE ↔ PARALLÈLE

5.5.1 Facteur de qualité

• **Définition.** Un dipôle réactif est parfait s’il n’absorbe pas de puissance active (voir § 5.4). Pour chiffrer cette perfection, on définit le facteur de qualité f_Q par :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} \quad (f_Q \text{ est toujours positif})$$

où Q est la puissance réactive transmise au dipôle et P la puissance active transmise au dipôle.

Attention ! f_Q est souvent noté Q , mais attention alors à ne pas le confondre avec la puissance réactive.

• **Facteur de qualité d'un dipôle série** (Fig. 5.19).

Le même courant traverse la résistance et la réactance. D'où :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{|X_S| I_{\text{Eff}}^2}{R_S I_{\text{Eff}}^2} = \frac{|X_S|}{R_S}$$

• **Facteur de qualité d'un dipôle parallèle** (Fig. 5.20). La même tension est appliquée aux bornes de la résistance et de la réactance. D'où :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{U_{\text{Eff}}^2 / |X_P|}{U_{\text{Eff}}^2 / R_P} = \frac{R_P}{|X_P|}$$

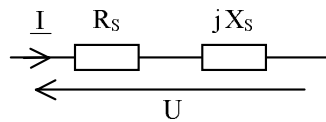


Fig. 5.19 Dipôle série

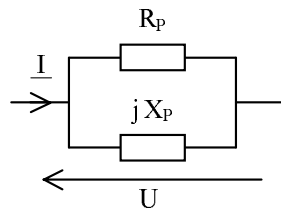


Fig. 5.20 Dipôle parallèle

Question : En courant alternatif et aux fréquences basses, on modélise un condensateur par sa capacité C en parallèle avec une résistance R rendant compte des pertes thermiques dans le diélectrique et du courant de fuite traversant l'isolant et le boîtier (Fig. 5.21). Calculer la tangente de l'angle de pertes, sachant que l'angle de pertes δ est le déphasage du courant i_C par rapport au courant i_0 .

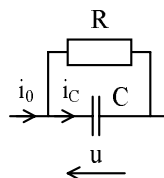


Fig. 5.21 Modèle d'un condensateur

Réponse : En appliquant le diviseur de courant, on obtient :

$$\frac{I_C}{I_0} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{RC\omega (RC\omega + j)}{1 + (RC\omega)^2}$$

D'où, par définition :

$$\tan(\delta) = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{f_Q} \quad (\text{c'est l'inverse du facteur de qualité})$$

5.5.2 Transformation série ↔ parallèle

En régime sinusoïdal, le dipôle série (Fig. 5.19) et le dipôle parallèle (Fig. 5.20) sont équivalents. Le passage de l'un à l'autre s'effectue par :

$$R_P = R_S (1 + f_Q^2) \quad \text{et} \quad X_P = X_S \left(1 + \frac{1}{f_Q^2} \right)$$

Si $f_Q^2 \gg 1$ alors

$$R_P \approx R_S f_Q^2 \quad \text{et} \quad X_P \approx X_S$$

Attention ! Le facteur de qualité dépendant de la pulsation, les passages ci-dessus en dépendent aussi.

5.6 CIRCUITS RÉSONANTS

• **Circuit résonant série** (Fig. 5.22)

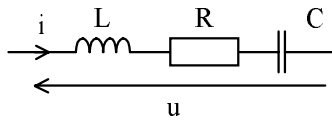


Fig. 5.22 Circuit résonant série

L'impédance complexe est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \\ \text{Arg}(\underline{Z}) = \text{Arc tan} \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \end{cases}$$

Cette impédance est résistive et minimale pour la résonance :

$$LC\omega_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_{(\omega=\omega_0)} = R$$

À la résonance ($\omega = \omega_0$), les tensions aux bornes du condensateur et de l'inductance sont maximales. On a (convention récepteur) :

$$\underline{U} = \underline{U}_R = R\underline{I} \quad \underline{U}_C = \frac{\underline{I}}{jC\omega_0} = -jQ_0\underline{U} \quad \underline{U}_L = jL\omega_0\underline{I} = jQ_0\underline{U}$$

où Q_0 est le *coefficient ou facteur de surtension* défini à la résonance par :

$$Q_0 = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}|} = \frac{U_{L\text{Eff}}}{U_{\text{Eff}}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}|} = \frac{U_{C\text{Eff}}}{U_{\text{Eff}}} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

L'impédance complexe s'écrit alors :

$$\underline{Z} = R \left[1 + jQ_0 \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = R \frac{1 - x^2 + jx/Q_0}{jx/Q_0} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Le module en décibels, et la phase en degrés, de l'impédance complexe sont représentés (Fig. 5.23). Les fréquences de coupure haute et basse, ainsi que la bande passante à +3 dB du minimum sont :

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = f_0 \left(\frac{+1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} \right) \quad f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = f_0 \left(\frac{-1}{2Q_0} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q_0^2}} \right)$$

$$BP_{(-3 \text{ dB})} = f_H - f_B = \frac{f_0}{Q_0} \text{ (en Hz)} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

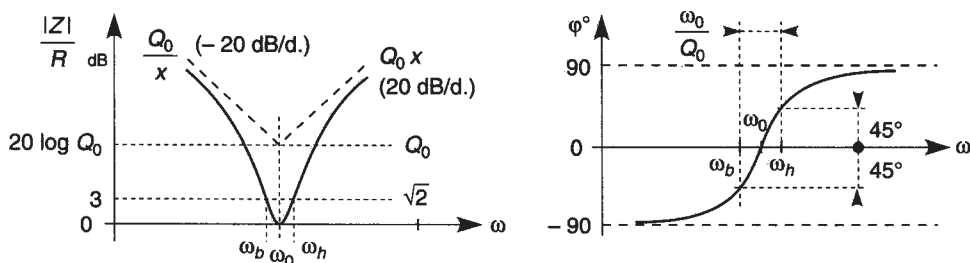


Fig. 5.23 Impédance du circuit résonant série

Remarque : Le coefficient de surtension est égal au facteur de qualité du dipôle série RC ou du dipôle série RL à $\omega = \omega_0$.

• **Circuit résonant parallèle, dit circuit « bouchon »** (Fig. 5.24)

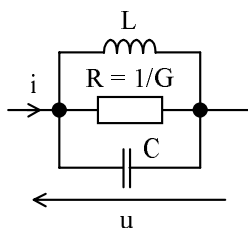


Fig. 5.24 Circuit résonant parallèle

L'admittance complexe est :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2} \\ \text{Arg}(\underline{Y}) = \text{Arc tan} \frac{C\omega - \frac{1}{L\omega}}{G} \end{cases}$$

Cette admittance est résistive et minimale pour la résonance :

$$LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \underline{Y}(\omega = \omega_0) = G$$

À la résonance ($\omega = \omega_0$), les courants dans le condensateur et l'inductance sont maximaux. On a (convention récepteur) :

$$\underline{I} = \underline{I}_R = G \underline{U} \quad \underline{I}_C = jC\omega_0 \underline{U} = jQ_0 \underline{I} \quad \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{jL\omega_0} = -jQ_0 \underline{I}$$

où Q_0 est le *coefficient ou facteur de surintensité* défini à la résonance par :

$$Q_0 = \frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}|} = \frac{I_{L \text{ Eff}}}{I_{\text{Eff}}} = \frac{1}{GL\omega_0} = \frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}|} = \frac{I_{C \text{ Eff}}}{I_{\text{Eff}}} = \frac{C\omega_0}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

L'admittance complexe s'écrit alors :

$$\underline{Y} = G \left[1 + jQ_0 \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] = G \frac{1 - x^2 + jx/Q_0}{jx/Q_0} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Soit l'impédance complexe :

$$\underline{Z} = R \frac{jx/Q_0}{1 - x^2 + jx/Q_0}$$

Le module en décibels, et la phase en degrés, de l'impédance complexe sont représentés (Fig. 5.25). Les fréquences de coupure haute et basse, ainsi que la bande passante à -3 dB du maximum sont les mêmes que pour le circuit résonant série.

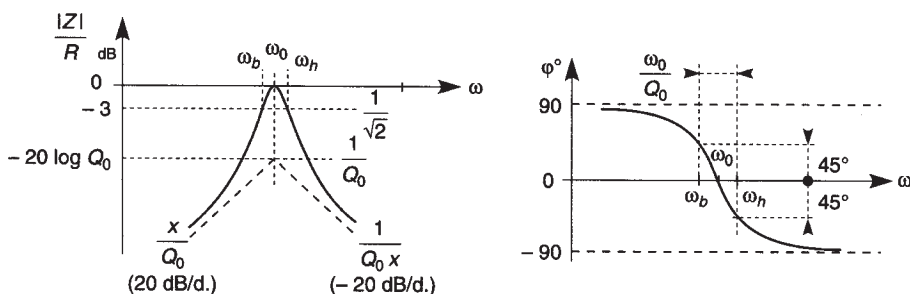


Fig. 5.25 Impédance du circuit résonant parallèle

Remarque : Le coefficient de surintensité est égal au facteur de qualité du dipôle parallèle RC ou du dipôle parallèle RL à $\omega = \omega_0$.

5.7 ÉTUDE EN FRÉQUENCE – FONCTION DE TRANSFERT COMPLEXE

Soit un système linéaire (voir Chapitre 9 : Etude temporelle d'un système linéaire) à une entrée et une sortie dont on veut étudier la réponse en fréquence appelée *réponse harmonique* (Fig. 5.26).



Fig. 5.26 Système linéaire – Fonction de transfert complexe

Au signal d'entrée sinusoïdal $e = e(t)$ on associe la fonction complexe $\underline{e} = \underline{e(t)}$, et au signal de sortie sinusoïdal (l'opération est linéaire) $s = s(t)$ on associe la fonction complexe $\underline{s} = \underline{s(t)}$.

$$\begin{aligned}\underline{e} &= E_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi_E)} = \underline{E} e^{j\omega t} & \text{d'amplitude complexe } \underline{E} &= E_{\text{Max}} e^{j\varphi_E} \\ \underline{s} &= S_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \varphi_S)} = \underline{S} e^{j\omega t} & \text{d'amplitude complexe } \underline{S} &= S_{\text{Max}} e^{j\varphi_S}\end{aligned}$$

5.7.1 Fonction de transfert (F.T.) ou transmittance

• **F.T. complexe, ou F.T. isochrone, ou encore transmittance complexe \underline{T}** (voir Fig. 5.26). C'est le rapport de $\underline{s} = \underline{s(t)}$ par $\underline{e} = \underline{e(t)}$, ou de \underline{S} par \underline{E} en simplifiant par $\exp(j\omega t)$ car on a même temps et même fréquence.

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_{\text{Max}}}{E_{\text{Max}}} e^{j(\varphi_S - \varphi_E)} = |\underline{T}| e^{j\varphi}$$

• **Module T de la F.T. complexe \underline{T}**

$$T = |\underline{T}| = \frac{S_{\text{Max}}}{E_{\text{Max}}} = \frac{S_{\text{Eff}}}{E_{\text{Eff}}}$$

• **Gain G de la F.T. complexe \underline{T}**

$$G = 20 \log |\underline{T}| \quad \text{en décibels (dB)}$$

• **Déphasage φ de la F.T. complexe \underline{T} .** φ est le déphasage de $s(t)$ par rapport à $e(t)$.

$$\varphi = \text{Arg} \underline{T} = \varphi_S - \varphi_E \quad \text{Unités : radians (rad) ou degrés (°)}$$

• **Fréquences de coupures à -3 dB.** Les fréquences de coupures dites à -3 dB sont celles pour lesquelles le gain G est inférieur à sa valeur maximale de pratiquement 3 dB. Plus exactement, les fréquences de coupures dites à -3 dB sont les fréquences pour lesquelles le module est égal au module maximal divisé par $\sqrt{2}$, ce qui correspond à la puissance maximale du signal divisée par 2.

• **Bande passante.** On définit généralement la bande passante à -3 dB, comme le domaine des fréquences pour lesquelles le gain reste supérieur au gain maximal moins 3 dB.

• **Octave – Décade.** Une *octave* (terme musical) est l'intervalle entre deux fréquences f_2 et f_1 tel que $f_2 = 2f_1$, et une *décade* est l'intervalle entre deux fréquences f_2 et f_1 tel que $f_2 = 10f_1$ (Fig. 5.27).

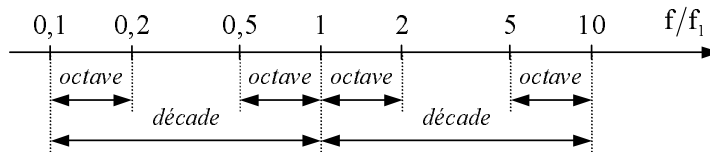


Fig. 5.27 Octaves et décades (échelle \log_{10})

Remarque : En traitement du signal, on s'intéresse souvent à la « puissance » d'un signal. On définit alors la puissance moyenne d'un signal périodique par le carré de sa valeur efficace (valeur moyenne du signal élevé au carré). Par suite, on définit la fonction de transfert en puissance T_P et le gain en puissance G_P par :

$$T_P = \frac{P_S}{P_E} = \frac{S_{\text{Eff}}^2}{E_{\text{Eff}}^2} = |\underline{T}|^2 \quad \text{et} \quad G_P = 10 \log T_P$$

Question : Soit le filtre passif passe-bas du 1^{er} ordre (Fig. 5.28).

1) Exprimer la fonction de transfert complexe, son module, son gain, son déphasage et sa fréquence de coupure. On applique en entrée le signal sinusoïdal $e(t) = E_{\text{Max}} \cos(\omega t)$. Exprimer le signal obtenu en sortie du filtre.

2) Exprimer la fonction de transfert en puissance et son gain.

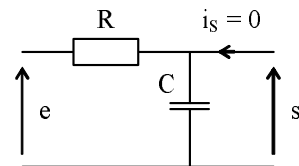


Fig. 5.28 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

Réponse : 1) Fonction de transfert

$$\underline{T} = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{S}{E} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad G = 20 \log |\underline{T}| = -10 \log [1 + (\tau\omega)^2]$$

$$\phi = \text{Arg} \underline{T} = -\text{Arc tan} (\tau\omega)$$

Cela permet d'écrire :

$$\underline{T} = \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

Fréquence de coupure à -3 dB : f_0

$$|\underline{T}| \text{ à } \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

Si $e(t) = E_{\text{Max}} \cos(\omega t)$ alors $\underline{e}(t) = E_{\text{Max}} e^{j\omega t}$

$$\Rightarrow \underline{s}(t) = \frac{E_{\text{Max}} e^{j\omega t}}{1 + j\tau\omega} = \frac{E_{\text{Max}} e^{j(\omega t + \phi)}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

D'où :

$$s(t) = \text{Re}(\underline{s}(t)) = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

2) Fonction de transfert en puissance

$$T_P = \frac{S_{\text{Eff}}^2}{E_{\text{Eff}}^2} = |\underline{T}|^2 = \frac{1}{1 + (\tau\omega)^2} \quad G_P = 10 \log T_P = -10 \log [1 + (\tau\omega)^2]$$

• **F.T. élémentaires du premier et du deuxième ordre.** Voir Chapitre 24 : Filtrage analogique.

• **Mise en cascade de F.T.** (Fig. 5.29).

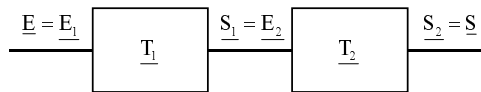


Fig. 5.29 Mise en cascade de F.T. complexes

On a :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}_2}{\underline{E}_2} \frac{\underline{S}_1}{\underline{E}_1} = \underline{T}_2 \underline{T}_1 \quad \text{avec} \quad \underline{T} = |\underline{T}| e^{j\varphi}, \underline{T}_2 = |\underline{T}_2| e^{j\varphi_2}, \underline{T}_1 = |\underline{T}_1| e^{j\varphi_1}$$

D'où :

$$|\underline{T}| = |\underline{T}_2| |\underline{T}_1| \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_1$$

et

$$G = 20 \log |\underline{T}| = 20 \log (|\underline{T}_2| |\underline{T}_1|) = 20 \log |\underline{T}_2| + 20 \log |\underline{T}_1| = G_2 + G_1$$

Attention ! D'une manière générale, l'impédance d'entrée relative à \underline{T}_2 doit être prise en compte dans \underline{T}_1 .

Question : Soit la mise en cascade de deux filtres passifs passe-bas du 1^{er} ordre (Fig. 5.30). Exprimer la F.T. complexe, son gain et son déphasage.

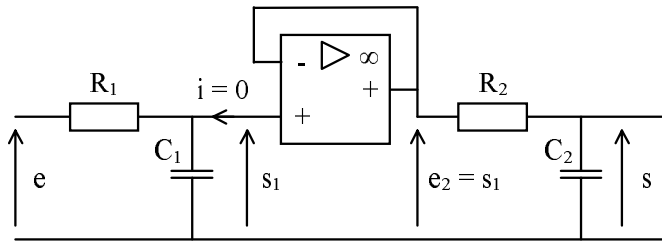


Fig. 5.30 Mise en cascade de deux filtres passe-bas du 1^{er} ordre

Réponse : Les deux étages sont indépendants. D'où :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \underline{T}_2 \underline{T}_1 = \frac{1}{(1 + j\tau_2\omega)(1 + j\tau_1\omega)} = \frac{e^{j(\phi_2 + \phi_1)}}{\sqrt{1 + (\tau_2\omega)^2} \sqrt{1 + (\tau_1\omega)^2}}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \tau_1 = R_1 C_1 \\ \tau_2 = R_2 C_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi_1 = \text{Arg} \underline{T}_1 = -\text{Arc tan}(\tau_1\omega) \\ \phi_2 = \text{Arg} \underline{T}_2 = -\text{Arc tan}(\tau_2\omega) \end{cases}$$

$$G = G_2 + G_1 = -10 \log [1 + (\tau_2\omega)^2] - 10 \log [1 + (\tau_1\omega)^2]$$

$$\phi = \phi_2 + \phi_1 = -\text{Arc tan}(\tau_2\omega) - \text{Arc tan}(\tau_1\omega)$$

5.7.2 Diagramme de Bode

• **Principe.** Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes :

- le gain G de la F.T. complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence (ou de la pulsation),
- le déphasage ϕ de la F.T. complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence (ou de la pulsation).

Question : Soit le filtre passif passe-bas du 1^{er} ordre (voir Fig. 5.28). Tracer son diagramme de Bode.

Réponse : Diagramme de Bode (Fig. 5.31). La F.T. complexe est :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Gain :

$$G = 20 \log |\underline{T}| = -10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow G \approx 0 \quad (\text{asymptote pour la courbe de } G)$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow G \approx -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad (\text{asymptote pour la courbe de } G)$$

Si la pulsation est multipliée par 10, le gain est diminué de 20 dB. On dit que l'on a une atténuation de 20 dB par décade.

Déphasage :

$$\phi = \text{Arg} \underline{T} = -\text{Arc tan}(\omega/\omega_0)$$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \phi \approx 0 \quad (\text{asymptote pour la courbe de } \phi)$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \phi \approx -\pi/2 \quad (\text{asymptote pour la courbe de } \phi)$$

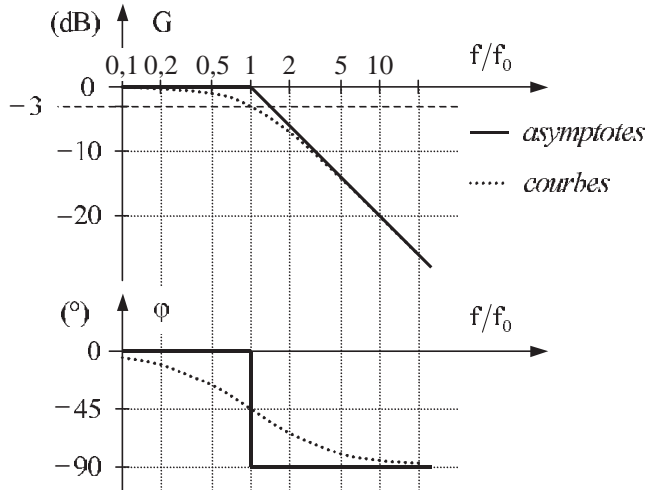


Fig. 5.31 Diagramme de Bode d'un passe-bas du 1^{er} ordre

• **Diagrammes de Bode des F.T. élémentaires du premier et du deuxième ordre.** Voir Chapitre 24 : Filtrage analogique.

• **Mise en cascade de F.T.** (voir Fig.5.29). Soit une F.T. mise sous la forme d'un produit de plusieurs fonctions de transfert.

Méthode

Le diagramme de Bode permet l'addition « graphique » des gains d'une part, et des déphasages d'autre part.

$$\underline{T} = \underline{T}_2 \underline{T}_1 \Rightarrow \begin{cases} G = G_2 + G_1 \\ \varphi = \varphi_2 + \varphi_1 \end{cases}$$

Question : Soit la F.T. de deux filtres passe-bas du 1^{er} ordre mis en cascade (voir Fig.5.30). Tracer les asymptotes de son diagramme de Bode pour $f_2 = 10f_1$.

Réponse : La F.T. s'écrit :

$$\underline{T} = \underline{T}_2 \underline{T}_1 = \frac{1}{(1 + j\tau_2\omega)} \frac{1}{(1 + j\tau_1\omega)} = \frac{1}{1 + j f/f_2} \frac{1}{1 + j f/f_1}$$

avec

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2}$$

Les gains et les déphasages s'ajoutent. En conséquence, on effectue la somme graphique des asymptotes des deux 1^{er} ordre avec $f_2 = 10f_1$ pour l'exemple (Fig.5.32). Sur cette figure, les asymptotes des deux 1^{er} ordre pris séparément (pointillés) sont volontairement décalées vers le haut pour mettre en évidence la construction (tracé exact d'un 1^{er} ordre, voir Fig.5.31).

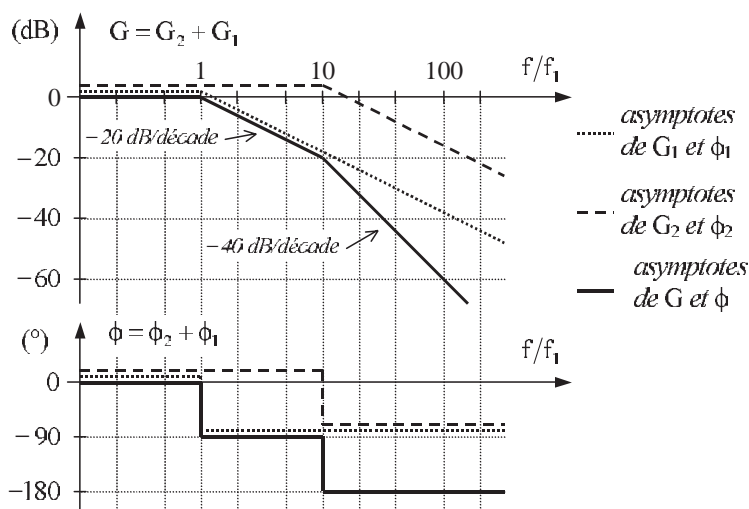


Fig. 5.32 Deux passe-bas du 1^{er} ordre en cascade ($f_2 = 10f_1$)

Chapitre 6

Régime sinusoïdal permanent triphasé

6.1 INSTALLATION TRIPHASÉE – DÉFINITIONS

Le transport de l'énergie électrique en triphasé est le plus économique car il requiert une quantité minimale de câble métallique pour transporter une puissance donnée ; les moteurs triphasés sont simples et efficaces, le redressement est aisé.

Une installation triphasée comporte trois fils de phases et, éventuellement, un fil de neutre (Fig. 6.1).

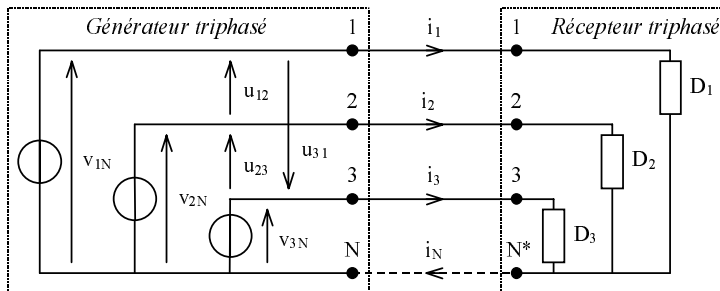


Fig. 6.1 Installation triphasée

- **Tensions simples – Tensions composées.** Les tensions simples v_{1N} , v_{2N} et v_{3N} sont prises entre une des phases et le neutre, et les tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} sont prises entre deux phases (voir Fig. 6.1).

- **Système triphasé équilibré.** Trois grandeurs sinusoïdales de même fréquence, déphasées entre elles de $2\pi/3$, et ayant même valeur efficace, forment un système triphasé équilibré.
- **Système direct – Système inverse.** Le système triphasé (g_1, g_2, g_3) est dit direct si g_3 est en retard d'un angle $2\pi/3$ sur g_2 qui est en retard d'un angle $2\pi/3$ sur g_1 . Autrement, le système est dit inverse.
- **Réseau de distribution électrique.** Il est basé sur un système triphasé de tensions. On peut généralement considérer que (v_{1N}, v_{2N}, v_{3N}) est un système de tensions triphasé équilibré direct. Il en est de même pour (u_{12}, u_{23}, u_{31}). On a :

$$\begin{cases} u_{12} = v_{1N} - v_{2N} \\ u_{23} = v_{2N} - v_{3N} \\ u_{31} = v_{3N} - v_{1N} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1N} = V_{\text{Max}} \sin(\omega t) \\ v_{2N} = V_{\text{Max}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_{3N} = V_{\text{Max}} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{v_{1N}} = V_{\text{Max}} \\ \underline{v_{2N}} = V_{\text{Max}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ \underline{v_{3N}} = V_{\text{Max}} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{cases}$$

Diagramme temporel des tensions simples : (Fig. 6.2)

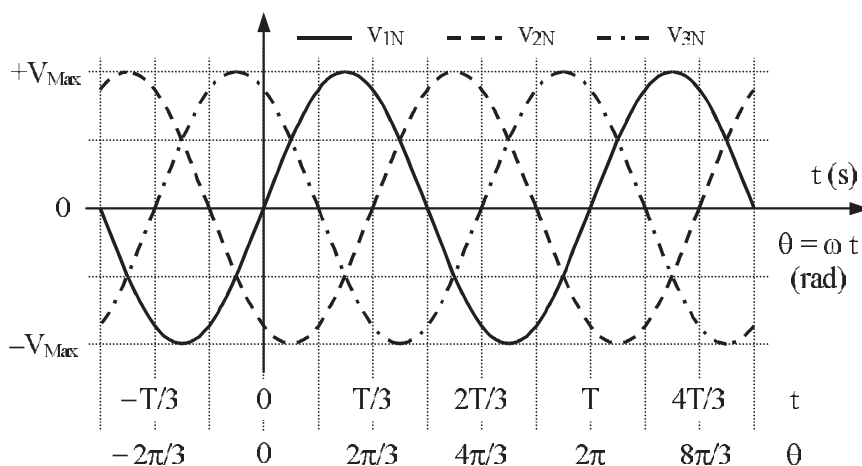


Fig. 6.2 Système de tensions triphasé équilibré direct

Remarques :

- Dans ces conditions, si les trois récepteurs sont identiques, alors (i_1, i_2, i_3) est un système de courants triphasé équilibré.
- Dans ces conditions, si le neutre du récepteur est relié au neutre du générateur ($v_{1N*}, v_{2N*}, v_{3N*}$) est un système de tensions triphasé équilibré.

Question : Exprimer la tension composée u_{12} .

Réponse : Directement, à partir des expressions temporelles, on écrit :

$$u_{12} = v_{1N} - v_{2N} = V_{\text{Max}} \sin(\omega t) - V_{\text{Max}} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

À partir de la relation trigonométrique :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} u_{12} &= 2 V_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} V_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{3} V_{\text{Max}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Plus simplement, à partir des amplitudes complexes, on peut écrire :

$$\underline{U}_{12} = \underline{V}_{1N} - \underline{V}_{2N} = \underline{V}_{1N} (1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}) = \sqrt{3} \underline{V}_{1N} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{D'où : } \underline{U}_{12} = \sqrt{3} \underline{V}_{1N} e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} V_{\text{Max}} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\text{Finalement : } u_{12} = \sqrt{3} V_{\text{Max}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Construction vectorielle de Fresnel : (Fig. 6.3). À chaque tension, on associe un vecteur. Cela permet de construire graphiquement les vecteurs des tensions composées.

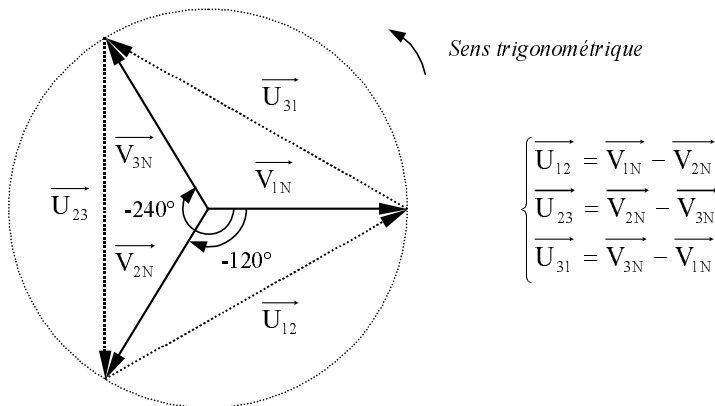


Fig. 6.3 Systèmes de tensions triphasés équilibrés directs

Question : Exprimer le module et la phase de la tension composée \vec{U}_{12} .

Réponse : Le module est donné par la relation :

$$\|\vec{U}_{12}\|^2 = \|\vec{V}_{1N}\|^2 + \|\vec{V}_{2N}\|^2 - 2 \|\vec{V}_{1N}\| \|\vec{V}_{2N}\| \cos(120^\circ)$$

D'où : $\|\vec{U}_{12}\| = \sqrt{3} V_{\text{Max}}$

La somme des angles du triangle faisant 180° , et comme $\|\vec{V}_{1N}\| = \|\vec{V}_{2N}\|$, on en déduit la phase de \vec{U}_{12} qui vaut $+30^\circ$.

Remarque : Sur la construction vectorielle de Fresnel (voir Fig. 6.3), l'ordre de passage devant un observateur fixe des vecteurs dans le sens trigonométrique étant \vec{V}_{1N} , \vec{V}_{2N} puis \vec{V}_{3N} d'une part et \vec{U}_{12} , \vec{U}_{23} puis \vec{U}_{31} d'autre part, on en déduit que les systèmes sont directs. Pour un système direct, le sens est anti-horaire ; et pour un système inverse, le sens est horaire. Le passage d'un système direct à un système inverse, et *vice versa*, s'effectue en permutant deux phases.

• **Relations pour un système triphasé équilibré**

$$\forall t, \quad v_{1N} + v_{2N} + v_{3N} = 0 \quad \forall t, \quad u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0$$

$$U_{\text{Max}} = \sqrt{3} V_{\text{Max}}$$

$$U_{\text{Eff}} = \sqrt{3} V_{\text{Eff}}$$

Remarque : Si, pour un réseau, on ne précise pas qu'il s'agit de tensions simples ou entre phases, il faut considérer qu'il s'agit des tensions composées. Ainsi un réseau 400 V triphasé 50 Hz est tel que $U_{\text{Eff}} = 400 \text{ V}$ et $V_{\text{Eff}} = 230 \text{ V}$.

• **Notation complexe usuelle.** Pour simplifier écritures et calculs, on pose :

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad \underline{a}^3 = 1$$

$$\sqrt{\underline{a}} = e^{j\frac{\pi}{3}} \quad 1 - \underline{a} = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad 1 - \underline{a}^2 = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0 \quad \underline{a} - \underline{a}^2 = +j\sqrt{3}$$

Question : Exprimer avec cette notation, \underline{V}_{1N} , \underline{V}_{2N} , \underline{V}_{3N} , \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} et \underline{U}_{31} .

Réponse :

$$\underline{V}_{1N} = V_{\text{Max}} \quad \underline{V}_{2N} = \underline{a}^2 V_{\text{Max}} \quad \underline{V}_{3N} = \underline{a} V_{\text{Max}}$$

$$\underline{U}_{12} = \underline{V}_{1N} - \underline{V}_{2N} = (1 - \underline{a}^2) V_{\text{Max}}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{V}_{2N} - \underline{V}_{3N} = (\underline{a}^2 - \underline{a}) V_{\text{Max}} = \underline{a}^2 (1 - \underline{a}^2) V_{\text{Max}} = \underline{a}^2 \underline{U}_{12}$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{V}_{3N} - \underline{V}_{1N} = (\underline{a} - 1) V_{\text{Max}} = \underline{a} (1 - \underline{a}^2) V_{\text{Max}} = \underline{a} \underline{U}_{12}$$

Ou encore :

$$\underline{U}_{12} = (1 - \underline{a}^2) \underline{V}_{1N} \quad \underline{U}_{23} = (1 - \underline{a}^2) \underline{V}_{2N} \quad \underline{U}_{31} = (1 - \underline{a}^2) \underline{V}_{3N}$$

Remarque : Pour un système (g_1, g_2, g_3) triphasé équilibré direct, on a : $\underline{G}_2 = \underline{a}^2 \underline{G}_1$ et $\underline{G}_3 = \underline{a} \underline{G}_1$; tandis que pour un système (h_1, h_2, h_3) triphasé équilibré inverse, on a : $\underline{H}_2 = \underline{a} \underline{H}_1$ et $\underline{H}_3 = \underline{a}^2 \underline{H}_1$.

6.2 COUPLAGES

6.2.1 Couplage en étoile

Dans un couplage en étoile, chaque dipôle est relié entre le neutre et une phase du réseau (Fig 6.4).

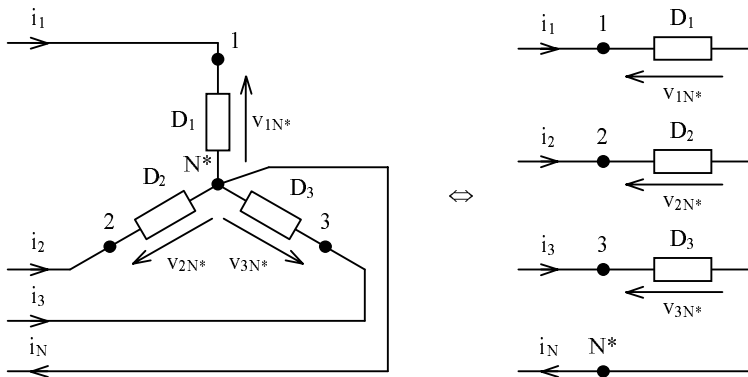


Fig. 6.4 Couplage d'un récepteur triphasé en étoile

a) Cas général avec neutre relié

Le point N^* étant relié au neutre N du réseau, les tensions appliquées aux bornes des dipôles sont les tensions simples du réseau, et les courants en ligne sont les mêmes que les courants dans les récepteurs.

$$V_{1N^*} = V_{1N} \quad V_{2N^*} = V_{2N} \quad V_{3N^*} = V_{3N}$$

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3$$

Soit, en complexe :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \text{avec} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_{1N}}{\underline{Z}_1} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_{2N}}{\underline{Z}_2} \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_{3N}}{\underline{Z}_3}$$

où \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 et \underline{Z}_3 sont respectivement les impédances des dipôles D_1 , D_2 et D_3 .

b) Récepteur (ou charge) équilibré avec neutre relié

Le récepteur est équilibré si les dipôles sont identiques. Ce qui s'écrit :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$$

$$\text{D'où : } \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_{1N}}{\underline{Z}_1} \quad \underline{I}_2 = \frac{a^2 \underline{V}_{1N}}{\underline{Z}_2} = a^2 \underline{I}_1 \quad \underline{I}_3 = \frac{a \underline{V}_{1N}}{\underline{Z}_3} = a \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1 (1 + a^2 + a) = 0$$

Remarque : Pour un récepteur équilibré couplé en étoile, le courant dans le neutre est nul.

c) Neutre non-relié

Si le point N* n'est pas relié au neutre N du réseau, les tensions aux bornes des dipôles dépendent desdits dipôles. Si les dipôles du récepteur ne sont pas identiques, certains dipôles seront en sous-tension et d'autres en sur-tension. Dans une installation, pour éviter un fonctionnement incorrect ou un risque de détérioration d'appareils, le neutre doit toujours être relié, même si la charge est *a priori* équilibrée car l'équilibre est précaire par nature, et un incident est toujours possible.

6.2.2 Couplage en triangle

Dans un couplage en triangle, chaque dipôle est relié entre deux phases du réseau (Fig. 6.5). Le neutre est inutilisé.

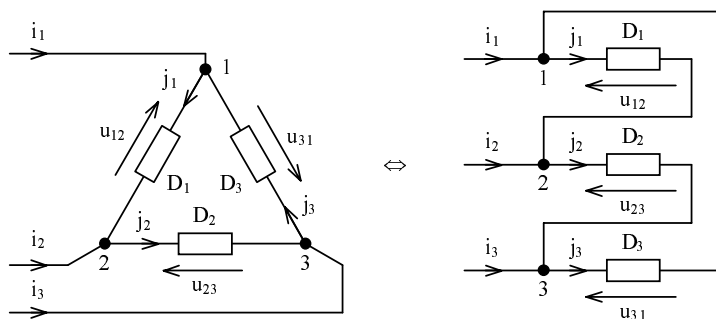


Fig. 6.5 Couplage d'un récepteur triphasé en triangle.

a) Cas général

Les tensions appliquées aux bornes des dipôles sont les tensions composées du réseau, et les courants en ligne sont différents des courants dans les récepteurs.

$$\begin{cases} i_1 = j_1 - j_3 \\ i_2 = j_2 - j_1 \\ i_3 = j_3 - j_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Avec, en complexe :

$$\underline{J}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} \quad \underline{J}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} \quad \underline{J}_3 = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_3}$$

où \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 et \underline{Z}_3 sont respectivement les impédances des dipôles D_1 , D_2 et D_3 .

b) Récepteur (ou charge) équilibré

Le récepteur est équilibré si les dipôles sont identiques. Ce qui s'écrit :

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$$

$$\text{D'où : } \underline{J}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} \quad \underline{J}_2 = \frac{\underline{a}^2 \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} = \underline{a}^2 \underline{J}_1 \quad \underline{J}_3 = \frac{\underline{a} \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_3} = \underline{a} \underline{J}_1$$

$$\underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 = \underline{J}_1 (1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0$$

Question : Exprimer les courants dans les lignes \underline{I}_1 , \underline{I}_2 et \underline{I}_3 .

Réponse :

$$\underline{I}_1 = \underline{J}_1 - \underline{J}_3 = (1 - \underline{a}) \underline{J}_1$$

$$\underline{I}_2 = \underline{J}_2 - \underline{J}_1 = (\underline{a}^2 - 1) \underline{J}_1 = (1 - \underline{a}) \underline{a}^2 \underline{J}_1 = (1 - \underline{a}) \underline{J}_2$$

$$\underline{I}_3 = \underline{J}_3 - \underline{J}_2 = (\underline{a} - \underline{a}^2) \underline{J}_1 = (1 - \underline{a}) \underline{a} \underline{J}_1 = (1 - \underline{a}) \underline{J}_3$$

Remarque : Pour une charge équilibrée, on a les relations :

$$J_{\text{Max}} = \frac{I_{\text{Max}}}{\sqrt{3}}$$

$$J_{\text{Eff}} = \frac{I_{\text{Eff}}}{\sqrt{3}}$$

6.3 PUISSANCES – FACTEUR DE PUISSANCE

6.3.1 Cas général

Les formules (Fig. 6.6) se déduisent du régime sinusoïdal monophasé, notamment par application du théorème de Boucherot. Pour un couplage en étoile, les déphasages des tensions simples v_{1N} , v_{2N} et v_{3N} par rapport aux courants i_1 , i_2 et i_3 sont respectivement notés φ_1 , φ_2 et φ_3 . Pour un couplage en triangle, les déphasages des tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} par rapport aux courants j_1 , j_2 et j_3 sont respectivement notés ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 .

	Couplage en étoile	Couplage en triangle
Puissance apparente complexe (\bar{x} est le conjugué de x)	$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = P + j Q$ avec	
	$\underline{S}_1 = \frac{1}{2} \underline{V}_{1N} \overline{I}_1$ $\underline{S}_2 = \frac{1}{2} \underline{V}_{2N} \overline{I}_2$ $\underline{S}_3 = \frac{1}{2} \underline{V}_{3N} \overline{I}_3$	$\underline{S}_1 = \frac{1}{2} \underline{U}_{12} \overline{J}_1$ $\underline{S}_2 = \frac{1}{2} \underline{U}_{23} \overline{J}_2$ $\underline{S}_3 = \frac{1}{2} \underline{U}_{31} \overline{J}_3$
	$P = P_{\text{Moy}} = P_1 + P_2 + P_3 = \text{Re}(\underline{S})$ avec	
Puissance active ou moyenne en watt (W)	$P_1 = V_{1N \text{ Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \cos(\varphi_1)$ $P_2 = V_{2N \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\varphi_2)$ $P_3 = V_{3N \text{ Eff}} I_{3 \text{ Eff}} \cos(\varphi_3)$	$P_1 = U_{12 \text{ Eff}} J_{1 \text{ Eff}} \cos(\psi_1)$ $P_2 = U_{23 \text{ Eff}} J_{2 \text{ Eff}} \cos(\psi_2)$ $P_3 = U_{31 \text{ Eff}} J_{3 \text{ Eff}} \cos(\psi_3)$
Puissance réactive en volt-ampère - réactif (var)	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \text{Im}(\underline{S})$ avec	
	$Q_1 = V_{1N \text{ Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \sin(\varphi_1)$ $Q_2 = V_{2N \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \sin(\varphi_2)$ $Q_3 = V_{3N \text{ Eff}} I_{3 \text{ Eff}} \sin(\varphi_3)$	$Q_1 = U_{12 \text{ Eff}} J_{1 \text{ Eff}} \sin(\psi_1)$ $Q_2 = U_{23 \text{ Eff}} J_{2 \text{ Eff}} \sin(\psi_2)$ $Q_3 = U_{31 \text{ Eff}} J_{3 \text{ Eff}} \sin(\psi_3)$
Puissance apparente en volt-ampère (VA)	$S = \underline{S} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	
Facteur de puissance	$f_p = \frac{P}{S}$	

Fig. 6.6 Puissances en triphasé – Cas général

6.3.2 Générateur et récepteur triphasés équilibrés

Les formules (Fig. 6.7) se déduisent du cas général, sachant que pour un générateur et un récepteur triphasés équilibrés, on a :

$$V_{\text{Eff}} = V_{1N \text{ Eff}} = V_{2N \text{ Eff}} = V_{3N \text{ Eff}}$$

$$U_{\text{Eff}} = U_{12 \text{ Eff}} = U_{23 \text{ Eff}} = U_{31 \text{ Eff}}$$

$$I_{\text{Eff}} = I_{1 \text{ Eff}} = I_{2 \text{ Eff}} = I_{3 \text{ Eff}}$$

$$J_{\text{Eff}} = J_{1 \text{ Eff}} = J_{2 \text{ Eff}} = J_{3 \text{ Eff}}$$

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

$$\psi = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3$$

$$U_{\text{Eff}} = \sqrt{3} V_{\text{Eff}}$$

$$J_{\text{Eff}} = I_{\text{Eff}} / \sqrt{3}$$

	Couplage en étoile	Couplage en triangle
Puissance apparente complexe (\underline{x} est le conjugué de \underline{x})	$\underline{S} = P + j Q$	
	$\underline{S} = \frac{3}{2} \underline{V_{1N}} \overline{I_1}$ $= 3 V_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} e^{j\varphi}$	$\underline{S} = \frac{3}{2} \underline{U_{12}} \overline{J_1}$ $= 3 U_{\text{Eff}} J_{\text{Eff}} e^{j\psi}$
Puissance active ou moyenne en watt (W)	$P = \text{Re}(\underline{S})$	
	$P = 3 V_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos(\varphi)$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos(\varphi)$	$P = 3 U_{\text{Eff}} J_{\text{Eff}} \cos(\psi)$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos(\psi)$
Puissance réactive en volt-ampère - réactif (var)	$Q = \text{Im}(\underline{S}) = P \tan(\varphi)$	$Q = \text{Im}(\underline{S}) = P \tan(\psi)$
	$Q = 3 V_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \sin(\varphi)$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \sin(\varphi)$	$Q = 3 U_{\text{Eff}} J_{\text{Eff}} \sin(\psi)$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \sin(\psi)$
Puissance apparente en volt-ampère (VA)	$S = \underline{S} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	
	$S = 3 V_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}}$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}}$	$S = 3 U_{\text{Eff}} J_{\text{Eff}}$ $= \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}}$
Facteur de puissance	$f_P = \frac{P}{S} = \cos(\varphi)$	$f_P = \frac{P}{S} = \cos(\psi)$

Fig. 6.7 Puissances en triphasé – Générateur et récepteur équilibrés

Question : Dans le cas d'un récepteur non équilibré et dont le neutre n'est pas relié, montrer à partir de la puissance apparente complexe que la mesure de la puissance active peut s'effectuer à l'aide de la méthode des deux wattmètres.

Réponse : La puissance fournie par le générateur est :

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = \frac{1}{2} (\underline{V_{1N}} \overline{I_1} + \underline{V_{2N}} \overline{I_2} + \underline{V_{3N}} \overline{I_3})$$

Comme le neutre n'est pas relié, on a : $\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_3} = 0$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \underline{S} &= \frac{1}{2} (\underline{V_{1N}} - \underline{V_{3N}}) \overline{I_1} + \frac{1}{2} (\underline{V_{2N}} - \underline{V_{3N}}) \overline{I_2} \\ &= \frac{1}{2} \underline{U_{13}} \overline{I_1} + \frac{1}{2} \underline{U_{23}} \overline{I_2} \end{aligned}$$

Finalement, la puissance active se mesure avec deux wattmètres car :

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\underline{S}) = \text{Re} \left(\frac{1}{2} \underline{U_{13}} \overline{I_1} \right) + \text{Re} \left(\frac{1}{2} \underline{U_{23}} \overline{I_2} \right) \\ &= U_{13 \text{ Eff}} I_{1 \text{ Eff}} \cos(\theta_1) + U_{23 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\theta_2) = P_{u13 \text{ i1}} + P_{u23 \text{ i2}} \end{aligned}$$

Remarque : En régime équilibré, la méthode des deux wattmètres permet aussi de mesurer la puissance réactive qui est donnée par :

$$Q = \sqrt{3} (P_{u13 \text{ i1}} - P_{u23 \text{ i2}})$$

Chapitre 7

Régime variable – Valeurs moyenne et efficace

7.1 RÉGIME VARIABLE

- Un système fonctionne en *régime variable* lorsque ses signaux sont des fonctions du temps. On utilise généralement des lettres minuscules pour les grandeurs variables du temps (u pour une tension, i pour un courant, p pour une puissance, s pour un signal, etc.).
- À *contrario*, un système fonctionne en *régime continu* lorsque ses signaux sont indépendants du temps. Ici continu signifie constant. On utilise généralement des lettres majuscules pour les grandeurs continues (U pour une tension, I pour un courant, P pour une puissance, S pour un signal, etc.).
- Un système fonctionne en *régime permanent* lorsque son régime transitoire a cessé. En pratique, il suffit d'attendre que le transitoire devienne négligeable.
- Un système fonctionne en *régime périodique* lorsque ses signaux sont des fonctions périodiques du temps. Un *signal périodique* se reproduit à l'identique au cours du temps. Son diagramme temporel est une suite de motifs identiques. La *période* T d'un signal périodique est la plus petite durée entre deux instants où le signal se reproduit à l'identique. Sa *fréquence* f est l'inverse de sa période.

$$\forall t, s(t + T) = s(t)$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\text{Unités : } \text{Hz} = \frac{1}{s}$$

et

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{pulsation})$$

$$\text{Unités : } \text{rad/s} = \text{rad Hz}$$

7.2 VALEUR MOYENNE

7.2.1 Valeur moyenne d'un courant

La valeur moyenne d'un courant est égale à la valeur d'un courant continu fictif qui transporterait la même quantité d'électricité (même charge déplacée) pendant la même durée.

$$\Delta q_{\text{déplacée}} = \int_{Q_1}^{Q_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt \quad \Rightarrow \quad I_{\text{Moy}} = \frac{\Delta q_{\text{déplacée}}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i \, dt$$

7.2.2 Définitions (Fig. 7.1)

Signal périodique : valeur moyenne sur une période T	Signal non-périodique ou périodique : valeur moyenne sur $[t_1, t_2]$
$S_{\text{Moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) \, dt$	$S_{\text{Moy}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s(t) \, dt$

Fig. 7.1 Définitions de la valeur moyenne

Remarque : Si la durée d'observation n'est pas donnée, on sous-entend que le signal est périodique. Pour un signal périodique, l'intervalle de temps pris pour le calcul doit être un nombre entier de périodes : $[t_1, t_1 + nT]$. Cependant, des raisons de symétrie peuvent amener à diviser cet intervalle minimal par 2 ou davantage. Un choix judicieux de t_1 permet souvent de simplifier le calcul.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension

$$u(t) = U_0 + U_{1 \text{ Max}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Réponse : C'est une somme de deux tensions. On peut écrire :

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad \text{avec} \quad u_1(t) = U_{1 \text{ Max}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\text{D'où : } U_{\text{Moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} U_0 \, dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_1(t) \, dt = U_0 + U_{1 \text{ Moy}}$$

Pour les fonctions sinusoïdales, on a généralement intérêt à effectuer le changement de variable $\theta = \omega_1 t$ ($\Rightarrow 2\pi = \omega_1 T$).

$$u_1(\theta) = U_{1 \text{ Max}} \sin(\theta + \varphi_1)$$

$$\text{D'où : } U_{1 \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_1(t) \, dt = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1(\theta) \frac{d\theta}{\omega_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1(\theta) \, d\theta$$

Soit, en intégrant sur une période à partir de $-\varphi_1$ pour simplifier le calcul :

$$U_{1\text{Moy}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} U_{1\text{Max}} \sin(\theta + \varphi_1) d\theta = 0$$

Finalement : $U_{\text{Moy}} = U_0$

Méthode

Pour un calcul approché ou pour des signaux simples (rectangulaires, triangles, etc.), on peut remplacer le calcul de l'intégrale par une somme algébrique d'aires comprises entre la courbe et l'axe des temps; une aire étant comptée positivement si la courbe est au-dessus de l'axe et négativement si elle est en-dessous.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension triangulaire dissymétrique périodique (Fig. 7.2).

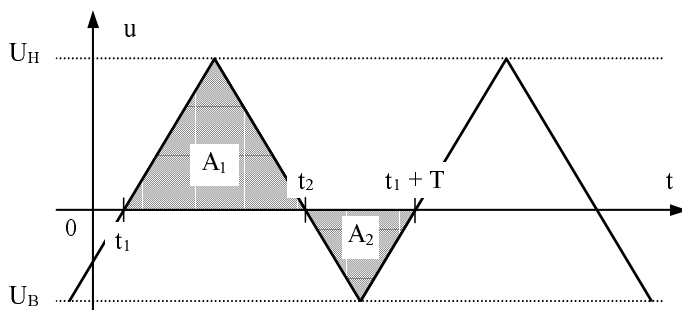


Fig. 7.2 Tension triangulaire dissymétrique

Réponse :

$$U_{\text{Moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_2}^{t_1+T} u(t) dt = \frac{A_1 - A_2}{T}$$

$$\text{D'où : } U_{\text{Moy}} = \frac{U_H(t_2 - t_1) + U_B(t_1 + T - t_2)}{2T}$$

7.3 VALEUR EFFICACE

À la place du qualificatif « efficace », on utilise souvent l'abréviation anglo-saxonne « r.m.s. » qui signifie « *root mean square* » et qui se traduit littéralement par « racine de la moyenne du carré ».

7.3.1 Valeur efficace d'un courant

La valeur efficace d'un courant est égale à la valeur d'un courant continu fictif qui produirait la même quantité de chaleur (même énergie apportée) dans une même résistance et pendant la même durée.

$$\Delta W_{\text{apportée}} = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 dt \Rightarrow I_{\text{Eff}}^2 = \frac{\Delta W_{\text{apportée}}}{R(t_2 - t_1)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt$$

7.3.2 Définitions (Fig. 7.3)

Signal périodique : valeur efficace sur une période T	Signal non-périodique ou périodique : valeur efficace sur $[t_1, t_2]$
$S_{\text{Eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) dt = [s^2(t)]_{\text{Moy}}$	$S_{\text{Eff}}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt = [s^2(t)]_{\text{Moy}}$

Fig. 7.3 Définitions de la valeur efficace

Remarque : Pour un signal périodique, l'intervalle de temps pris pour le calcul doit être un nombre entier de périodes : $[t_1, t_1 + nT]$. Cependant, des raisons de symétrie peuvent amener à diviser cet intervalle. Un choix judicieux de t_1 permet souvent de simplifier le calcul.

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension $u_1(t) = U_{1\text{Max}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

Réponse : On effectue le changement de variable $\theta = \omega_1 t$ ($\Rightarrow 2\pi = \omega_1 T$).

$$u_1(\theta) = U_{1\text{Max}} \sin(\theta + \varphi_1)$$

$$\text{D'où : } U_{1\text{Eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_1^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} u_1^2(\theta) d\theta$$

Soit, en intégrant sur une période à partir de $-\varphi_1$ pour simplifier le calcul :

$$\begin{aligned} U_{1\text{Eff}}^2 &= \frac{U_{1\text{Max}}^2}{2\pi} \int_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} \sin^2(\theta + \varphi_1) d\theta \\ &= \frac{U_{1\text{Max}}^2}{4\pi} \int_{-\varphi_1}^{-\varphi_1+2\pi} [1 - \cos(2(\theta + \varphi_1))] d\theta = \frac{U_{1\text{Max}}^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement : } U_{1\text{Eff}} = \frac{U_{1\text{Max}}}{\sqrt{2}}$$

Méthode

Comme pour la valeur moyenne, on peut remplacer le calcul de l'intégrale du carré du signal par une somme algébrique d'aires.

Remarque : La valeur efficace au carré est égale à la valeur moyenne du carré du signal. D'où le principe de calcul de la valeur efficace (Fig. 7.4).

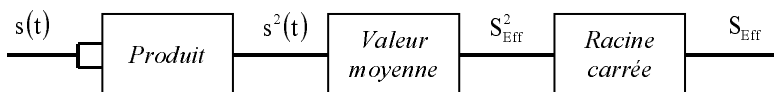


Fig. 7.4 Principe de calcul de la valeur efficace

7.4 DÉCOMPOSITION D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE

• **Valeur instantanée – Valeur moyenne.** Tout signal périodique $s(t)$ peut s'écrire comme la somme d'une *composante continue* égale à la valeur moyenne S_{Moy} , plus une *composante alternative* périodique à valeur moyenne nulle $s_{\text{Alt}}(t)$ parfois appelée *ondulation*.

$$s(t) = S_{\text{Moy}} + s_{\text{Alt}}(t)$$

Méthode

Un filtre passe-bas permet d'extraire et de mesurer la composante continue, par exemple d'une tension.

$$u(t) = U_{\text{DC}} + u_{\text{AC}}(t) \quad \text{avec} \quad U_{\text{DC}} = U_{\text{Moy}}$$

L'indice « DC : Direct Current » signifie « en courant continu », et l'indice « AC : Alternative Current » signifie « en courant alternatif ».

• **Valeur efficace.** Soit un signal périodique $s(t) = S_{\text{Moy}} + s_{\text{Alt}}(t)$. On a :

$$S_{\text{Eff}}^2 = S_{\text{Moy}}^2 + S_{\text{Alt Eff}}^2$$

Question : Démontrer la relation précédente donnant la valeur efficace.

Réponse : Par définition, on a :

$$S_{\text{Eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) dt = \frac{S_{\text{Moy}}^2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} dt + \frac{2S_{\text{Moy}}}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s_{\text{Alt}}(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s_{\text{Alt}}^2(t) dt$$

La valeur moyenne de la composante alternative étant nulle, on obtient la relation donnée.

Méthode

Un filtre passe-haut permet d'extraire et de mesurer la composante alternative, par exemple d'une tension. On calcule ensuite la valeur efficace par la relation :

$$U_{\text{Eff}} = \sqrt{U_{\text{DC}}^2 + U_{\text{AC Eff}}^2} \quad \text{avec} \quad U_{\text{DC}} = U_{\text{Moy}} \quad \text{et} \quad U_{\text{AC Eff}} = U_{\text{Alt Eff}}$$

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension :

$$u(t) = U_0 + U_{1 \text{ Max}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Réponse : C'est la somme d'une composante continue et d'une composante alternative à valeur moyenne nulle. On peut donc écrire :

$$u(t) = U_0 + u_1(t) \quad \text{avec} \quad u_1(t) = U_{1 \text{ Max}} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\text{D'où : } U_{\text{Eff}} = \sqrt{U_0^2 + U_{1 \text{ Eff}}^2} \quad \text{avec} \quad U_{1 \text{ Eff}}^2 = \frac{U_{1 \text{ Max}}^2}{2} \quad (\text{voir § 7.3.2})$$

On peut vérifier ce résultat en calculant directement la valeur efficace.

$$\begin{aligned} U_{\text{Eff}}^2 &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} (U_0 + u_1(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} (U_0)^2 dt + \frac{2U_0}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u_1(t) dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} (u_1(t))^2 dt \\ &= U_0^2 + 2 U_0 U_{1 \text{ Moy}} + U_{1 \text{ Eff}}^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } U_{\text{Eff}} = \sqrt{U_0^2 + U_{1 \text{ Eff}}^2} \quad \text{car} \quad U_{1 \text{ Moy}} = 0$$

7.5 CARACTÉRISATION D'UN SIGNAL

- **Facteurs de crête, de forme et d'ondulation** (Fig. 7.5). Ils permettent de caractériser un signal selon son amplitude par rapport à sa valeur efficace, ou de sa composante alternative par rapport à sa composante continue.

- **Ondulation crête à crête.** C'est l'écart entre la plus haute valeur et la plus basse valeur du signal $s(t)$, ou de sa composante alternative $s_{\text{Alt}}(t)$.

En absolu : $\Delta S = S_{\text{Max}} - S_{\text{Min}} = S_{\text{Alt Max}} - S_{\text{Alt Min}}$ En relatif : $\frac{\Delta S}{|S_{\text{Moy}}|}$

- **Relation entre le facteur de forme et le taux d'ondulation**

$$F^2 = 1 + \beta^2$$

Facteur crête	$F_C = \frac{ s(t) _{\text{Max}}}{S_{\text{Eff}}}$	Repère les signaux impulsionnels. Apprécie la difficulté qu'auront ces signaux à « passer » à travers des amplificateurs, filtres, etc.
Facteur de forme	$F = \frac{S_{\text{Eff}}}{ S_{\text{Moy}} }$	Mesure la proportion d'alternatif dans un signal quelconque relativement à sa valeur moyenne. Apprécie la qualité d'un signal alternatif : $F \rightarrow \infty$ pour un signal à valeur moyenne nulle.
Taux d'ondulation	$\beta = \frac{S_{\text{Alt Eff}}}{ S_{\text{Moy}} }$	Mesure la proportion d'alternatif dans un signal relativement à sa valeur moyenne. Apprécie la qualité d'un signal continu (redressement) : $\beta = 0$ pour un signal continu parfait.

Fig. 7.5 Facteurs de crête, de forme et d'ondulation

- **Caractéristiques de quelques signaux** (Fig. 7.6). Ces signaux sont présentés dans des conditions habituelles. Si la valeur moyenne est différente, la relation $S_{\text{Eff}}^2 = S_{\text{Moy}}^2 + S_{\text{Alt Eff}}^2$ (voir § 7.4) permet facilement de déterminer la valeur efficace.

Question : Déterminer la valeur efficace d'un signal redressé bi-alternance dont la valeur moyenne est nulle.

Réponse :

$$S_{\text{Alt Eff}}^2 = S_{\text{Eff}}^2 - S_{\text{Moy}}^2 = \frac{S_{\text{Max}}^2}{2} - \frac{4S_{\text{Max}}^2}{\pi^2} \Rightarrow S_{\text{Alt Eff}} = S_{\text{Max}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}} \approx 0,31 S_{\text{Max}}$$

- **Taux de distorsion harmonique.** Voir Chapitre 8 : Régime périodique – Séries de Fourier.

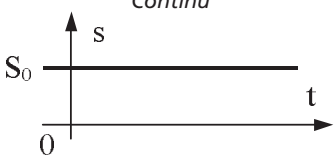
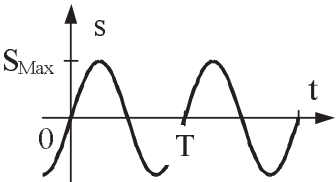
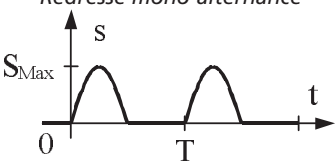
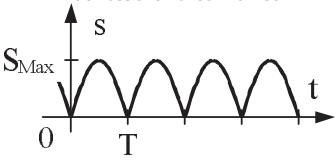
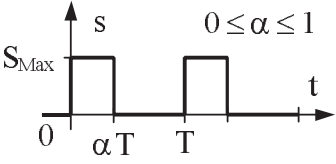
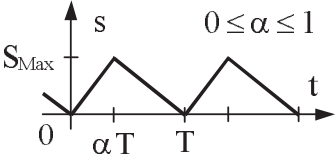
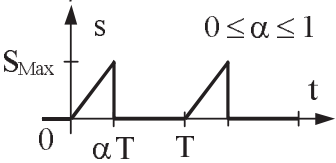
Signal	S_{Moy}	S_{Eff}	F_C	F	β
<i>Continu</i> 	$= S_0$	$= S_0$	$= 1$	$= 1$	$= 0$
<i>Sinusoidal</i> 	$= 0$	$= \frac{S_{Max}}{\sqrt{2}}$	$= \sqrt{2}$ $\approx 1,41$	$= +\infty$	$= +\infty$
<i>Redressé mono-alternance</i> 	$= \frac{S_{Max}}{\pi}$	$= \frac{S_{Max}}{2}$	$= 2$	$= \frac{\pi}{2}$ $\approx 1,57$	$\approx 1,21$
<i>Redressé bi-alternance</i> 	$= \frac{2S_{Max}}{\pi}$	$= \frac{S_{Max}}{\sqrt{2}}$	$= \sqrt{2}$ $\approx 1,41$	$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ $\approx 1,11$	$\approx 0,48$
<i>Impulsion rectangulaire</i> $0 \leq \alpha \leq 1$ 	$= \alpha S_{Max}$	$= \sqrt{\alpha} S_{Max}$	$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$= \sqrt{\frac{1}{\alpha} - 1}$
<i>Triangulaire – Dent de scie</i> $0 \leq \alpha \leq 1$ 	$= \frac{S_{Max}}{2}$	$= \frac{S_{Max}}{\sqrt{3}}$	$= \sqrt{3}$	$= \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\approx 1,15$	$\approx 0,58$
<i>Impulsion en dent de scie</i> $0 \leq \alpha \leq 1$ 	$= \frac{\alpha S_{Max}}{2}$	$= \sqrt{\frac{\alpha}{3}} S_{Max}$	$= \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$	$= \frac{2}{\sqrt{3\alpha}}$	$= \sqrt{\frac{4}{3\alpha} - 1}$

Fig. 7.6 Caractéristiques de quelques signaux

Chapitre 8

Régime périodique – Séries de Fourier

8.1 SÉRIES DE FOURIER

On ne considère ici que le cas des fonctions à valeurs réelles.

8.1.1 Théorème fondamental

Une fonction périodique f de période T , satisfaisant les conditions de Dirichlet (voir remarque un peu plus loin), est développable en une série de Fourier sous une des trois écritures, deux trigonométriques et une complexe, suivantes.

$$\begin{aligned} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \\ A_n, \phi_n \in \mathbb{R} \\ c_n \in \mathbb{C} \end{cases}$$

En particulier, en tout point t où f est continue :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \end{aligned}$$

avec

$$\omega T = 2\pi$$

Unités : $(\text{rad/s}) \cdot s = \text{rad}$

On peut donner une deuxième forme à la deuxième écriture en remplaçant le cosinus par un sinus.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

avec

$$\varphi_n = \phi_n + \frac{\pi}{2}$$

Dans ces écritures, les A_n sont les amplitudes (valeurs maximales) et ϕ_n (ou φ_n) les phases de rang n des fonctions sinusoïdales.

Remarque : Une fonction f périodique, de période T , satisfait les *conditions de Dirichlet*, si f est continue et admet une dérivée f' continue sur tout intervalle $[t_1, t_1 + T]$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points t_i en lesquels $f(t_i^+)$, $f(t_i^-)$, $f'(t_i^+)$ et $f'(t_i^-)$ existent.

8.1.2 Calcul des coefficients

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega t) dt & b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \end{aligned}$$

8.1.3 Relations entre coefficients

$(a_n, b_n) \rightarrow (A_n, \phi_n)$	$(a_n, b_n) \rightarrow (c_n, c_{-n})$	$(c_n, c_{-n}) \rightarrow (A_n, \phi_n)$
$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos \phi_n = a_n / A_n$ $\sin \phi_n = -b_n / A_n$	$c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$ $c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$	$A_n = 2 c_n = 2 \sqrt{c_n c_{-n}}$ $\phi_n = \arg(c_n) = -\arg(c_{-n})$
$(A_n, \phi_n) \rightarrow (a_n, b_n)$	$(c_n, c_{-n}) \rightarrow (a_n, b_n)$	$(A_n, \phi_n) \rightarrow (c_n, c_{-n})$
$a_n = A_n \cos \phi_n$ $b_n = -A_n \sin \phi_n$	$a_n = c_n + c_{-n}$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$	$2c_n = A_n e^{j\phi_n}$ $2c_{-n} = A_n e^{-j\phi_n}$

8.1.4 Propriétés - Simplification des calculs

Soit une fonction périodique f , de période T , développable en série de Fourier.

• **Choix de l'intervalle de temps.** Le calcul des coefficients est indépendant de l'intervalle de temps $[t_1, t_1 + T]$ choisi. En conséquence, un choix judicieux de t_1 permet souvent de simplifier les calculs.

• **Fonction périodique paire - Fonction périodique impaire** (Exemple Fig. 8.1).

Si f est paire alors f est développable en série de cosinus.

$$\forall t, f(t) = f(-t) \Rightarrow b_n = 0 \Rightarrow f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

$$\text{en tout point } t \text{ où } f \text{ est continue, avec : } a_n = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Si f est impaire alors f est développable en série de sinus.

$$\forall t, f(t) = -f(-t) \Rightarrow a_0 = 0 \text{ et } a_n = 0 \Rightarrow f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\text{en tout point } t \text{ où } f \text{ est continue, avec : } b_n = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

Fonction paire : $\forall t, f(t) = f(-t)$

Fonction impaire : $\forall t, f(t) = -f(-t)$

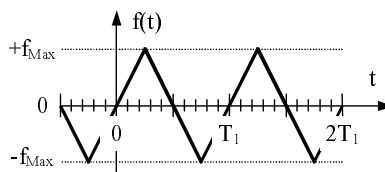
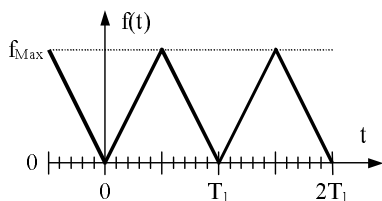


Fig. 8.1 Exemple d'une fonction périodique paire, et d'une impaire

• **Symétrie de « glissement ».** Si f possède une symétrie de « glissement » alors le terme constant et les termes de rang pair sont nuls.

$$\forall t, f(t + T/2) = -f(t) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{2(p+1)} = 0 \\ b_{2(p+1)} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{2p+1} = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} f(t) \cos[(2p+1)\omega t] dt \\ b_{2p+1} = \frac{4}{T} \int_{t_1}^{t_1+T/2} f(t) \sin[(2p+1)\omega t] dt \end{cases} \quad (p \in \mathbb{N})$$

Graphiquement, en faisant « glisser » (Fig. 8.2) d'une demi-période la partie de la fonction comprise entre t_1 et $t_1 + T/2$, on observe une symétrie par rapport à l'axe des temps.

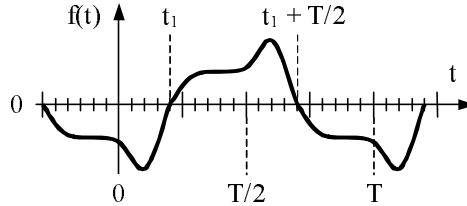


Fig. 8.2 Exemple d'une symétrie de « glissement »

• **Limites des coefficients de Fourier.** Les coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque le rang n tend vers l'infini. En conséquence, on peut approcher une fonction par une somme finie de termes du développement en série de Fourier.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0$$

• **Dérivée.** Soit f' , dérivée de f , développable en série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \Rightarrow f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jn\omega c_n e^{jn\omega t}$$

• **Intégration.** Soit la fonction f telle que $f_{\text{Moy}} = 0$ ($a_0 = c_0 = 0$) :

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ c_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = G_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n e^{jn\omega t}}{jn\omega}$$

$$\text{avec } G_0 = G_{\text{Moy}} = \int_{t_1}^{t_1+T} g(t) dt$$

8.1.5 Formule de Bessel-Parseval

Soit une fonction périodique f , de période T , développable en série de Fourier.

$$\|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

8.2 RÉGIME PÉRIODIQUE – INTERPRÉTATION PHYSIQUE

8.2.1 Régime périodique – Signal périodique

Un système fonctionne en *régime périodique* lorsque ses signaux sont des fonctions périodiques du temps (voir Chapitre 7 : Régime variable - Valeurs moyenne et efficace). Un *signal périodique* $s(t)$ se reproduit à l'identique à la période T , T étant le plus petit réel tel que :

$$\forall t, s(t + T) = s(t)$$

8.2.2 Décomposition d'un signal périodique – Vocabulaire

Un signal périodique $s(t)$ développable en série de Fourier est la somme :

- d'une *composante continue* égale à sa valeur moyenne : $S_0 = a_0$, et
- d'une infinité de *composantes sinusoïdales*, appelées « *harmoniques* », de fréquences $1/T, 2/T, \dots, n/T, \dots$: $s_n(t) = A_n \cos(n\omega t + \phi_n)$ où A_n est l'amplitude et ϕ_n la phase de l'harmonique de rang n .

La composante de même fréquence $f = 1/T$ que le signal est appelée « *fondamentale* » de préférence à harmonique 1. L'harmonique 2 a une fréquence deux fois plus grande, et l'harmonique n (de rang n) est une composante sinusoïdale de fréquence n fois plus élevée que celle du signal.

$$\omega = 2\pi f$$

$$\text{Unités : } \text{rad/s} = \text{rad Hz}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\text{Unités : } \text{Hz} = \text{s}^{-1}$$

Remarque : Avec l'écriture complexe, on a en plus les fréquences négatives : $-1/T, -2/T, \dots, -n/T, \dots$

Question : Soit le signal $e(t)$ de fréquence f_1 , de rapport cyclique $\alpha = 1/2$, de niveaux 0 et E (Fig. 8.3). Déterminer son développement en série de Fourier sous forme trigonométrique.

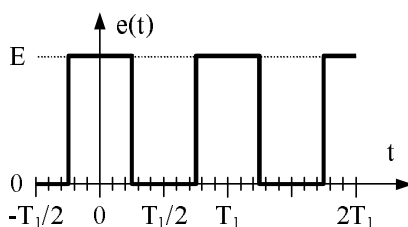


Fig. 8.3 Signal rectangulaire de rapport cyclique 1/2

Réponse : Le signal est développable en série de cosinus car il est pair.

$$b_n = 0 \quad a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t) dt = \frac{E}{T_1} \int_{-T_1/4}^{T_1/4} dt = \frac{E}{T_1} [t]_{-T_1/4}^{T_1/4} = \frac{E}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} e(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{4E}{T_1} \int_0^{T_1/4} \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$= \frac{4E}{T_1} \left[\frac{\sin(n\omega_1 t)}{n\omega_1} \right]_0^{T_1/4}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\text{D'où :} \quad e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \cos(n\omega_1 t)$$

Ou encore, en remarquant que les harmoniques pairs (n pair) sont nuls :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\omega_1 t]$$

Soit en développant :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\omega_1 t] + \dots \right]$$

Question : Soit le signal $e(t)$ précédent (voir figure 8.3). Déterminer son développement en série de Fourier sous forme complexe.

Réponse :

$$c_0 = a_0 = \frac{E}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T_1} \int_{-T_1/4}^{T_1/4} e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T_1} \left[\frac{e^{-jn\omega_1 t}}{-jn\omega_1} \right]_{-T_1/4}^{T_1/4}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{a_n}{2}$$

$$\text{D'où :} \quad e(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} e^{jn\omega_1 t}$$

Soit en développant :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \left[(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}) - \frac{1}{3} (e^{j3\omega_1 t} + e^{-j3\omega_1 t}) + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^p}{2p+1} (e^{j(2p+1)\omega_1 t} + e^{-j(2p+1)\omega_1 t}) + \dots \right]$$

En remplaçant les exponentielles complexes par des cosinus, on retrouve le résultat précédent.

8.2.3 Valeur efficace et puissance moyenne

• **Valeur efficace.** Pour un signal périodique $s(t)$ développable en série de Fourier, la formule de Bessel-Parseval donne le carré de la valeur efficace du signal (voir aussi Chapitre 7 : Régime variable - Valeurs moyenne et efficace) :

$$S_{\text{Eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Ainsi, le carré de la valeur efficace du signal $s(t)$ est la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces de tous ses harmoniques. Ce qui s'écrit :

$$S_{\text{Eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \quad \text{où} \quad A_0 = |a_0| \quad \text{et} \quad A_n = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

Question : Soit la tension redressée double alternance $u(t)$ et sa décomposition en série de Fourier.

$$u(t) = U_{\text{Max}} |\sin(\omega t)| \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{2U_{\text{Max}}}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\omega t)}{4n^2 - 1} \right)$$

On applique cette tension aux bornes d'une résistance R . Déterminer la part de la puissance dissipée par la résistance due à la composante continue, puis celle due aux harmoniques.

Réponse : La puissance moyenne dissipée par la résistance est :

$$P_{\text{Moy}} = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{R} = \frac{U_{\text{Max}}^2}{2R}$$

D'après la relation de Bessel-Parseval, la valeur efficace s'écrit :

$$U_{\text{Eff}}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n \text{ Eff}}^2 \quad \text{où} \quad U_0 = U_{\text{Moy}} \quad \text{et} \quad U_{n \text{ Eff}} = \frac{U_{n \text{ Max}}}{\sqrt{2}}$$

En divisant par R, on obtient :

$$P_{\text{Moy}} = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \quad \text{où} \quad P_0 = \frac{U_0^2}{R} = \frac{4U_{\text{Max}}^2}{\pi^2 R} \quad \text{et} \quad P_n = \frac{U_{n \text{ Eff}}^2}{R}$$

La puissance moyenne dissipée par la résistance est donc la somme de la puissance due à la composante continue de la tension, et des puissances dues aux harmoniques de la tension. D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P_n = P_{\text{Moy}} - P_0 = \frac{U_{\text{Max}}^2}{2R} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right)$$

Finalement :

$$\frac{P_0}{P_{\text{Moy}}} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} P_n / P_{\text{Moy}} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \approx 0,19$$

Remarque : En traitement du signal, on définit la puissance moyenne P_S d'un signal périodique $s(t)$ par le carré de la valeur efficace dudit signal. La relation entre les valeurs efficaces s'écrit alors :

$$P_S = S_{\text{Eff}}^2 = P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n$$

où $P_0 = A_0^2$ (avec $A_0 = |a_0|$) est la puissance de la composante continue, et $P_n = A_{n \text{ Eff}}^2$ la puissance de l'harmonique de rang n .

• **Puissance moyenne – Dipôle quelconque.** Si la tension u aux bornes d'un dipôle et le courant i le traversant sont périodiques de même période, alors leurs développements en séries de Fourier s'écrivent :

$$u = U_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n \text{ Max}} \cos(n\omega t + \phi_{Un}) \quad \text{et} \quad i = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n \text{ Max}} \cos(n\omega t + \phi_{In})$$

La puissance moyenne P , ou puissance active, s'écrit alors :

$$P = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n \text{ Eff}} I_{n \text{ Eff}} \cos \varphi_n \quad \text{où} \quad \varphi_n = \phi_{Un} - \phi_{In}$$

$$\text{avec } U_0 = U_{\text{Moy}}, I_0 = I_{\text{Moy}}, U_{n \text{ Eff}} = \frac{U_{n \text{ Max}}}{\sqrt{2}}, I_{n \text{ Eff}} = \frac{I_{n \text{ Max}}}{\sqrt{2}}$$

8.2.4 Caractérisation d'un signal

- **Facteurs de forme et d'ondulation** (voir Chapitre 7 : Régime variable – Valeurs moyenne et efficace). On note : $A_0 = |a_0|$

Facteur de forme	Taux d'ondulation
$F = \frac{S_{\text{Eff}}}{ S_{\text{Moy}} } = \frac{\sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_0}$	$\beta = \frac{S_{\text{Alt Eff}}}{ S_{\text{Moy}} } = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_0}$

- **Taux de distorsion harmonique.** Il sert à chiffrer la déformation d'un signal qui devrait être sinusoïdal. Compris entre 0 et l'infini, c'est le rapport de la valeur efficace du signal privé de sa composante continue et de son fondamental sur la valeur efficace du fondamental.

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_1 \text{ Eff}} = \frac{\sqrt{A_2^2 \text{ Eff} + A_3^2 \text{ Eff} + \dots + A_n^2 \text{ Eff} + \dots}}{A_1 \text{ Eff}}$$

On définit aussi le taux de distorsion de l'harmonique n par :

$$d_n = \frac{A_n \text{ Eff}}{A_1 \text{ Eff}} \Rightarrow d = \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} d_n^2}$$

8.2.5 Application aux systèmes linéaires

On sait bien étudier la réponse d'un système linéaire (voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire) à une entrée $e = e(t)$ et une sortie $s = s(t)$ lorsque l'entrée est continue ou sinusoïdale (voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé – Étude en fréquence, et Chapitre 24 : Filtrage analogique). Mais, dans la pratique, il est fréquent qu'un système soit excité par un signal périodique non-sinusoïdal.

Méthode

On applique le principe de linéarité aux composantes d'une série de Fourier selon la procédure suivante.

1) Décomposition du signal d'entrée en une composante continue et des composantes sinusoïdales :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

2) Étude de la réponse du système linéaire à chacune des composantes :

$$E_0 \xrightarrow{\text{système}} S_0 \quad e_n(t) \xrightarrow{\text{système}} s_n(t) = S_n \cos(n\omega t + \psi_n)$$

3) Somme des réponses :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \psi_n)$$

Question : Soit le filtre passif passe-bas du 1^{er} ordre (Fig. 8.4). On applique en entrée le signal rectangulaire $e(t)$ du § 8.2.2 (voir Fig. 8.3). Déterminer la série de Fourier du signal en sortie du circuit.

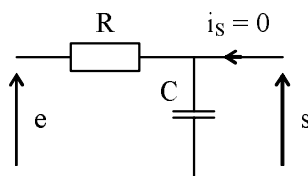


Fig. 8.4 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

Réponse : Le développement en série de Fourier de $e(t)$ est :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n} \cos(n\omega_1 t)$$

La fonction de transfert complexe du circuit est :

$$\underline{T} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + j\tau\omega} = \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

avec $\tau = RC$ et $\phi = -\text{Arc tan}(\tau\omega)$

Si $e_n(t) = E_n \cos(n\omega_1 t)$ alors

$$s_n(t) = \frac{E_n}{\sqrt{1 + (\tau n\omega_1)^2}} \cos(n\omega_1 t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad \phi_n = -\text{Arc tan}(\tau n\omega_1)$$

Et finalement :

$$s(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n \sqrt{1 + (\tau n\omega_1)^2}} \cos(n\omega_1 t + \phi_n)$$

Remarque : Le filtre passe-bas modifie l'amplitude et la phase de chaque composante sinusoïdale (fondamental et harmoniques). En conséquence, le signal $s(t)$ est déformé par rapport à $e(t)$. Il subit une distorsion d'amplitude et une distorsion de phase.

Question : Déterminer la condition sur le déphasage ϕ pour qu'il n'y ait pas de distorsion de phase.

Réponse : Le cosinus s'écrit aussi :

$$\cos(n\omega_1 t + \phi_n) = \cos[n\omega_1 (t - \tau_n)] \quad \text{avec} \quad \tau_n = \frac{-\phi_n}{n\omega_1}$$

Pour ne pas avoir de distorsion de phase, il faudrait que le retard τ_n soit constant quel que soit le rang n ; ce qui correspond à un déphasage linéaire.

$$\phi_n = -\tau_n n\omega_1$$

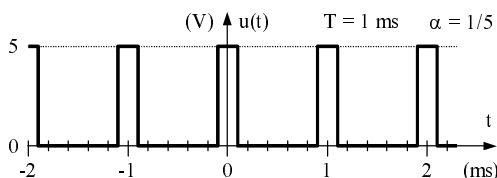
Attention ! Un filtre à déphasage linéaire est irréalisable de manière analogique (voir Chapitre 24 : Filtrage analogique).

8.3 REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES – SPECTRES

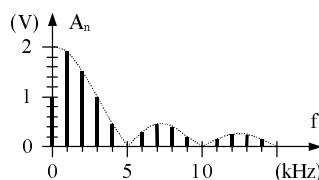
Exemple 8.3.1

On illustre le propos avec une tension rectangulaire $u(t)$ de période $T = 1\text{ ms}$, de rapport cyclique $\alpha = 1/5$, de niveaux 0 et 5V (Fig. 8.5).

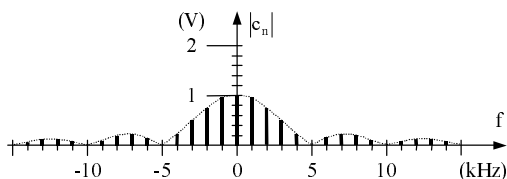
Chronogramme



Spectre d'amplitude unilatéral



Spectre d'amplitude bilatéral



Spectre de phase bilatéral

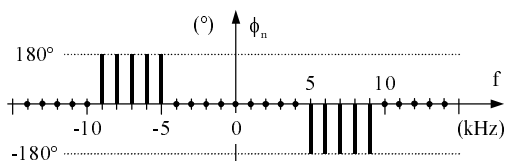


Fig. 8.5 Tension rectangulaire de niveaux 0 et 5V et $\alpha = 1/5$

8.3.1 Représentation temporelle

Le chronogramme, ou diagramme temporel, renseigne sur la valeur instantanée du signal.

Le chronogramme d'un signal périodique, de période T , est constitué d'une suite de motifs identiques de durée T .

Remarque : Le signal est une fonction réelle du temps.

Exemple 8.3.2

(voir Fig. 8.5).

8.3.2 Représentations fréquentielles

Le spectre d'amplitude renseigne sur l'amplitude (module) du signal en fonction de la fréquence. Le spectre de phase renseigne sur la phase du signal en fonction de la fréquence.

Le spectre d'amplitude et le spectre de phase d'un signal périodique, de période T , sont constitués de raies aux fréquences multiples de $1/T$.

Remarques :

- Le signal est une fonction complexe de la fréquence. Le signal temporel étant une fonction réelle, le signal fréquentiel possède une partie réelle et un module pairs, une partie imaginaire et une phase impaires.
- On peut aussi représenter un signal par sa partie réelle et sa partie imaginaire en fonction de la fréquence, mais cette représentation est moins facile à interpréter.
- Un signal est complètement caractérisé par son spectre d'amplitude et son spectre de phase.
- Le spectre d'amplitude est indépendant de l'origine des temps choisie. En conséquence, si on ne s'intéresse qu'au spectre d'amplitude, on choisira l'origine des temps de manière à simplifier les calculs des coefficients en faisant apparaître une symétrie.
- Le spectre de phase dépend de l'origine des temps choisie.

a) Spectre d'amplitude unilatéral

Le spectre d'amplitude unilatéral d'un signal périodique est la représentation graphique des raies d'amplitudes A_0 de la composante continue, et A_n des composantes

sinusoïdales aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{N}^*$ (voir § 8.1).

$$A_0 = |a_0| = |c_0| \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 |c_n| \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple 8.3.3

(voir Fig. 8.5).

Question : Soit le signal $e(t)$ de fréquence f_1 , de rapport cyclique $\alpha = 1/2$, de niveaux 0 et E (voir Fig. 8.3). Dessiner son spectre d’amplitude unilatéral.

Réponse : On calcule les amplitudes des raies spectrales à partir des coefficients du développement en série de Fourier établis au § 8.2.2, puis on trace le spectre unilatéral (Fig. 8.6).

$$A_0 = |a_0| = \left| \frac{E}{2} \right| \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left| \frac{2E \sin(n\pi/2)}{n\pi} \right| \qquad (n \geq 1)$$

Comme E est positif, on a :

raie	DC	F	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10	...
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
A_n	$\frac{E}{2}$	$\frac{2E}{\pi}$	0	$\frac{2E}{3\pi}$	0	$\frac{2E}{5\pi}$	0	$\frac{2E}{7\pi}$	0	$\frac{2E}{9\pi}$	0	...
f	0	f_1	$2f_1$	$3f_1$	$4f_1$	$5f_1$	$6f_1$	$7f_1$	$8f_1$	$9f_1$	$10f_1$...

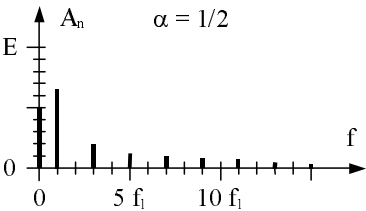


Fig. 8.6 Spectre d’amplitude unilatéral du signal rectangulaire $e(t)$

b) Spectre d’amplitude bilatéral

Le spectre d’amplitude bilatéral d’un signal périodique est la représentation graphique des raies d’amplitudes $|c_0|$ de la composante continue, et $|c_n|$ des composantes sinusoïdales aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{Z}$ (voir § 8.1).

$$|c_0| = A_0 = |a_0| \quad |c_n| = |c_{-n}| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exemple 8.3.4

(voir Fig. 8.5).

Attention ! Le spectre d'amplitude bilatéral d'un signal réel étant pair, on se contente souvent de représenter la partie des fréquences positives. Il ne faut pas alors le confondre avec le spectre d'amplitude unilatéral, les composantes sont telles que :

$$|c_0| = A_0 = |a_0| \quad \text{et} \quad 2|c_n| = 2|c_{-n}| = A_n$$

Question : Soit le signal $e(t)$ de fréquence f_1 , de rapport cyclique $\alpha = 1/2$, de niveaux 0 et E (voir Fig. 8.3). Dessiner son spectre d'amplitude bilatéral.

Réponse : On calcule les amplitudes des raies spectrales à partir des coefficients du développement en série de Fourier établis au § 8.2.2, puis on trace le spectre bilatéral (Fig. 8.7).

$$|c_0| = A_0 = \left| \frac{E}{2} \right| \quad |c_n| = |c_{-n}| = \frac{A_n}{2} = \left| \frac{E \sin(n\pi/2)}{n\pi} \right| \quad (n \geq 1)$$

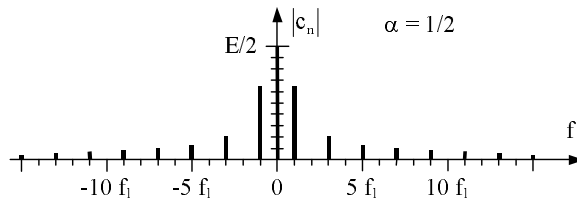


Fig. 8.7 Spectre d'amplitude bilatéral du signal rectangulaire $e(t)$

c) Spectre de phase

Le spectre de phase d'un signal périodique est la représentation graphique des raies des phases $\phi_0 = 0$ (par définition) de la composante continue, et ϕ_n des composantes sinusoïdales aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour un spectre unilatéral ou $n \in \mathbb{Z}$ pour un spectre bilatéral (voir § 8.1).

$$\begin{cases} \cos \phi_n = a_n/A_n \\ \sin \phi_n = -b_n/A_n \end{cases} \quad \phi_n = -\phi_{-n} = \arg(c_n) = -\arg(c_{-n}) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Remarque : Pour la deuxième écriture (voir § 8.1), si on remplace le cosinus par un sinus, le spectre de phase est constitué des raies φ_n .

Exemple 8.3.5

(voir Fig. 8.5). Le spectre de phase unilatéral est obtenu simplement en supprimant la partie correspondant aux fréquences négatives.

8.4 QUELQUES SIGNAUX CLASSIQUES

On présente ici le développement en série de Fourier et le spectre d'amplitude unilatéral de quelques signaux classiques (Fig. 8.8 à Fig. 8.13).

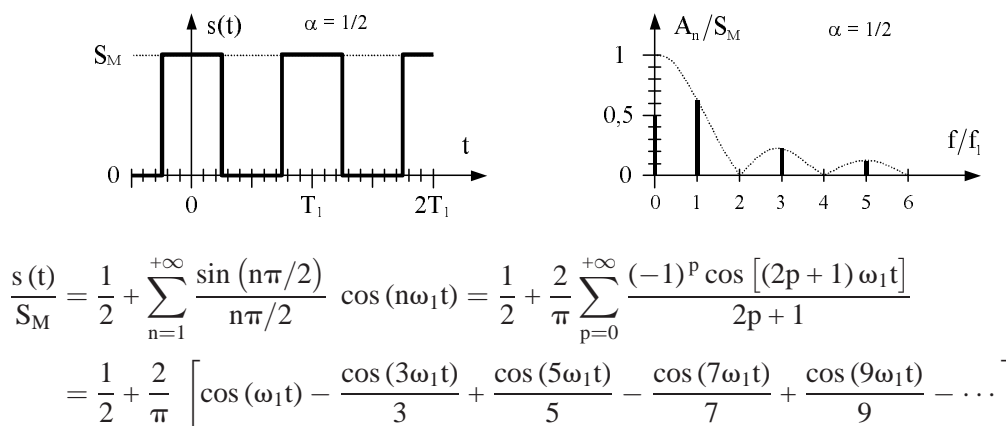


Fig. 8.8 Signal rectangulaire de rapport cyclique $\alpha = 1/2$

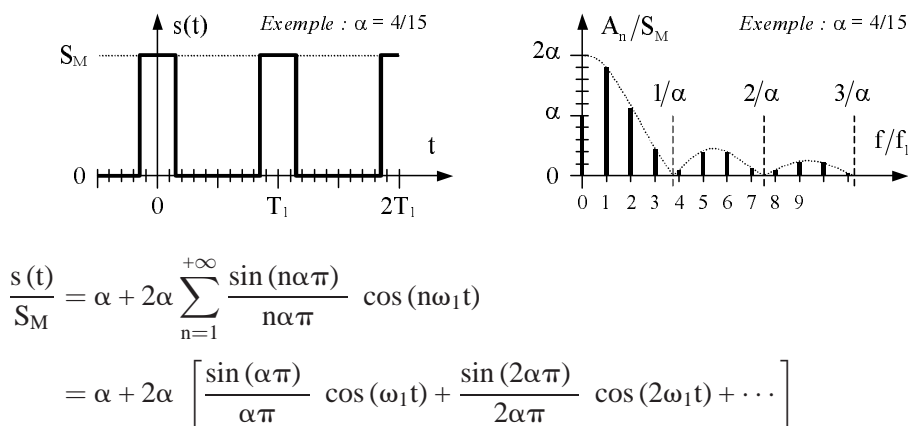


Fig. 8.9 Signal rectangulaire de rapport cyclique α quelconque

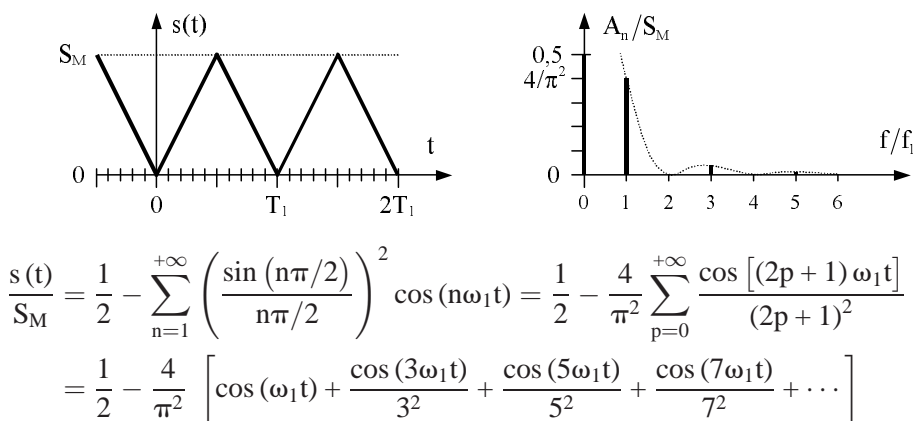


Fig. 8.10 Signal triangulaire de pentes symétriques

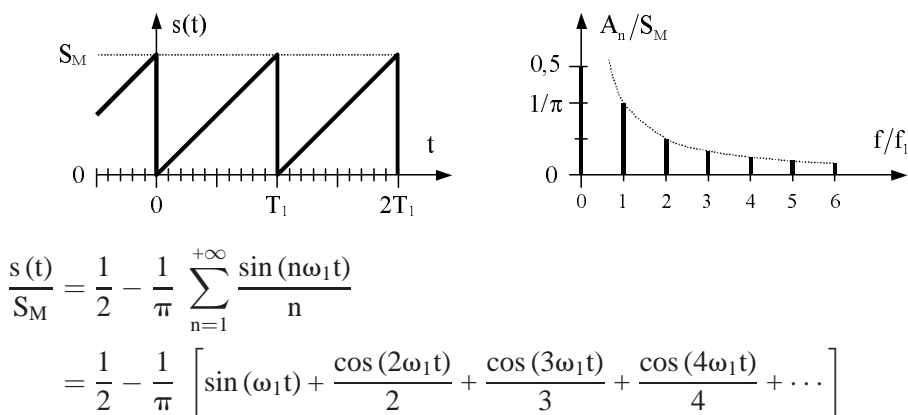


Fig. 8.11 Signal dent de scie

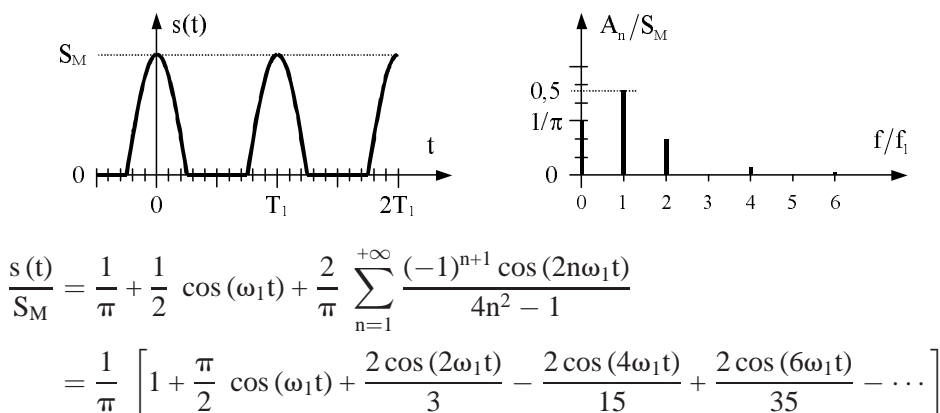
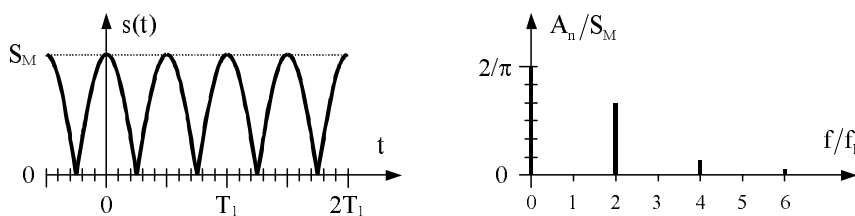


Fig. 8.12 Signal sinusoïdal redressé simple alternance



Attention, T_1 n'est pas ici la période du signal redressé, mais le double de celle-ci.

$$\begin{aligned} \frac{s(t)}{S_M} &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{4n^2 - 1} \cos(2n\omega_1 t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n\omega_1 t)}{4n^2 - 1} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[1 + \frac{2 \cos(2\omega_1 t)}{3} - \frac{2 \cos(4\omega_1 t)}{15} + \frac{2 \cos(6\omega_1 t)}{35} - \frac{2 \cos(8\omega_1 t)}{63} + \dots \right] \end{aligned}$$

Fig. 8.13 Signal sinusoidal redressé double alternance

Chapitre 9

Étude temporelle d'un système linéaire

Dans ce chapitre, un système linéaire est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, fonction de la variable temps t . On se limite ici à la résolution de cette équation sur $t \in]0, +\infty[$ pour des conditions initiales établies à $t = 0^+$ par des considérations physiques. Aucune impulsion de Dirac n'est présente dans les équations différentielles traitées dans ce chapitre, car les mathématiques nécessaires sortent du cadre de cet ouvrage. En conséquence, les signaux étudiés sont continus, sauf éventuellement en $t = 0$, et suffisamment dérivables. Cependant, un système linéaire peut aussi être décrit à l'aide de la transformée de Laplace (voir Chapitre 10 : Étude symbolique - Transformée de Laplace), grâce à laquelle on pourra prendre plus facilement en compte d'éventuelles impulsions, y compris en $t = 0$.

9.1 SYSTÈME LINÉAIRE

• **Définition.** Un *système linéaire* (Fig. 9.1), à une entrée $e = e(t)$ et une sortie $s = s(t)$, est un système possédant les propriétés de proportionnalité et d'additivité ; c'est-à-dire tel que si la sortie $s_1(t)$ est la réponse du système à l'entrée $e_1(t)$, et la sortie $s_2(t)$ la réponse à l'entrée $e_2(t)$, alors la réponse du système à l'entrée $\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t)$ est $\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)$.

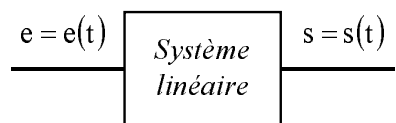


Fig. 9.1 Système linéaire

- **Équation différentielle.** Un système linéaire, à une entrée et une sortie, est régi par une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants de la forme :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad (m \leq n)$$

Remarque : L'équation différentielle ne comporte pas de terme constant (dû à une polarisation par exemple) car on peut l'éliminer par un changement de variable. Plus généralement, si la sortie dépend de plusieurs entrées, on utilisera le principe de linéarité (voir Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité).

9.2 PRINCIPE GÉNÉRAL DE L'ÉTUDE TEMPORELLE

Soit un système linéaire dans un état initial donné ; on modifie son excitation d'entrée $e(t)$ et on observe sa réponse en sortie $s(t)$.

9.2.1 Signaux d'excitation

Pour caractériser un système dans le domaine temporel, on étudie sa réponse à des signaux d'excitation (Fig. 9.2) à partir de l'instant $t = 0$ arbitrairement fixé.

Les réponses habituellement étudiées sont les suivantes.

- *Réponse indicielle (ou réponse à un échelon) :* le système est excité par un échelon. C'est par exemple le cas de la mise sous tension d'un circuit électrique.
- *Réponse à une rampe :* le système est excité par une rampe de pente « a » qui croît théoriquement vers l'infini, mais qui en pratique se sature. C'est par exemple le cas d'une commande de démarrage progressif d'un moteur.
- *Réponse à une sinusoïde causale :* le système est excité par une sinusoïde causale. C'est par exemple le cas de la mise sous tension secteur d'un actionneur.
- *Réponse impulsionnelle :* le système est excité par une impulsion de Dirac (voir Chapitre 10 : Étude symbolique - Transformée de Laplace).

Remarque : On peut aussi étudier la réponse d'un système dans le domaine fréquentiel en le soumettant à un signal sinusoïdal permanent dont on fait varier la fréquence : c'est la *réponse harmonique* (voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé - Étude en fréquence).

9.2.2 Mise en équation d'un circuit électrique

La mise en équation d'un circuit électrique s'effectue grâce aux lois et théorèmes de l'électricité (voir Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité). Deux techniques sont possibles.

1) On établit l'équation différentielle de la grandeur électrique recherchée directement dans le domaine temporel ; ce qui est fait dans ce chapitre.

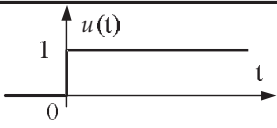
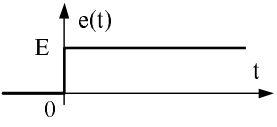
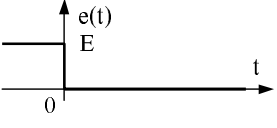
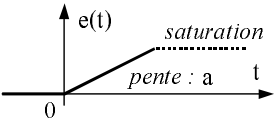
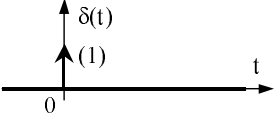
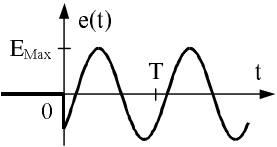
Nom	Définition	Diagramme temporel
Échelon unité ou de Heaviside	$\begin{cases} t < 0 & u(t) = 0 \\ t \geq 0 & u(t) = 1 \end{cases}$	
Échelon d'amplitude montant	$e(t) = Eu(t)$	
Échelon d'amplitude descendant (ou lâcher)	$e(t) = E(1 - u(t))$	
Rampe	$e(t) = at u(t)$	
Impulsion unité ou de Dirac	$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$	
Sinusoïde causale	$e(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t + \varphi_0) u(t)$	

Fig. 9.2 Signaux d'excitation typiques

2) On établit l'équation de la transformée de Laplace (à conditions initiales nulles) de la grandeur électrique recherchée grâce à la notion d'impédance opérationnelle. Puis, on revient au domaine temporel, ce qui établit l'équation différentielle. Cette technique présente l'avantage de remplacer la mise en équation différentielle par un calcul symbolique où l'opérateur d/dt est remplacé par une multiplication par p (voir Chapitre 10 : Étude symbolique - Transformée de Laplace).

Remarque : L'ordre n de l'équation différentielle est égal au nombre des intégrations (tension aux bornes d'un condensateur ou courant dans une inductance), soit, dit plus simplement, au nombre d'éléments réactifs (condensateurs et bobines) dans le circuit.

9.2.3 Résolution de l'équation différentielle

• **Solution de l'équation différentielle - Réponses libre et forcée.** La réponse du système à l'entrée $e(t)$, solution de l'équation différentielle du § 9.1, est du type :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

où :

- $s_1(t)$ est la Solution Générale de l'Équation Sans Second Membre (SGESSM), qui ne dépend que du système et des conditions initiales. Cette partie de la réponse est appelée *réponse libre ou naturelle*.
- $s_2(t)$ est une Solution Particulière de l'Équation Avec Second Membre (SPEASM) de même nature que l'entrée $e(t)$. Cette partie de la réponse est appelée *réponse forcée*. Pour les cas simples, on détermine $s_2(t)$ par identification à une fonction de même nature que $e(t)$.

• **Conditions initiales - Détermination des constantes.** On résout l'équation différentielle sur $t \in]0, +\infty[$ pour des conditions initiales établies à $t = 0^+$ par des considérations physiques, ce qui détermine les constantes d'intégration.

Avant application de l'excitation $e(t)$, les éléments réactifs (condensateurs et bobines) d'un circuit électrique possèdent généralement déjà de l'énergie à $t = 0^-$, qu'ils conservent à $t = 0^+$ (il n'y a pas de discontinuité d'énergie). Un condensateur soumis à la tension U_0 stocke une énergie $W_C = CU_0^2/2$ et une bobine traversée par un courant I_0 stocke une énergie $W_L = LI_0^2/2$. La tension U_0 pour un condensateur, et l'intensité I_0 pour une bobine sont les conditions initiales. Il faut se rappeler que :

1) La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue.

$$\forall t, \quad u_C(t^-) = u_C(t^+) \Rightarrow u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

2) Le courant dans une bobine est toujours continu.

$$\forall t, \quad i_L(t^-) = i_L(t^+) \Rightarrow i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Remarques :

– Cependant, si la tension aux bornes d'un condensateur (ou le courant dans une bobine) varie « très rapidement » autour d'un instant t , alors, d'un point de vue théorique, on peut admettre que cette tension (ou ce courant) subit une discontinuité à l'instant t . Mais l'outil mathématique nécessaire dépasse le cadre de ce livre.

– Il faut connaître n conditions initiales sur la sortie et ses dérivées pour que la solution de l'équation différentielle d'ordre n soit unique.

9.2.4 Régimes transitoire et permanent

La réponse du système à l'entrée $e(t)$ peut aussi s'écrire :

$$s(t) = s_{\text{Tran}}(t) + s_{\text{Perm}}(t)$$

où :

- $s_{\text{Tran}}(t)$ est la partie de la réponse appelée *réponse transitoire*. Cette partie tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.
- $s_{\text{Perm}}(t)$ est la partie de la réponse appelée *réponse permanente*. Cette partie ne tend pas vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Elle peut être continue, périodique à valeurs moyennes et efficaces constantes, etc.
- Un système est en *régime transitoire* tant que la réponse transitoire n'est pas éteinte. La durée de ce régime dépend des constantes de temps du système. Pendant le régime transitoire : $s(t) = s_{\text{Tran}}(t) + s_{\text{Perm}}(t) = s_1(t) + s_2(t)$
- Un système est en *régime permanent ou établi* après extinction de la réponse transitoire. Pendant le régime permanent : $s(t) = s_{\text{Perm}}(t)$

Remarque : En général, la réponse libre est différente de la réponse transitoire $s_{\text{Tran}}(t) \neq s_1(t)$, et la réponse forcée est différente de la réponse permanente $s_{\text{Perm}}(t) \neq s_2(t)$. Cependant, le cas particulier où $s_{\text{Tran}}(t) = s_1(t)$ et $s_{\text{Perm}}(t) = s_2(t)$ est fréquemment rencontré.

9.3 SYSTÈME LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Un système linéaire du premier ordre, à une entrée et une sortie, est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad \text{avec} \quad a_1 > 0 \text{ et } a_0 \geq 0$$

9.3.1 Principes de résolution de l'équation différentielle

a) *Premier cas* : $a_0 > 0$ (et $a_1 > 0$)

- **Forme canonique.** Cette forme permet une identification aisée des grandeurs caractéristiques.

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = C_1 \frac{de}{dt} + C_0 e \quad \text{si } b_0 \neq 0 \quad = \quad C_0 \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right)$$

où $\tau = a_1/a_0 > 0$ est la constante de temps du système, $C_0 = b_0/a_0$ est la transmittance statique du système, $C_1 = b_1/a_0$ est une constante, et si $b_0 \neq 0$ alors $C_1 = C_0 \tau'$ avec $\tau' = b_1/b_0$ qui est une deuxième constante de temps.

- **Procédure de résolution** (pour $t > 0$)

1) Solution Générale de l'Équation Sans Second Membre (SGESSM)

$$s_1(t) = K e^{-t/\tau} \quad \text{où } K \text{ est une constante d'intégration}$$

2) Solution Particulière de l'Équation Avec Second Membre (SPEASM)

$s_2(t)$ qui dépend du second membre

3) Solution Générale de l'Équation Avec Second Membre (SGEASM)

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-t/\tau} + s_2(t)$$

4) Détermination de la constante d'intégration à l'aide de la condition initiale

$$s(0^+) = S_0 = K + s_2(0^+)$$

5) Écrire la SGEASM.

b) Deuxième cas : $a_0 = 0$ (et $a_1 > 0$)

• Équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} = \frac{b_1}{a_1} \frac{de}{dt} + \frac{b_0}{a_1} e$$

• **Procédure de résolution** (pour $t > 0$). On intègre le membre de droite, la constante d'intégration étant déterminée à l'aide de la condition initiale.

9.3.2 Réponse indicielle

On étudie ici un cas très fréquent : la réponse d'un système du premier ordre à un échelon $e(t) = Eu(t)$ avec $b_1 = 0$, ou, ce qui conduit à la même solution, à une tension $e(t) = E$ pour $t > 0$ (dans ce cas, on ne précise pas $e(t)$ pour $t < 0$).

a) Premier cas : $a_0 > 0$

Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit : $\tau \frac{ds}{dt} + s = C_0 E$

1) SGEASM. $s_1(t) = Ke^{-t/\tau}$

2) SPEASM. $s_2(t) = C_0 E$

3) SGEASM. $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = Ke^{-t/\tau} + C_0 E = Ke^{-t/\tau} + S_{+\infty}$
 en notant $S_{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$

4) Constante d'intégration. En supposant une condition initiale $s(0^+) = S_0$, on a :

$$s(0^+) = S_0 = K + S_{+\infty} \Rightarrow K = S_0 - S_{+\infty}$$

5) SGEASM. $s(t) = (S_0 - S_{+\infty}) e^{-t/\tau} + S_{+\infty} = (S_{+\infty} - S_0) (1 - e^{-t/\tau}) + S_0$

6) Diagramme temporel (Fig. 9.3). Pour $S_0 < S_{+\infty}$ le signal $s(t)$ est croissant, tandis que pour $S_0 > S_{+\infty}$ le signal $s(t)$ est décroissant.

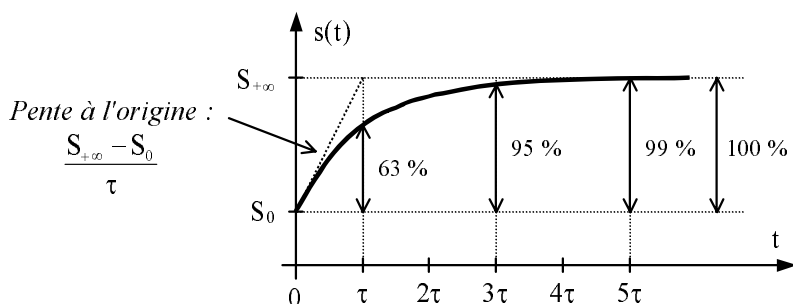


Fig. 9.3 Diagramme temporel pour $0 < S_0 < S_{+\infty}$

Remarque : Le *temps de réponse* est généralement défini à 5 % de la valeur finale ($s(t) = 0,95 S_{+\infty}$) ou à 1 % de la valeur finale ($s(t) = 0,99 S_{+\infty}$).

$$t_r(5\%) \approx 3\tau \quad t_r(1\%) \approx 5\tau$$

Question : Exprimer le temps $t_2 - t_1$ mis pour passer d'une valeur S_1 à une valeur S_2 du signal $s(t)$.

Réponse : La valeur S_1 (resp. S_2) est atteinte à l'instant t_1 (resp. t_2).

On a :

$$S_1 = (S_0 - S_{+\infty}) e^{-t_1/\tau} + S_{+\infty} \Rightarrow t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_0}{S_{+\infty} - S_1}$$

$$\text{et } S_2 = (S_0 - S_{+\infty}) e^{-t_2/\tau} + S_{+\infty} \Rightarrow t_2 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_0}{S_{+\infty} - S_2}$$

$$\text{D'où : } t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_1}{S_{+\infty} - S_2}$$

b) Deuxième cas : $a_0 = 0$ (*Intégrateur parfait*)

Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{ds}{dt} = C'E \quad \text{où } C' = b_0/a_1$$

Par intégration, et en supposant une condition initiale $s(0^+) = S_0$, on obtient :

$$s(t) = C'E t + S_0 \quad \text{qui est l'équation d'une droite}$$

Question : Exprimer le temps $t_2 - t_1$ mis pour passer d'une valeur S_1 à une valeur S_2 du signal $s(t)$.

Réponse : La valeur S_1 (resp. S_2) est atteinte à l'instant t_1 (resp. t_2).

On a :

$$S_1 = C'E t_1 + S_0 \quad \text{et} \quad S_2 = C'E t_2 + S_0$$

$$\text{D'où : } t_2 - t_1 = \frac{S_2 - S_1}{C'E}$$

9.3.3 Circuits électriques élémentaires

a) *Pseudo-intégrateurs passifs R.C. et L.R. (Fig. 9.4)*

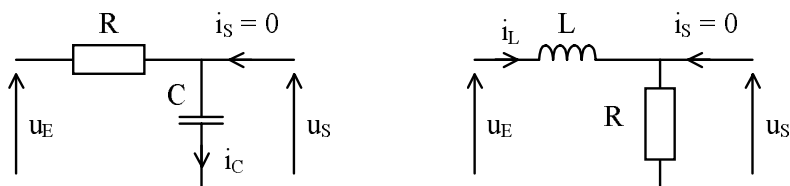


Fig. 9.4 Pseudo-intégrateurs passifs R.C. et L.R.

Question : Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée des circuits R.C. et L.R. (voir Fig. 9.4).

Réponse :

$$\text{Circuit R.C. : } \left. \begin{array}{l} u_E - u_S = Ri_C \\ i_C = C \frac{du_S}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = u_E \quad \text{avec } \tau = RC$$

$$\text{Circuit L.R. : } \left. \begin{array}{l} u_E - u_S = L \frac{di_L}{dt} \\ u_S = Ri_L \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = u_E \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Question : Étudier la réponse à un échelon de tension $u_E(t) = E u(t)$, ou, ce qui conduit à la même solution, à une tension $u_E(t) = E$ pour $t > 0$ (dans ce cas, on ne précise pas $u_E(t)$ pour $t < 0$). On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = E$$

1) SGESSM. $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$

2) SPEASM. $u_{S2}(t) = E$

3) SGEASM. $u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + E$

4) Constante d'intégration. Aucune énergie n'étant stockée dans les éléments réactifs avant l'échelon, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

Et comme $u_S = u_C$ ou $u_S = Ri_L$, on a :

$$u_S(0^+) = 0 = K + E \Rightarrow K = -E$$

5) SGEASM. $u_S(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ pour $t > 0$

6) Diagramme temporel (voir Fig. 9.3 où $S_0 = 0$ et $S_{+\infty} = E$)

Remarque : En régime permanent, la tension $u_S(t) = E$ est égale à la tension d'entrée $u_E(t) = E$.

Question : Étudier la réponse à une rampe de tension $u_E(t) = at$ ($u(t)$). On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = at$$

1) SGESSM. $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$

2) SPEASM. La solution particulière est de la forme :

$$u_{S2}(t) = mt + n \Rightarrow du_{S2}/dt = m$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\tau m + mt + n = at \Rightarrow m = a \quad \text{et} \quad n = -a\tau \Rightarrow u_{S2}(t) = a(t - \tau)$$

3) SGEASM. $u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + a(t - \tau)$

4) Constante d'intégration. Aucune énergie n'étant stockée dans les éléments réactifs avant l'échelon, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

Et comme $u_S = u_C$ ou $u_S = Ri_L$, on a :

$$u_S(0^+) = 0 = K - a\tau \Rightarrow K = a\tau$$

5) SGEASM. $u_S(t) = a\tau e^{-t/\tau} + a(t - \tau)$ pour $t > 0$

6) Diagramme temporel (Fig. 9.5)

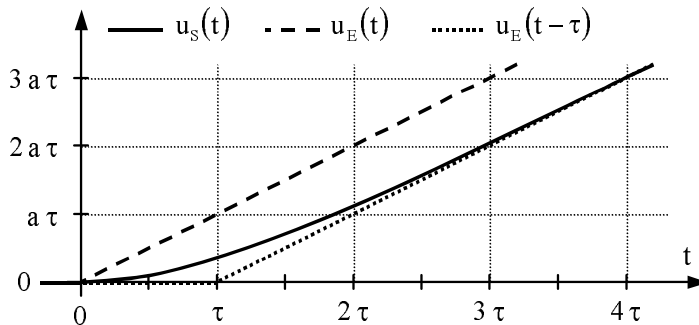


Fig. 9.5 Diagramme temporel

Remarque : En régime permanent, la tension $u_S(t) = +a(t - \tau)$ est en retard de τ sur la tension d'entrée $u_E(t) = at$. Ces tensions croissent théoriquement à l'infini. En pratique, un phénomène (saturation de la source ou destruction des composants) limitera cette croissance.

Question : Étudier la réponse à une sinusoïde causale $u_E(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t) u(t)$. On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = E_{\text{Max}} \sin(\omega t)$$

1) SGESSM. $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$

2) SPEASM. La solution particulière est de la forme :

$$u_{S2}(t) = M \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \frac{du_{S2}(t)}{dt} = M\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

En remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$M\omega\tau \cos(\omega t + \varphi) + M \sin(\omega t + \varphi) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t)$$

Soit :

$$M\omega\tau (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) + M (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) = E_{\text{Max}} \sin (\omega t)$$

D'où le système :

$$\begin{cases} M\omega\tau \cos \varphi + M \sin \varphi = 0 \\ -M\omega\tau \sin \varphi + M \cos \varphi = E_{\text{Max}} \end{cases} \Rightarrow \tan \varphi = -\omega\tau \quad \text{et} \quad M = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

3) SGEASM. $u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + M \sin(\omega t + \varphi)$

4) Constante d'intégration. Aucune énergie n'étant stockée dans les éléments réactifs avant l'échelon, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

Et comme $u_S = u_C$ ou $u_S = Ri_L$, on a :

$$u_S(0^+) = 0 = K + M \sin(\varphi) \Rightarrow K = -M \sin(\varphi)$$

5) SGEASM. $u_S(t) = -M \sin(\varphi) e^{-t/\tau} + M \sin(\omega t + \varphi)$ pour $t > 0$

Remarque : En régime permanent, la tension de sortie est $u_S(t) = M \sin(\omega t + \varphi)$. On retrouve bien sûr ce résultat en analyse harmonique (voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé - Étude en fréquence).

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\text{Arc tan}(\omega\tau)$$

D'où :

$$u_E(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t) \Rightarrow u_S(t) = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

Question : Établir l'expression du courant i_C (voir Fig. 9.4) pour la réponse à un échelon de tension $u_E(t) = E u(t)$.

Réponse : Puisqu'on connaît l'expression de la tension aux bornes du condensateur, il suffit d'en calculer la dérivée.

$$u_S(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow i_C(t) = C \frac{du_S(t)}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t > 0$$

Question : Établir l'expression du courant i_L (voir Fig. 9.4) pour la réponse à un échelon de tension $u_E(t) = E u(t)$.

Réponse : Puisqu'on connaît l'expression de la tension aux bornes de la résistance, il suffit de la diviser par R .

$$u_S(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \Rightarrow i_L(t) = \frac{u_S(t)}{R} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{pour } t > 0$$

b) Pseudo-dérivateurs passifs C.R. et R.L. (Fig. 9.6)

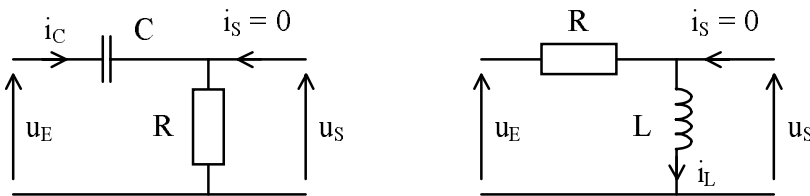


Fig. 9.6 Pseudo-dérivateurs passifs C.R. et R.L.

Question : Établir l'équation différentielle reliant la tension de sortie à la tension d'entrée des circuits C.R. et R.L. (voir Fig. 9.6)

Réponse :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Circuit C.R. : } \begin{cases} u_S = Ri_C \\ i_C = C \frac{d(u_E - u_S)}{dt} \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = \tau \frac{du_E}{dt} \quad \text{avec } \tau = RC$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Circuit R.L. : } \begin{cases} u_S = L \frac{di_L}{dt} \\ u_E - u_S = Ri_L \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = \tau \frac{du_E}{dt} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Question : Étudier la réponse à un échelon de tension $u_E(t) = E u(t)$, ou, ce qui conduit à la même solution, à une tension $u_E(t) = E$ pour $t > 0$. On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = 0 \quad \text{car } \frac{du_E}{dt} = 0 \quad \text{pour } t > 0$$

- 1) SGEASM. $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$
- 2) SPEASM. $u_{S2}(t) = 0$
- 3) SGEASM. $u_S(t) = Ke^{-t/\tau}$
- 4) Constante d'intégration. Aucune énergie n'étant stockée dans les éléments réactifs avant l'échelon, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

Et comme $u_S = u_E - u_C$ ou $u_S = u_E - Ri_L$, on a :

$$u_S(0^+) = u_E(0^+) = E \Rightarrow K = E$$

- 5) SGEASM. $u_S(t) = E e^{-t/\tau}$ pour $t > 0$
- 6) Diagramme temporel (voir Fig. 9.3 où $S_0 = E$ et $S_{+\infty} = 0$)

Remarque : En régime permanent, la tension est nulle $u_S(t) = 0$.

Question : Étudier la réponse à une rampe de tension $u_E(t) = at$ ($u(t)$). On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = a\tau \quad \text{car} \quad \frac{du_E}{dt} = a$$

- 1) SGEASM. $u_{S1}(t) = Ke^{-t/\tau}$
- 2) SPEASM. $u_{S2}(t) = a\tau$
- 3) SGEASM. $u_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t) = Ke^{-t/\tau} + a\tau$
- 4) Constante d'intégration. Aucune énergie n'étant stockée dans les éléments réactifs avant l'échelon, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

Et comme $u_S = u_E - u_C$ ou $u_S = u_E - Ri_L$, on a :

$$u_S(0^+) = u_E(0^+) = 0 = K + a\tau \Rightarrow K = -a\tau$$

- 5) SGEASM. $u_S(t) = a\tau(1 - e^{-t/\tau})$ pour $t > 0$

Remarque : En régime permanent, la tension de sortie $u_S(t) = a\tau$ est une constante égale à la pente du signal d'entrée au coefficient τ près. Cependant, la tension d'entrée ne peut pas croître indéfiniment (saturation de la source).

c) Charge d'un condensateur à courant constant (Fig. 9.7)

Question : Établir l'équation différentielle. En déduire la forme intégrale.

Réponse :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{1}{C} i \\ \Rightarrow u &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \, dt = \frac{1}{C} \int_0^t i \, dt + u(0)\end{aligned}$$

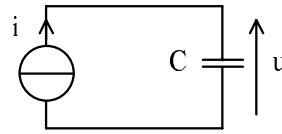


Fig. 9.7 Charge d'un condensateur

Question : Étudier la réponse à un échelon de courant $i(t) = I u(t)$. On suppose que le condensateur n'est pas déchargé à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{du}{dt} = \frac{I}{C}$$

On intègre le membre de droite : $u = \frac{I}{C} t + K$

Le condensateur n'étant pas déchargé avant l'échelon de courant, on a :

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

Et comme $u = u_C$, on a : $u(0^+) = U_0 = K$

Finalement : $u = \frac{I}{C} t + U_0$ pour $t > 0$

Remarque : La constante de temps du système est nulle, il n'y a donc pas de régime transitoire. En pratique, la source de courant n'étant pas idéale, la tension sera limitée à une valeur maximale de saturation, à moins que le condensateur ne soit détruit avant.

d) Bobine parfaite sous tension constante (Fig. 9.8)

Question : Établir l'équation différentielle. En déduire la forme intégrale.

Réponse :

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{1}{L} e \\ \Rightarrow i &= \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t e \, dt = \frac{1}{L} \int_0^t e \, dt + i(0)\end{aligned}$$

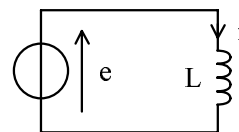


Fig. 9.8 Bobine parfaite sous tension

Question : Étudier la réponse à un échelon de tension $e(t) = E u(t)$. On suppose que la bobine stocke une énergie à l'instant $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

On intègre le membre de droite : $i = \frac{E}{L} t + K$

La bobine stockant une énergie avant l'échelon de tension, on a :

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

Et comme $i = i_L$, on a : $i(0^+) = I_0 = K$

Finalement : $i = \frac{E}{L} t + I_0$ pour $t > 0$

Remarque : La constante de temps du système est nulle, il n'y a donc pas de régime transitoire. En pratique, soit la bobine sera détruite, soit le courant sera limité à une valeur maximale de saturation car la source de tension, n'étant pas idéale, ne pourra pas fournir davantage de courant.

9.4 SYSTÈME LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE

Un système linéaire du deuxième ordre, à une entrée et une sortie, est régi par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants de la forme :

$$a_2 \frac{d^2s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_2 \frac{d^2e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad \text{avec} \quad a_2 > 0 \quad \text{et} \quad a_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \geq 0$$

9.4.1 Principes de résolution de l'équation différentielle

a) *Premier cas :* $a_0 > 0$ ($a_2 > 0$ et $a_1 \geq 0$)

• **Formes canoniques.** Ces formes permettent une identification aisée des grandeurs caractéristiques.

$$\tau_0^2 \frac{d^2s}{dt^2} + 2m\tau_0 \frac{ds}{dt} + s = C_2 \frac{d^2e}{dt^2} + C_1 \frac{de}{dt} + C_0 e \quad \text{si } b_0 \neq 0 \quad = \quad C_0 \left(\tau_0'^2 \frac{d^2e}{dt^2} + 2m'\tau_0' \frac{de}{dt} + e \right)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \Gamma_2 \frac{d^2e}{dt^2} + \Gamma_1 \frac{de}{dt} + \Gamma_0 e \quad \text{si } b_2 \neq 0 \quad = \quad \Gamma_2 \left(\frac{d^2e}{dt^2} + 2m'\omega_0' \frac{de}{dt} + \omega_0'^2 e \right)$$

où $\tau_0 = \sqrt{a_2/a_0}$ est la constante temporelle propre ou naturelle du système (aussi notée τ_N), $\omega_0 = 1/\tau_0$ est la pulsation propre ou naturelle du système (aussi notée

ω_N), $m = a_1/2\sqrt{a_0a_2}$ est le facteur d'amortissement du système, $C_0 = b_0/a_0$ est la transmittance statique du système, $C_1, C_2, \Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ sont des constantes, $\Gamma_k = \omega_0^2 C_k$, $\omega'_0 = 1/\tau'_0$ est une deuxième pulsation résonante, et m' un deuxième facteur d'amortissement.

Remarque : Le facteur d'amortissement m et le coefficient de surtension Q_0 , ou de surintensité, d'un circuit électrique (voir Circuits résonants au Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé - Étude en fréquence), sont liés par :

$$Q_0 = \frac{1}{2m}$$

• **Solution générale de l'équation sans second membre (SGESSM).** On distingue quatre régimes, résultant de l'étude de l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \tau_0^2 p^2 + 2m\tau_0 p + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \omega_0^2 (m^2 - 1) \quad \Rightarrow \quad p_1 = -m\omega_0 + \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - \sqrt{\Delta}$$

① **Régime apériodique :** $m > 1$. Somme de deux exponentielles décroissantes, le régime est amorti, transitoire non-oscillatoire.

$$s_1(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{1}{\tau_1} = \omega_1 = \omega_0 (m - \sqrt{m^2 - 1}) \\ \frac{1}{\tau_2} = \omega_2 = \omega_0 (m + \sqrt{m^2 - 1}) \end{cases}$$

Plus l'amortissement est grand, et plus les pulsations ω_1 et ω_2 d'une part, et les constantes de temps τ_1 et τ_2 d'autre part, s'éloignent. La pulsation ω_0 est la moyenne géométrique des pulsations ω_1 et ω_2 : $\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$ et $\tau_0^2 = \tau_1 \tau_2$

② **Régime critique :** $m = 1$. C'est la limite théorique entre les régimes apériodique et pseudopériodique.

$$s_1(t) = (K_1 t + K_2) e^{-t/\tau_0} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau_0} = \omega_0$$

③ **Régime pseudo-périodique :** $0 < m < 1$. Produit d'une exponentielle décroissante par une sinusoïde, le régime est amorti, transitoire oscillatoire.

$$s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$$

ou

$$s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} (K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1 = M \cos \varphi \\ K_2 = M \sin \varphi \end{cases}$$

Pseudo-pulsation, pseudo-fréquence et pseudo-période :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad T = \frac{1}{f}$$

Constante de temps d'amortissement de l'oscillation (enveloppe de la sinusoïde décroissante) :

$$\tau = \frac{1}{m\omega_0} = \frac{\tau_0}{m} \Rightarrow s_1(t) = e^{-t/\tau} M \sin(\omega t + \varphi)$$

④ *Régime périodique* : $m = 0$. Le régime est permanent sinusoïdal, il n'est pas amorti.

$$s_1(t) = M \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Remarque : Les couples de constantes (K_1, K_2) et (M, φ) sont déterminés par les conditions initiales.

● **Procédure de résolution** (pour $t > 0$)

- 1) Solution Générale de l'Équation Sans Second Membre (SGESSM) $s_1(t)$
- 2) Solution Particulière de l'Équation Avec Second Membre (SPEASM) $s_2(t)$ qui dépend du second membre
- 3) Solution Générale de l'Équation Avec Second Membre (SGEASM)

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

4) Détermination des deux constantes à l'aide des deux conditions initiales

$$s(0^+) = S_0 \quad \text{et} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = S'_0$$

5) Écrire la SGEASM.

b) *Deuxième cas* : $a_0 = 0$ ($a_2 > 0$ et $a_1 \geq 0$)

● **Équation différentielle**

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{a_1}{a_2} \frac{ds}{dt} = \frac{b_2}{a_2} \frac{d^2e}{dt^2} + \frac{b_1}{a_2} \frac{de}{dt} + \frac{b_0}{a_2} e$$

● **Procédure de résolution** (pour $t > 0$)

- Si $a_1 > 0$, on effectue le changement de variable $y = ds/dt$ ($\Rightarrow dy/dt = d^2s/dt^2$), ce qui ramène à une équation différentielle du premier ordre que l'on résout. Ensuite, il suffit d'intégrer l'expression obtenue pour trouver $s(t)$.
- Si $a_1 = 0$, on intègre deux fois le membre de droite.
- Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des deux conditions initiales.

9.4.2 Réponse indicielle

On étudie ici un cas très fréquent : la réponse d'un système du deuxième ordre à un échelon $e(t) = E u(t)$ pour $a_0 > 0$ et $a_1 > 0$ avec $b_2 = 0$ et $b_1 = 0$, ou, ce qui conduit à la même solution, à une tension $e(t) = E$ pour $t > 0$ (dans ce cas, on ne précise pas $e(t)$ pour $t < 0$). On suppose les conditions initiales nulles.

Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E \quad \text{avec} \quad s(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = 0$$

① Régime apériodique : $m > 1$

1) SGESSM. $s_1(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}$

2) SPEASM. $s_2(t) = E$

3) SGEASM. $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2} + E$

4) Constantes. En supposant les conditions initiales nulles, on a :

$$s(0^+) = K_1 + K_2 + E = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = \frac{-K_1}{\tau_1} + \frac{-K_2}{\tau_2} = 0$$

$$\text{D'où : } K_1 = \frac{E \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{-E \tau_2}{\tau_2 - \tau_1}$$

$$5) \text{ SGEASM. } s(t) = E \left[1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2} \right) \right]$$

6) Diagramme temporel (Fig. 9.9).

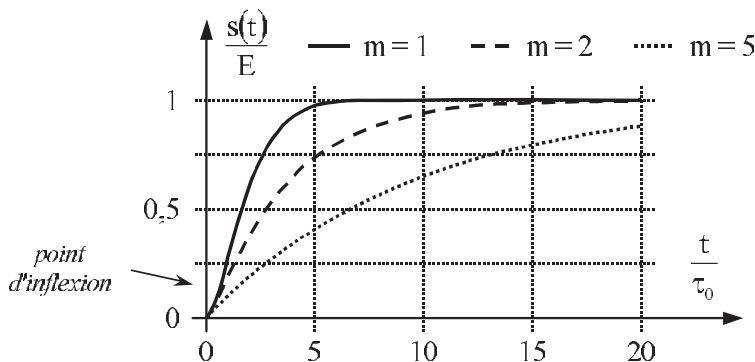


Fig. 9.9 Diagramme temporel pour $m \geq 1$

Remarque : Le temps de réponse est généralement défini à 5 % de la valeur finale : $s(t) = 0,95 E$. Pour $m \gg 1$, $\tau_1 \approx 2m\tau_0$ et $\tau_2 \approx \tau_0/2m$. Le système se comporte alors comme un pseudo premier ordre, et seule la pente à l'origine permet de distinguer un premier ordre d'un deuxième ordre.

$$m \gg 1 \quad \Rightarrow \quad t_r(5\%) \approx 3\tau_1 \approx 6m\tau_0$$

② *Régime critique* : $m = 1$

1) SGESSM. $s_1(t) = (K_1 t + K_2) e^{-t/\tau_0}$

2) SPEASM. $s_2(t) = E$

3) SGEASM. $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = (K_1 t + K_2) e^{-t/\tau_0} + E$

4) Constantes. En supposant les conditions initiales nulles, on a :

$$s(0^+) = K_2 + E = 0 \quad \text{et} \quad \frac{ds(0^+)}{dt} = K_1 + \frac{-K_2}{\tau_0} = 0$$

D'où : $K_1 = \frac{-E}{\tau_0}$ et $K_2 = -E$

5) SGEASM. $s(t) = E \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right) e^{-t/\tau_0} \right]$

6) Diagramme temporel (voir Fig. 9.9).

③ *Régime pseudo-périodique* : $0 < m < 1$

1) SGESSM. $s_1(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi)$

2) SPEASM. $s_2(t) = E$

3) SGEASM. $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = e^{-m\omega_0 t} M \sin(\omega t + \varphi) + E$

4) Constantes. En supposant les conditions initiales nulles, on a :

$$s(0^+) = M \sin \varphi + E = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= e^{-m\omega_0 t} M (-m\omega_0 \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)) \\ \Rightarrow \frac{ds(0^+)}{dt} &= M (-m\omega_0 \sin \varphi + \omega \cos \varphi) = 0 \end{aligned}$$

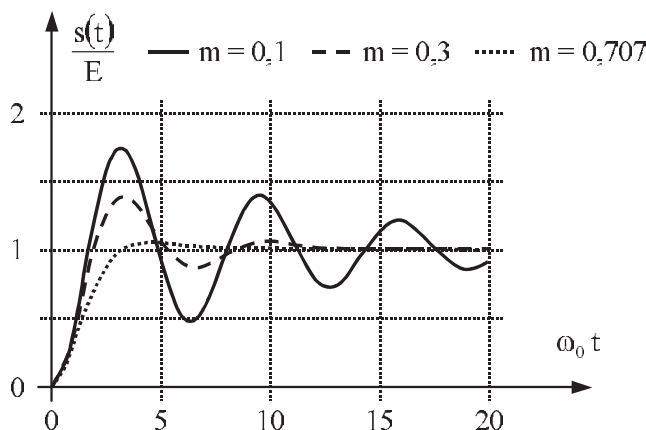
D'où : $M = \frac{-E}{\sqrt{1-m^2}}$ et $\sin \varphi = \sqrt{1-m^2}$ $\cos \varphi = m$ $\tan \varphi = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

5) SGEASM. $s(t) = E \left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right]$ avec $\omega = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$

6) Diagramme temporel (Fig. 9.10).

7) Équations des enveloppes (voir Fig. 9.11). Dans la SGEASM, le sinus est compris entre +1 ou -1. En conséquence, la courbe est comprise entre deux enveloppes d'équations :

$$\text{Env}_1(t) = E \left[1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \right] \quad \text{et} \quad \text{Env}_2(t) = E \left[1 + \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \right]$$

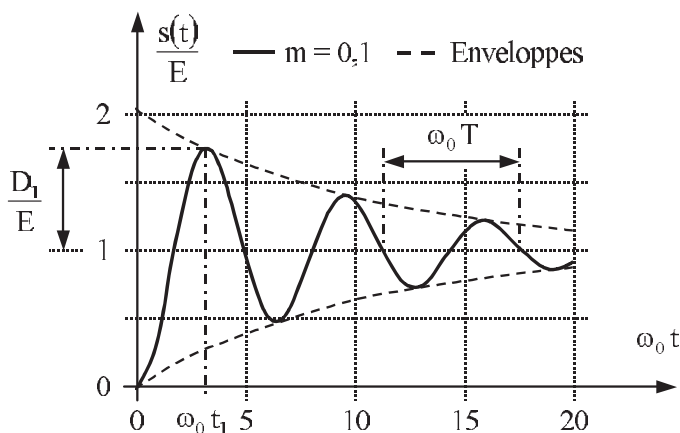
Fig. 9.10 Diagramme temporel pour $0 < m < 1$

8) Pseudo-période (voir Fig. 9.11).

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

9) Premier dépassement (voir Fig. 9.11). Sa connaissance est importante, car elle permet de déterminer l'amortissement lors d'un essai. Les instants auxquels la fonction est maximale ou minimale correspondent aux instants où la dérivée de $s(t)$ s'annule. D'où l'instant et la hauteur (en %) du premier dépassement :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} = \frac{T}{2} \Rightarrow \frac{D_1}{E} = \frac{s_{\text{Max}} - E}{E} = e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

Fig. 9.11 Enveloppes - 1^{er} dépassement D_1 - Pseudo-période T

Remarque : Le temps de réponse est généralement défini à 5 % de la valeur finale : $0,95 E \leq s(t) \leq 1,05 E$. On approche la solution en considérant les enveloppes à la place de la courbe. D'où :

$$t_{r(5\%)} \approx \frac{1}{m\omega_0} \ln \frac{20}{\sqrt{1-m^2}} \quad \text{Et si } m \ll 1 \quad \text{alors} \quad t_{r(5\%)} \approx \frac{3}{m\omega_0}$$

④ Régime périodique : $m = 0$. Il se déduit du cas précédent :

$$M = -E \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{D'où : } s(t) = E \left[1 - \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = E(1 - \cos \omega_0 t)$$

C'est une sinusoïde non amortie de pulsation ω_0 d'amplitude E et de valeur moyenne E .

9.4.3 Circuits électriques élémentaires

a) Circuit résonant série (Fig. 9.12)

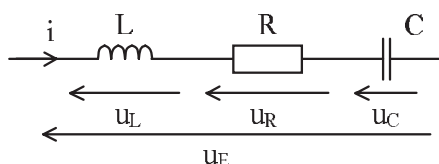


Fig. 9.12 Circuit résonant série

Question : Établir les équations différentielles reliant : la tension u_C à la tension u_E , la tension u_R à la tension u_E , et la tension u_L à la tension u_E (voir Fig. 9.12).

Réponse :

– Équation différentielle reliant la tension u_C à la tension u_E

$$\left. \begin{array}{l} u_L + u_R + u_C = u_E \\ i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt} \\ u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_E \\ \text{ou} \\ \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} u_E \end{array}$$

$$\text{Forme canonique : } \frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 u_E$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

– Équation différentielle reliant la tension u_R à la tension u_E

$$\left. \begin{array}{l} u_L + u_R + u_C = u_E \\ u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_R}{R} \\ u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{du_L}{dt} + \frac{du_R}{dt} + \frac{du_C}{dt} = \frac{du_E}{dt} \\ \frac{L}{R} \frac{d^2 u_R}{dt^2} + \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{RC} = \frac{du_E}{dt} \\ \frac{d^2 u_R}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{LC} u_R = \frac{R}{L} \frac{du_E}{dt} \end{array} \right.$$

Forme canonique : $\frac{d^2 u_R}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_R}{dt} + \omega_0^2 u_R = 2m\omega_0 \frac{du_E}{dt}$

– Équation différentielle reliant la tension u_L à la tension u_E . Similairement, on obtient :

Forme canonique : $\frac{d^2 u_L}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_L}{dt} + \omega_0^2 u_L = \frac{d^2 u_E}{dt^2}$

Question : Étudier la réponse de la tension $u_C(t)$ à un échelon de tension $u_E(t) = Eu(t)$. On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$.

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

Conditions initiales : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \\ i_L = i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{du_C(0^+)}{dt} = 0$$

La réponse indicielle pour cette équation a déjà été résolue. Elle dépend de la valeur du facteur d'amortissement (voir § 9.4.2).

Question : Étudier la tension $u_R(t)$ en réponse à un échelon de tension $u_E(t) = Eu(t)$. On suppose qu'aucune énergie n'est stockée dans les éléments réactifs à $t = 0$, et que le facteur d'amortissement est supérieur à l'unité ($m > 1$).

Réponse : Pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_R}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_R}{dt} + \omega_0^2 u_R = 0$$

Le régime est apériodique ($m > 1$). D'où :

1) SGESSM. $u_{R1}(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}$

2) SPEASM. $u_{R2}(t) = 0$

3) SGEASM. $u_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) = K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2}$

4) Conditions initiales et constantes.

$$\left. \begin{array}{l} i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \\ u_R = Ri = Ri_L \end{array} \right\} \Rightarrow u_R(0^+) = 0$$

$$\frac{du_R}{dt} = R \frac{di}{dt} = \frac{R}{L} u_L = \frac{R}{L} (u_E - u_R - u_C)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{du_R(0^+)}{dt} = \frac{R}{L} (u_E(0^+) - u_R(0^+) - u_C(0^+)) \\ u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{du_R(0^+)}{dt} = \frac{RE}{L}$$

Constantes :

$$u_R(0^+) = K_1 + K_2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du_R(0^+)}{dt} = \frac{-K_1}{\tau_1} + \frac{-K_2}{\tau_2} = \frac{RE}{L}$$

$$\text{D'où (après résolution) : } K_1 = -K_2 = \frac{Em}{\sqrt{m^2 - 1}}$$

$$5) \text{ SGEASM. } u_R(t) = \frac{mE}{\sqrt{m^2 - 1}} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}) \quad \text{pour } t > 0$$

Remarque : La tension $u_R(t)$ peut aussi s'obtenir en dérivant la tension $u_C(t)$.

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}$$

b) *Circuit résonant parallèle,*
dit circuit « bouchon » (Fig. 9.13)

Question : Établir l'équation différentielle reliant la tension u au courant i .

Réponse :

$$\left. \begin{array}{l} u = L \frac{di_L}{dt} \\ i_C = C \frac{du}{dt} \\ u = Ri_R \\ i = i_L + i_R + i_C \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{d(i - i_R - i_C)}{dt} \\ u = L \frac{di}{dt} - \frac{L}{R} \frac{du}{dt} - LC \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt} \end{array} \right.$$

$$\text{Forme canonique : } \frac{d^2u}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = R 2m\omega_0 \frac{di}{dt}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

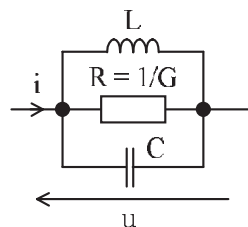


Fig. 9.13 Circuit résonant parallèle

Chapitre 10

Étude symbolique – Transformée de Laplace

La transformée de Laplace permet de remplacer l'équation différentielle qui régit un système linéaire par une équation algébrique, et elle facilite la mise en équation des circuits électriques grâce à la notion d'impédance opérationnelle. La présentation faite ici de la transformée de Laplace permet de résoudre tous les problèmes traités par une équation différentielle au sens habituel (voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire), et en plus de prendre correctement en compte d'éventuelles impulsions (par exemple, la dérivée en un point de discontinuité) y compris en $t = 0$.

10.1 CAUSALITÉ

Une fonction f de la variable réelle t est dite *causale* si : $\forall t < 0, f(t) = 0$ et, *anti-causale* si : $\forall t \geq 0, f(t) = 0$

Méthode

En multipliant la fonction non causale f par la fonction de Heaviside (ou échelon unité) u éventuellement retardée de $t_0 \geq 0$, on construit la fonction causale définie par $f(t) u(t - t_0)$.

Exemple 10.1.1

Sinusoïdes causales (Fig. 10.1).

Remarque : Lorsqu'une fonction présente une discontinuité à l'instant $t = t_0$, on note $f(t_0^-)$ la valeur limite juste avant t_0 et $f(t_0^+)$ la valeur limite juste après t_0 .

$$f(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \quad \text{et} \quad f(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

Exemple 10.1.2

Pour l'échelon unité, on a : $u(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0) = 1$.

Remarque : Une fonction f de la variable réelle t est égale à la somme d'une fonction causale ($t \geq 0$) et d'une fonction *anti-causale* ($t < 0$).

$$f(t) = f(t) u(t) + f(t) (1 - u(t))$$

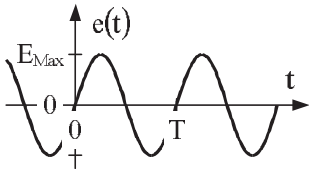
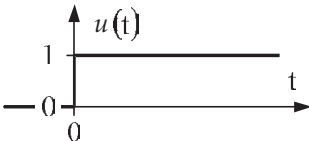
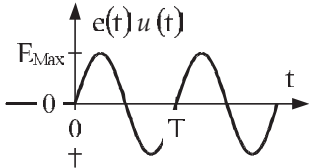
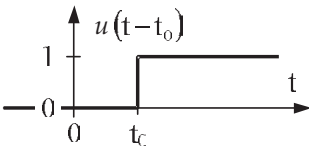
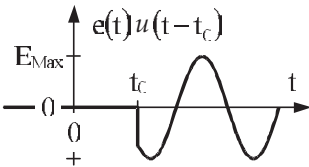
Sinusoïde non causale	$e(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t)$	
Échelon unité ou de Heavyside	$\begin{cases} t < 0 & u(t) = 0 \\ t \geq 0 & u(t) = 1 \end{cases}$	
Sinusoïde causale	$e(t) u(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t) u(t)$	
Échelon unité décalé de t_0 (t_0 >= 0)	$\begin{cases} t < t_0 & u(t - t_0) = 0 \\ t \geq t_0 & u(t - t_0) = 1 \end{cases}$	
Sinusoïde commençant à l'instant t_0 (t_0 >= 0)	$e(t) u(t - t_0) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t) u(t - t_0)$	

Fig. 10.1 Construction de sinusoïdes causales

10.2 IMPULSION UNITÉ OU DISTRIBUTION DE DIRAC

L'impulsion unité n'est pas une fonction au sens habituel, mais une distribution. Au moyen de la transformée de Laplace, cette notion permet de trouver la « réponse impulsionnelle » d'un système, et de résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants dont les solutions présentent des discontinuités ou des impulsions. Bien que l'étude des distributions sorte du cadre de cet ouvrage, les quelques éléments utiles ici se comprennent en effectuant des passages aux limites intuitifs, et en s'autorisant quelques entorses à la rigueur mathématique.

10.2.1 Définition et représentation

Une *impulsion de Dirac*, ou *distribution de Dirac*, ou encore *impulsion unité*, notée $\delta(t)$, est une impulsion d'aire unité dont la durée ε tend vers 0 (Fig. 10.2). On la représente conventionnellement par une flèche de hauteur unité.

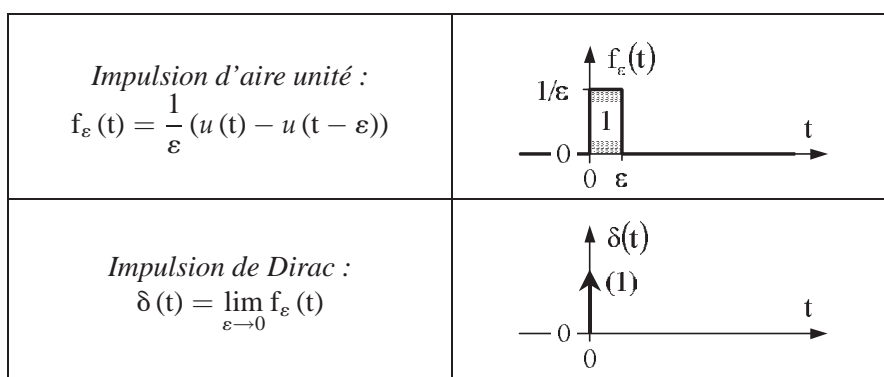


Fig. 10.2 Impulsion d'aire unité

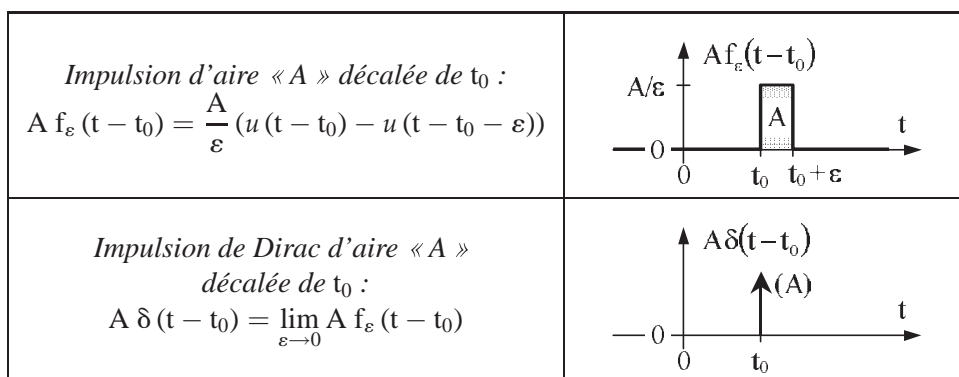


Fig. 10.3 Impulsion d'aire « A » décalée de t_0

Similairement, une impulsion de Dirac d'aire « A » décalée de t_0 , notée $A\delta(t - t_0)$, est une impulsion d'aire « A » dont la durée ε tend vers 0 (Fig 10.3). On la représente conventionnellement par une flèche de hauteur « A ». Cette impulsion théorique est approchée en pratique par une impulsion d'aire « A » avec une amplitude élevée et une durée très courte.

Remarque : $\delta(\omega t - \alpha) = \frac{1}{|\omega|} \delta\left(t - \frac{\alpha}{\omega}\right)$ (Dilatée d'un Dirac)

10.2.2 Relation avec l'échelon unité

De manière intuitive (Fig. 10.4), on peut considérer que l'échelon de Heaviside est la limite d'un échelon à transition linéaire $h_\varepsilon(t)$ de pente $1/\varepsilon$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Or, l'impulsion d'aire unité $f_\varepsilon(t)$ est la dérivée de l'échelon à transition linéaire $h_\varepsilon(t)$, et l'impulsion de Dirac est la limite de l'impulsion d'aire unité $f_\varepsilon(t)$. En conséquence, on peut admettre que l'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon de Heaviside. On démontre rigoureusement que l'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon de Heaviside au sens des distributions.

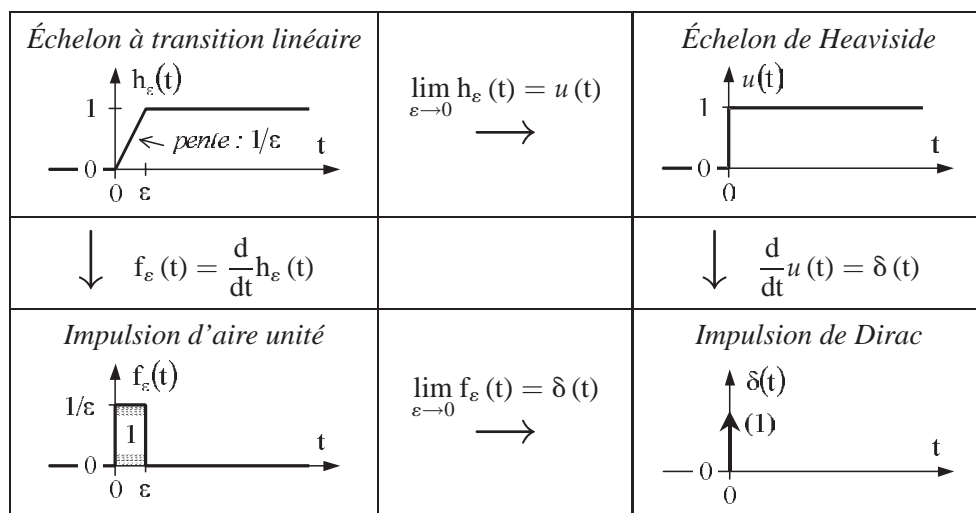


Fig. 10.4 Échelon de Heaviside et impulsion de Dirac

Plus généralement, la dérivée d'un échelon d'amplitude A décalé de t_0 ($t_0 \geq 0$) est l'impulsion de Dirac d'aire « A » décalée de t_0 :

$$\begin{cases} t < t_0 & A u(t - t_0) = 0 \\ t \geq t_0 & A u(t - t_0) = A \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} [A u(t - t_0)] = A \delta(t - t_0)$$

10.2.3 Multiplication d'une fonction par une impulsion de Dirac

Soit f une fonction continue en t_0 et bornée sur $]-\infty, +\infty[$. La multiplication de f par l'impulsion de Dirac d'aire unité en t_0 est l'impulsion de Dirac d'aire $f(t_0)$.

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0)$$

Cette relation est à la base de la description de l'échantillonnage d'une fonction par une somme d'impulsions de Dirac d'aires $f(t_i)$ où t_i sont les instants de prise des échantillons. En l'intégrant, on obtient une relation remarquable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \text{car} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (\text{aire unité})$$

10.2.4 Dérivée en un point de discontinuité

Soit une fonction f continue par morceaux et admettant une dérivée continue par morceaux sauf en un nombre fini de points t_i de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire tels que $f(t_i^+)$ et $f(t_i^-)$ existent).

Pour chaque point t_i de discontinuité de première espèce, la dérivée de f au sens des distributions comporte une impulsion de Dirac d'aire égale au saut de f :

$$f'(t_i) = [f(t_i^+) - f(t_i^-)] \delta(t - t_i) \quad \text{où } f(t_i^+) - f(t_i^-) \text{ est le saut de } f \text{ en } t_i$$

En conséquence, en notant par $\{f'(t)\}$ la dérivée de f au sens habituel des fonctions, on a :

$$f'(t) = \{f'(t)\} + \sum_i [f(t_i^+) - f(t_i^-)] \delta(t - t_i)$$

Ce qui s'énonce : La dérivée au sens des distributions, notée f' , est égale à la dérivée au sens habituel des fonctions, notée $\{f'(t)\}$, à laquelle est ajoutée une impulsion de Dirac d'aire égale au saut de f pour chaque point de discontinuité t_i .

Question : Exprimer la dérivée de la fonction non causale f définie par $f(t) = E_0 + E_{\text{Max}} \sin(\omega t) u(t - t_0)$ où $t_0 \geq 0$. Tracer les chronogrammes de la fonction et de sa dérivée.

Réponse : Chronogrammes (Fig. 10.5)

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} + [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \delta(t - t_0) \\ &= \omega E_{\text{Max}} \cos(\omega t) u(t - t_0) + E_{\text{Max}} \sin(\omega t_0) \delta(t - t_0) \end{aligned}$$

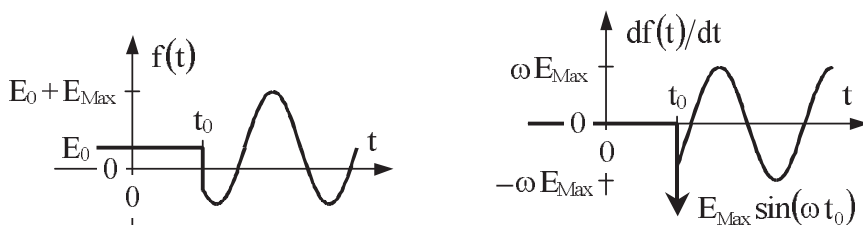


Fig. 10.5 Exemple d'une dérivée au sens des distributions

10.3 TRANSFORMÉE DE LAPLACE

10.3.1 Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles ou complexes. Sous réserve d'existence (c'est-à-dire de convergence de l'intégrale), on appelle transformée de Laplace (T.L.) unilatérale de f , la fonction F de la variable complexe p (dite variable de Laplace) définie par :

$$F(p) = \mathcal{L}[f](p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Remarques :

- C'est une application qui à f fait correspondre F ($f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$) : f est l'original de F , et F est l'image de f . On note abusivement par commodité d'écriture :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] \quad \text{et} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

- La borne d'intégration inférieure est $t = 0^-$. Ce choix permet de prendre correctement en compte une éventuelle impulsion de f en $t = 0$; par exemple, la dérivée d'une fonction discontinue en $t = 0$ (voir § 10.2.4).
- Seule la partie pour $t \geq 0$ de f est prise en compte dans le calcul de la transformée. En conséquence, deux fonctions identiques pour $t \geq 0$ ont même transformée ; et réciproquement, à partir d'une transformée F , on ne peut trouver que la partie de f pour $t \geq 0$. D'où l'égalité remarquable :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)u(t)]$$

- Si la variable t représente le temps exprimé en secondes (s), alors la variable p s'exprime en radians par seconde (rad/s).

Question : Déterminer la T.L. de l'échelon unité (voir Fig 10.1), puis de la constante unité 1.

$$\text{Réponse : } \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} \quad \text{si } p \neq 0$$

$$\text{Soit : } U(p) = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p} \quad (\text{car } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0 \text{ si } \operatorname{Re}(p) > 0)$$

$$\text{De même : } \mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$$

10.3.2 Table de T.L. de quelques fonctions usuelles

	Original : $f(t)$ pour $t \geq 0$	Image : $F(p)$	Conditions Pôles et zéros
Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	1	$\forall p$
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 p}$	$t_0 \in \mathbb{R}^+, \forall p$
Dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une impulsion de Dirac	$\delta^{(n)}(t)$	p^n	$n \in \mathbb{N}^{+*}, \forall p$ Zéro : 0
Constante unité	1	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$ Pôle : 0
Rampe unité	t	$\frac{1}{p^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$ Pôle double : 0
Puissance	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, \operatorname{Re}(p) > 0$ Pôle multiple : 0
Exponentielle	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p+a) > 0$ Pôle : $-a$
Sinusoïde	$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(p) > 0$ Pôles : $\pm j\omega_1$
Cosinusoïde	$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(p) > 0$ Pôles : $\pm j\omega_1$, Zéro : 0
Puissance \times Exponentielle	$e^{-at} t^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re}(p+a) > 0$, Pôle : $-a$
Sinusoïde \times Exponentielle	$e^{-at} \sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(p+a) > 0$ Pôles : $-a \pm j\omega_1$
Cosinusoïde \times Exponentielle	$e^{-at} \cos(\omega_1 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$	$\omega_1 \in \mathbb{R}, \operatorname{Re}(p+a) > 0$ Pôles : $-a \pm j\omega_1$ Zéro : $-a$

Remarque : On appelle *zéros* de $F(p)$ les valeurs complexes de p où $F(p)$ tend vers zéro, et *pôles* de $F(p)$ les valeurs complexes où $F(p)$ tend vers l'infini.

10.3.3 Propriétés et théorèmes

On note : $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[f(t)u(t)] = F(p)$ et $\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[g(t)u(t)] = G(p)$

(1) Linéarité	$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$
(2) Transformée d'une dilatée (changement d'échelle), $k \in \mathbb{R}^*$	$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{ k } F\left(\frac{p}{k}\right)$
(3) Transformée d'une translatée (Théorème du retard), $t_0 \in \mathbb{R}^+$	$\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)] = e^{-t_0 p} F(p)$ (Remplacer tous les t par $t - t_0$)
(4) Transformée d'une dérivée	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = p F(p) - f(0^-)$
(5) Transformée d'une intégrale $t \in \mathbb{R}^+$	$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(p)}{p}$
(6) Transformée d'un produit de convolution	$\mathcal{L}[f(t)u(t) * g(t)u(t)] = F(p) G(p)$
(7) Transformée d'une fonction périodique f de période T et de fonction motif f_0	$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}$
(8) Translation d'une transformée, $a \in \mathbb{C}$ (amortissement temporel si $a \in \mathbb{R}^+$)	$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$ (Remplacer tous les p par $p + a$)
(9) Dérivée d'une transformée	$\mathcal{L}[-t f(t)] = \frac{d}{dp} F(p)$
(10) Théorème de la valeur initiale à $t = 0^+$ (sous réserve d'existence des limites)	$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p)$
(11) Théorème de la valeur finale (sous réserve d'existence des limites)	$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$

Remarques :

(3) Si $f(t)$ n'est pas causale, $\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t - t_0)] \neq \mathcal{L}[f(t - t_0)]$

(4) – Par suite, $\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = p^2 F(p) - p f(0^-) - f'(0^-)$

$$\text{où } f'(0^-) = \frac{d}{dt}f(0^-)$$

– Si $f(t)$ est causale alors $f(0^-) = 0$. D'où :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = p F(p) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = p^n F(p)$$

– Pour une fonction continue, sauf éventuellement en 0, on a :

$$\mathcal{L}\left[\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}\right] = p F(p) - f(0^+) \quad (\text{au sens des fonctions, voir § 10.2.4})$$

$$(6) \quad f(t) u(t) * g(t) u(t) = \int_0^t f(\tau) u(\tau) g(t - \tau) u(t - \tau) d\tau$$

$$(7) \quad \text{La fonction motif est telle que : } \begin{cases} f_0(t) = f(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ f_0(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T] \end{cases}$$

$$(9) \quad \text{Généralisation : } \mathcal{L} [(-t)^n f(t)] = \frac{d^n}{dp^n} F(p), n \in \mathbb{N}$$

10.3.4 Recherche de l'image F d'une fonction f

Le plus souvent en pratique, on utilise les tables de transformées, propriétés et théorèmes (voir § 10.3.2 et § 10.3.3) pour établir l'image F d'une fonction f.

Méthode

En général, on décompose la fonction f en une somme de fonctions (linéarité) pour lesquelles on peut établir facilement les T.L.

Question : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$. Déterminer sa T.L.

Réponse : La fonction f est la somme de deux fonctions figurant dans la table (voir § 10.3.2). D'après cette table :

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[e^{-t/\tau}] = \frac{1}{p + 1/\tau} = \frac{\tau}{1 + \tau p}$$

$$\text{D'où : } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = E \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right) = \frac{E}{p(1 + \tau p)}$$

Question : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = e^{-at} \cos(\omega_1 t)$. Déterminer sa T.L.

Réponse : La fonction f est le produit d'une cosinusoïde figurant dans la table (voir § 10.3.2) par e^{-at} qui est la marque de la translation d'une transformée (voir § 10.3.3).

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_1 t)] = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(p + a)$$

$$\text{D'où : } F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega_1^2} \quad (\text{on remplace tous les } p \text{ par } p + a)$$

Question : Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = E_{\text{Max}} \cos(\omega_1 t)$. Déterminer la T.L. de la fonction f' , dérivée de f .

Réponse : La fonction f' est la dérivée d'une cosinusoïde figurant dans la table (voir § 10.3.2).

$$\mathcal{L}[\cos(\omega_1 t)] = \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$$

D'après le théorème sur la transformée d'une dérivée (voir § 10.3.3), on a :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p F(p) - f(0^-) = \frac{E_{\text{Max}} p^2}{p^2 + \omega_1^2} - f(0^-)$$

où $f(0^-)$ est la valeur de f pour $t = 0^-$. Par exemple, si f est causale alors $f(0^-) = 0$, et si f est continue alors $f(0^-) = f(0^+) = E_{\text{Max}} \cos(0) = E_{\text{Max}}$.

On peut retrouver ce résultat en commençant par dériver (au sens des distributions car f est éventuellement discontinue en $t = 0$), puis en cherchant la transformée de la dérivée.

$$f'(t) = -\omega_1 E_{\text{Max}} \sin(\omega_1 t) + [f(0^+) - f(0^-)] \delta(t) \quad \text{avec} \quad f(0^+) = E_{\text{Max}}$$

Par suite, on a (voir table § 10.3.2) :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -\omega_1 E_{\text{Max}} \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} + E_{\text{Max}} - f(0^-) = \frac{E_{\text{Max}} p^2}{p^2 + \omega_1^2} - f(0^-)$$

Question : Soit f_0 la fonction appelée « impulsion sinusoïdale » (Fig. 10.6). Déterminer sa T.L.

$$\begin{cases} f_0(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega_1 t) u(t) & \text{si } t \in [0, T/2] \\ f_0(t) = 0 & \text{si } t \notin [0, T/2] \end{cases}$$

avec $\omega_1 T = 2\pi$

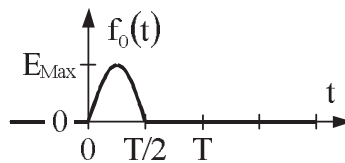


Fig. 10.6 Impulsion sinusoïdale

Réponse : La fonction peut s'écrire comme la somme de deux sinusoïdes causales, l'une étant en retard de $T/2$ sur l'autre.

$$f_0(t) = E_{\text{Max}} [\sin(\omega_1 t) u(t) + \sin(\omega_1 (t - T/2)) u(t - T/2)]$$

$$\text{D'où : } F_0(p) = \mathcal{L}[f_0(t)] = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} (1 + e^{-pT/2}) \quad \text{avec } \omega_1 T = 2\pi$$

Question : Soit f la fonction « sinusoïde redressée monoalternance » (Fig. 10.7) de fonction motif f_0 (voir Fig. 10.6). Déterminer sa T.L.

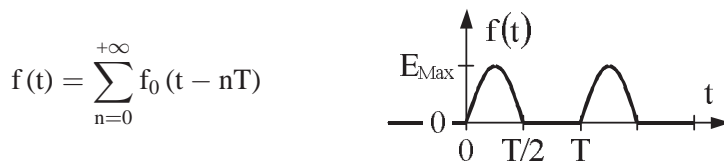


Fig. 10.7 Sinusoïde redressée monoalternance

Réponse : En appliquant la formule de la transformée d'une fonction périodique (voir § 10.3.3), on obtient :

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}} = \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2} \frac{1 + e^{-pT/2}}{1 - e^{-pT}} \quad \text{avec } \omega_1 T = 2\pi$$

10.3.5 Recherche de l'original f d'une transformée F

Le plus souvent en pratique, on utilise les tables de transformées, propriétés et théorèmes (voir § 10.3.2 et § 10.3.3) pour établir l'original f d'une transformée F . Par définition de la T.L. unilatérale (voir § 10.3.1), on ne peut trouver que la partie de f pour $t \geq 0$; la valeur de f pour $t = 0^-$ ne peut être déterminée qu'à partir de considérations physiques (continuité ou causalité par exemple).

Méthode

En général, la transformée F est une fraction rationnelle : $N(p)/D(p)$. On décompose alors la transformée F en une somme d'éléments simples (linéarité) pour lesquels on peut établir facilement les originaux.

a) Fraction rationnelle possédant uniquement des pôles simples

Méthode

La transformée F d'une fraction rationnelle $N(p)/D(p)$ possédant uniquement des pôles simples, et telle que $d^0 N(p) < d^0 D(p)$, s'écrit :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_n)} \quad \text{tel que } \forall i \neq j, p_i \neq p_j$$

Sa décomposition en éléments simples s'écrit alors :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{A_n}{p - p_n}$$

où les A_i sont des coefficients réels ou complexes calculables par :

$$A_i = (p - p_i) F(p)|_{p=p_i}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Question : Soit la transformée F ci-après. Déterminer son original.

$$F(p) = \frac{E}{p + \tau p^2}$$

Réponse : Sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{E}{p(1 + \tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau p} = \frac{A}{p} + \frac{B/\tau}{p + 1/\tau}$$

$$\text{avec : } A = p F(p)|_{p=0} = \frac{p E}{p(1 + \tau p)} \Big|_{p=0} = E$$

$$B = (1 + \tau p) F(p)|_{p=-1/\tau} = \frac{(1 + \tau p) E}{p(1 + \tau p)} \Big|_{p=-1/\tau} = -\tau E$$

$$\text{D'où : } F(p) = \frac{E}{p} + \frac{-\tau E}{1 + \tau p} = \frac{E}{p} + \frac{-E}{p + 1/\tau}$$

On peut aussi procéder par identification après réduction au même dénominateur. Ce qui donne :

$$E = A(1 + \tau p) + Bp \Rightarrow \begin{cases} E = A \\ 0 = A\tau + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = E \\ B = -E\tau \end{cases}$$

À partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2), on obtient l'original :

$$f(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

Question : Soit la transformée F ci-après. Déterminer son original.

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}$$

Réponse : Sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5} = \frac{p}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2}$$

avec : $\Delta = -16$, $p_1 = -1 + 2j$, $p_2 = -1 - 2j$

$$A = (p - p_1) F(p) \Big|_{p=p_1} = \frac{p}{p + 1 + 2j} \Big|_{p=-1+2j} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{j}{2} \right)$$

$$B = (p - p_2) F(p) \Big|_{p=p_2} = \frac{p}{p + 1 - 2j} \Big|_{p=-1-2j} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{j}{2} \right)$$

À partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2), on obtient l'original :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{j}{2} \right) e^{(-1+2j)t} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{j}{2} \right) e^{(-1-2j)t} \\ &= e^{-t} \left(\cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \end{aligned} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Méthode

Dans le cas où deux pôles de F sont complexes conjugués, on peut préférer garder un polynôme de deuxième degré au dénominateur de F en l'écrivant sous forme canonique pour faire apparaître directement la transformée d'une fonction connue. La décomposition de F en éléments simples s'écrit alors pour chacun desdits polynômes :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \dots + \frac{Ap + B}{p^2 + up + v} + \dots \quad \text{avec } p^2 + up + v = (p - p_i)(p - \bar{p}_i)$$

où \bar{p}_i et p_i sont les deux pôles complexes conjugués.

Question : Soit la transformée F ci-après. Déterminer son original.

$$F(p) = \frac{-5}{(p + 2)(p^2 + 2p + 5)}$$

Réponse : Sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{A}{p + 2} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 5}$$

$$\text{avec : } A = (p + 2) F(p) \Big|_{p=-2} = -1$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p F(p) = 0 = A + B \Rightarrow B = 1$$

$$p = 0 \Rightarrow F(0) = \frac{-5}{10} = \frac{A}{2} + \frac{C}{5} \Rightarrow C = 0$$

Pour calculer B et C , d'autres techniques sont possibles (par exemple, par identification, ou en calculant les pôles complexes conjugués comme à la question précédente).

On met le dénominateur de la deuxième fraction sous forme canonique :

$$F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{p}{(p+1)^2 + 4}$$

En mettant $p+1$ au numérateur, on fait apparaître la transformée d'une cosinussoïde multipliée par une exponentielle. D'où :

$$F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} - \frac{1}{2} \frac{2}{(p+1)^2 + 4}$$

À partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2), on obtient l'original :

$$f(t) = -e^{-2t} + e^{-t} \left(\cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

b) Fraction rationnelle possédant des pôles doubles

Méthode

La transformée F d'une fraction rationnelle $N(p)/D(p)$ possédant des pôles doubles, et telle que $d^\circ N(p) < d^\circ D(p)$, s'écrit pour chacun d'eux :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\dots (p - p_i)^2 \dots} \quad \text{où } p_i \text{ est un pôle double}$$

Sa décomposition en éléments simples s'écrit alors pour chaque pôle double :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \dots + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2} + \frac{A_{i1}}{p - p_i} + \dots$$

où A_{i2} et A_{i1} sont des coefficients réels ou complexes calculables par :

$$A_{i2} = (p - p_i)^2 F(p) \Big|_{p=p_i} \quad \text{et} \quad A_{i1} = \frac{d}{dp} [(p - p_i)^2 F(p)] \Big|_{p=p_i}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), la contribution à l'original pour chaque pôle double s'écrit :

$$f(t) = \dots + A_{i2} t e^{p_i t} + A_{i1} e^{p_i t} + \dots \quad \text{pour } t \geq 0$$

Question : Soit la transformée F ci-après. Déterminer son original.

$$F(p) = \frac{k}{p^2 (1 + \tau p)}$$

Réponse : Sa décomposition en éléments simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{k}{p^2 (1 + \tau p)} = \frac{A_2}{p^2} + \frac{A_1}{p} + \frac{B}{1 + \tau p}$$

$$\text{avec : } A_2 = p^2 F(p) \Big|_{p=0} = \frac{p^2 k}{p^2 (1 + \tau p)} \Big|_{p=0} = k$$

$$A_1 = \frac{d}{dp} [p^2 F(p)] \Big|_{p=0} = \frac{d}{dp} \left[\frac{p^2 k}{p^2 (1 + \tau p)} \right] \Big|_{p=0} = -k\tau$$

$$B = (1 + \tau p) F(p) \Big|_{p=-1/\tau} = \frac{(1 + \tau p) k}{p^2 (1 + \tau p)} \Big|_{p=-1/\tau} = k\tau^2$$

$$\text{D'où : } F(p) = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau^2}{1 + \tau p} = \frac{k}{p^2} - \frac{k\tau}{p} + \frac{k\tau}{p + 1/\tau}$$

D'autres techniques sont possibles, par exemple en identifiant après réduction au même dénominateur.

À partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2), on obtient l'original :

$$f(t) = k \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

c) Fraction rationnelle dans le cas général

► Pôles de multiplicité supérieure à deux

La méthode vue pour les pôles doubles se généralise, et les techniques et « astuces » de calcul des coefficients sont diverses (voir un cours de mathématiques). La décomposition en éléments simples pour un pôle de multiplicité M s'écrit :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \dots + \frac{A_{iM}}{(p - p_i)^M} + \dots + \frac{A_{i2}}{(p - p_i)^2} + \frac{A_{i1}}{p - p_i} + \dots$$

► Fraction rationnelle $N(p)/D(p)$ telle que $d^\circ N(p) \geq d^\circ D(p)$

Dans ce cas, il faut commencer par effectuer la division polynomiale de $N(p)$ par $D(p)$. Ce qui donne :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{R(p)}{D(p)} = \dots + q_2 p^2 + q_1 p + q_0 + \frac{R(p)}{D(p)}$$

- La recherche de l'original de la fraction rationnelle $R(p)/D(p)$ s'effectue conformément aux méthodes précédentes car $d^\circ R(p) < d^\circ D(p)$.
- La recherche de l'original du polynôme $Q(p)$ s'effectue à partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2) :

$$\mathcal{L}^{-1} [Q(p)] = \dots + q_2 \delta''(t) + q_1 \delta'(t) + q_0 \delta(t)$$

On obtient une impulsion de Dirac et ses dérivées en $t = 0$.

Question : Soit la transformée F ci-après. Déterminer son original.

$$F(p) = \frac{p^3}{p^2 + 3p + 2}$$

Réponse : La transformée F , après division polynomiale et décomposition de la fraction restante en éléments simples, s'écrit :

$$F(p) = p - 3 - \frac{1}{p+1} + \frac{8}{p+2}$$

À partir de la table de T.L. (voir § 10.3.2), on obtient l'original :

$$f(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) - e^{-t} + 8e^{-2t} \quad \text{pour } t \geq 0$$

10.4 PRINCIPES DE L'ÉTUDE SYMBOLIQUE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

10.4.1 Application de la T.L. à un système linéaire

Un système linéaire, à une entrée et une sortie (Fig. 10.8), est régi par une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants (voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire) de la forme :

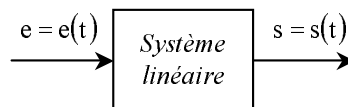


Fig. 10.8 Système linéaire

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad (m \leq n)$$

La sortie $s = s(t)$ est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Les constantes sont déterminées par des considérations physiques aux instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$ compte tenu des conditions initiales :

$$\frac{d^i s}{dt^i}(0^-) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1 \quad \text{et} \quad \frac{d^j e}{dt^j}(0^-) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq m-1$$

Remarque : L'équation différentielle ne comporte pas de terme constant (dû à une polarisation par exemple) car on peut l'éliminer par un changement de variable. Plus généralement, si la sortie dépend de plusieurs entrées, on utilisera le principe de linéarité (voir Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité).

L'application de la T.L. permet de remplacer cette équation différentielle par l'équation algébrique :

$$(a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) S(p) = (b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) E(p) + \gamma(p)$$

où $\gamma(p)$ est un polynôme résultant des conditions initiales. D'où :

$$S(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} E(p) + \frac{\gamma(p)}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$

On pose :
$$\begin{cases} N(p) = b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0 \\ D(p) = a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 \end{cases}$$

D'où le diagramme fonctionnel (ou schéma-bloc) général d'un système linéaire à une entrée et une sortie (Fig. 10.9).

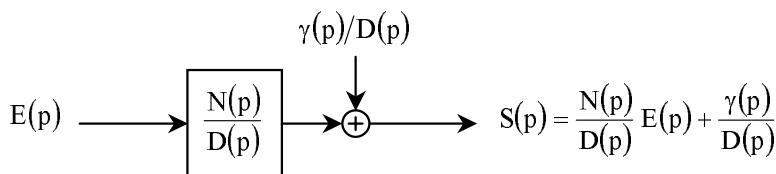


Fig. 10.9 Diagramme fonctionnel général d'un système linéaire

Remarque : Le polynôme $D(p)$ est l'équation caractéristique de l'équation différentielle. Son degré n est égal à l'ordre de l'équation différentielle, et au nombre nécessaire de conditions initiales sur la sortie et ses dérivées pour que la solution soit unique.

Question : Soit l'équation différentielle ci-après régissant un système linéaire du premier ordre. Exprimer la transformée de Laplace de sa sortie.

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = K \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right)$$

Réponse : L'application de la T.L. permet de remplacer l'équation différentielle par l'équation algébrique :

$$\tau [p S(p) - s(0^-)] + S(p) = K (\tau' [p E(p) - e(0^-)] + E(p))$$

$$D'où : S(p) = \frac{K(1 + \tau' p)}{1 + \tau p} E(p) + \frac{\tau s(0^-) - K \tau' e(0^-)}{1 + \tau p}$$

10.4.2 Fonction de transfert (F.T.), ou transmittance, de Laplace

La fonction de transfert (F.T.), ou transmittance, de Laplace d'un système linéaire, à une entrée et une sortie (Fig. 10.10), est le rapport de $S(p)$ par $E(p)$, toutes les conditions initiales étant supposées nulles ($\Rightarrow \gamma(p) = 0$). Elle est souvent notée $H(p)$ ou $T(p)$.

$$H(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{\substack{\text{à conditions} \\ \text{initiales nulles}}} = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$$



Fig. 10.10 F.T. de Laplace d'un système linéaire

Question : Soit l'équation différentielle ci-après régissant un système linéaire du premier ordre. Exprimer sa F.T. de Laplace.

$$\tau \frac{ds}{dt} + s = K \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right)$$

Réponse : Toutes les conditions initiales étant supposées nulles, l'application de la T.L. permet d'écrire :

$$\tau p S(p) + S(p) = K (\tau' p E(p) + E(p))$$

$$\text{D'où : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1 + \tau' p)}{1 + \tau p}$$

10.4.3 Réponse impulsionnelle - Causalité

La réponse impulsionnelle, notée $h(t)$, est la réponse d'un système linéaire à une impulsion de Dirac d'aire unité, toutes les conditions initiales étant supposées nulles (Fig. 10.11).



Fig. 10.11 Réponse impulsionnelle d'un système linéaire

La T.L. de cette réponse (voir Fig. 10.11) conduit à la propriété remarquable : la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système linéaire est l'original de la F.T. $H(p)$.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(p)]$$

Remarque : Les systèmes physiques réels ont des réponses impulsionnelles réelles et causales. La causalité signifie qu'il ne peut rien y avoir à la sortie du système tant qu'il n'y a rien à l'entrée ; ce qui s'écrit : $h(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

Question : Soit la F.T. ci-après décrivant un système linéaire du premier ordre. Exprimer sa réponse impulsionnelle.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p}$$

Réponse : La F.T. s'écrit aussi (par exemple par division polynomiale) :

$$H(p) = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p} = K \left(\frac{\tau'}{\tau} + \frac{1 - \tau'/\tau}{1 + \tau p} \right) = K \left(\frac{\tau'}{\tau} + \frac{1/\tau - \tau'/\tau^2}{1/\tau + p} \right)$$

$$\text{D'où : } h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(p)] = K \left(\frac{\tau'}{\tau} \delta(t) + \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{\tau'}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right)$$

Si $\tau' = \tau$ alors $h(t) = K \delta(t)$. L'impulsion est parfaitement transmise.

10.4.4 Équivalence entre la F.T. et l'équation différentielle

La F.T. et l'équation différentielle sont deux manières équivalentes de résumer les propriétés d'un système linéaire. En particulier, les pôles de la F.T. (zéros du dénominateur $D(p)$) sont les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle.

Méthode

On passe de l'équation différentielle à la fonction de transfert (F.T.) par application de la T.L. en supposant toutes les conditions initiales nulles.

En particulier : si $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$ alors $\mathcal{L} \left[\frac{d^k}{dt^k} x(t) \right]_{\text{à conditions initiales nulles}} = p^k X(p)$

Cela revient à remplacer $x(t)$ par $X(p)$ et $\frac{d^k}{dt^k}$ par l'opérateur p^k .

L'opération inverse permet de passer de la F.T. à l'équation différentielle.

Exemple 10.4.3

Passage
de l'équation
différentielle
à la F.T.



$$\tau \frac{ds}{dt} + s = K \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right)$$

$$\tau p S(p) + S(p) = K (\tau' p E(p) + E(p))$$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p}$$



Passage
de la F.T.
à l'équation
différentielle



10.4.5 Mise en équation d'un circuit électrique

a) Impédance opérationnelle ou de Laplace

Soit le dipôle linéaire (Fig. 10.12). La convention récepteur est adoptée.

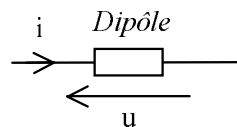


Fig. 10.12 Dipôle linéaire

• **Définitions.** L'impédance opérationnelle, ou de Laplace, $Z(p)$ d'un dipôle est la F.T. (les conditions initiales sont donc supposées nulles) définie par le rapport de $U(p)$ par $I(p)$. L'admittance opérationnelle $Y(p)$ est son inverse.

$$Z(p) = \left. \frac{U(p)}{I(p)} \right|_{\text{à conditions initiales nulles}} \quad \text{et} \quad Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$$

• Schéma électrique et notations de Laplace - « Loi d'Ohm » (Fig. 10.13)

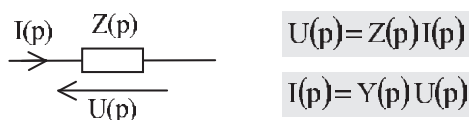


Fig. 10.13 Notations de Laplace - « Loi d'Ohm »

• Dipôles linéaires élémentaires (Fig. 10.14)

	Modèle temporel	Transformée de Laplace avec condition initiale	Impédance opérationnelle
Résistance 	$u = R i$	$U(p) = R I(p)$	$Z_R(p) = R$
Inductance 	$u = L \frac{di}{dt}$	$U(p) = L [p I(p) - i(0^-)]$	$Z_L(p) = Lp$
Capacité 	$i = C \frac{du}{dt}$	$I(p) = C [p U(p) - u(0^-)]$	$Z_C(p) = \frac{1}{Cp}$

Fig. 10.14 Dipôles linéaires élémentaires

• Association d'impédances

n impédances en série	n impédances en parallèle
$Z_{\text{Equ}}(p) = \sum_{k=1}^n Z_k(p)$	$\frac{1}{Z_{\text{Equ}}(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k(p)} \quad \text{ou} \quad Y_{\text{Equ}}(p) = \sum_{k=1}^n Y_k(p)$

b) Mise en équation - Calcul de la F.T.

La mise en équation d'un circuit électrique s'effectue grâce aux lois et théorèmes de l'électricité (voir Chapitre 2 : Lois générales de l'électricité) adaptés au calcul symbolique de Laplace. Pratiquement, cette adaptation s'effectue simplement en remplaçant, dans les lois et théorèmes, les résistances par des impédances opérationnelles, et les conductances par des admittances opérationnelles.

Question : Soit l'atténuateur compensé (Fig. 10.15). Exprimer la F.T. définie par $H(p) = U_S(p) / U_E(p)$

Réponse : En utilisant la formule du diviseur de tension, on a :

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{Z_1(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}$$

$$\text{avec} \quad Z_1(p) = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 p} \quad \text{et} \quad Z_2(p) = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 p}$$

En remplaçant chaque impédance par son expression, on obtient :

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p}$$

$$\text{avec} \quad K = \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad \tau = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad \tau' = R_2 C_2$$

$$\text{Si } \tau = \tau' \quad (\Rightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2) \quad \text{alors} \quad H(p) = K$$

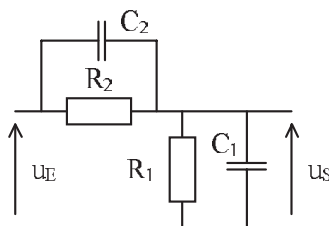


Fig. 10.15 Atténuateur compensé

Remarque : On peut aussi effectuer la mise en équation dans le domaine temporel pour obtenir l'équation différentielle, puis, ensuite, prendre la T.L. à conditions initiales nulles pour obtenir la F.T. (voir § 10.4.2). Mais cela n'est pas judicieux car la T.L. permet aussi de simplifier la mise en équation !

10.4.6 Étude de la réponse temporelle

Méthode

- 1) On établit la F.T. (voir § 10.4.5).
- 2) On passe de la F.T. à l'équation différentielle (voir § 10.4.4).

3) Deux techniques sont possibles :

- On applique la T.L. à l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales et de l'excitation (voir § 10.4.1), puis on en déduit la réponse temporelle par calcul de l'original.
- On résout directement l'équation différentielle (voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire).

Attention ! La connaissance des conditions initiales est toujours nécessaire au calcul de la réponse d'un système à une excitation donnée. Si toutes les conditions initiales sont nulles, il n'est plus nécessaire de passer par l'équation différentielle ; mais cela n'est qu'un cas particulier.

Question : Soit l'atténuateur compensé (voir Fig. 10.15). Exprimer sa réponse, à partir de $t = 0$, pour une tension d'entrée $u_E(t) = E_2 u(t) + E_1 (1 - u(t))$.

Réponse :

1) F.T. : $H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p}$ (voir § 10.4.4)

2) Équation différentielle : À partir de la F.T. on écrit :

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = K(\tau'p U_E(p) + U_E(p))$$

$$\text{D'où (voir § 10.4.4) : } \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = K \left(\tau' \frac{du_E}{dt} + u_E \right)$$

3) Réponse temporelle : L'application de la T.L. à l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales, donne (voir § 10.4.1) :

$$\tau [p U_S(p) - u_S(0^-)] + U_S(p) = K(\tau' [p U_E(p) - u_E(0^-)] + U_E(p))$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p} U_E(p) + \frac{\tau u_S(0^-) - K \tau' u_E(0^-)}{1 + \tau p}$$

$$\text{Tension d'entrée : } u_E(t) = E_2 u(t) + E_1 (1 - u(t))$$

$$\Rightarrow u_E(0^-) = E_1 \quad \text{et} \quad U_E(p) = \frac{E_2}{p} \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p} \frac{E_2}{p} + \frac{\tau u_S(0^-) - K \tau' E_1}{1 + \tau p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$U_S(p) = K E_2 \left(\frac{1}{p} + \frac{\tau' - \tau}{1 + \tau p} \right) + \frac{\tau u_S(0^-) - K \tau' E_1}{1 + \tau p}$$

Le calcul de l'original donne la réponse temporelle :

$$u_S(t) = KE_2 \left(1 + \frac{\tau' - \tau}{\tau} e^{-t/\tau} \right) + \left(u_S(0^-) - K \frac{\tau'}{\tau} E_1 \right) e^{-t/\tau} \text{ pour } t \geq 0$$

Si la tension en sortie était constante pour $t < 0$ alors $u_S(0^-) = KE_1$

$$\text{D'où : } u_S(t) = KE_2 + K(E_2 - E_1) \frac{\tau' - \tau}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ pour } t \geq 0$$

Enfin, si $\tau = \tau'$ alors $u_S(t) = KE_2$ pour $t \geq 0$

10.4.7 Étude de la réponse en fréquence, ou harmonique

La réponse harmonique s'étudie en excitant le système par un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal, et après extinction du régime transitoire. Le système étant linéaire, le signal de sortie $s(t)$ est alors aussi sinusoïdal et de même fréquence.

Méthode

On passe de la fonction de transfert (F.T.) de Laplace $H(p)$ à la F.T. complexe \underline{H} (dite aussi F.T. isochrone, et valable uniquement en régime sinusoïdal permanent établi) en remplaçant l'opérateur p par l'imaginaire $j\omega$. L'opération inverse permet de passer de la F.T. complexe à la F.T. de Laplace.

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = H(j\omega)$$

Remarque : On peut remplacer p par $j\omega$ si les pôles de $H(p)$ ont tous une partie réelle strictement négative, ce qui est nécessaire pour que la réponse libre puisse s'éteindre. Pour la F.T. complexe et l'étude de réponses harmoniques, voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé - Étude en fréquence ; et Chapitre 24 : Filtrage analogique.

Question : Soit l'atténuateur compensé (Fig. 10.15). Exprimer sa F.T. complexe.

Réponse :

$$H(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{K(1 + \tau'p)}{1 + \tau p} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = H(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega\tau')}{1 + j\omega\tau}$$

10.5 SYSTÈME LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE

Un système linéaire du premier ordre, à une entrée et une sortie, est régi par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad \text{avec} \quad a_1 > 0 \quad \text{et} \quad a_0 \geq 0$$

Il est identiquement décrit par sa F.T. (obtenue par application de la T.L. en supposant toutes les conditions initiales nulles) :

$$H(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{\substack{\text{à conditions} \\ \text{initiales nulles}}} = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} \quad \text{avec} \quad a_1 > 0 \quad \text{et} \quad a_0 \geq 0$$

Pour étudier la réponse du système à une excitation donnée, il faut tenir compte des conditions initiales : $s(0^-)$ et $e(0^-)$. L'application de la T.L. à l'équation différentielle permet d'écrire :

$$a_1 [p S(p) - s(0^-)] + a_0 S(p) = b_1 [p E(p) - e(0^-)] + b_0 E(p)$$

$$\text{D'où : } S(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_1 p + a_0} E(p) + \frac{a_1 s(0^-) - b_1 e(0^-)}{a_1 p + a_0}$$

10.5.1 F.T. élémentaires d'ordres 0 et 1

Type	F.T. (formes canoniques)	Réponse impulsionnelle ($t \geq 0$)
Coefficient multiplicateur	$H_{\text{Coeff}}(p) = k$	$h_{\text{Coeff}}(t) = k \delta(t)$
Dérivateur	$H_{\text{Dériv}}(p) = p$	$h_{\text{Dériv}}(t) = \delta'(t)$
Intégrateur	$H_{\text{Intég}}(p) = \frac{1}{p}$	$h_{\text{Intég}}(t) = 1$
Filtre passe-bas du 1 ^{er} ordre	$H_{\text{LP1}}(p) = \frac{1}{1 + \tau p} = \frac{1}{1 + p/\omega_0}$	$h_{\text{LP1}}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$
Filtre passe haut du 1 ^{er} ordre	$H_{\text{HP1}}(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p} = \frac{p/\omega_0}{1 + p/\omega_0}$	$h_{\text{HP1}}(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$

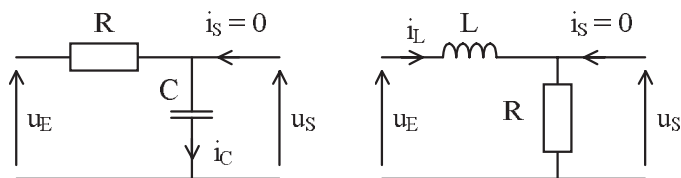
10.5.2 Circuits électriques élémentaires

a) *Filtres passifs passe-bas du 1^{er} ordre R.C. et L.R. (Fig. 10.16)*

Question : Établir les F.T. définies par $U_S(p)/U_E(p)$ des circuits R.C. et L.R.

Réponse : On applique la formule du diviseur de tension.

$$\text{Circuit R.C. : } H_{\text{LP1}}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

Fig. 10.16 Filtres passifs passe-bas du 1^{er} ordre R.C. et L.R.

$$\text{Circuit L.R. : } H_{LP1}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{R}{R + Lp} = \frac{1}{1 + \tau p} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Question : Étudier la réponse impulsionnelle des circuits R.C. et L.R.

Réponse : C'est l'original de la F.T. D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$h_{LP1}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{LP1}(p)] = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

Question : Étudier la réponse à une tension d'entrée $u_E(t) = E$ pour $t \geq 0$.

Réponse : À partir de la F.T. on écrit :

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = U_E(p)$$

$$\text{D'où (voir § 10.4.4) : } \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = u_E$$

L'application de la T.L. à l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales, donne (voir § 10.4.1) :

$$\tau [p U_S(p) - u_S(0^-)] + U_S(p) = U_E(p)$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{1}{1 + \tau p} U_E(p) + \frac{\tau u_S(0^-)}{1 + \tau p}$$

$$\text{Tension d'entrée : } u_E(t) = E \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad U_E(p) = \frac{E}{p}$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{1}{1 + \tau p} \frac{E}{p} + \frac{\tau u_S(0^-)}{1 + \tau p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$U_S(p) = E \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right) + \frac{\tau u_S(0^-)}{1 + \tau p}$$

Le calcul de l'original (voir table § 10.3.2) donne la réponse temporelle :

$$u_S(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + u_S(0^-) e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

On peut vérifier que :

$$u_S(0^+) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p U_S(p) = u_S(0^-) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u_S(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p U_S(p) = E$$

Question : Étudier la réponse à une tension sinusoïdale $u_E(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t)$ pour $t \geq 0$. On suppose qu'aucune énergie n'est initialement stockée dans les éléments réactifs.

Réponse : La condition initiale est nulle pour les deux circuits.

Circuit R.C. : $u_S(0^-) = u_C(0^-) = 0$

Circuit L.R. : $i_L(0^-) = 0 \Rightarrow u_S(0^-) = 0$ car $u_S = Ri_L$

En conséquence, il n'est pas nécessaire de passer par l'équation différentielle.

On écrit directement :

$$U_S(p) = \frac{1}{1 + \tau p} U_E(p) = \frac{E_{\text{Max}} \omega}{(1 + \tau p)(p^2 + \omega^2)} \quad \text{car} \quad U_E(p) = \frac{E_{\text{Max}} \omega}{p^2 + \omega^2}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$U_S(p) = E_{\text{Max}} \omega \left(\frac{A}{1 + \tau p} + \frac{Bp + C}{p^2 + \omega^2} \right)$$

avec : $A = \frac{\tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$, $B = \frac{-\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$ et $C = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}$

D'où : $U_S(p) = \frac{E_{\text{Max}} \omega}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\frac{\tau}{1/\tau + p} + \frac{-\tau p + 1}{p^2 + \omega^2} \right)$

Le calcul de l'original (voir table § 10.3.2) donne la réponse temporelle :

$$u_S(t) = \frac{E_{\text{Max}}}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\omega \tau e^{-t/\tau} - \omega \tau \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

La somme du cosinus et du sinus peut s'écrire :

$$-\omega \tau \cos(\omega t) + \sin(\omega t) = K \sin(\omega t + \varphi) = K (\sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi)$$

D'où le système :

$$\begin{cases} K \cos \varphi = 1 \\ K \sin \varphi = -\omega \tau \end{cases} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{-\omega \tau}{K}, \quad \tan \varphi = -\omega \tau \quad \text{et} \quad K = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

D'où une nouvelle écriture de la réponse temporelle :

$$u_S(t) = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \left(-\sin(\varphi) e^{-t/\tau} + \sin(\omega t + \varphi) \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

Question : Étudier la réponse harmonique.

Réponse : La réponse harmonique s'étudie en excitant le système par un signal sinusoïdal, et après extinction du régime transitoire (voir § 10.4.7). Le pôle de la F.T. est réel et négatif ($-1/\tau$). On peut donc remplacer p par $j\omega$ dans la F.T. de Laplace.

$$\underline{H} = H(j\omega) = \frac{U_S}{U_E} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \text{ et } \varphi = -\text{Arc tan}(\omega\tau)$$

Ainsi, pour une entrée $u_E(t) = E_{\text{Max}} \sin(\omega t)$ permanente, on a en sortie :

$$u_S(t) = \frac{E_{\text{Max}}}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

qui est la tension de sortie de la question précédente, après extinction du régime transitoire.

Diagramme de Bode : (voir Chapitre 24 : Filtrage analogique).

b) *Filtres passifs passe haut C.R. et R.L. (Fig. 10.17)*

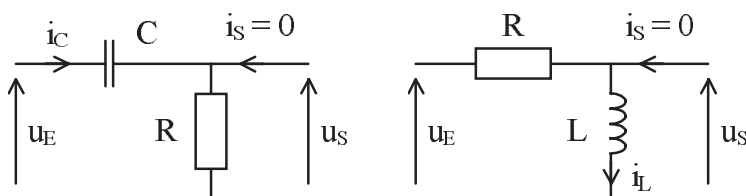


Fig. 10.17 Filtres passifs passe haut C.R. et R.L.

Question : Établir les F.T. définies par $U_S(p)/U_E(p)$ des circuits C.R. et R.L.

Réponse : On applique la formule du diviseur de tension.

$$\text{Circuit C.R. : } H_{\text{HP1}}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{RCp}{1 + RCp} = \frac{\tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec } \tau = RC$$

$$\text{Circuit R.L. : } H_{\text{HP1}}(p) = \frac{U_S(p)}{U_E(p)} = \frac{Lp}{R + Lp} = \frac{\tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

Question : Étudier la réponse impulsionnelle des circuits C.R. et R.L.

Réponse : La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$H_{\text{HP1}}(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p} = 1 - \frac{1}{1 + \tau p} = 1 - \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}$$

La réponse impulsionnelle est l'original de la F.T. D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$h_{\text{HP1}}(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_{\text{HP1}}(p)] = \delta(t) - \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

Question : Étudier la réponse à une tension d'entrée $u_E(t) = E$ pour $t \geq 0$.

Réponse : À partir de la F.T. on écrit :

$$\tau p U_S(p) + U_S(p) = \tau p U_E(p)$$

$$\text{D'où (voir § 10.4.4) : } \tau \frac{du_S}{dt} + u_S = \tau \frac{du_E}{dt}$$

L'application de la T.L. à l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales, donne (voir § 10.4.1) :

$$\tau [p U_S(p) - u_S(0^-)] + U_S(p) = \tau [p U_E(p) - u_E(0^-)]$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p} U_E(p) + \frac{\tau u_S(0^-) - \tau u_E(0^-)}{1 + \tau p}$$

$$\text{Tension d'entrée : } u_E(t) = E \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad U_E(p) = \frac{E}{p}$$

$$\text{D'où : } U_S(p) = \frac{\tau E}{1 + \tau p} + \frac{\tau u_S(0^-) - \tau u_E(0^-)}{1 + \tau p}$$

Le calcul de l'original (voir table § 10.3.2) donne la réponse temporelle :

$$u_S(t) = [E - u_E(0^-) + u_S(0^-)] e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

On peut vérifier que :

$$\begin{aligned} u_S(0^+) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p U_S(p) = E - u_E(0^-) + u_S(0^-) \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u_S(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p U_S(p) = 0 \end{aligned}$$

Remarque : La tension d'entrée est $u_E(t) = E$ pour $t \geq 0$. En conséquence :

$$\frac{du_E}{dt} = [u_E(0^+) - u_E(0^-)] \delta(t) = [E - u_E(0^-)] \delta(t)$$

(au sens des distributions)

On aurait donc pu résoudre l'équation différentielle ci-après qui conduit bien sûr à la même tension symbolique $U_S(p)$.

$$\tau \frac{du_S}{dt} + u_S = \tau [E - u_E(0^-)] \delta(t) \quad (\text{valable pour } t \geq 0)$$

10.6 SYSTÈME LINÉAIRE DU DEUXIÈME ORDRE

Un système linéaire du deuxième ordre, à une entrée et une sortie, est régi par une équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants de la forme :

$$a_2 \frac{d^2s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_2 \frac{d^2e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad \text{avec} \quad a_2 > 0 \quad \text{et} \quad a_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad a_0 \geq 0$$

Il est identiquement décrit par sa F.T. (obtenue par application de la T.L. en supposant toutes les conditions initiales nulles) :

$$H(p) = \left. \frac{S(p)}{E(p)} \right|_{\substack{\text{à conditions} \\ \text{initiales nulles}}} = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad \text{avec } a_2 > 0 \text{ et } a_1 \geq 0 \text{ et } a_0 \geq 0$$

Pour étudier la réponse du système à une excitation donnée, il faut tenir compte des conditions initiales : $s(0^-)$, $s'(0^-)$, $e(0^-)$ et $e'(0^-)$. L'application de la T.L. à l'équation différentielle permet d'écrire :

$$\begin{aligned} a_2 [p^2 S(p) - p s(0^-) - s'(0^-)] + a_1 [p S(p) - s(0^-)] + a_0 S(p) \\ = b_2 [p^2 E(p) - p e(0^-) - e'(0^-)] + b_1 [p E(p) - e(0^-)] + b_0 E(p) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} E(p) \\ &+ \frac{a_2 p s(0^-) + a_2 s'(0^-) + a_1 s(0^-) - b_2 p e(0^-) - b_2 e'(0^-) - b_1 e(0^-)}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \end{aligned}$$

10.6.1 F.T. élémentaires du deuxième ordre

Type	F.T. (formes canoniques)
Filtre passe-bas du 2 ^{ème} ordre ($m > 0$)	$H_{LP2}(p) = \frac{1}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$
Filtre passe haut du 2 ^{ème} ordre ($m > 0$)	$H_{HP2}(p) = \frac{p^2/\omega_0^2}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \frac{p^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$
Filtre passe-bande du 2 ^{ème} ordre ($m > 0$)	$H_{BP2}(p) = \frac{2mp/\omega_0}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2} = \frac{2m\omega_0 p}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$

10.6.2 Circuit résonant série (Fig. 10.18)

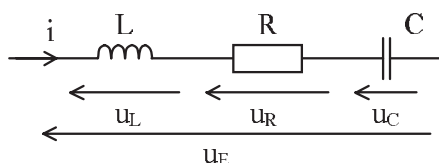


Fig. 10.18 Circuit résonant série

Question : Établir les F.T. $U_C(p)/U_E(p)$, $U_L(p)/U_E(p)$ et $U_R(p)/U_E(p)$.

Réponse : On applique la formule du diviseur de tension.

$$H_{LP2}(p) = \frac{U_C(p)}{U_E(p)} = \frac{1}{1 + RCp + LCp^2} = \frac{1}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2}$$

$$H_{HP2}(p) = \frac{U_L(p)}{U_E(p)} = \frac{LCp^2}{1 + RCp + LCp^2} = \frac{p^2/\omega_0^2}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2}$$

$$H_{BP2}(p) = \frac{U_R(p)}{U_E(p)} = \frac{RCp}{1 + RCp + LCp^2} = \frac{2mp/\omega_0}{1 + 2mp/\omega_0 + p^2/\omega_0^2}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Question : Étudier la réponse impulsionnelle du filtre passe-bas du 2^{ème} ordre.

Réponse : La réponse impulsionnelle est l'original de la F.T. On distingue quatre régimes, résultant de l'étude du dénominateur de la F.T. (équation caractéristique de l'équation différentielle).

$$p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \omega_0^2 (m^2 - 1)$$

$$\Rightarrow p_1 = -m\omega_0 + \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - \sqrt{\Delta}$$

① *Régime apériodique* : $m > 1$. Les deux pôles sont réels négatifs.

$$p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$$

La F.T. s'écrit alors :

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit :

$$H_{LP2}(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2}$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad A &= (p - p_2) H_{LP2}(p)|_{p=p_1} = \frac{\omega_0^2}{p_1 - p_2} = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \\ B &= (p - p_1) H_{LP2}(p)|_{p=p_2} = \frac{\omega_0^2}{p_2 - p_1} = \frac{-\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \end{aligned}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{LP2}(p)] = \frac{\omega_0}{2\sqrt{m^2 - 1}} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right) \quad \text{pour } t \geq 0$$

avec $\tau_1 = -1/p_1$ et $\tau_2 = -1/p_2$

② *Régime critique* : $m = 1$. Le pôle double est réel négatif.

$$p_0 = -\omega_0$$

La F.T. s'écrit alors :

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{(p - p_0)^2}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H_{LP2}(p)] = \frac{1}{\tau_0^2} t e^{-t/\tau_0} \quad \text{pour } t \geq 0 \quad \text{avec } \tau_0 = -1/p_0$$

③ *Régime pseudo-périodique* : $0 < m < 1$. Les deux pôles sont complexes conjugués à parties réelles négatives.

$$p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2} \quad \text{et} \quad p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$$

La forme canonique de la F.T. s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{LP2}(p) &= \frac{\omega_0^2}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2 (1 - m^2)} \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} \frac{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}{(p + m\omega_0)^2 + \omega_0^2 (1 - m^2)} \end{aligned}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$\begin{aligned} h_{LP2}(t) &= \mathcal{L}^{-1} [H_{LP2}(p)] \\ &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin \left(\sqrt{1 - m^2} \omega_0 t \right) \quad \text{pour } t \geq 0 \end{aligned}$$

④ *Régime périodique* : $m = 0$ ($R = 0$). Les deux pôles sont imaginaires purs conjugués.

$$p_1 = j\omega_0 \quad \text{et} \quad p_2 = -j\omega_0$$

La F.T. s'écrit alors :

$$H_{LP2}(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} = \omega_0 \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

D'après la table de T.L. (voir § 10.3.2), l'original s'écrit :

$$h_{LP2}(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_{LP2}(p)] = \omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{pour } t \geq 0$$

Remarque : La réponse impulsionnelle du filtre passe-bas du 2^{ème} ordre est la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 \delta(t)$$

Question : Étudier la réponse harmonique du filtre passe-bas du 2^{ème} ordre.

Réponse : Pour tout $m > 0$ (si $m = 0$ ce n'est plus un filtre mais un oscillateur), on peut remplacer p par $j\omega$ dans la F.T. de Laplace.

$$\underline{H_{LP2}} = H_{LP2}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2mj \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Diagramme de Bode : (voir Chapitre 24 : Filtrage analogique).

PARTIE 2

Composants électroniques

Chapitre 11

Résistances

11.1 MODÈLE DE BASE

11.1.1 Loi d'Ohm – Résistance – Conductance

- *Symbole* (Fig. 11.1). Tension u et courant i : convention récepteur.

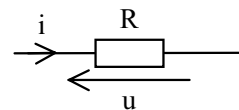


Fig. 11.1 Symbole

- *Loi d'Ohm* (Voir aussi Chapitre 1 : Qu'est-ce que l'électricité ?)

$$u = Ri$$

$$\text{Unités : } V = \Omega A$$

- *Résistivité de quelques conducteurs* (Fig. 11.2)

Résistivité à T° ambiante	$\rho(\Omega m) \approx$
argent (Ag)	$1,6 \cdot 10^{-8}$
cuivre (Cu)	$1,7 \cdot 10^{-8}$
or (Au)	$2,3 \cdot 10^{-8}$
aluminium (Al)	$2,6 \cdot 10^{-8}$
fer (Fe)	$9,7 \cdot 10^{-8}$

Fig. 11.2 Quelques résistivités

- **Résistance d'un conducteur filiforme homogène.** ℓ est la longueur du conducteur, S sa section et ρ la résistivité du matériau.

$$R = \rho \frac{\ell}{S} \quad \text{Unités : } \Omega = \Omega \text{m} \frac{\text{m}}{\text{m}^2}$$

Question : Sachant que la résistivité du cuivre est $\rho_{20} \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ à 20°C , calculer la résistance d'un fil cylindrique de 1km de long et de 1mm de diamètre.

Réponse : A 20°C , $R_{20} \approx 21,6 \Omega$

- **Conductivité γ** (aussi notée σ)

$$\gamma = \frac{1}{\rho} \quad \text{Unités : } \text{S/m} = \frac{1}{\Omega\text{m}}$$

- **Conductance** (exprimée en siemens)

$$G = \frac{1}{R} \quad \text{Unités : } \text{S} = \frac{1}{\Omega}$$

11.1.2 Associations de résistances

- **Mise en série** (Fig. 11.3)

Pour 2 résistances :

$$u_{\text{Tot}} = u_1 + u_2 = R_{\text{Equ}} i \quad \text{avec} \quad R_{\text{Equ}} = R_1 + R_2$$

Pour n résistances :

$$u_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n u_k = R_{\text{Equ}} i \quad \text{avec} \quad R_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n R_k$$

- **Mise en parallèle** (Fig. 11.4)

Pour 2 résistances ($//$ signifie en parallèle) :

$$i_{\text{Tot}} = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_{\text{Equ}}}$$

avec

$$R_{\text{Equ}} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad G_{\text{Equ}} = G_1 + G_2$$

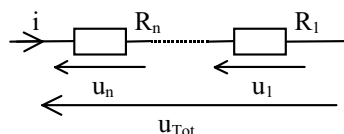


Fig. 11.3 Mise en série

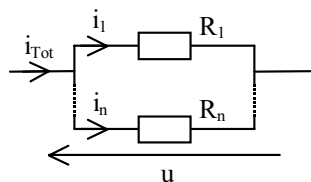


Fig. 11.4 Mise en parallèle

Pour n résistances :

$$i_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n i_k = \frac{u}{R_{\text{Equ}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R_{\text{Equ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \text{ou} \quad G_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n G_k$$

11.1.3 Puissance dissipée

- **Puissance instantanée** ($p = ui$)

$$p = Ri^2 = \frac{u^2}{R} \quad \text{Unités :} \quad W = \Omega A^2 = \frac{V^2}{\Omega}$$

- **Puissance moyenne dissipée sous forme de chaleur** (effet Joule)

$$P_{\text{Moy}} = RI_{\text{Eff}}^2 = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{R} \quad \text{Unités :} \quad W = \Omega A^2 = \frac{V^2}{\Omega}$$

Question : Un chauffage électrique est directement alimenté à partir du secteur en monophasé (230V, 50Hz). La résistance électrique est $R = 52,9 \, \Omega$. Exprimer la puissance instantanée et calculer la puissance moyenne du chauffage.

Réponse :

$$p = \frac{U_{\text{Max}}^2}{R} \sin^2(\omega t) \approx 2000 \times \sin^2(100\pi t) \quad P_{\text{Moy}} = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{R} \approx 1 \text{ kW}$$

11.2 LIMITES ET IMPERFECTIONS

11.2.1 Puissance maximale – Intensité maximale – Tension maximale

- **Puissance maximale dissipable.** La puissance maximale dissipable P_{Max} dans une résistance est fonction de la température maximale admissible par le corps de la résistance et de sa résistance thermique R_{Th} .

- **Réduction de la puissance maximale dissipable (power derating) en fonction de la température ambiante** (Fig. 11.5). L'I.E.C. (International Electrotechnical Commission) recommande que la dissipation nominale P_N soit la puissance maximale applicable en permanence à la température ambiante nominale T_N de $70 \, ^\circ\text{C}$.

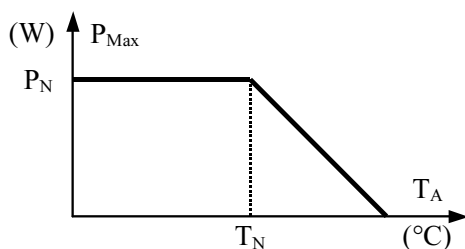


Fig. 11.5 Réduction de la puissance maximale

- « *Loi d'Ohm thermique* » appliquée au corps d'une résistance

$$\Delta T = R_{Th} P_{Moy} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C} = \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$$

Question : Une résistance C.M.S. (composant monté en surface) a une résistance thermique de $320\text{ }^\circ\text{C/W}$. Sa température maximale de fonctionnement est de $150\text{ }^\circ\text{C}$, et sa puissance maximale définie à $70\text{ }^\circ\text{C}$ est de $1/4\text{ W}$. Calculer la puissance maximale dissipable à la température de $50\text{ }^\circ\text{C}$, puis à $100\text{ }^\circ\text{C}$.

Réponse : $P_{Max\ 50^\circ\text{C}} = P_{Max\ 70^\circ\text{C}} = 0,25\text{ W}$ (voir Fig. 11.5)

$$P_{Max\ 100^\circ\text{C}} = \frac{\Delta T}{R_{Th}} = \frac{150 - 100}{320} = 0,15\text{ W}$$

- *Intensité efficace maximale – Tension efficace maximale*

$$I_{Eff\ Max} = \sqrt{\frac{P_{Max}}{R}} \quad U_{Eff\ Max} = \sqrt{P_{Max} R}$$

- **Tension maximale.** La tension maximale applicable aux bornes d'une résistance est déterminée à partir de la relation donnant $U_{Eff\ Max}$, limitée à la tension maximale technologique donnée par le constructeur.

11.2.2 Coefficient de température

- **Variation linéaire.** En supposant la variation linéaire, la résistance R à la température T s'exprime par

$$R = R_N [1 + TC1 (T - T_N)]$$

où R_N est la résistance mesurée à la température nominale T_N , et $TC1$ le coefficient linéaire de température (constant).

$$TC1 = \frac{1}{R_N} \frac{dR}{dT} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{\Omega} \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$$

Question : La résistivité du cuivre est $\rho_{20} \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$ à 20°C . En admettant que le coefficient de température du cuivre est $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} ^\circ\text{C}^{-1}$, calculer la résistance d'un fil cylindrique de 1 km de long et de 1 mm de diamètre à 100°C .

$$\text{Réponse : } R_{100^\circ\text{C}} = R_{20^\circ\text{C}} [1 + \alpha (100 - 20)] \approx 28,6 \Omega$$

Remarque : Dans les documents constructeurs, le coefficient de température est le maximum des coefficients mesurés par rapport à T_N .

$$TC = \underset{T_{\text{Min}} \leq T \leq T_{\text{Max}}}{\text{Max}} \left[\frac{1}{R_N} \frac{R - R_N}{T - T_N} \right]$$

• **Variation quadratique (modèle Spice).** En supposant la variation quadratique, la résistance R à la température T s'exprime par

$$R = R_N [1 + TC1 (T - T_N) + TC2 (T - T_N)^2]$$

où R_N est la résistance mesurée à la température nominale T_N , $TC1$ le coefficient linéaire de température, et $TC2$ le coefficient quadratique de température.

$$TC1 = \left. \frac{1}{R_N} \frac{dR}{dT} \right|_{\text{à } T=T_N} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{\Omega} \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$$

$$TC2 = \frac{1}{2R_N} \frac{d^2R}{dT^2} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-2} = \frac{1}{\Omega} \frac{\Omega}{^\circ\text{C}^2}$$

• **Variation exponentielle (modèle Spice).** En supposant la variation exponentielle, la résistance R à la température T s'exprime par

$$R = R_N 1,01^{TCE (T - T_N)}$$

où R_N est la résistance mesurée à la température nominale T_N , et TCE le coefficient exponentiel de température.

$$TCE = \frac{1}{\ln(1,01)} \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} \approx \frac{100}{R} \frac{dR}{dT} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{\Omega} \frac{\Omega}{^\circ\text{C}}$$

11.2.3 Comportement aux fréquences élevées

• **Schéma équivalent aux fréquences élevées - Impédance complexe** (Fig. 11.6). ℓ est l'inductance interne et des connexions, et γ la capacité interne et des connexions.

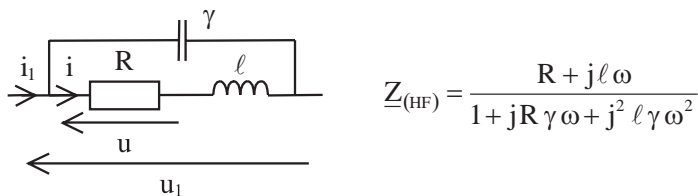


Fig. 11.6 Schéma équivalent – Impédance complexe

11.3 RÉSISTANCES VARIABLES ET AJUSTABLES – POTENTIOMÈTRES

• **Symbole** (Fig. 11.7). La flèche désigne le curseur.

• **Constitution**. Les variations des résistances variables et ajustables sont obtenues par le déplacement d'un curseur sur une piste de matériaux résistifs. La course mécanique est circulaire monotour, circulaire multitours (3, 5, 10 ou 25 tours), ou linéaire.

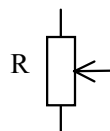


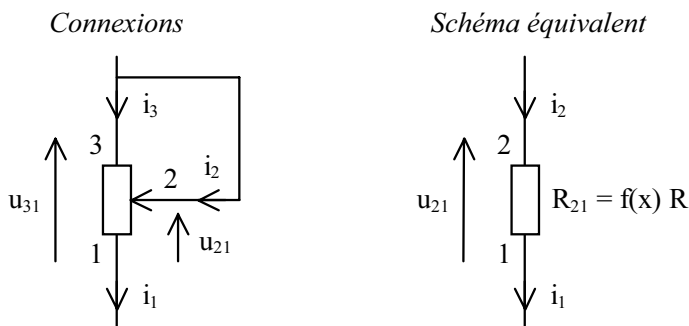
Fig. 11.7 Symbole des résistances variables et ajustables

• **Notations**. On note R la résistance totale comprise entre les deux extrémités, x le déplacement relatif du curseur ($0 \leq x \leq 1$), et $f(x)$ la loi de variation relative.

$$0 \leq f(x) = \frac{R(x)}{R} \leq 1$$

• **Lois de variation**. La loi de variation est la relation qui existe entre la valeur de la résistance mesurée entre le curseur et la borne de référence, et la position mécanique du curseur. Les lois de variations sont, pour les plus courantes :

- linéaire (A), avec $f(x) = x$ pour tout x compris entre 0 et 1
- logarithmique (B), avec $f(0,5) = 0,1$
- logarithme inverse (C), avec $f(0,5) = 0,9$

Fig. 11.8 Montage rhéostatique (avec $i_1 \leq I_{\text{Max}}$)

- **Montage rhéostatique** (Fig. 11.8). La résistance variable est montée en réducteur d'intensité comme une simple résistance.

$$u_{32} = 0 \Rightarrow i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 = \frac{u_{31}}{R_{21}} = \frac{u_{21}}{R_{21}}$$

Cas d'une loi de variation linéaire : $R_{21} = xR$

- **Montage potentiométrique** (Fig. 11.9). La résistance variable est montée en diviseur (ou réducteur) de tension ou potentiomètre (nom dérivé de potentiel).

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \text{et} \quad u_{31} = u_{32} + u_{21}$$

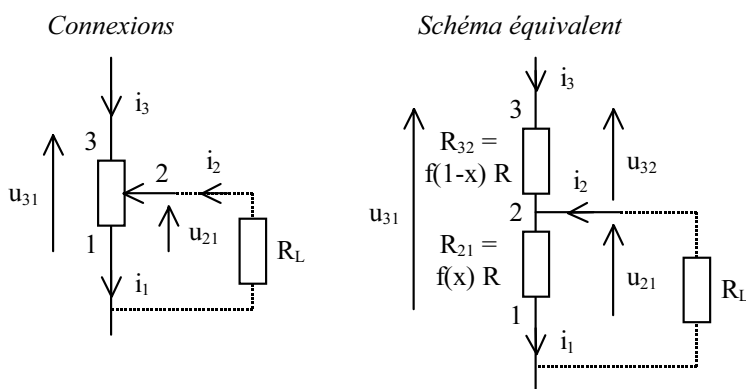


Fig. 11.9 Montage potentiométrique (avec $i_3 \leq I_{Max}$)

Cas d'une loi de variation linéaire :

$$R_{21} = xR \quad \text{et} \quad R_{32} = (1 - x)R$$

Premier cas :

$$i_2 = 0 \Rightarrow \frac{u_{21}}{u_{31}} = \frac{R_{21}}{R_{21} + R_{32}} = x$$

Deuxième cas :

$$i_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{u_{21}}{u_{31}} = \frac{R_{21} // R_L}{R_{21} // R_L + R_{32}} = \frac{xR_L}{R_L + x(1 - x)R}$$

(// signifie en parallèle, voir § 11.1.2)

Attention ! Dans un montage potentiométrique, la tension mesurée entre le curseur et une borne ne suit la loi de variation du potentiomètre qu'à condition que la résistance de charge soit très grande devant la résistance du potentiomètre.

- **Courant maximal.** La puissance nominale P_N dissipable par une résistance variable concerne l'ensemble de la piste (résistance R). En conséquence :

$$I_{Max} = \sqrt{\frac{P_N}{R}}$$

Chapitre 12

Condensateurs

Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices, appelées armatures, séparées par un isolant électrique mince, appelé diélectrique (« qui ne conduit pas le courant électrique »). Voir aussi Chapitre 3 : Électrostatique.

12.1 MODÈLE DE BASE

12.1.1 Relations entre q , u et i – Capacité

- **Symbole** (Fig. 12.1). Tension u , courant i et charge q : convention récepteur.

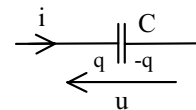


Fig. 12.1 Symbole

- **Relation entre la charge électrique et la tension.** Physiquement (Fig. 12.2), la charge q d'un condensateur est la valeur absolue des charges q_A et q_B portées par les armatures internes A et B.

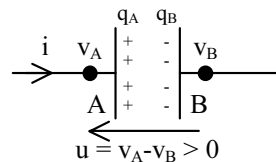


Fig. 12.2 Charges électriques

$$q = q_A = -q_B = C(v_A - v_B) = Cu$$

$$\Rightarrow \quad q = Cu \quad \text{Unités :} \quad C = FV$$

- **Relation entre la charge électrique (ou quantité d'électricité) et l'intensité**

$$dq = idt \quad \text{Unités :} \quad C = As$$

Attention ! Il est inexact de dire que le courant électrique « traverse » le condensateur, car physiquement les électrons ne peuvent pas traverser le diélectrique (c'est un isolant en fonctionnement normal). En fait, les électrons se déplacent (mouvement d'ensemble) dans les conducteurs qui relient les armatures du condensateur.

• **Relation entre l'intensité et la tension**

$$i = C \frac{du}{dt} \quad \text{Unités :} \quad A = F \frac{V}{s}$$

• **Permittivité absolue du vide**

$$\varepsilon_0 \approx 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

• **Permittivité relative de quelques isolants**

(Fig. 12.3). Le titanate de baryum, mélangé à d'autres matériaux, sert à réaliser les condensateurs céramiques, sa permittivité relative dépend des proportions du composé.

Permittivité relative	$\varepsilon_r \approx$
air sec	1
papier sec	2,5
téflon	2
verre	3 à 12
titanate de baryum	> 1000

• **Permittivité absolue**

Fig. 12.3 Quelques permittivités relatives

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad \text{Unités :} \quad F/m$$

• **Capacités de quelques configurations particulières**

Capacité	Formule	Commentaires
d'un condensateur plan	$C = \varepsilon \frac{S}{d}$	S : aire commune aux parties d'armatures en regard d : distance entre les armatures
d'une sphère	$C = 4\pi\varepsilon r$	r : rayon de la sphère
de deux sphères concentriques	$C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	r_1 et r_2 : rayons des sphères ($r_2 > r_1$)
de deux cylindres concentriques	$C = \frac{2\pi\varepsilon \ell}{\ln(r_2/r_1)}$	r_1 et r_2 : rayons des cylindres ($r_2 > r_1$) ℓ : longueur des cylindres

Question : Un circuit imprimé est réalisé avec des pistes en cuivre (Cu) de $70 \mu\text{m}$ d'épaisseur sur un support isolant de $1,2 \text{ mm}$ d'épaisseur et de permittivité $\varepsilon_r = 6$.

1) Soient deux pistes parallèles espacées de 1 mm et situées du même côté de la plaque. Exprimer et calculer la capacité linéique du condensateur ainsi réalisé.

2) Soient deux pistes de 2 mm de large situées face à face de chaque côté de la plaque. Exprimer et calculer la capacité linéique du condensateur ainsi réalisé.

$$\text{Réponse : 1) } C = \varepsilon_0 \frac{70 \cdot 10^{-6} \ell}{10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \frac{C}{\ell} \approx 0,62 \text{ pF/m}$$

$$2) C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{2 \cdot 10^{-3} \ell}{1,2 \cdot 10^{-3}} \quad \text{soit} \quad \frac{C}{\ell} \approx 88,4 \text{ pF/m}$$

Question : Un câble coaxial est composé d'un conducteur intérieur (l'âme) de rayon $r_1 = 0,5 \text{ mm}$, et d'un conducteur extérieur de rayon intérieur $r_2 = 2,5 \text{ mm}$ et de rayon extérieur $r_3 = 2,6 \text{ mm}$. Le diélectrique séparant les deux conducteurs a une permittivité relative $\varepsilon_r = 4$. Exprimer et calculer la capacité linéique du condensateur réalisé par les deux conducteurs.

$$\text{Réponse : } \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}{\ln(r_2/r_1)} \quad \text{soit} \quad \frac{C}{\ell} \approx 138 \text{ pF/m}$$

12.1.2 Associations de condensateurs

• Mise en série (Fig. 12.4)

Pour 2 condensateurs :

$$i = C_{\text{Equ}} \left(\frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} \right)$$

avec

$$\frac{1}{C_{\text{Equ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

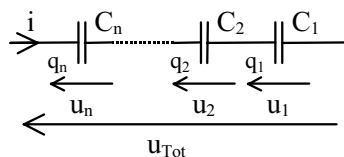


Fig. 12.4 Mise en série

Pour n condensateurs :

$$i = C_{\text{Equ}} \frac{du_{\text{Tot}}}{dt} = C_{\text{Equ}} \sum_{k=1}^n \frac{du_k}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_{\text{Equ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

Remarques :

- La capacité équivalente C_{Equ} est inférieure à chaque capacité mise en série.
- Les variations de charges des condensateurs en série sont, chacune, égales à la variation de charge du condensateur équivalent :

$$\forall k \in [1 \cdot n] \quad dq_k = dq_{\text{Equ}}$$

- Les variations de tensions aux bornes des condensateurs sont inversement proportionnelles à leurs capacités :

$$\forall k \in [1 \cdot n] \quad C_k du_k = C_{\text{Equ}} du_{\text{Tot}}$$

- En continu, les tensions U_k (et donc les charges Q_k) dépendent en réalité des résistances d'isolement R_k des condensateurs (voir § 12.2.4). Ceci peut être utilisé pour déterminer les tensions moyennes $U_{k \text{ Moy}}$ (et les charges moyennes $Q_{k \text{ Moy}}$) dans le cas de signaux périodiques.

• **Mise en parallèle** (Fig. 12.5)

Pour 2 condensateurs (// signifie en parallèle) :

$$i_{\text{Tot}} = i_1 + i_2 = C_{\text{Equ}} \frac{du}{dt}$$

avec

$$C_{\text{Equ}} = C_1 // C_2 = C_1 + C_2$$

Pour n condensateurs :

$$i_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n i_k = C_{\text{Equ}} \frac{du}{dt}$$

avec

$$C_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n C_k$$

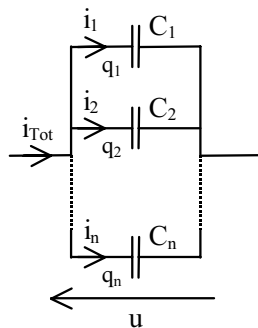


Fig. 12.5 Mise en parallèle

Question : Un condensateur $C_1 = 1000 \mu\text{F}$ est alimenté sous la tension $U_1 = 10 \text{ V}$ et un condensateur $C_2 = 2000 \mu\text{F}$ est alimenté sous la tension $U_2 = 5 \text{ V}$. On isole les condensateurs de leur alimentation et on les connecte en parallèle. Exprimer et calculer la tension U aux bornes des condensateurs.

Méthode

La charge totale $q_{\text{Tot}} = q_1 + q_2$ est conservée. Attention, ce n'est pas le cas de l'énergie.

$$\text{Réponse : } q_{\text{Tot}} = C_1 U_1 + C_2 U_2 = (C_1 + C_2) U$$

$$\Rightarrow U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \text{ V}$$

12.1.3 Champ électrique – Force électrostatique

- **Champ électrique.** Le vecteur champ électrique \vec{E} est orienté dans le sens des potentiels décroissants. Dans un condensateur plan, seule la composante selon l'axe x est non nulle (Fig. 12.6).

$$E_x = -\frac{v_A - v_B}{d} = -\frac{u}{d} \quad \text{Unités : } V/m = \frac{V}{m}$$

• **Force électrostatique.** Une charge q placée dans un champ électrique \vec{E} subit une force électrostatique \vec{F} de même direction.

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad \text{Unités : } N = C V/m$$

Dans un condensateur plan (voir Fig. 12.6), un électron subit la force F_x dans le sens de l'axe des x , car la charge d'un électron (e^-) est négative.

$$F_x = -e^- \frac{u}{d} = |e^-| \frac{u}{d} \text{ avec } e^- \approx -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

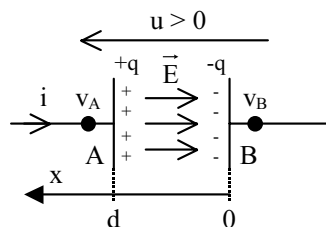


Fig. 12.6 Champ électrique dans un condensateur plan

12.1.4 Énergie emmagasinée

$$w = \frac{1}{2} Cu^2 = \frac{1}{2} qu = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad \text{Unités : } J = FV^2 = CV = \frac{C^2}{F}$$

Question : Un condensateur est directement alimenté à partir d'une tension sinusoïdale $u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t)$. Exprimer la charge électrique instantanée et l'énergie emmagasinée instantanée.

$$\text{Réponse : } q = CU_{\text{Max}} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad w = \frac{1}{2} CU_{\text{Max}}^2 \sin^2(\omega t)$$

12.1.5 Continuité et stabilité de la tension et de la charge électrique

• **Continuité.** L'énergie étant continue, la tension et la charge électrique aux bornes d'un condensateur ne peuvent pas subir de discontinuité.

$$\forall t, u(t^-) = u(t^+) \quad \forall t, q(t^-) = q(t^+)$$

• **Stabilité.** La tension et la charge électrique aux bornes d'un condensateur sont constantes si, et seulement si, l'intensité est nulle.

$$\left. \begin{array}{l} u = \text{constante} \\ q = \text{constante} \end{array} \right\} \Leftrightarrow i = 0$$

12.1.6 Régime sinusoïdal

Loi « d'Ohm »	$\underline{U} = \underline{Z}_C \underline{I}$
Impédance complexe	$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
Module	$Z_C = \underline{Z}_C = \frac{ \underline{U} }{ \underline{I} } = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} = \frac{1}{C\omega}$
Réactance	$X_C = \frac{-1}{C\omega}$
Déphasage de u par rapport à i	$\varphi_C = \text{Arg}(\underline{Z}_C) = \theta_U - \theta_I = \frac{-\pi}{2}$
Puissance active ou moyenne	$P = 0$
Puissance réactive	$Q = -C\omega U_{\text{Eff}}^2 = \frac{-I_{\text{Eff}}^2}{C\omega} = X_C I_{\text{Eff}}^2$

Remarque : La tension est en retard de $\pi/2$ sur le courant.

$$u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_U) \quad \text{avec} \quad U_{\text{Max}} = \sqrt{2} U_{\text{Eff}}$$

$$\Rightarrow i = I_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_I) = C\omega U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_U + \pi/2)$$

12.2 LIMITES ET IMPERFECTIONS

12.2.1 Champ disruptif – Tension nominale

• **Champ disruptif** (voir Fig. 12.7 pour ordres de grandeurs). La valeur du champ de claquage (ou de percement) du matériau diélectrique est appelée *champ disruptif* ou *rigidité diélectrique*. La rigidité diélectrique diminue lorsque la température ou la fréquence augmentent. D'une façon générale, la rigidité diélectrique (en kV/mm) diminue lorsque l'épaisseur du diélectrique augmente.

Champ disruptif	$E_d(\text{kV/mm}) \approx$
air sec	2,5 à 5,5
polypropylène	350
mica	40 à 200
téflon	80

Fig. 12.7 Quelques champs disruptifs

• **Tension nominale ou de service.** La tension nominale U_N , ou tension maximale de service, est la tension que l'on peut appliquer en service continu sans risque de percement du diélectrique.

12.2.2 Coefficient de température

- **Variation linéaire.** En supposant une variation linéaire, la capacité C à la température T s'exprime par

$$C = C_N [1 + TC1 (T - T_N)]$$

où C_N est la capacité mesurée à la température nominale T_N , et $TC1$ le coefficient linéaire de température (constant).

$$TC1 = \frac{1}{C_N} \frac{dC}{dT} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{F} \frac{F}{^\circ\text{C}}$$

- **Variation quadratique (modèle Spice).** En supposant une variation quadratique, la capacité C à la température T s'exprime par

$$C = C_N [1 + TC1 (T - T_N) + TC2 (T - T_N)^2]$$

où C_N est la capacité mesurée à la température nominale T_N , $TC1$ le coefficient linéaire de température, et $TC2$ le coefficient quadratique de température.

$$TC1 = \frac{1}{C_N} \left. \frac{dC}{dT} \right|_{T=T_N} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{F} \frac{F}{^\circ\text{C}}$$

$$TC2 = \frac{1}{2C_N} \frac{d^2C}{dT^2} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-2} = \frac{1}{F} \frac{F}{^\circ\text{C}^2}$$

12.2.3 Coefficient de tension

- **Variation linéaire.** En supposant la variation linéaire, la capacité C à la tension U s'exprime par

$$C = C_0 [1 + VC1 (U - U_0)]$$

où C_0 est la capacité mesurée à la tension U_0 (généralement $U_0 = 0$ V), et $VC1$ le coefficient linéaire de tension (constant).

$$VC1 = \frac{1}{C_0} \frac{dC}{dU} \quad \text{Unités : } \text{V}^{-1} = \frac{1}{F} \frac{F}{\text{V}}$$

- **Variation quadratique (modèle Spice).** En supposant la variation quadratique, la capacité C à la tension U s'exprime par

$$C = C_0 [1 + VC1 U + VC2 U^2]$$

où C_0 est la capacité mesurée à $U = 0$ V, $VC1$ le coefficient linéaire de tension, et $VC2$ le coefficient quadratique de tension.

$$VC1 = \frac{1}{C_0} \frac{dC}{dU} \Big|_{U=0 \text{ V}} \quad \text{Unités : } V^{-1} = \frac{1}{F} \frac{F}{V}$$

$$VC2 = \frac{1}{2C_0} \frac{d^2C}{dU^2} \quad \text{Unités : } V^{-2} = \frac{1}{F} \frac{F}{V^2}$$

12.2.4 Comportement en fréquence

• **Schéma équivalent** (Fig. 12.8). ℓ est ici l'inductance interne de construction et des connexions, r la résistance des connexions et des armatures, et R la résistance d'isolement du diélectrique et du boîtier.

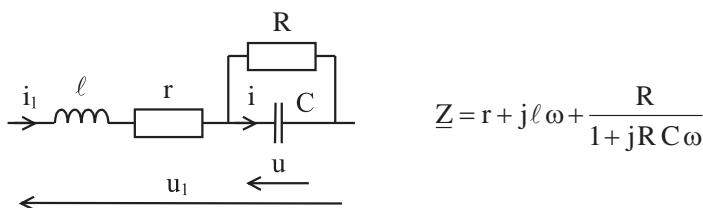


Fig. 12.8 Schéma équivalent – Impédance complexe

Le *facteur de qualité* f_Q du dipôle, inverse de la *tangente de l'angle de perte* $\tan(\delta)$, est une fonction de la fréquence.

$$f_Q = \frac{1}{\tan(\delta)} = \frac{|Q|}{P} = \frac{|\text{Im}[\underline{Z}]| I_{1\text{Eff}}^2}{\text{Re}[\underline{Z}] I_{1\text{Eff}}^2} = \frac{|\ell\omega(1 + R^2C^2\omega^2) - R^2C\omega|}{R + r(1 + R^2C^2\omega^2)}$$

• **Comportement aux fréquences élevées** (Fig. 12.9). $R \gg 1/C\omega$

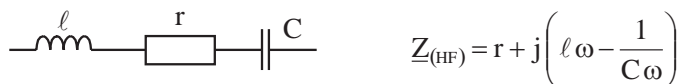


Fig. 12.9 Comportement aux fréquences élevées

Pulsation de résonance : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\ell C}}$

Facteur de qualité : $f_Q = \frac{1}{\tan(\delta)} = \frac{|\ell C\omega^2 - 1|}{rC\omega}$

Question : Les éléments du modèle d'un condensateur de découplage sont

$$C = 22 \text{ nF}, \quad r = 30 \text{ m}\Omega \quad \text{et} \quad \ell = 5 \text{ nH} \quad (\text{voir Fig. 12.9}).$$

Étudier son comportement.

Réponse : L'expression de $\underline{Z}_{(HF)}$ peut s'écrire :

$$\underline{Z}_{(HF)} = \frac{1 + jrC\omega + j^2\ell C\omega^2}{jC\omega} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2mj \frac{\omega}{\omega_0}}{jC\omega}$$

Fréquence de résonnance : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\ell C}}$ soit $f_0 \approx 15,2 \text{ MHz}$

Amortissement : $m = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{\ell}}$ soit $m \approx 0,03$

D'où :

	$\underline{Z}_{(HF)}$	Comportement
$f \ll f_0$	$\approx r + \frac{1}{jC\omega}$	capacitif
$f = f_0$	$= r$	résistif
$f \gg f_0$	$\approx r + j\ell\omega$	inductif

- **Comportement aux fréquences basses** (Fig. 12.10). $1/C\omega \gg R \gg r \gg \ell\omega$

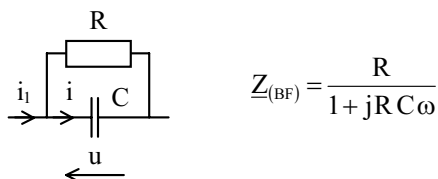


Fig. 12.10 Comportement aux fréquences basses

Facteur de qualité :

$$f_Q = \frac{1}{\tan(\delta)} = RC\omega$$

- **Comportement en continu** (Fig. 12.11). $1/C\omega \gg R \gg r \gg \ell\omega$

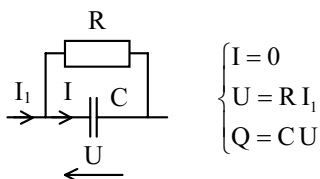


Fig. 12.11 Comportement en continu

Attention ! Peut-on dire que la capacité C se comporte comme un circuit ouvert en continu ? Non en général, car ce serait oublier que la charge Q est stockée dans C . Eventuellement oui si on ne s'intéresse qu'au courant continu ($I = 0$).

Chapitre 13

Bobines non-couplées

Une bobine est constituée d'un conducteur isolé enroulé autour d'un support, sans ou avec noyau magnétique. Sans noyau magnétique, l'inductance est de petite valeur et constante. Avec noyau magnétique, l'inductance est de plus grande valeur mais non-constante. Notations : φ désigne le flux par spire instantané ; Φ le flux par spire continu ; φ_{Tot} le flux total instantané ; et Φ_{Tot} le flux total continu. Voir aussi Chapitre 4 : Électromagnétisme – Ferromagnétisme.

13.1 MODÈLE DE BASE

13.1.1 Relations entre φ , i et u – Inductance

- **Symbole** (Fig. 13.1). Tension u , courant i et flux par spire φ : convention récepteur.

Remarque : Le point indique la sortie du flux magnétique compte tenu du sens d'enroulement du fil de la bobine et du sens positif (arbitraire) du courant.

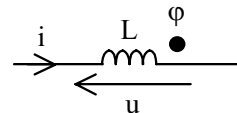


Fig. 13.1 Symbole

- **Description physique** (Fig. 13.2). La bobine parcourue par le courant i produit le flux d'auto-induction φ à travers chaque spire. Le sens d'enroulement du fil de la bobine et le sens du courant i (arbitrairement choisi) orientent algébriquement (règle de la main droite) le flux φ .

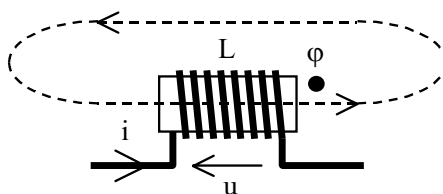


Fig. 13.2 Description physique

- **Flux total – Flux par spire** : Avec n spires, le flux total φ_{Tot} est égal à n fois le flux par spire φ .

$$\varphi_{\text{Tot}} = n\varphi$$

Remarque : On considère que le flux par spire est le même pour chaque spire.

- **Relation entre le flux total et l'intensité**

$$\varphi_{\text{Tot}} = Li \quad \text{Unités : } \text{Wb} = \text{HA}$$

Remarque : Le flux est un flux d'auto-induction magnétique, également dit flux propre. L'inductance L est appelée auto-inductance ou inductance propre.

- **Relation entre le flux total et la tension**

$$d\varphi_{\text{Tot}} = udt \quad \text{Unités : } \text{Wb} = \text{Vs}$$

- **Relation entre la tension et l'intensité**

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \text{Unités : } \text{V} = \text{H} \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

- **Perméabilité absolue du vide**

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

- **Perméabilité relative de quelques milieux**

(Fig. 13.3). La perméabilité relative d'un milieu ferromagnétique n'est pas constante. Les perméabilités relatives du fer et du nickel sont données pour ordre de grandeur dans une zone à peu près « linéaire ». Par contre, la perméabilité relative d'un milieu amagnétique (l'air par exemple) est constante et vaut $\mu_r \approx 1$.

Perméabilité	μ_r
air	≈ 1
fer	$\approx 2\,500$
nickel	$\approx 250\,000$

Fig. 13.3 Quelques perméabilités relatives

Attention ! Une bobine est linéaire si son inductance L est constante.

• **Perméabilité absolue**

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

$$\text{Unités : } \text{H/m} = 1 \text{ H/m}$$

• **Inductances de quelques configurations particulières**

Inductance	Formule	Commentaires
d'un solénoïde « long »	$L = \mu n^2 \frac{S}{\ell}$	n : nombre de spires S : section du solénoïde ℓ : longueur du solénoïde
d'une bobine torique	$L = \mu n^2 \frac{S}{2\pi r}$	n : nombre de spires S : section du tore r : rayon moyen du tore
Unités	$H = \text{H/m} \frac{\text{m}^2}{\text{m}}$	

Question : Une bobine d'inductance $L = 12 \text{ mH}$ est réalisée en bobinant un fil isolé sur un tore de longueur moyenne $\ell = 12 \text{ cm}$ et de section $S = 0,8 \text{ cm}^2$. La perméabilité relative du matériau magnétique, supposée constante, est égale à $\mu_r = 1500$. Cette bobine est traversée par un courant continu de $0,1 \text{ A}$. Calculer le nombre de spires, le flux total, le flux par spire et le champ d'induction magnétique le long de la ligne de champ moyenne.

Réponse : Nombre de spires :

$$n = \sqrt{\frac{L\ell}{\mu_r \mu_0 S}} = 98 \text{ spires}$$

Flux total :

$$\Phi_{\text{Tot}} = LI = 1,2 \text{ mWb}$$

Flux par spire :

$$\Phi = \frac{\Phi_{\text{Tot}}}{n} \approx 12,2 \text{ } \mu\text{Wb}$$

Champ d'induction magnétique le long de la ligne de champ moyenne :

$$B = \frac{\Phi}{S} \approx 0,153 \text{ T}$$

13.1.2 Associations de bobines non-couplées

• Mise en série (Fig. 13.4)

Pour 2 bobines :

$$u_{\text{Tot}} = u_1 + u_2 = L_{\text{Equ}} \frac{di}{dt}$$

avec

$$L_{\text{Equ}} = L_1 + L_2$$

Pour n bobines :

$$u_{\text{Tot}} = \sum_{k=1}^n u_k = L_{\text{Equ}} \frac{di}{dt} \quad \text{avec}$$

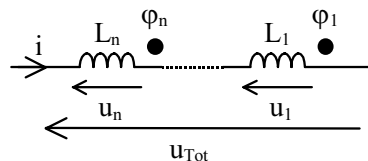


Fig. 13.4 Mise en série

$$L_{\text{Equ}} = \sum_{k=1}^n L_k$$

• Mise en parallèle (Fig. 13.5)

Pour 2 bobines :

$$u = L_{\text{Equ}} \frac{di_{\text{Tot}}}{dt} = L_{\text{Equ}} \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right)$$

avec

$$\frac{1}{L_{\text{Equ}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

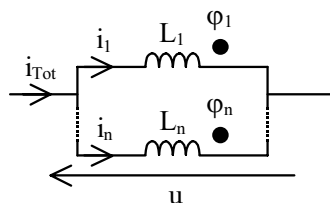


Fig. 13.5 Mise en parallèle

Pour n bobines :

$$u = L_{\text{Equ}} \frac{di_{\text{Tot}}}{dt} = L_{\text{Equ}} \sum_{k=1}^n \frac{di_k}{dt} \quad \text{avec}$$

$$\frac{1}{L_{\text{Equ}}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}$$

Remarques :

- L'inductance équivalente L_{Equ} est inférieure à chaque inductance mise en parallèle.
- Les variations de flux des bobines en parallèles sont, chacune, égales à la variation de flux de la bobine équivalente :

$$\forall k \in [1 \cdot n] \quad d\phi_{k \text{ Tot}} = d\phi_{\text{Equ Tot}}$$

- Les bobines en parallèles supportent moins de variations de courants que la bobine équivalente :

$$\forall k \in [1 \cdot n] \quad L_k di_k = L_{\text{Equ}} di_{\text{Tot}}$$

- En continu, les courants I_k (et donc les flux $\Phi_{k \text{ Tot}}$) dépendent en réalité des résistances séries r_k des bobines (voir § 13.2.4). Ceci peut être utilisé pour déterminer les courants moyens $I_{k \text{ Moy}}$ (et les flux moyens $\Phi_{k \text{ Moy}}$) dans le cas de signaux périodiques.

13.1.3 Énergie emmagasinée dans une bobine linéaire

$$w = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \varphi_{\text{Tot}} i = \frac{1}{2} \frac{\varphi_{\text{Tot}}^2}{L} \quad \text{Unités : } J = HA^2 = \text{Wb A} = \frac{\text{Wb}^2}{H}$$

Question : Le flux propre total dans une bobine d'inductance $L = 100 \text{ mH}$ est de 200 mWb . Calculer l'intensité du courant continu traversant la bobine et l'énergie emmagasinée.

$$\text{Réponse : } I = \frac{\Phi_{\text{Tot}}}{L} = 2 \text{ A} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \Phi_{\text{Tot}} I = 200 \text{ mJ}$$

13.1.4 Continuité et stabilité du courant et du flux

• **Continuité.** L'énergie étant continue, le courant et le flux d'induction magnétique dans une bobine ne peuvent pas subir de discontinuité.

$$\forall t, i(t^-) = i(t^+)$$

$$\forall t, \varphi_{\text{Tot}}(t^-) = \varphi_{\text{Tot}}(t^+)$$

• **Stabilité.** Le courant et le flux d'induction magnétique dans une bobine sont constants si, et seulement si, la tension à ses bornes est nulle.

$$\left. \begin{array}{l} i = \text{constante} \\ \varphi_{\text{Tot}} = \text{constante} \end{array} \right\} \Leftrightarrow u = 0$$

13.1.5 Régime sinusoïdal

Loi « d'Ohm »	$\underline{U} = \underline{Z}_L \underline{I}$
Impédance complexe	$\underline{Z}_L = jL\omega$
Module	$Z_L = \underline{Z}_L = \frac{ \underline{U} }{ \underline{I} } = \frac{U_{\text{Max}}}{I_{\text{Max}}} = \frac{U_{\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} = L\omega$
Réactance	$X_L = L\omega$
Déphasage de u par rapport à i	$\varphi_L = \text{Arg}(\underline{Z}_L) = \theta_U - \theta_I = \frac{+\pi}{2}$
Puissance active ou moyenne	$P = 0$
Puissance réactive	$Q = L\omega I_{\text{Eff}}^2 = \frac{U_{\text{Eff}}^2}{L\omega} = X_L I_{\text{Eff}}^2$

Remarque : La tension est en avance de $\pi/2$ sur le courant.

$$i = I_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_I) \quad \text{avec} \quad I_{\text{Max}} = \sqrt{2} I_{\text{Eff}}$$

$$\Rightarrow u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_U) = L\omega I_{\text{Max}} \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$

13.2 LIMITES ET IMPERFECTIONS

13.2.1 Courant maximal – Courant nominal

Les constructeurs indiquent soit le courant maximal (usage général, filtrage, HF), soit le courant continu superposé (stockage d'énergie, filtrage), soit le courant nominal (antiparasitage), selon le type d'application.

13.2.2 Coefficient de température

• **Variation linéaire.** En supposant la variation linéaire, l'inductance L à la température T s'exprime par

$$L = L_N [1 + TC1 (T - T_N)]$$

où L_N est l'inductance mesurée à la température nominale T_N , et $TC1$ le coefficient linéaire de température (constant).

$$TC1 = \frac{1}{L_N} \frac{dL}{dT} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{H} \frac{H}{^\circ\text{C}}$$

• **Variation quadratique (modèle Spice).** En supposant la variation quadratique, l'inductance L à la température T s'exprime par

$$L = L_N [1 + TC1 (T - T_N) + TC2 (T - T_N)^2]$$

où L_N est l'inductance mesurée à la température nominale T_N , $TC1$ le coefficient linéaire de température, et $TC2$ le coefficient quadratique de température.

$$TC1 = \frac{1}{L_N} \frac{dL}{dT} \Big|_{T=T_N} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-1} = \frac{1}{H} \frac{H}{^\circ\text{C}}$$

$$TC2 = \frac{1}{2L_N} \frac{d^2L}{dT^2} \quad \text{Unités : } ^\circ\text{C}^{-2} = \frac{1}{H} \frac{H}{^\circ\text{C}^2}$$

13.2.3 Coefficient de courant

• **Variation linéaire.** En supposant la variation linéaire, l'inductance L à l'intensité I s'exprime par

$$L = L_0 [1 + IC1 (I - I_0)]$$

où L_0 est l'inductance mesurée à l'intensité I_0 (généralement $I_0 = 0$ A), et $IC1$ le coefficient linéaire de courant (constant).

$$IC1 = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dI} \quad \text{Unités : } A^{-1} = \frac{1}{H} \frac{H}{A}$$

• **Variation quadratique (modèle Spice).** En supposant la variation quadratique, l'inductance L à l'intensité I s'exprime par

$$L = L_0 [1 + IC1 I + IC2 I^2]$$

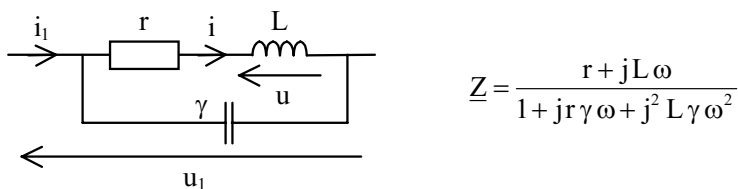
où L_0 est l'inductance mesurée à $I = 0$ A, $IC1$ le coefficient linéaire de courant, et $IC2$ le coefficient quadratique de courant.

$$IC1 = \left. \frac{1}{L_0} \frac{dL}{dI} \right|_{I=0 \text{ A}} \quad \text{Unités : } A^{-1} = \frac{1}{H} \frac{H}{A}$$

$$IC2 = \frac{1}{2L_0} \frac{d^2L}{dI^2} \quad \text{Unités : } A^{-2} = \frac{1}{H} \frac{H}{A^2}$$

13.2.4 Comportement en fréquence d'une bobine sans fuite magnétique et sans perte fer

• **Schéma équivalent** (Fig. 13.6). r est la résistance série du fil constituant le bobinage et les connexions, et γ la capacité répartie équivalente à l'ensemble des capacités entre spires et de la capacité entre connexions. C'est le modèle linéaire typique d'une bobine « à air » (sans noyau magnétique).



$$\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2L\gamma\omega^2}$$

Fig. 13.6 Schéma équivalent sans fuite et sans perte – Impédance complexe

• **Comportement aux fréquences élevées** (voir Fig. 13.6)

$$\underline{Z}_{(HF)} = \underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2L\gamma\omega^2}$$

Pulsation de résonance :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\gamma}}$$

Question : Les éléments du modèle d'une bobine sont $L = 1 \text{ mH}$, $r = 0,18 \Omega$ et $\gamma = 1 \text{ fF}$. Etudier son comportement.

Réponse : L'expression de $\underline{Z}_{(\text{HF})}$ peut s'écrire :

$$\underline{Z}_{(\text{HF})} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2L\gamma\omega^2} = \frac{r \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2mj \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Fréquence de coupure basse :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{r}{2\pi L} \quad \text{soit} \quad f_1 \approx 28,6 \text{ Hz}$$

Fréquence de résonnance :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\gamma}} \quad \text{soit} \quad f_0 \approx 151,7 \text{ MHz}$$

Amortissement :

$$m = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{L}} \quad \text{soit} \quad m \approx 9 \cdot 10^{-8}$$

- **Comportement aux fréquences basses** (Fig. 13.7) : $1/\gamma\omega \gg r + L\omega$

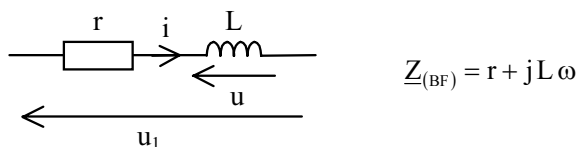


Fig. 13.7 Comportement aux fréquences basses

Facteur de qualité :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{|\text{Im} [\underline{Z}_{(\text{BF})}]| I_{\text{Eff}}^2}{\text{Re} [\underline{Z}_{(\text{BF})}] I_{\text{Eff}}^2} = \frac{L\omega}{r}$$

- **Comportement en continu** (Fig. 13.8) : $1/\gamma\omega \gg r \gg L\omega$

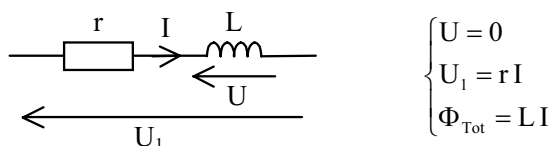


Fig. 13.8 Comportement en continu

Attention ! Peut-on dire que l'inductance L se comporte comme un court-circuit en continu ? Non en général, car ce serait oublier que le flux Φ_{Tot} est emmagasiné dans L . Éventuellement oui si on ne s'intéresse qu'à la tension continue ($U = 0$).

13.2.5 Pertes fer – Fuites magnétiques

• **Schéma équivalent** (Fig. 13.9). ℓ est l'inductance série due au flux de fuites magnétiques, et R la résistance parallèle représentant les pertes magnétiques (courants de Foucault et hystérésis), dites pertes fer, du noyau magnétique. C'est le modèle linéaire typique d'une bobine à noyau magnétique.

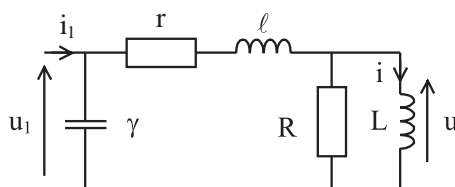
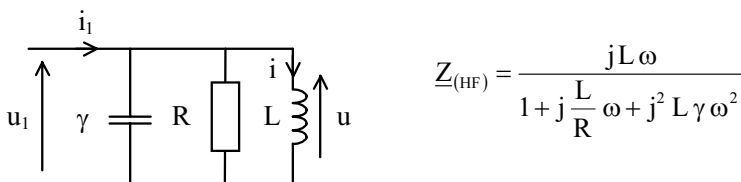


Fig. 13.9 Schéma équivalent avec fuites et pertes

• **Comportement aux fréquences élevées** (Fig. 13.10). Cas fréquent où :

$$|r + j\ell\omega| \ll |R / jL\omega| \quad (// \text{ signifie en parallèle})$$



$$\underline{Z}_{(\text{HF})} = \frac{jL\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega + j^2 L\gamma\omega^2}$$

Fig. 13.10 Comportement aux fréquences élevées

Pulsation de résonance :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\gamma}}$$

• **Comportement aux fréquences basses**

- Cas général (voir Fig. 13.9) en enlevant la capacité répartie γ
- Cas fréquent où $L\omega \ll R$ et $\ell\omega \ll r$ (voir Fig. 13.7)
- **Comportement en continu.** Cas fréquent où $\ell \ll L$ (voir Fig. 13.8)

13.2.6 Effets non-linéaires dus à un noyau magnétique

La présence d'un milieu ferromagnétique permet d'obtenir des inductances plus grandes, mais engendre des non-linéarités : le flux dans le circuit magnétique n'est pas une fonction linéaire du courant (L n'est pas constante), il se sature à partir d'une

certaine valeur de courant, et il diffère selon que le courant croît ou décroît (L aussi). Pour mener une étude simplifiée, on considère souvent que le circuit magnétique possède une caractéristique $\varphi = f(i)$ linéaire par morceaux fixant deux régimes de fonctionnement (Fig. 13.11) :

- le régime de flux variable (1) tel que $L = \frac{n\Phi_{\text{Sat}}}{I_{\text{Sat}}} = \text{constante} \Rightarrow n\varphi = Li$
- le régime de flux constant (2) tel que $\varphi = \Phi_{\text{Sat}}$ ou $\varphi = -\Phi_{\text{Sat}}$

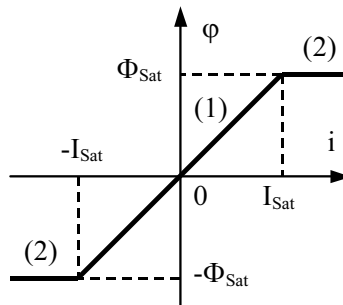


Fig. 13.11 $\varphi = f(i)$

Chapitre 14

Bobines couplées

Deux bobines sont couplées si le flux dans l'une et le flux dans l'autre dépendent des courants circulant dans les deux bobines. Notations : φ désigne le flux par spire instantané ; Φ le flux par spire continu ; φ_{Tot} le flux total instantané ; et Φ_{Tot} le flux total continu. Voir aussi Chapitre 4 : Électromagnétisme – Ferromagnétisme.

14.1 MODÈLE DE BASE

14.1.1 Couplage – Mutuelle inductance

- **Symbole** (Fig. 14.1). Tensions et courants : convention quadripôle.

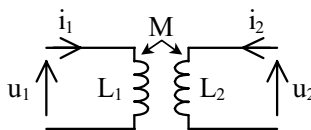


Fig. 14.1 Symbole de deux bobines couplées b_1 et b_2

- **Description physique.** Soient les deux bobines couplées b_1 et b_2 . La bobine b_1 parcourue par le courant i_1 produit le flux d'auto-induction φ_{11} à travers chaque spire de b_1 et le flux d'induction mutuelle φ_{21} à travers chaque spire de b_2 . De même, la bobine b_2 parcourue par le courant i_2 produit le flux d'auto-induction φ_{22} à travers chaque spire de b_2 et le flux d'induction mutuelle φ_{12} à travers chaque spire de b_1 . Deux cas sont *a priori* possibles : Les flux (φ_{11} et φ_{12} d'une part, φ_{22} et φ_{21} d'autre

part) s'ajoutent (Fig. 14.2) ou se retranchent (Fig. 14.3) selon le sens positif des courants choisi arbitrairement, et le sens d'enroulement des fils des bobines.

Remarque : Le point indique la sortie du flux magnétique compte tenu du sens d'enroulement du fil de la bobine et du sens positif (arbitraire) du courant.

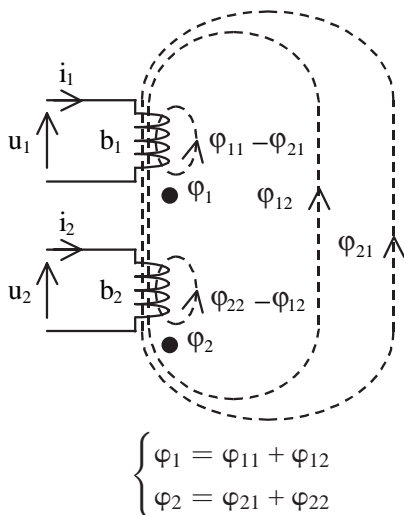


Fig. 14.2 Flux additifs

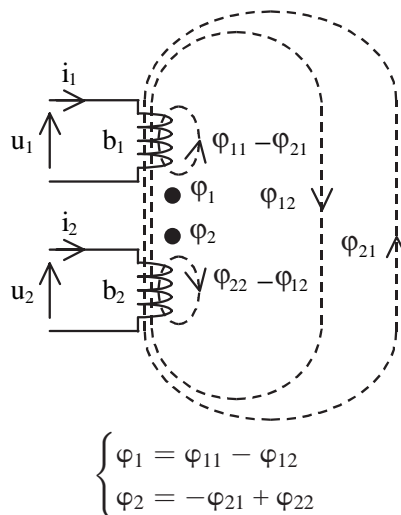


Fig. 14.3 Flux soustractifs

• **Généralisation.** On résume les deux cas précédents par :

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{11} + a\varphi_{12} \\ \varphi_2 = a\varphi_{21} + \varphi_{22} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = +1 & \Leftrightarrow \text{flux additifs} \\ a = -1 & \Leftrightarrow \text{flux soustractifs} \end{cases}$$

• **Flux totaux – Flux par spire.** Soit n_1 (resp. n_2) le nombre de spires de b_1 (resp. b_2). Le flux total $\varphi_{1 \text{ Tot}}$ (resp. $\varphi_{2 \text{ Tot}}$) est égal à n_1 (resp. n_2) fois le flux par spire φ_1 (resp. φ_2). *Idem* pour les flux $\varphi_{11 \text{ Tot}}$, $\varphi_{12 \text{ Tot}}$, $\varphi_{21 \text{ Tot}}$ et $\varphi_{22 \text{ Tot}}$. D'où :

$$\begin{cases} \varphi_{1 \text{ Tot}} = \varphi_{11 \text{ Tot}} + a\varphi_{12 \text{ Tot}} \\ \varphi_{2 \text{ Tot}} = a\varphi_{21 \text{ Tot}} + \varphi_{22 \text{ Tot}} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} n_1\varphi_1 = n_1\varphi_{11} + an_1\varphi_{12} \\ n_2\varphi_2 = an_2\varphi_{21} + n_2\varphi_{22} \end{cases}$$

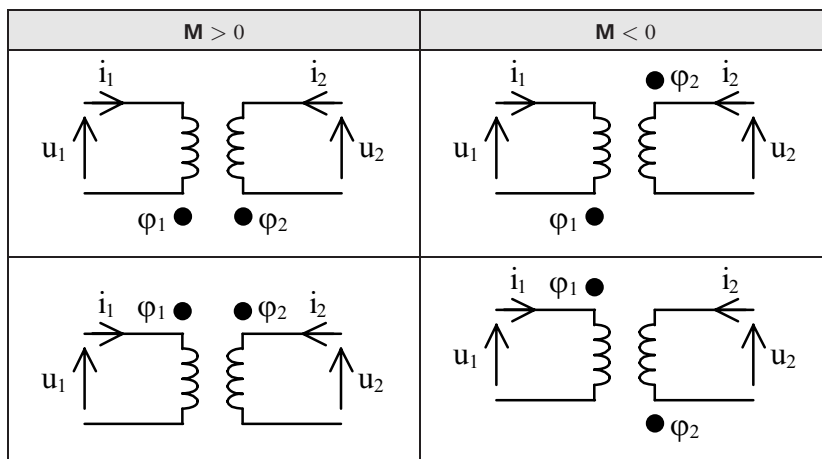
Remarque : On considère que le flux par spire est le même pour chaque spire.

• **Relation entre les flux totaux et les intensités.** L_1 (resp. L_2) est l'inductance propre ou auto-inductance de b_1 (resp. b_2). L_1 et L_2 sont positifs. M est l'inductance mutuelle. Si les flux sont additifs M est positif, et si les flux sont soustractifs M est négatif. Autrement dit : $\text{Signe}(M) = a$

$$\begin{cases} \varphi_{1 \text{ Tot}} = \varphi_{11 \text{ Tot}} + a\varphi_{12 \text{ Tot}} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \varphi_{2 \text{ Tot}} = a\varphi_{21 \text{ Tot}} + \varphi_{22 \text{ Tot}} = M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$\text{Unités : } \text{Wb} = \text{HA}$$

- **Signe de M et symbole.** M est positif si les courants orientés arbitrairement sortent (ou entrent) tous les deux par les points indiquant les sorties des flux magnétiques φ_1 et φ_2 (Fig. 14.4).

Fig. 14.4 Signe de M

- **Relation entre les flux totaux et les tensions**

$$\begin{cases} d\varphi_{1 \text{ Tot}} = u_1 dt \\ d\varphi_{2 \text{ Tot}} = u_2 dt \end{cases}$$

Unités : $\text{Wb} = \text{Vs}$

- **Relation entre les tensions et les intensités** (voir aussi Fig. 14.5)

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Unités : $\text{V} = \text{H} \frac{\text{A}}{\text{s}}$

- **Schéma équivalent n°1** (Fig. 14.5)

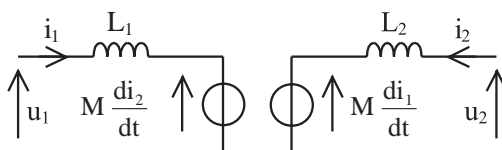


Fig. 14.5 Schéma équivalent n°1

- **Schéma équivalent n°2** (Fig. 14.6). Ce schéma équivalent ne rend pas compte de l'isolation galvanique. $L_1 - M$ et $L_2 - M$ n'ont pas de signification physique.

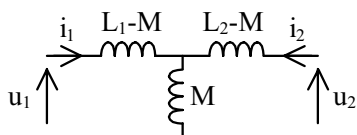


Fig. 14.6 Schéma équivalent n°2

- **Coefficient de couplage.** Le couplage est dit *lâche* si $|k| < 0,5$; *serré* si $|k| > 0,5$; *très serré* si $|k|$ est voisin de 1 et *maximal* si $|k| = 1$.

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (-1 \leq k \leq 1)$$

- **Coefficient de dispersion de Blondel**

$$\sigma = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} = 1 - k^2$$

14.1.2 Associations de 2 bobines couplées

- **Mise en série** (Fig. 14.7)

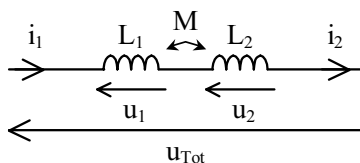


Fig. 14.7 Mise en série

$$u_{\text{Tot}} = u_1 + u_2 = L_{\text{Equ}} \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad L_{\text{Equ}} = L_1 + L_2 + 2M$$

- **Mise en parallèle** (Fig. 14.8)

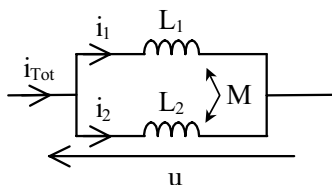


Fig. 14.8 Mise en parallèle

$$u = L_{\text{Equ}} \frac{di_{\text{Tot}}}{dt} = L_{\text{Equ}} \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \right) \quad \text{avec} \quad L_{\text{Equ}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

14.1.3 Énergie emmagasinée dans deux bobines couplées

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \varphi_{1 \text{ Tot}} i_1 + \frac{1}{2} \varphi_{2 \text{ Tot}} i_2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \end{aligned} \quad \text{Unités : } J = \text{Wb A} = \text{HA}^2$$

14.1.4 Flux de fuites – Flux magnétisants

• **Flux de fuites - Flux magnétisants.** Il apparaît naturel d'introduire les notions de flux de fuites et de flux magnétisants pour un couplage serré (transformateur par exemple). D'après les (Fig. 14.2) et (Fig. 14.3) on a :

$$\begin{cases} \varphi_{f1} = \varphi_{11} - \varphi_{21} \\ \varphi_{f2} = \varphi_{22} - \varphi_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{f1} + \varphi \\ \varphi_2 = \varphi_{f2} + a\varphi \end{cases} \quad \text{avec} \quad \varphi = \varphi_{21} + a\varphi_{12}$$

φ_{f1} (resp. φ_{f2}) est le flux de fuites à travers chaque spire de la bobine b_1 (resp. b_2). φ_{21} (resp. φ_{12}) est le flux magnétisant produit par i_1 (resp. i_2) à travers chaque spire de b_2 (resp. b_1) : C'est le flux d'induction mutuelle produit par i_1 (resp. i_2) à travers chaque spire de b_2 (resp. b_1). φ est le flux magnétisant résultant à travers une section du circuit magnétique.

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} n_1 \varphi_{11} = n_1 \varphi_{f1} + n_1 \varphi_{21} \\ n_2 \varphi_{22} = n_2 \varphi_{f2} + n_2 \varphi_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{11 \text{ Tot}} = \varphi_{f1 \text{ Tot}} + \frac{n_1}{n_2} \varphi_{21 \text{ Tot}} \\ \varphi_{22 \text{ Tot}} = \varphi_{f2 \text{ Tot}} + \frac{n_2}{n_1} \varphi_{12 \text{ Tot}} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \varphi_{11 \text{ Tot}} = \ell_1 i_1 + \Lambda_1 i_1 \\ \varphi_{22 \text{ Tot}} = \ell_2 i_2 + \Lambda_2 i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \ell_1 + \Lambda_1 \\ L_2 = \ell_2 + \Lambda_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Lambda_1 = \frac{n_1}{n_2} \frac{\varphi_{21 \text{ Tot}}}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} aM \\ \Lambda_2 = \frac{n_2}{n_1} \frac{\varphi_{12 \text{ Tot}}}{i_2} = \frac{n_2}{n_1} aM \end{cases}$$

ℓ_1 (resp. ℓ_2) est l'inductance de fuites de b_1 (resp. b_2) : ℓ_1 et ℓ_2 sont positifs. Λ_1 (resp. Λ_2) est l'inductance magnétisante de b_1 (resp. b_2) : Λ_1 et Λ_2 sont positifs car $\text{Signe}(M) = a$.

D'où

$$M^2 = k^2 L_1 L_2 = \Lambda_1 \Lambda_2 = (L_1 - \ell_1) (L_2 - \ell_2)$$

• **Schéma équivalent n°3** (Fig. 14.9). Tout se passe finalement comme si les deux bobines couplées étaient remplacées par deux autres bobines en couplage maximal, chacune d'elles étant en série avec une bobine non-couplée.

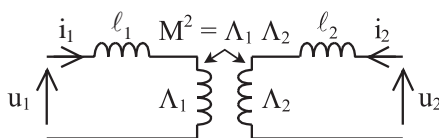


Fig. 14.9 Schéma équivalent n°3

$$\begin{cases} u_1 = (\ell_1 + \Lambda_1) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + (\ell_2 + \Lambda_2) \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad \text{avec} \quad M^2 = \Lambda_1 \Lambda_2$$

• **Schéma équivalent n°4** (Fig. 14.10). Le schéma équivalent précédent peut se transformer de la façon suivante où « m » est le *rapport de transformation*.

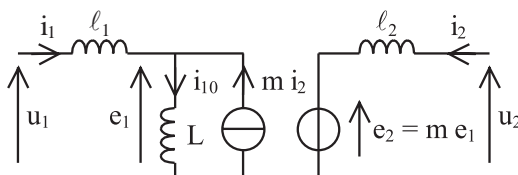


Fig. 14.10 Schéma équivalent n°4

$$\begin{cases} u_1 = \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1 \\ u_2 = e_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e_1 = L \frac{d}{dt} (i_1 + m i_2) \\ e_2 = m e_1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} u_1 = (\ell_1 + L) \frac{di_1}{dt} + mL \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = mL \frac{di_1}{dt} + (\ell_2 + m^2 L) \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

En identifiant les équations du schéma équivalent n°3 (Fig. 14.9) et du schéma équivalent n°4 (Fig. 14.10), on obtient :

$$\Lambda_1 = L \quad (L \text{ est positif}) \quad \Lambda_2 = m^2 L \quad M = mL$$

D'où

$$m = \frac{M}{\Lambda_1} = \frac{\Lambda_2}{M} = a \sqrt{\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}} = a \frac{n_2}{n_1} \quad \text{et} \quad \text{signe}(m) = \text{signe}(M) = a$$

Le flux total dans L est :

$$\varphi_{\text{Tot}} = L i_{10} = \frac{n_1}{n_2} \varphi_{21 \text{ Tot}} + a \varphi_{12 \text{ Tot}} \quad \text{avec} \quad i_{10} = i_1 + m i_2$$

Le flux par spire φ (qui est le flux magnétisant à travers une section du circuit magnétique) est :

$$\varphi = \varphi_{21} + a \varphi_{12}$$

Remarque : Tous les schémas équivalents (n°1 à n°4) donnés précédemment sont valables que les flux soient additifs (M et m positifs) ou soustractifs (M et m négatifs). D'autres schémas équivalents peuvent être obtenus en ramenant toutes les inductances du côté de u_1 ou bien toutes les inductances du côté de u_2 (voir Chapitre 15 : Transformateurs).

14.1.5 Régime sinusoïdal

• **Relation entre les tensions et les intensités.** Selon le schéma équivalent utilisé, on peut donner d'autres équations.

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega \underline{\Phi}_{1 \text{ Tot}} = jL_1 \omega \underline{I}_1 + jM \omega \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = j\omega \underline{\Phi}_{2 \text{ Tot}} = jM \omega \underline{I}_1 + jL_2 \omega \underline{I}_2 \end{cases}$$

• **Puissances actives ou moyennes.** θ_{11} (resp. θ_{12}) est la phase de \underline{I}_1 (resp. \underline{I}_2)

$$P_1 = M \omega I_{1 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \sin(\theta_{11} - \theta_{12}) \quad P_2 = M \omega I_{1 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \sin(\theta_{12} - \theta_{11})$$

D'où $P_1 + P_2 = 0$

• **Puissances réactives**

$$Q_1 = L_1 \omega I_{1 \text{ Eff}}^2 + M \omega I_{1 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\theta_{11} - \theta_{12})$$

$$Q_2 = L_2 \omega I_{2 \text{ Eff}}^2 + M \omega I_{1 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\theta_{11} - \theta_{12})$$

$$\text{D'où} \quad Q_1 + Q_2 = L_1 \omega I_{1 \text{ Eff}}^2 + L_2 \omega I_{2 \text{ Eff}}^2 + 2M \omega I_{1 \text{ Eff}} I_{2 \text{ Eff}} \cos(\theta_{11} - \theta_{12})$$

- **Schéma équivalent vu d'un seul côté.** Soit le schéma (Fig. 14.11).

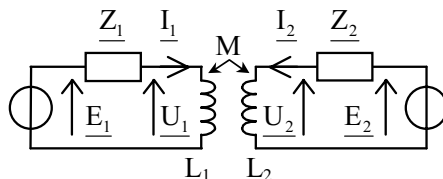


Fig. 14.11 Générateurs au primaire et au secondaire

Le schéma équivalent ramené au secondaire est donné (Fig. 14.12).

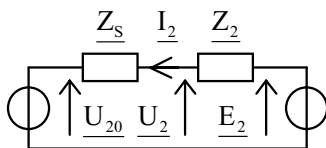


Fig. 14.12 Schéma équivalent ramené au secondaire

$$\underline{U}_{20} = \frac{M}{L_1} \frac{jL_1\omega}{jL_1\omega + \underline{Z}_1} \underline{E}_1 \quad \underline{Z}_S = jL_2\omega + \frac{M^2\omega^2}{jL_1\omega + \underline{Z}_1}$$

14.2 LIMITES ET IMPERFECTIONS

14.2.1 Résistances des fils – Capacités réparties des bobines – Capacité de couplage entre bobines

C'est le schéma équivalent linéaire de deux bobines couplées, bobinées de telle façon qu'apparaît une capacité de couplage répartie γ_0 entre les deux fils des bobines (Fig. 14.13). r_1 (resp. r_2) est la résistance du fil conducteur de b_1 (resp. b_2) générant des « pertes cuivre » par effet Joule. γ_1 (resp. γ_2) est la capacité répartie équivalente à l'ensemble des capacités entre spires de b_1 (resp. b_2) et des capacités entre connexions.

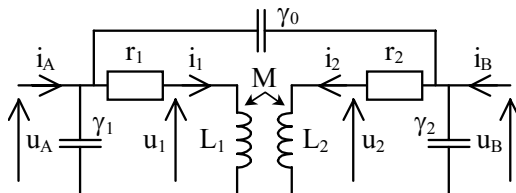


Fig. 14.13 Schéma équivalent avec capacité de couplage entre les bobines

Remarque : Si un écran est présent entre les bobines, la capacité γ_0 est remplacée par deux capacités γ_{01} et γ_{02} (Fig. 14.14).

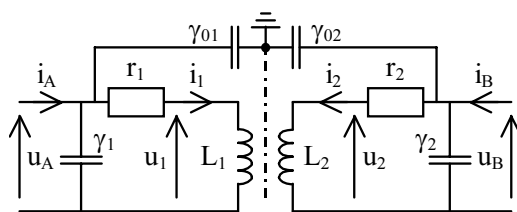


Fig. 14.14 Schéma équivalent avec écran

14.2.2 « Pertes fer » – Non-linéarités

Voir aussi Chapitre 15 : Transformateurs.

- **Pertes fer.** C'est le schéma donné (Fig. 14.10) dans lequel on ajoute une résistance R , représentant les pertes magnétiques (courants de Foucault et hystérésis) du noyau, en parallèle sur l'inductance L . Ce modèle est linéaire.

- **Non-linéarités.** La présence d'un matériau ferromagnétique engendre des non-linéarités : le flux dans le circuit magnétique n'est pas une fonction linéaire du courant ($L = \Lambda_1$ et L_1 ne sont pas constantes), il se sature à partir d'une certaine valeur de courant, et il diffère selon que le courant croît ou décroît ($L = \Lambda_1$ et L_1 aussi).

Chapitre 15

Transformateurs

15.1 INTRODUCTION

Un transformateur est constitué de deux bobines couplées par un circuit magnétique : le couplage est très serré. Voir aussi Chapitre 14 : Bobines couplées, et Chapitre 38 : Transformateurs en régime sinusoïdal à fréquence constante.

- **Symboles** (Fig. 15.1). On adopte la convention quadripôle dans ce chapitre.



Fig. 15.1 Symboles

- **Convention en électronique.** En électronique, les tensions et courants sont souvent fléchés selon la convention récepteur pour le primaire et le secondaire (convention quadripôle) en concordance avec celle adoptée pour les bobines couplées. Les flux peuvent être additifs (Fig. 15.2) ou soustractifs (Fig. 15.3).

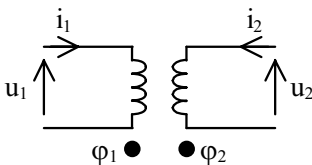


Fig. 15.2 Flux additifs ($m > 0$)

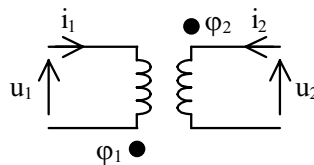


Fig. 15.3 Flux soustractifs ($m < 0$)

• **Convention en électrotechnique.** En électrotechnique, on adopte généralement la convention récepteur pour le primaire et la convention générateur pour le secondaire, le transformateur étant utilisé pour le transport et la distribution de l'énergie électrique. Les flux sont considérés additifs (Fig. 15.4).

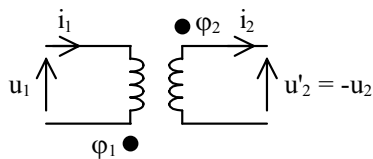


Fig. 15.4 Flux additifs ($m > 0$) – Secondaire générateur

15.2 TRANSFORMATEUR PARFAIT (T.P.)

15.2.1 Hypothèses – Schéma équivalent

• **Hypothèses**

- 1) Pas de « perte fer » (pertes par hystérésis et courants de Foucault).
- 2) Perméabilité magnétique du circuit magnétique infinie.
- 3) Pas de fuite magnétique.
- 4) Pas de « perte cuivre » par effet Joule dans les enroulements.

Conséquemment, le courant primaire est nul si le courant secondaire est nul (hypothèses 1) et 2)), et la tension secondaire ne dépend pas du courant secondaire (hypothèses 3) et 4)).

• **Schéma équivalent** (Fig. 15.5). m est le rapport de transformation. Si les flux sont additifs m est positif (voir Fig. 15.2), et si les flux sont soustractifs m est négatif (voir Fig. 15.3). n_1 (resp. n_2) est le nombre de spires au primaire (resp. secondaire).

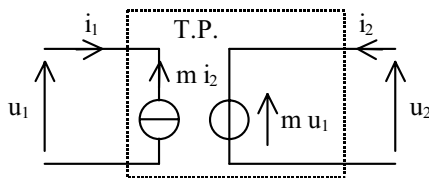


Fig. 15.5 Schéma équivalent du T.P.

$$m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-i_1}{i_2} \quad \text{et} \quad |m| = \frac{n_2}{n_1}$$

15.2.2 Régime sinusoïdal

$$m = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{-\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$$

• **Impédance parallèle ramenée au primaire ou au secondaire.** Les deux quadripôles ci-après (Fig. 15.6 et Fig. 15.7) sont équivalents.

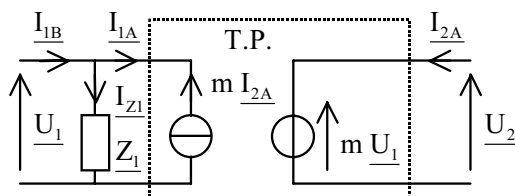


Fig. 15.6 Impédance parallèle au primaire

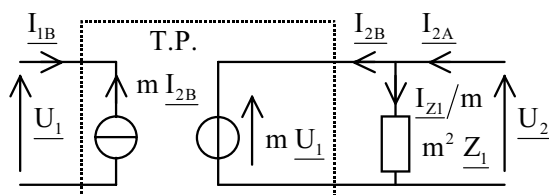


Fig. 15.7 Impédance parallèle au secondaire

- **Impédance série ramenée au primaire ou au secondaire.** Les deux quadripôles ci-après (Fig. 15.8 et Fig. 15.9) sont équivalents.

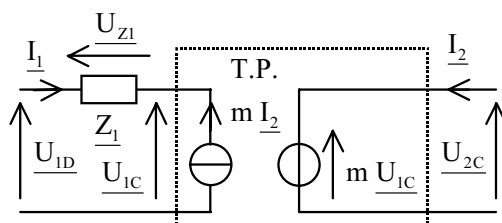


Fig. 15.8 Impédance série au primaire

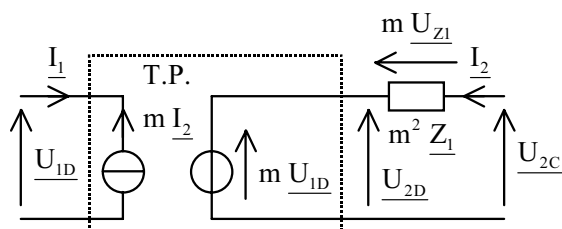


Fig. 15.9 Impédance série au secondaire

Méthode

On multiplie l'impédance par m^2 pour l'amener du primaire au secondaire d'un T.P. *A contrario*, on divise l'impédance par m^2 pour l'amener du secondaire au primaire (Fig. 15.10).

Primaire		Secondaire
\underline{Z}_1	→	$m^2 \underline{Z}_1$
R_1	→	$m^2 R_1$
L_1	→	$m^2 L_1$
C_1	→	C_1 / m^2
\underline{Z}_2 / m^2	←	\underline{Z}_2
R_2 / m^2	←	R_2
L_2 / m^2	←	L_2
$m^2 C_2$	←	C_2

Fig. 15.10 Impédances ramenées au primaire (←) et au secondaire (→)

Remarque : Les résultats permettant de ramener une résistance, une capacité et une inductance restent valables en régime instantané.

• **Adaptation en puissance.** On dit qu'un générateur et une charge sont adaptés en puissance lorsque le transfert de puissance est maximal du générateur vers la charge. Dans le cas (Fig. 15.11) d'un générateur d'impédance interne \underline{Z}_G débitant dans une impédance de charge \underline{Z}_{CH} , la condition d'adaptation en puissance est $\underline{Z}_{CH} = \overline{\underline{Z}_G}$ où $\overline{\underline{Z}_G}$ est le complexe conjugué de \underline{Z}_G .

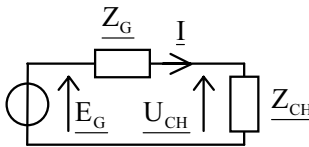


Fig. 15.11 Adaptation en puissance si $\underline{Z}_{CH} = \overline{\underline{Z}_G}$

Avec un T.P. le schéma (Fig. 15.13) est équivalent au schéma (Fig. 15.12).

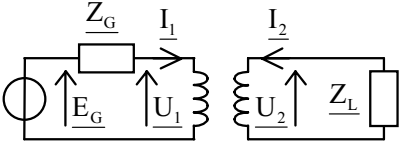


Fig. 15.12 \underline{Z}_L au secondaire

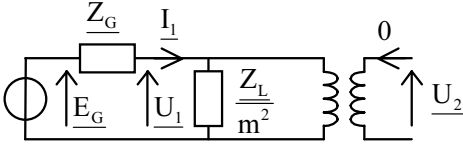


Fig. 15.13 \underline{Z}_L ramenée au primaire

En conséquence, l'adaptation en puissance est réalisée pour

$$\frac{\underline{Z}_L}{m^2} = \overline{\underline{Z}_G} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{R_L}{m^2} = R_G \\ \frac{X_L}{m^2} = -X_G \end{cases}$$

Remarque : Le transformateur ne permet pas d'adapter indépendamment les parties réelles et les parties imaginaires des impédances, et il ne permet pas de modifier le signe entre les parties imaginaires. Le transformateur permet facilement d'adapter en puissance les impédances lorsqu'elles sont résistives ou se comportent comme des résistances.

15.3 TRANSFORMATEUR SANS FUITE NI PERTE (T.S.F.P.)

• Hypothèses

- 1) Pas de « perte fer ».
- 2) Pas de fuite magnétique.
- 3) Pas de « perte cuivre » par effet Joule dans les enroulements.

• Schéma équivalent (Fig. 15.14).

L est l'inductance propre du primaire : L est positif. i_{10} est le courant magnétisant : c'est le courant i_1 à $i_2 = 0$.

$$\begin{cases} u_1 = L \frac{di_{10}}{dt} \\ u_2 = m u_1 \end{cases}$$

$$i_{10} = i_1 + m i_2$$

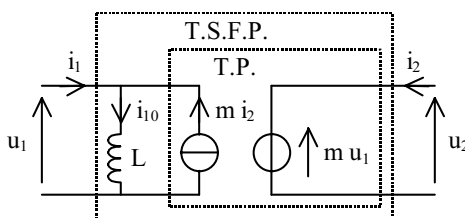


Fig. 15.14 Schéma équivalent du T.S.F.P.

Remarque : C'est le schéma équivalent de deux bobines en couplage maximal ($k = \pm 1$), sans « perte fer » et sans « perte cuivre ». On a donc (voir Chapitre 14 : Bobines couplées) : $L = L_1 = \Lambda_1$, $L_2 = \Lambda_2 = m^2 L$, $M = m L$

• Deuxième schéma équivalent

(Fig. 15.15). Il est obtenu en ramenant l'inductance L au secondaire. $m^2 L$ est l'inductance propre du secondaire. i_{20} est le courant magnétisant : $i_{20} = i_{10}/m$

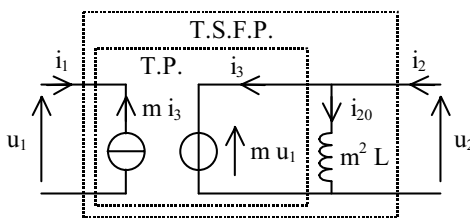


Fig. 15.15 Deuxième schéma équivalent du T.S.F.P.

15.4 TRANSFORMATEUR AVEC FUITES ET « PERTES CUIVRE »

• Hypothèse : Pas de « perte fer ».

• **Schéma équivalent** (Fig. 15.16). ℓ_1 (resp. ℓ_2) est l'inductance de fuites magnétiques du primaire (resp. secondaire) : ℓ_1 et ℓ_2 sont positifs. r_1 (resp. r_2) est la résistance de l'enroulement primaire (resp. secondaire) générant des « pertes cuivre » par effet Joule.

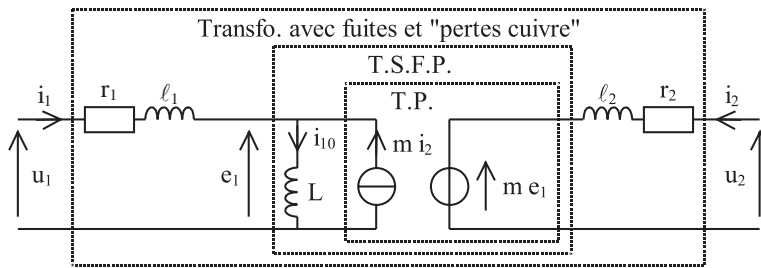


Fig. 15.16 Schéma équivalent du transformateur avec fuites et « pertes cuivre »

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1 \\ u_2 = m e_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad i_{10} = i_1 + m i_2 \quad e_1 = L \frac{di_{10}}{dt}$$

Remarque : C'est le schéma équivalent de deux bobines en couplage non-maximal ($-1 < k < +1$) avec « pertes cuivres » et sans « perte fer ». On a donc (voir Chapitre 14 : Bobines couplées et Fig. 15.17) :

$$L_1 - \ell_1 = \Lambda_1 = L, \quad L_2 - \ell_2 = \Lambda_2 = m^2 L, \quad M = mL$$

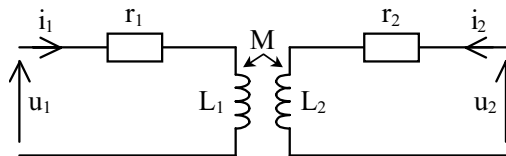


Fig. 15.17 Bobines couplées avec « pertes cuivre »

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Méthode

La simulation SPICE permet de rendre compte simplement du fonctionnement d'un transformateur dans sa zone linéaire à partir du modèle linéaire de bobines couplées (Fig. 15.17). Ce modèle correspond à celui d'un transformateur avec fuites magnétiques et « pertes cuivre » (voir Fig. 15.16). S'ils ne sont pas fournis par le fabricant, les paramètres (résistances, inductances propres et mutuelle inductance) peuvent être déterminés par une série de trois mesures : en continu, secondaire à vide, secondaire en court-circuit.

- Question :** 1) Essai en continu. On mesure U_1 , I_1 , U_2 et I_2 . Exprimer r_1 et r_2 .
- 2) Essai à vide ($i_2 = 0$). On alimente le primaire sous tension efficace nominale $U_{1 \text{ Eff Nom}}$. On mesure le courant primaire efficace à vide $I_{10 \text{ Eff}}$ et la tension secondaire efficace à vide $U_{20 \text{ Eff}}$. Exprimer L_1 et M .
- 3) Essai en court-circuit ($u_2 = 0$). On alimente le primaire sous tension efficace réduite de manière à mesurer le courant secondaire efficace nominale $I_{2 \text{ Eff}}$. On mesure alors le courant primaire efficace $I_{1 \text{ Eff}}$. Exprimer L_2 .
- 4) Exprimer le coefficient de couplage du transformateur.
- 5) En admettant que les fuites magnétiques sont faibles (cas général des transformateurs), exprimer le rapport de transformation du transformateur.

Réponse : En régime sinusoïdal, on a

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (r_1 + jL_1\omega) \underline{I}_1 + jM\omega \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = jM\omega \underline{I}_1 + (r_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 \end{cases}$$

- 1) Essai en continu ($\omega = 0$)

$$r_1 = \frac{U_1}{I_1} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{U_2}{I_2}$$

- 2) Essai à vide ($i_2 = 0$)

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (r_1 + jL_1\omega) \underline{I}_{10} \\ \underline{U}_{20} = jM\omega \underline{I}_{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{1 \text{ Eff Nom}} = \sqrt{r_1^2 + (L_1\omega)^2} I_{10 \text{ Eff}} \\ U_{20 \text{ Eff}} = |M| \omega I_{10 \text{ Eff}} \end{cases}$$

D'où

$$L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\left(\frac{U_{1 \text{ Eff Nom}}}{I_{10 \text{ Eff}}} \right)^2 - r_1^2} \quad \text{et} \quad |M| = \frac{1}{\omega} \frac{U_{20 \text{ Eff}}}{I_{10 \text{ Eff}}}$$

- 3) Essai en court-circuit ($u_2 = 0$)

$$0 = jM\omega \underline{I}_1 + (r_2 + jL_2\omega) \underline{I}_2 \Rightarrow |M| \omega I_{1 \text{ Eff}} = \sqrt{r_2^2 + (L_2\omega)^2} I_{2 \text{ Eff}}$$

D'où

$$L_2 = \frac{1}{\omega} \sqrt{M^2 \omega^2 \left(\frac{I_{1 \text{ Eff}}}{I_{2 \text{ Eff}}} \right)^2 - r_2^2}$$

- 4) Coefficient de couplage

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

5) Rapport de transformation (fuites magnétiques faibles)

$$\ell_1 \ll L_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = \Lambda_1 + \ell_1 \approx \Lambda_1 \quad \left. \begin{array}{l} m = \frac{M}{\Lambda_1} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow m \approx \frac{M}{L_1}$$

15.5 TRANSFORMATEUR AVEC FUITES MAGNÉTIQUES, « PERTES CUIVRE » ET « PERTES FER »

• **Schéma équivalent** (Fig. 15.18). Ce schéma est surtout utilisé en électrotechnique. R représente les pertes magnétiques (courants de Foucault et hystérésis) du noyau.

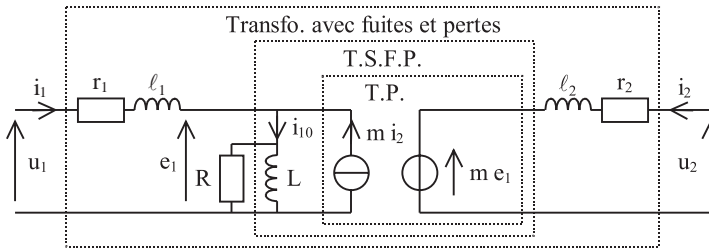


Fig. 15.18 Schéma équivalent du transformateur avec fuites et pertes

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1 \\ u_2 = m e_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad i_{10} = i_1 + m i_2 \quad e_1 + \frac{L}{R} \frac{de_1}{dt} = L \frac{di_{10}}{dt}$$

Remarques :

- Ce modèle est linéarisé. C'est-à-dire que l'on considère que la perméabilité magnétique est constante et qu'il n'y a ni saturation ni hystérésis du milieu magnétique.
- Ce schéma équivalent peut être transformé comme les précédents, en ramenant tout ou partie des éléments au primaire ou au secondaire (voir T.P. § 15.2).

15.6 TRANSFORMATEUR DANS L'HYPOTHÈSE DE KAPP

• Hypothèses

- 1) Pas de « perte fer ».
- 2) Perméabilité magnétique du circuit magnétique infinie.

• **Schéma équivalent.** Ce schéma est un cas particulier de la (Fig. 15.18) obtenu en supprimant R et L ($R = +\infty$ et $L = +\infty$). Ce modèle est surtout utilisé en électrotechnique pour les transformateurs en régime industriel pour lesquels on néglige le courant à vide.

$$\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \ell_1 \frac{di_1}{dt} + e_1 \\ u_2 = m e_1 + r_2 i_2 + \ell_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad i_1 = -m i_2$$

Méthode

À vide, c'est-à-dire à $i_2 = 0$, on retrouve la méthode de mesure du rapport de transformation dans l'hypothèse de Kapp, à savoir

$$|m| = U_{20 \text{ Eff}} / U_{1 \text{ Eff Nom}}$$

où $U_{20 \text{ Eff}}$ est la tension secondaire efficace à vide et $U_{1 \text{ Eff Nom}}$ est la tension primaire efficace nominale.

• **Schéma équivalent ramené au secondaire** (Fig. 15.19)

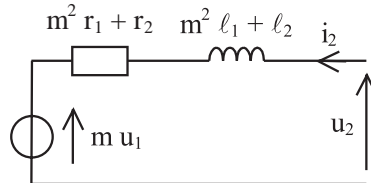


Fig. 15.19 Schéma équivalent ramené au secondaire

15.7 TRANSFORMATEUR RÉEL – EFFETS NON-LINÉAIRES

- Pour les capacités parasites, voir Chapitre 14 : Bobines couplées.
- Pour l'évaluation du rendement et la formule de Boucherot, voir Chapitre 38 : Transformateurs en régime sinusoïdal à fréquence constante.
- On aborde ici les effets non-linéaires.

La présence d'un matériau ferromagnétique engendre trois non-linéarités :

- 1) Le flux n'est pas une fonction linéaire du courant. La perméabilité relative du matériau n'est pas constante et, par suite, les inductances $L = \Lambda_1$ et L_1 ne sont pas constantes.
- 2) Le flux se sature à partir d'une certaine valeur de courant. Ce qui peut avoir de graves conséquences car le courant peut croître fortement.

3) Le flux diffère selon que le courant croît ou décroît. Les inductances $L = \Lambda_1$ et L_1 diffèrent aussi selon que le courant croît ou décroît. Cela forme un cycle d'hystérésis.

Remarque : Les simulateurs SPICE autorisent la simulation des non-linéarités évoquées ici en utilisant le modèle établi par JILES-ATHERTON et basé sur l'équation de la courbe de première aimantation d'un matériau ferromagnétique.

Méthode

Pour mener une étude simplifiée, on considère souvent que le circuit magnétique possède une caractéristique $\varphi = f(i_{10})$ linéaire par morceaux fixant deux régimes de fonctionnement (Fig. 15.20) :

– le régime de flux variable linéaire (1) tel que

$$L = \frac{n_1 \Phi_{\text{Sat}}}{I_{\text{Sat}}} = \text{constante} \Rightarrow n_1 \varphi = L i_{10}$$

– le régime de flux constant (2) tel que $\varphi = \Phi_{\text{Sat}}$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{f1} + \Phi_{\text{Sat}} \\ \varphi_2 = \varphi_{f2} + a\Phi_{\text{Sat}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{1 \text{ Tot}} = \ell_1 i_1 + n_1 \Phi_{\text{Sat}} \\ \varphi_{2 \text{ Tot}} = \ell_2 i_2 + n_2 a \Phi_{\text{Sat}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d\varphi_{1 \text{ Tot}}}{dt} = \ell_1 \frac{di_1}{dt} \\ \frac{d\varphi_{2 \text{ Tot}}}{dt} = \ell_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

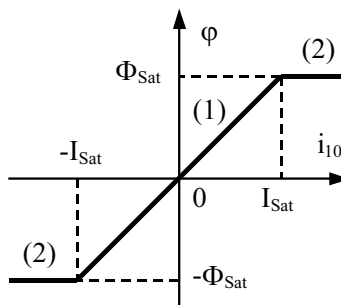


Fig. 15.20 $\varphi = f(i_{10})$

Remarque : On rappelle que φ est le flux magnétisant à travers une section du circuit magnétique, $\varphi = \varphi_{21} + a\varphi_{12}$ (voir Chapitre 14 : Bobines couplées).

Question : Dessiner le schéma équivalent du transformateur avec fuites magnétiques et « pertes cuivre » en régime de flux constant.

Réponse : Au schéma équivalent (Fig. 15.16) en régime de flux variable, correspond le schéma équivalent (Fig. 15.21) en régime de flux constant.

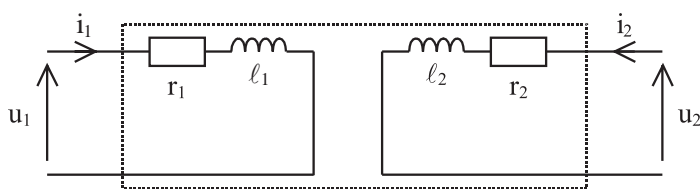


Fig. 15.21 Transfo. avec fuites et « pertes cuivre » en régime de flux constant

Attention ! Le courant primaire (resp. secondaire) ne dépend plus que de r_1 et ℓ_1 (resp. r_2 et ℓ_2) qui ont généralement de faibles valeurs. En conséquence, les courants primaire et secondaire peuvent prendre de fortes valeurs capables de détruire le transformateur.

Condition générale de bon fonctionnement : Un transformateur doit toujours fonctionner en régime de flux variable.

Chapitre 16

Diodes

16.1 DIODES À JONCTION PN

16.1.1 Symbole - Constitution

- *Symbole* (Fig. 16.1). Tension u_D et courant i_D : convention récepteur. A : Anode, K : Cathode. La pointe du triangle indique le sens passant en direct du courant.

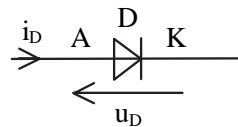


Fig. 16.1 Symbole

- *Constitution* (Fig. 16.2) *et fonctionnement*

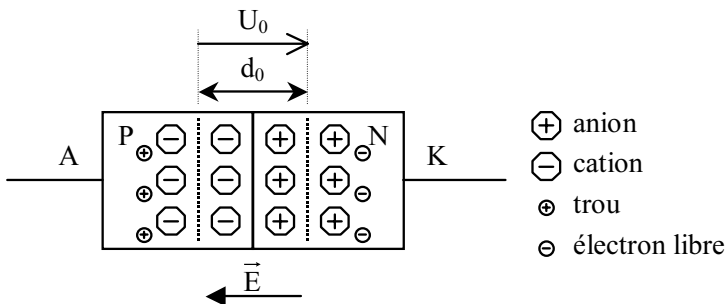


Fig. 16.2 Constitution d'une jonction PN

Une diode à jonction PN est constituée de deux zones respectivement dopées P (atomes accepteurs) et N (atomes donneurs). Au moment de la création de la jonction, un processus de diffusion se déclenche : les trous de la région P diffusent vers la région N laissant des charges négatives fixes (atomes ionisés), et les électrons de

la région N diffusent vers la région P laissant des charges positives. Il apparaît alors au niveau de la jonction une zone de largeur d_0 , appelée *zone de charge d'espace* ou *zone de transition*, dépeuplée de porteurs mobiles et contenant uniquement des charges fixes positives du côté N et négatives du côté P. Ces charges créent un champ électrique \vec{E} qui s'oppose à la diffusion des porteurs de manière à établir un équilibre électrique. Une différence de potentiel, dont dérive le champ électrique, apparaît aux bornes de la zone de charge d'espace. Elle est appelée *tension de contact* ou *tension de diffusion* de la jonction et notée ici U_0 .

$$U_0 = U_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

N_A est la concentration des atomes accepteurs de la zone P. N_D est la concentration des atomes donneurs de la zone N. n_i est la concentration intrinsèque du matériau (par exemple le silicium). U_T est la tension thermodynamique (ou thermique) définie par :

$$U_T = \frac{kT}{q} \quad (U_T \approx 26 \text{ mV à } 300 \text{ K}) \quad \text{Unités :} \quad V = \frac{(\text{J/K}) \text{ K}}{C}$$

avec

$k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$: Constante de Boltzmann en joules par kelvin.

$q \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$: Valeur absolue de la charge de l'électron en coulombs.

T : Température absolue en Kelvin ($0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$).

Question : Soit une jonction PN au silicium à 300 K avec une concentration intrinsèque du silicium $n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, un dopage $N_A = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ dans la région P et un dopage $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ dans la région N. Calculer sa tension de contact à 300 K.

Réponse : $U_0 \approx 0,82 \text{ mV à } 300 \text{ K}$

• **Jonction PN polarisée en direct** ($u_D > 0$ en fonctionnement normal). Les tensions u_D et U_0 se retranchent, la barrière de potentiel passe de U_0 à $U_0 - u_D$. La largeur de la zone de charge d'espace diminue ainsi que l'intensité du champ électrique \vec{E} . Le champ est alors incapable de s'opposer à la diffusion d'électrons de N vers P et de trous de P vers N. Le courant i_D circule positivement de P vers N. La tension u_D ne doit pas dépasser U_0 sous peine de destruction.

• **Jonction PN polarisée en inverse** ($u_D < 0$ en fonctionnement normal). Les tensions u_D et U_0 s'ajoutent, ce qui accroît la largeur de la zone de charge d'espace et l'intensité du champ électrique \vec{E} . Le champ interdit alors la diffusion d'électrons de N vers P et de trous de P vers N. Cependant, un courant de fuite très faible circule de N vers P, i_D est négatif.

16.1.2 Modèle idéal (Fig. 16.3)

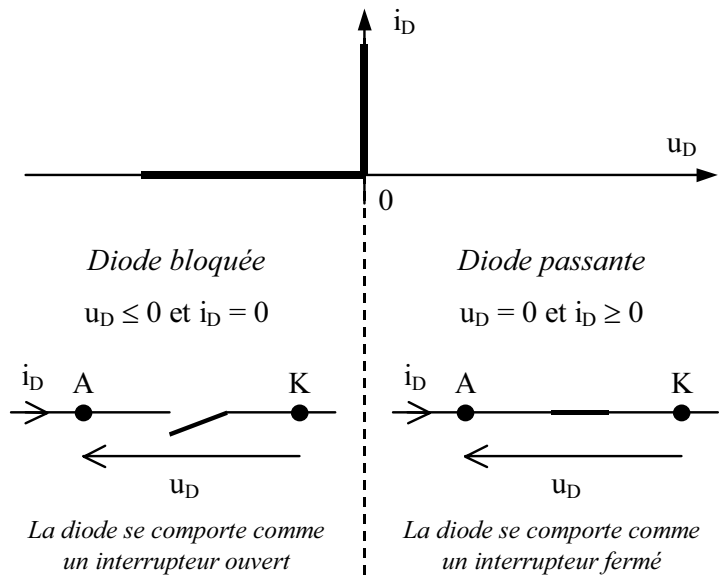


Fig. 16.3 Caractéristique - Modèle idéal

16.1.3 Modèle linéaire par morceaux (Fig. 16.4)

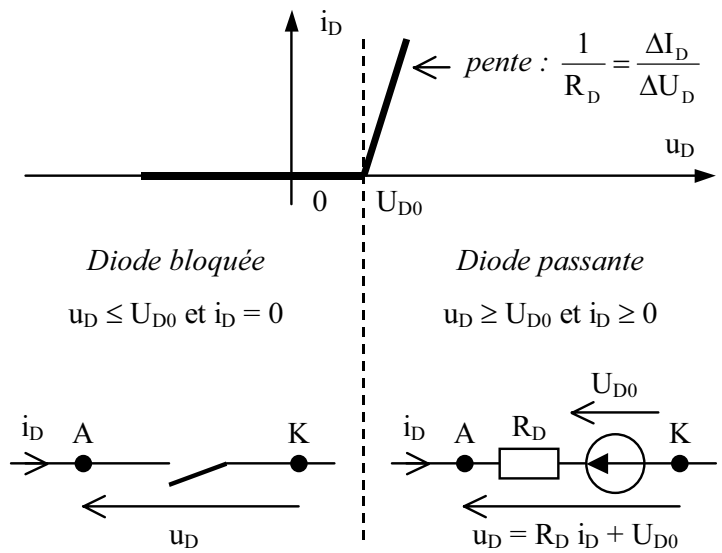


Fig. 16.4 Caractéristique - Modèle linéaire par morceaux

• **Puissance moyenne dissipée** (modèle linéaire par morceaux)

Diode bloquée : $P_{\text{Moy}} = 0$ Diode passante : $P_{\text{Moy}} = U_{D0} I_{D \text{ Moy}} + R_D I_{D \text{ Eff}}^2$

16.1.4 Modèle de base

a) Équations

① *Fonctionnement normal* (u_D est positive ou négative, voir Fig. 16.5)

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{u_D}{N U_T}} - 1 \right)$$

I_S est le *courant de saturation ou inverse* ; il est compris entre quelques fA et plusieurs nA à température ambiante selon les diodes et leurs modèles. N est le coefficient d'ajustement empirique, appelé *coefficient d'idéalité* ou *coefficient d'émission* ; il est voisin de 1 dans les jonctions de transistors au Si et dans les diodes au Ge, et il est compris entre 1 et 2 dans le cas de diodes au Si.

Équations simplifiées avec une erreur inférieure à 5 %

- Polarisation directe : Si $u_D > 3N U_T$ alors $i_D \approx I_S \exp \frac{u_D}{N U_T}$
- Polarisation inverse : Si $u_D < -3N U_T$ alors $i_D \approx -I_S$

② *Fonctionnement dans la zone de claquage* (u_D est négative, voir Fig. 16.5)

$$i_D = -I_{BV} e^{-\frac{u_D + U_{BV}}{N_{BV} U_T}}$$

U_{BV} est la tension de retournement (breakdown voltage) définie positive. I_{BV} est le courant inverse de retournement défini positif. N_{BV} est le facteur « d'idéalité » d'ajustement.

③ *Fonctionnement normal et claquage*. Pour éviter la discontinuité de raccordement des équations, les simulateurs SPICE calculent le courant i_D en effectuant la somme du courant en fonctionnement normal et du courant en zone de claquage :

$$i_D = i_{D \text{ Normal}} + i_{D \text{ Claquage}}$$

Exemple 16.1.1

Un des modèles SPICE de la diode 1N4148 spécifie $I_S = 2,68 \text{ nA}$, $N = 1,84$, $U_{BV} = 100 \text{ V}$, $I_{BV} = 100 \text{ } \mu\text{A}$ et $N_{BV} = 1$.

Remarque : Le courant inverse réel d'une diode est plus élevé que le courant I_S car l'expression précédente ne rend pas compte des courants de fuite et de recombinaison en surface et dans la zone de charge d'espace. SPICE permet de rendre compte de ces imperfections et également de quelques autres...

b) Caractéristique

La caractéristique (Fig. 16.5) $i_D = f(u_D)$ passe par l'origine ; une diode est un dipôle passif. L'échelle des courants est dilatée pour les courants négatifs.

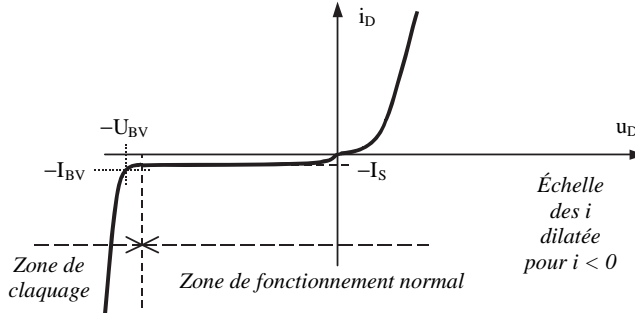


Fig. 16.5 Caractéristique $i_D = f(u_D)$ d'une diode

c) Schémas équivalents

• **Schéma équivalent « larges signaux »** (Fig. 16.6). C'est une source de courant i_D commandée par la tension u_D selon les équations du modèle de base.

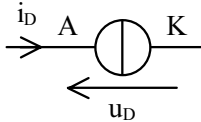


Fig. 16.6 Schéma équivalent
« larges signaux »

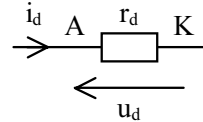


Fig. 16.7 Schéma équivalent
« petits signaux »

• **Schéma équivalent « petits signaux »** (Fig. 16.7). C'est une résistance dynamique r_d fonction du point de polarisation (U_{D1} , I_{D1}) de la diode. Pour simplifier, on note respectivement i_d et u_d à la place de i_D et u_D .

① Fonctionnement normal

$$\frac{1}{r_d} = \frac{i_d}{u_d} = \left. \frac{di_D}{du_D} \right|_{(u_D=U_{D1}, i_D=I_{D1})} = \frac{I_S}{NU_T} e^{\frac{U_{D1}}{NU_T}} = \frac{I_{D1} + I_S}{NU_T}$$

D'où

$$r_d = \frac{NU_T}{I_{D1} + I_S} \approx \frac{NU_T}{I_{D1}}$$

Question : Calculer la résistance dynamique d'une diode 1N4148 ($N = 1,84$) à 300 K lorsqu'elle est traversée par un courant de 1 mA, puis de 100 mA.

Réponse : $r_d \approx \frac{0,0476}{I_{D1}}$ soit 47,6 Ω pour 1 mA et 0,476 Ω pour 100 mA

Remarque : La résistance dynamique est quasiment inversement proportionnelle au courant de polarisation.

② *Claquage*. De façon similaire, on a

$$r_d = \frac{N_{BV} U_T}{-I_{D1}} \quad (I_{D1} < 0)$$

d) Associations de deux diodes

• Mise en série (Fig. 16.8).

$$i_{D1} = i_{D2}$$

① Fonctionnement normal

- En polarisation directe, la répartition de la tension $u_{D1} + u_{D2}$ entre u_{D1} et u_{D2} dépend des coefficients N_1 et N_2 , et un peu des courants de saturation I_{S1} et I_{S2} . Pour deux diodes de même référence, la répartition est à peu près équilibrée.
- En polarisation inverse, la répartition de la tension $u_{D1} + u_{D2}$ entre u_{D1} et u_{D2} n'est pas équilibrée, c'est une des deux diodes qui supporte la presque totalité de la tension. Pour équilibrer les tensions u_{D1} et u_{D2} en polarisation inverse, il faut ajouter des résistances égales en parallèle sur les diodes (Fig. 16.9).

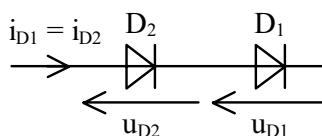


Fig. 16.8 Mise en série

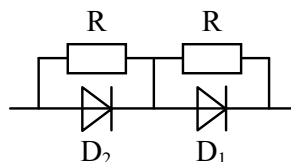


Fig. 16.9 Équilibrage des tensions inverses

② *Claquage*. La répartition de la tension $u_{D1} + u_{D2}$ entre u_{D1} et u_{D2} n'est pas équilibrée car elle dépend beaucoup des tensions de retournement U_{BV1} et U_{BV2} .

• Mise en parallèle (Fig. 16.10).

$$u_D = u_{D1} = u_{D2}$$

① *Fonctionnement normal*. La répartition du courant $i_{D1} + i_{D2}$ entre i_{D1} et i_{D2} dépend beaucoup des courants de saturation I_{S1} et I_{S2} (qui dépendent fortement de la température). La répartition n'est pas équilibrée.

② *Claquage*. La répartition du courant $i_{D1} + i_{D2}$ entre i_{D1} et i_{D2} dépend très fortement des tensions de retournement U_{BV1} et U_{BV2} . La répartition n'est pas du tout équilibrée.

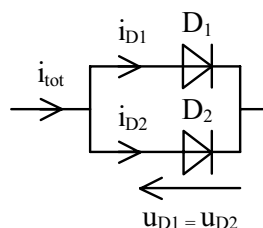


Fig. 16.10 Mise en parallèle

16.1.5 Limites et imperfections

a) Comportement en température

• Comportement en température du courant de saturation

$$I_S = C \frac{X}{T^N} e^{\frac{-E_G}{NkT}} \quad \text{avec} \quad C = I_{S0} \left(\frac{1}{T_0} \right)^{\frac{X}{N}} e^{\frac{E_G}{NkT_0}}$$

T et T_0 sont les températures absolues (en Kelvin) de la jonction. I_S et I_{S0} sont les courants de saturation respectivement à T et T_0 . E_G est la largeur de la bande interdite (*band gap*) qui dépend du matériau : $E_G = 1,43$ eV pour l'arséniure de gallium (GaAs), 1,11 eV pour le silicium (Si) et 0,66 eV pour le germanium (Ge). X est un exposant (3 pour le silicium). Généralement, X/N vaut 2 pour le germanium, 1,5 pour le silicium et l'arséniure de gallium.

Variation relative de I_S en fonction de la température :

$$\frac{1}{I_S} \frac{dI_S}{dT} = \frac{1}{T} \left(\frac{X}{N} + \frac{E_G}{NkT} \right)$$

Question : Calculer la variation relative de I_S en fonction de la température d'une diode 1N4148 ($X = 3$, $N = 1,84$ et $E_G = 1,11$ eV) autour de 300 K.

$$\text{Réponse : } \frac{1}{I_S} \frac{dI_S}{dT} \approx 8,3 \text{ \% /K autour de 300 K}$$

Attention ! Le courant I_S double tous les 7 °C environ pour du silicium et tous les 11 °C environ pour du germanium. En conséquence, le courant i_D varie beaucoup avec la température en polarisation inverse.

• Comportement en température de la tension de jonction en polarisation directe.

On suppose E_G indépendante de la température et $u_D > 3NU_T$.

$$u_D \approx U_G - (U_G - u_{D0}) \frac{T}{T_0} - XU_T \ln \frac{T}{T_0}$$

avec

$$u_{D0} = u_D|_{T=T_0} \approx NU_{T0} \ln \frac{i_D}{I_{S0}} \quad (u_{D0} \text{ dépend de } i_D)$$

$$U_G = \frac{E_G}{q} \quad (\text{Tension équivalente à la largeur de la bande interdite})$$

$$U_T = \frac{kT}{q} \quad \text{et} \quad U_{T0} = U_T|_{T=T_0} = \frac{kT_0}{q}$$

Variation de u_D en fonction de la température :

$$\frac{du_D}{dT} \approx \frac{1}{T_0} \left[u_{D0} - U_G - XU_{T0} \left(1 + \ln \frac{T}{T_0} \right) \right]$$

Attention ! Le courant I_D doit être maintenu constant pour que U_{D0} le soit aussi. Il permet de régler dU_D/dT . Le terme $\ln T/T_0$ modifie légèrement dU_D/dT .

En pratique, la tension U_D décroît de 1 à 3 mV par Kelvin selon la diode et le courant I_D constant.

Question : Calculer U_{D0} et dU_D/dT d'une diode 1N4148 ($I_{S0} = 2,68$ nA, $X = 3$, $N = 1,84$ et $E_G = 1,11$ eV) pour un courant $I_D = 5$ mA autour de 300 K.

Réponse : $U_{D0} \approx 0,68$ V et $\frac{dU_D}{dT} \approx -1,7$ mV/K

b) Comportement dynamique pour les « larges signaux » (Fig. 16.11)

R_S : Résistance des contacts et des régions neutres (éloignées de la jonction). La tension u_D appliquée à la jonction est inférieure à la tension u'_D appliquée à la diode.

$C = C_T + C_D$: La capacité C varie avec la tension u_D . Elle dépend aussi de la température.

C_T (ou C_J) : Capacité de transition (ou de jonction) de la zone de charge d'espace. Elle est donnée dans les catalogues constructeurs pour une tension négative ou nulle et une certaine température. L'expression ci-après n'est plus valable pour u_D proche de U_0

$$C_T = \frac{C_{T0}}{\left(1 - \frac{u_D}{U_0} \right)^M} \quad (u_D < U_0)$$

où C_{T0} est la capacité de transition à $u_D = 0$, U_0 le potentiel de contact, et M le coefficient dépendant du profil de la jonction (1/3 pour une jonction progressive et 1/2 pour une jonction abrupte).

C_D (ou C_I) : Capacité de diffusion (ou de stockage ou du temps de transit). La charge stockée est proportionnelle au courant traversant la jonction ($q_s = \tau i_D$). La charge

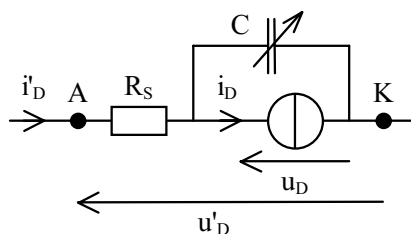


Fig. 16.11 Schéma équivalent « larges signaux »

stockée est la principale cause de limitation de rapidité des diodes à jonction PN.

$$C_D = \tau \frac{i_D}{U_T} = \frac{\tau}{r_d}$$

où τ est la durée de vie moyenne des porteurs minoritaires (ou temps de transit).

Remarque : La jonction PN présente deux types de capacités. Une capacité de transition C_T prépondérante en polarisation inverse, et une capacité de diffusion C_D prépondérante en direct.

c) Commutation - Temps de recouvrement

• **Diode en régime de commutation** (Fig. 16.12 et Fig. 16.13). On considère R_S petit devant R .

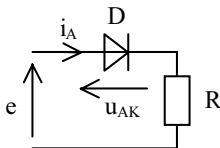


Fig. 16.12 Diode en commutation

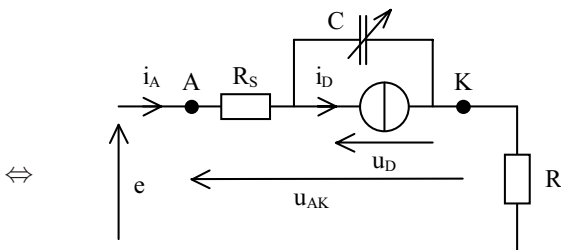


Fig. 16.13 Schéma équivalent à la (Fig. 16.12)

• Diagramme temporel (Fig. 16.14)

- 1) Pour $t < 0$, la diode est bloquée car $E_L < 0$. La capacité C ($C \approx C_T$) est chargée, $u_{AK} = E_L$.
- 2) À $t = 0$ une tension positive est appliquée ($e = E_H$). Le courant i_A passe de 0 à I_{Max} car la tension aux bornes de C ne peut subir de discontinuité ($u_{AK} = E_L$). Ensuite, la capacité C se charge (décharge de C_T puis charge de C_D) à travers la résistance R pendant le temps t_{fr} , la tension u_{AK} croît de E_L à U_D . Le courant i_A passe de I_{Max} à I_H . La diode est passante.
- 3) À $t = t_1$ une tension négative est appliquée ($e = E_L$). Le courant i_A passe de I_H à I_L . La charge stockée dans C ($C = C_D$) est alors évacuée par le passage d'un courant inverse dans la jonction à $u_{AK} \approx U_D \approx 0$ V. Le temps de saturation t_s est le temps que met la charge stockée pour s'annuler. Et t_r est le

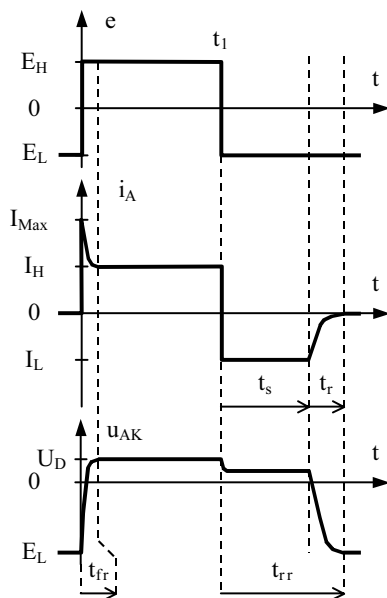


Fig. 16.14 Diagramme temporel

temps mis par la capacité C ($C = C_T$) à se recharger (reconstitution de la charge d'espace).

$$I_{\text{Max}} = \frac{E_H - E_L}{R} \quad I_H = \frac{E_H}{R} \quad I_L = \frac{E_L}{R}$$

$$t_s = \tau \ln \left(1 + \frac{E_H}{-E_L} \right) = \tau \ln \left(1 + \frac{I_H}{-I_L} \right) \quad t_r = RC_T \text{ Moy} \ln \frac{E_H - E_L}{E_H - U_D}$$

- **Temps de recouvrement direct** (t_{fr} : *forward recovery time*). C'est le temps que met une diode pour passer de l'état bloqué à l'état passant. Une impulsion positive est correctement transmise si sa durée est suffisamment supérieure au temps de recouvrement direct.
- **Temps de recouvrement inverse** (t_{rr} : *reverse recovery time*, $t_{rr} = t_s + t_r$). C'est le temps que met une diode pour passer de l'état passant à l'état bloqué. Les constructeurs spécifient ce temps comme le temps que met le courant à s'annuler dans la diode lorsque celle-ci est polarisée en inverse dans des conditions de polarisation déterminées. C'est la charge stockée qui limite fortement la vitesse de commutation de la diode. Une impulsion négative est correctement transmise si sa durée est suffisamment supérieure au temps de recouvrement inverse.

Remarque : Pour compenser la capacité C , il faut mettre un condensateur en parallèle sur la résistance R . La capacité C dépendant de la polarisation, la compensation sera performante uniquement pour des tensions E_H et E_L fixes. La bonne solution est d'utiliser des diodes « rapides », c'est à dire à faible temps de recouvrement (diodes Schottky en particulier).

d) **Comportement dynamique pour les « petits signaux »** (Fig. 16.15)

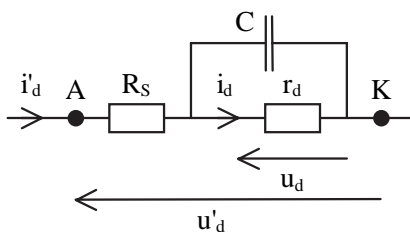


Fig. 16.15 Schéma équivalent « petits signaux »

Remarque : La capacité est fixe. Elle est calculée autour d'un point de polarisation (U_{D1} , I_{D1}) donné.

16.2 PARTICULARITÉS DE CERTAINES DIODES

Le modèle de base permet de décrire quasiment tous les types de diodes (signal, redressement, Zener, Schottky, varicap...).

16.2.1 Diodes de redressement

Les diodes de redressement sont des diodes à jonction PN permettant des courants et tensions importants. Il en existe deux catégories : les diodes de redressement basse fréquence (typiquement utilisées pour les alimentations classiques 50 Hz) et les diodes de redressement rapides (alimentations à découpage).

16.2.2 Diodes Zener - Diodes stabilisatrices de tension

- **Symbolle** (Fig. 16.16). A : Anode, K : Cathode. Selon les circonstances, ce sont soit la tension u_D et le courant i_D directs qui sont utilisés, soit la tension u_Z et le courant i_Z inverses. La convention récepteur est adoptée dans les deux cas.

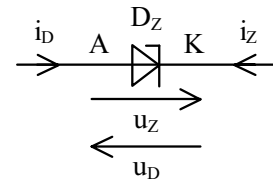


Fig. 16.16 Symbolle d'une diode Zener

- **Description**. C'est une diode à jonction PN utilisée en inverse dans la zone de claquage. Ce claquage n'est pas destructif si le courant maximal $I_{Z \text{ Max}}$ et la puissance maximale $P_{Z \text{ Max}}$ ne sont pas dépassés.

- **Caractéristique et modèle de base** (voir § 16.1.4). Toutes les équations générales et schémas équivalents restent valables. Il suffit d'effectuer le changement de variables $i_Z = -i_D$ et $u_Z = -u_D$ et de se rappeler que le fonctionnement normal d'une Zener est obtenu pour u_Z positif (u_D négatif). Pour le schéma équivalent « petits signaux », on définit la résistance dynamique $r_Z = du_Z/di_Z$ fonction du point de polarisation (U_{Z1}, I_{Z1}).

- **Caractéristique et modèle idéal** (Fig. 16.17)

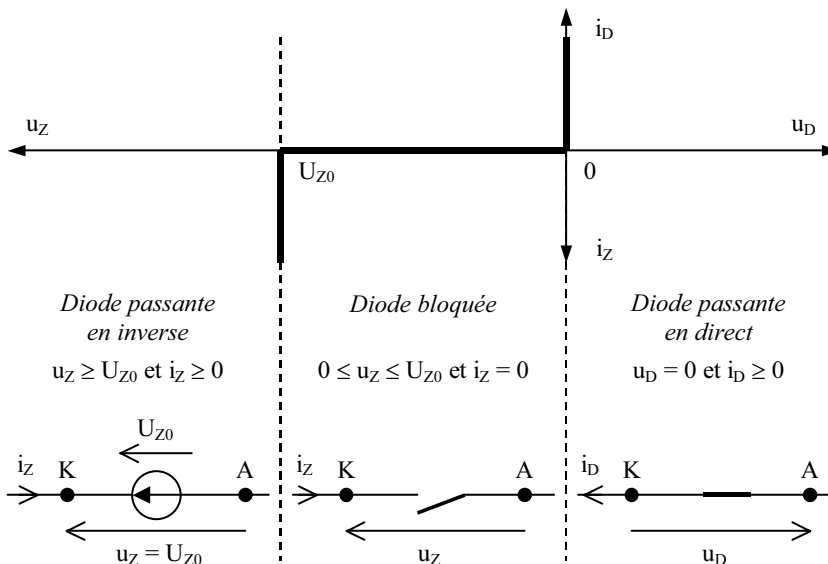


Fig. 16.17 Caractéristique - Modèle idéal - Diode Zener

• **Caractéristique et modèle linéaire par morceaux** (Fig. 16.18)

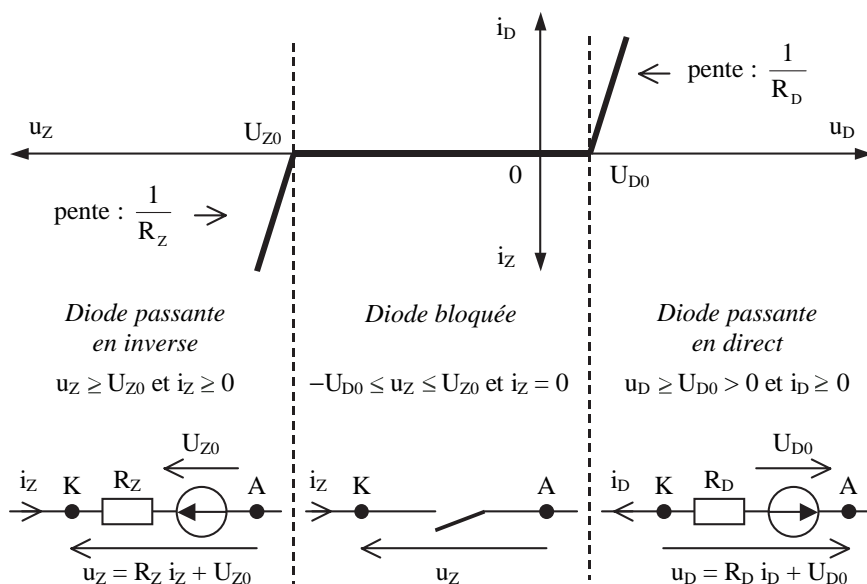


Fig. 16.18 Caractéristique - Modèle linéaire par morceaux - Diode Zener

• **Coefficient de température.** Il est négatif pour des tensions de retournement (ou de coude) en dessous de 4 V, il est positif au-dessus de 6 V, et il est négatif ou positif (voire nul) entre les deux.

$$\frac{1}{U_Z} \frac{dU_Z}{dT} \quad \text{Unités :} \quad K^{-1} = \frac{1}{V} \frac{V}{K}$$

16.2.3 Diodes Schottky

• **Symbole** (Fig. 16.19). Tension u_D et courant i_D : convention récepteur. A : Anode, K : Cathode.

• **Description.** Ce n'est pas une diode à jonction PN mais métal-semiconducteur. Sa tension de seuil, de l'ordre de 0,3 V, est inférieure à celle d'une diode à jonction PN. De plus, le temps de recouvrement inverse t_{rr} est presque nul car il n'y a pas de charge stockée ($C_D = 0$). Les diodes Schottky sont utilisées en hautes fréquences et en commutation rapide. Les modèles donnés pour les diodes à jonction PN restent valables.

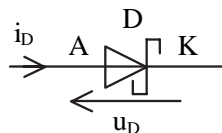


Fig. 16.19 Symbole d'une diode Schottky

16.2.4 Diodes à capacité variable (varicap)

• **Symbol** (Fig. 16.20). Tension u_R et courant i_R : convention récepteur. A : Anode, K : Cathode.

• **Description**. Une diode polarisée en inverse est pratiquement équivalente à sa capacité de transition C_T qui dépend de la tension à ses bornes (voir § 16.1.5b)).

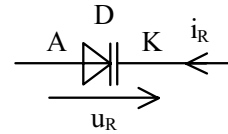


Fig. 16.20 Symbole d'une diode varicap

$$C = C_{\text{Case}} + C_T \quad \text{avec} \quad C_T = \frac{C_{T0}}{\left(1 + \frac{u_R}{U_0}\right)^M} \quad (u_R > 0)$$

où C_{Case} est la capacité du boîtier (souvent négligeable), C_T la capacité de transition (ou de jonction) à u_R , C_{T0} la capacité de transition à $u_R = 0$, U_0 le potentiel de contact, u_R la tension inverse, et M un coefficient dépendant du profil de la jonction ($1/3$ pour une jonction progressive, $1/2$ pour une jonction abrupte, et $\geq 3/4$ pour une jonction rétrogradée ; pour cette dernière, M est une fonction de u_R).

Coefficient de qualité : $f_Q = \frac{1}{2\pi f C R_S}$ (R_S : résistance série, voir Fig. 16.21)

Variation relative de C_T :

$$\frac{dC_T}{C_T} = \frac{-Mu_R}{u_R + U_0} \frac{du_R}{u_R} \quad (\text{si } u_R \gg U_0 \text{ alors } \frac{dC_T}{C_T} = -M \frac{du_R}{u_R})$$

• **Schéma équivalent** (Fig. 16.21) pour $u_R > 0$ et en considérant le courant de saturation nul. Ces diodes travaillant en hautes fréquences, il faut ajouter l'inductance série L_S des connexions. Pour tenir compte du courant de saturation, on peut ajouter une résistance (très élevée) en parallèle sur la capacité C .

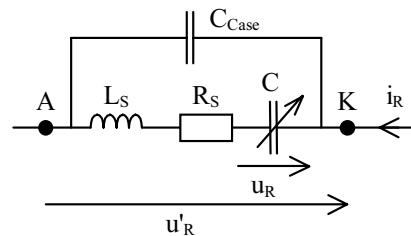


Fig. 16.21 Schéma équivalent d'une diode varicap

16.2.5 Diodes PIN

Une diode PIN est constituée de trois zones : une zone dopée N, une zone dopée P, et entre les deux une zone intrinsèque (I). En polarisation directe, une diode PIN est équivalente à une résistance commandée par le courant de polarisation I_D , pour des signaux dont les fréquences sont supérieures à une fréquence minimale. Elles sont utilisées en hautes fréquences.

16.2.6 Diodes tunnel

- **Symbole** (Fig. 16.22). Tension u_D et courant i_D : convention récepteur. A : Anode, K : Cathode.

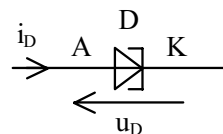


Fig. 16.22 Symbole d'une diode tunnel

- **Description.** C'est une jonction PN très fortement dopée. Cela se traduit par une zone à *résistance dynamique négative* dans la caractéristique $i_D = f(u_D)$ de la diode. Elles sont utilisées pour réaliser des oscillateurs en hautes fréquences jusqu'à 2 GHz.

- **Caractéristique** (Fig. 16.23). On distingue trois zones. Une zone de faible résistance entre l'origine et le pic (U_P, I_P), une zone à résistance dynamique négative entre le pic et la vallée (U_V, I_V), et une zone qui rejoint la caractéristique classique d'une diode (en pointillés) après la vallée.

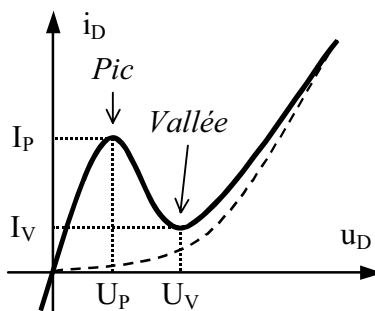


Fig. 16.23 Caractéristique $i_D = f(u_D)$ d'une diode tunnel

Chapitre 17

Transistors bipolaires

17.1 SYMBOLES – CONSTITUTION

• **Symboles** (Fig. 17.1). B : Base, C : Collecteur (*Collector*), E : Émetteur (*Emit-ter*). Il existe deux types de transistors bipolaires : le NPN et le PNP. On adopte les sens positifs des courants et des tensions indiqués (Fig. 17.1). La flèche figurant sur l'émetteur (E) indique le sens passant des jonctions base-émetteur (BE). En conduction directe, les courants sont positifs pour le NPN et négatifs pour le PNP.

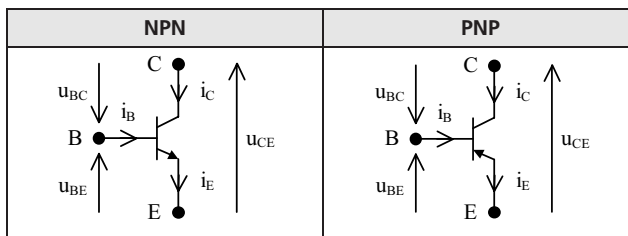


Fig. 17.1 Symboles et sens conventionnels positifs

• **Constitution** (Fig. 17.2). Le transistor bipolaire ou B.J.T. (*Bipolar Junction Transistor*), ou encore transistor bijonction, est un semi-conducteur présentant trois zones dopées N, P et N, ou P, N et P.

La zone du milieu, mince, constitue la base. Les deux extrémités, aux géométries et aux dopages différents, constituent l'émetteur et le collecteur. Les trois zones ainsi dopées forment deux jonctions : la jonction base-émetteur (BE) dite jonction de commande, et la jonction base-collecteur (BC).

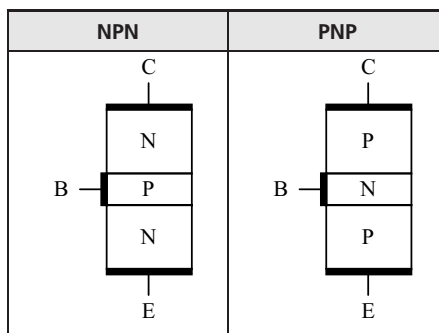


Fig. 17.2 Constitution schématisée

17.2 TRANSISTOR NPN

17.2.1 Modèle de base

Le modèle de base (dérivé du modèle d'Ebers et Moll) résulte de la superposition des modes direct et inverse.

a) *Équations – Schéma équivalent « larges signaux »*

• **Mode direct (F : Forward).** On suppose la tension u_{BC} nulle, ce qui supprime l'effet de la jonction BC.

$$i_F = I_S \left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1 \right)$$

où I_S est le *courant de saturation* ou courant inverse, N_F le *coefficient d'idéalité* ou *coefficient d'émission* de la jonction BE (il est compris entre 1 et 2 pour le Si), et U_T la tension thermodynamique (voir Chapitre 16 : Diodes).

Amplifications en courant du mode direct (β_F est souvent simplement noté β) :

$$\beta_F = \frac{i_F}{i_{BF}} \quad (\text{émetteur commun}) \quad \text{et} \quad \alpha_F = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1} \quad (\text{base commune})$$

• **Mode inverse (R : Reverse).** On suppose la tension u_{BE} nulle, ce qui supprime l'effet de la jonction BE.

$$i_R = I_S \left(e^{\frac{u_{BC}}{N_R U_T}} - 1 \right)$$

où N_R est le *coefficient d'idéalité* ou *coefficient d'émission* de la jonction BC.

Amplifications en courant du mode inverse :

$$\beta_R = \frac{i_R}{i_{BR}} \quad (\text{émetteur commun}) \quad \text{et} \quad \alpha_R = \frac{\beta_R}{\beta_R + 1} \quad (\text{base commune})$$

• **Superposition des modes – Schéma équivalent « larges signaux »** (Fig. 17.3). La source de courant entre émetteur et collecteur est commandée par les courants (ou les tensions) des jonctions BE et BC. Les jonctions BE et BC sont représentées par les diodes placées respectivement entre base et émetteur et entre base et collecteur.

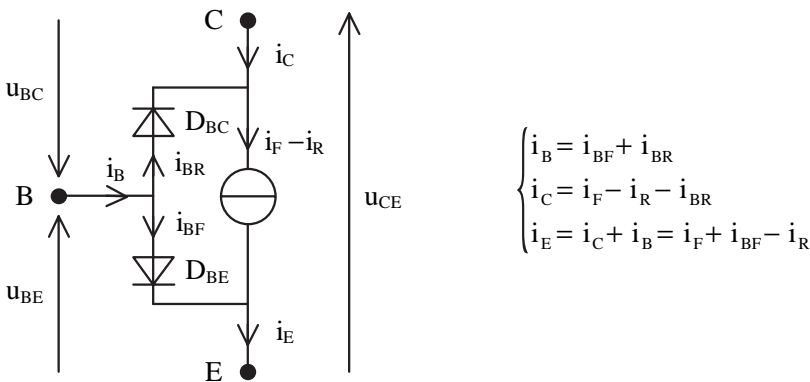


Fig. 17.3 Schéma équivalent « larges signaux » d'un NPN

• **Asymétrie technologique.** Les transistors sont fabriqués pour que le courant de base en mode direct soit le plus faible possible. Cela conduit à une amplification en courant du mode direct compris entre 100 et 500 pour des transistors de petite puissance ($< 1\text{W}$), et une amplification en courant du mode inverse compris entre 1 et 10 pour des transistors discrets de petite puissance et même inférieure à l'unité pour des transistors intégrés.

Exemple 17.2.1

Un des modèles SPICE du transistor 2N2222A (ZETEX) spécifie $I_S = 30,611 \text{ fA}$, $\beta_F = 220$, $\beta_R = 4$, $N_F = 1,00124$ et $N_R = 1,005$.

b) Les quatre régimes de fonctionnement

• **Équations générales des courants et des tensions**

$$\begin{aligned} i_E &= i_C + i_B \\ u_{BE} &= u_{BC} + u_{CE} \end{aligned}$$

• **Conduction directe ou mode normal.** Lorsque la jonction BE est polarisée en direct et la jonction BC en inverse, le transistor conduit en direct. *Hypothèse :*

$$u_{BC} < -3N_R U_T \Rightarrow i_R \approx -I_S$$

1°) Avec cette hypothèse et en introduisant le courant I_{CE0} (courant de fuite collecteur-émetteur avec base « en l'air », c'est-à-dire à $i_B = 0$), le schéma équivalent « larges signaux » en conduction directe est donné (Fig. 17.4).

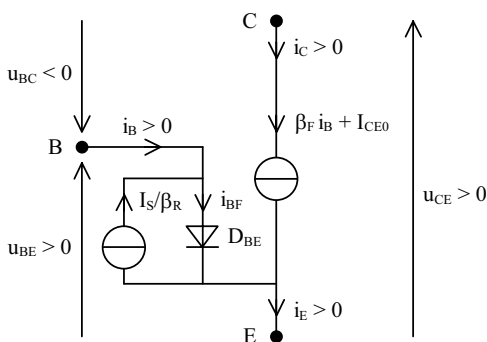


Fig. 17.4 Schéma équivalent « larges signaux » en conduction directe

Les équations deviennent :

$$\begin{cases} i_B = i_{BF} - \frac{I_S}{\beta_R} \\ i_C = \beta_F i_B + I_{CE0} \\ i_E = i_C + i_B \end{cases} \quad \text{avec} \quad i_{BF} = \frac{I_S}{\beta_F} (e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1) \quad \text{et} \quad I_{CE0} = \frac{I_S}{\beta_R} (\beta_F + \beta_R + 1)$$

Remarques :

- Le courant I_{CE0} s'exprime en fonction du courant I_{CB0} (courant de fuite collecteur-base avec émetteur « en l'air », c'est à dire à $i_E = 0$).

$$I_{CE0} = (\beta_F + 1) I_{CB0}$$

$$\text{avec} \quad I_{CB0} = \frac{I_S}{\beta_R (\beta_F + 1)} (\beta_F + \beta_R + 1) = \frac{I_S}{\alpha_R} (1 - \alpha_F \alpha_R)$$

$$- \text{A } i_B = 0, i_C = I_{CE0} \text{ et } U_{BE} = N_F U_T \ln \left(1 + \frac{\beta_F}{\beta_R} \right) \approx N_F U_T \ln \frac{I_{CE0}}{I_S}$$

Attention ! Les valeurs trouvées pour I_{CE0} et I_{CB0} avec ces formules sont très sous estimées car ce modèle ne rend pas compte des courants de fuite et de recombinaison en surface et dans la zone de charge d'espace côté émetteur. SPICE permet de rendre compte de ces imperfections et également de quelques autres... Les documents constructeurs spécifient quant à eux les valeurs maximales.

2°) Dès que $i_B \gg I_S/\beta_R$ et $\beta_F i_B \gg I_{CE0}$ on utilise le schéma équivalent « larges signaux » simplifié (Fig. 17.5).

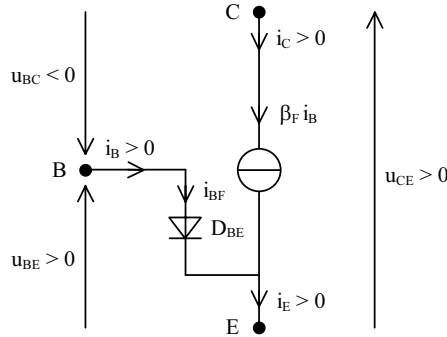


Fig. 17.5 Schéma équivalent « larges signaux » simplifié en conduction directe

Les équations deviennent :

$$\begin{cases} i_C = \beta_F i_B \\ i_E = i_C + i_B = (\beta_F + 1) i_B \end{cases} \quad \text{avec} \quad i_B = \frac{I_S}{\beta_F} \left(e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1 \right)$$

3°) Les schémas équivalents « larges signaux » (Fig. 17.4 et Fig. 17.5) engendrent le même schéma équivalent « petits signaux » (Fig. 17.6).

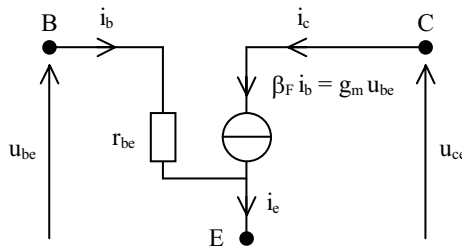


Fig. 17.6 Schéma équivalent « petits signaux » en conduction directe

En considérant les variations (notées par des indices minuscules) autour d'un point de polarisation, les équations deviennent :

$$\begin{cases} i_c = \beta_F i_b \\ i_e = i_c + i_b = (\beta_F + 1) i_b \end{cases} \quad \text{et} \quad r_{be} = \frac{du_{BE}}{di_B} = \frac{u_{be}}{i_b} = \frac{\beta_F N_F U_T}{I_C - I_S/\beta_R} \approx \frac{\beta_F N_F U_T}{I_C}$$

Question : Calculer la résistance r_{be} d'un transistor 2N2222 ($\beta_F = 220$ et $N_F = 1,00124$) à 300 K pour un courant I_C de 1 mA, puis de 100 mA.

Réponse : $r_{be} \approx \frac{5,7}{I_C}$ soit 5,7 k Ω pour 1 mA et 57 Ω pour 100 mA

Remarque : La résistance dynamique r_{be} est quasiment inversement proportionnelle au courant de polarisation I_C .

Méthode

L'utilisation de la transconductance g_m peut permettre de simplifier les calculs.

$$g_m = \frac{di_C}{du_{BE}} = \frac{i_C}{u_{be}} = \frac{\beta_F i_b}{u_{be}} = \frac{\beta_F}{r_{be}} \approx \frac{I_C}{N_F U_T}$$

- **Conduction inverse.** Lorsque la jonction BE est polarisée en inverse et la jonction BC en direct, le transistor conduit en inverse. Cette conduction n'est généralement pas recherchée compte tenu de l'asymétrie du transistor.

- **Blocage.** Lorsque les deux jonctions sont polarisées en inverse, le transistor est bloqué. Le schéma équivalent est celui donné (Fig. 17.3) avec $u_{BE} < 0$ et $u_{BC} < 0$. Les courants de fuite (collecteur et émetteur) dépendent de la qualité du blocage.

- **Saturation.** Lorsque les deux jonctions sont polarisées en direct, le transistor est saturé. Le schéma équivalent est celui donné (Fig. 17.3) avec $u_{BE} > 0$ et $u_{BC} > 0$. On a deux cas : la saturation en direct ($u_{BE} > u_{BC}$) et la saturation en inverse ($u_{BE} < u_{BC}$) ; cette dernière n'est généralement pas recherchée.

La limite entre la saturation directe ($u_{BE} > u_{BC} > 0$) et la conduction directe ($u_{BE} > 0$ et $u_{BC} < 0$) est donnée par $u_{BE} > 0$ et $u_{BC} = 0$ ($\Leftrightarrow u_{BE} = u_{CE}$). D'où :

$$u_{BC} = 0 \Rightarrow i_{BR} = 0 \Rightarrow i_R = 0 \Rightarrow i_C = i_F = \beta_F i_{BF} = \beta_F i_B$$

En pratique, $U_{CE \text{ Sat}} \approx 0,2 \text{ V}$ (saturation directe).

- **Conclusion.** En *conduction directe*, le transistor est généralement utilisé en amplificateur de signal. En *saturation directe*, le transistor joue le rôle d'un interrupteur fermé. Inversement, en *blocage*, il joue le rôle d'un interrupteur ouvert. La *conduction inverse* est très rarement désirée. Elle peut cependant se produire, il suffit que les conditions soient remplies, ne serait-ce que transitoirement.

c) Caractéristiques du modèle de base

Les caractéristiques principales du modèle de base sont présentées (Fig. 17.7) pour $u_{CE} > 0$ et $u_{BE} > 0$.

- **Caractéristique de sortie** $i_C = f(u_{CE})$. Les caractéristiques sont données pour différentes valeurs de I_B maintenues constantes. La caractéristique en pointillé $i_C = f(u_{CE})$ telle que $u_{CE} = u_{BE}$ délimite la saturation directe de la conduction directe.

- En conduction directe $u_{CE} > u_{BE} (\Rightarrow u_{BC} < 0)$: Le transistor se comporte entre collecteur et émetteur en source de courant commandée par i_B (ou u_{BE}).
- En saturation directe $0 < u_{CE} < u_{BE} (\Rightarrow u_{BE} > u_{BC} > 0)$: A I_B constant (ou U_{BE} constant), plus la jonction BC est polarisée en direct, plus le transistor est saturé et plus le courant i_C diminue.
- Pour $u_{CE} > 0$ et $u_{BE} < 0$, la zone de blocage se situe à peu près entre la caractéristique de i_C obtenue à $i_B = 0$ ($i_C = I_{CE0}$ en conduction directe) et l'axe $i_C = 0$. En toute rigueur, on peut avoir $i_B < 0$ et $u_{BE} > 0$ (courants de fuite).

- **Caractéristique de transfert en courant** $i_C = f(i_B)$. C'est la droite $i_C = \beta_F i_B$ en conduction directe au courant de fuite I_{CE0} près.

- **Caractéristique d'entrée** $i_B = f(u_{BE})$. C'est l'équation de la jonction BE en conduction directe au courant de fuite I_S/β_R près.

- **Caractéristique de transfert en tension** $u_{BE} = f(u_{CE})$. Pas utilisée en pratique.

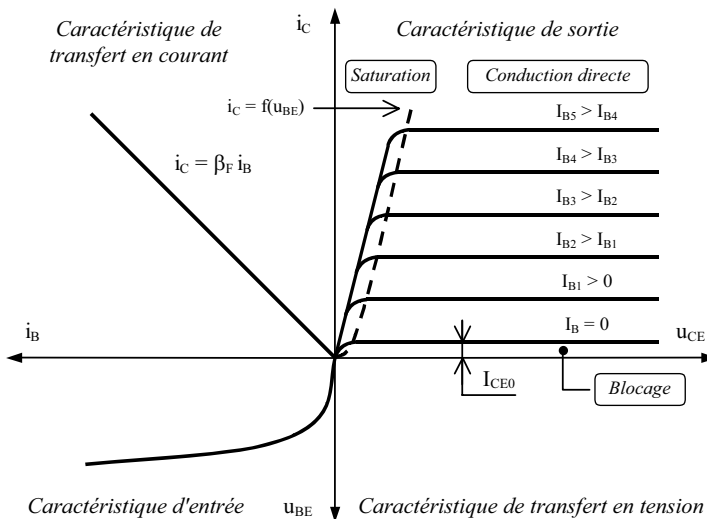


Fig. 17.7 Caractéristiques du modèle de base pour $u_{CE} > 0$ et $u_{BE} > 0$

d) Fonctionnement en commutation

• Schéma classique (Fig. 17.8)

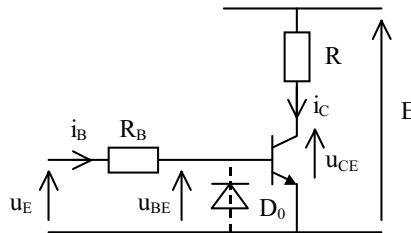


Fig. 17.8 Schéma classique en commutation

• Deux états continus possibles (Fig. 17.9)

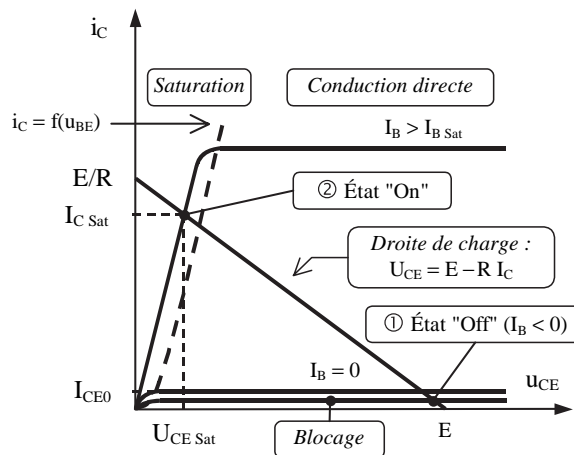


Fig. 17.9 États « On » et « Off »

① L'état d'isolement (Off-State) est caractérisé par le courant de fuite collecteur-émetteur qui dépend de la qualité du blocage. La condition rigoureuse de blocage est :

$$u_{BE} < 0 \quad \text{et} \quad u_{BC} < 0$$

Attention ! Un tel blocage nécessite une tension négative entre base et émetteur. En valeur absolue, celle-ci ne doit pas dépasser la tension $U_{EB \text{ Max}}$ (généralement de l'ordre de 4 V à 5 V) sous peine de destruction. Pour éviter ce dépassement, la diode D_0 (voir Fig. 17.8) est alors reliée entre base et émetteur du transistor.

Méthode

On se contente souvent de u_{BE} légèrement positif ou nul. Le transistor n'est pas rigoureusement bloqué mais en faible conduction directe. Si u_{BE} est petit alors i_B l'est aussi, mais attention, $\beta_F i_B$ peut ne plus être négligeable, d'autant plus que dU_{BE}/dT est négatif. Il faut respecter la condition :

$$i_B < 0$$

② *L'état de connexion* (On-State) est caractérisé par la tension collecteur-émetteur de saturation $U_{CE\text{ Sat}}$. Le transistor est en conduction saturée. La saturation est donnée par le point d'intersection ($U_{CE\text{ Sat}}$, $I_{CE\text{ Sat}}$) de la caractéristique $i_C = f(u_{CE})$ à $I_B = I_{B\text{ Sat}}$ et de la droite de charge.

Méthode

Pour garantir la saturation, il faut respecter la condition :

$$I_B > I_{B\text{ Sat}} = \frac{I_{C\text{ Sat}}}{\beta_{F\text{ Min}}}$$

avec $\beta_{F\text{ Min}}$: amplification minimale du mode direct.

Pour le schéma classique (voir Fig. 17.8), on choisit la résistance R_B par :

$$R_B = \frac{U_{EH\text{ Min}} - U_{BE\text{ Sat}}}{I_B} < \frac{U_{EH\text{ Min}} - U_{BE\text{ Sat}}}{I_{B\text{ Sat}}}$$

où $U_{EH\text{ Min}}$ est la tension u_E au niveau haut minimale.

Remarques :

- En saturation, la relation $i_C = \beta_F i_B$ n'est plus valable.
- Il faut vérifier que le montage, ce qui est le cas (Fig. 17.8), permet bien la saturation du transistor (jonctions BE et BC polarisées en direct).
- On définit parfois le *coefficient de sursaturation* par : $K = I_B / I_{B\text{ Sat}}$

• Puissance dissipée

① État d'isolement	② État de connexion
$P_{\text{Off}} \approx EI_{CE0}$ à $i_B = 0$	$P_{\text{On}} \approx U_{CE\text{ Sat}} I_{C\text{ Sat}}$

17.2.2 Limites et imperfections

a) Comportement en température

Pour une température croissante, I_{CE0} croît, I_S croît, β croît, I_C croît et U_{BE} décroît de 1 à 3mV par Kelvin selon le transistor et le courant de polarisation maintenu constant. Le comportement est semblable à celui d'une diode (voir Chapitre 16 : Diodes).

$$\frac{dU_{BE}}{dT} \approx -2 \text{ mV/K}$$

b) *Effet Early - Effet « Late »*

• **Effet Early.** En réalité, les caractéristiques $i_C = f(u_{CE})$ d'un transistor ne sont pas horizontales en conduction directe. Elles sont légèrement ascendantes comme le montre la caractéristique (Fig. 17.10) volontairement très exagérée. Cela est dû à l'augmentation de β_F avec la tension base-collecteur (et donc avec la tension collecteur-émetteur). C'est l'effet Early, du nom de la personne qui la première a décrit ce phénomène.

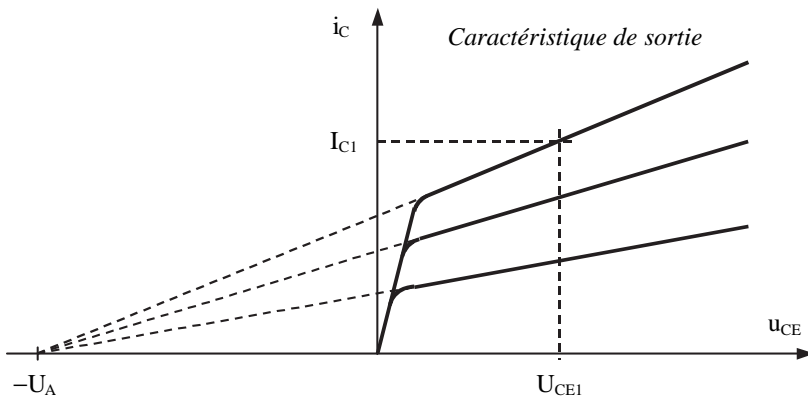


Fig. 17.10 Caractéristique de sortie linéarisée – Effet Early

Méthode

Détermination graphique de la tension d'Early. Si on prolonge les caractéristiques $i_C = f(u_{CE})$ vers les u_{CE} négatifs, on s'aperçoit qu'elles concourent toutes au même point sur l'axe des u_{CE} (négatifs). Ce point est la tension $-U_A$, $+U_A$ étant la tension d'Early.

• **Effet « Late ».** La tension base-émetteur provoque un effet similaire. On l'appelle l'effet Early inverse ou l'effet « Late » (qui signifie tard) en opposition avec le nom du découvreur Early (qui signifie tôt).

• **Modèle « larges signaux ».** Pour que le modèle proposé au § 17.2.1a) prenne en compte ces deux effets (qui se produisent en direct et en inverse), on remplace le générateur de courant commandé $I_F - I_R$ (voir Fig. 17.3) par :

$$(I_F - I_R) \left(1 - \frac{u_{BC}}{U_A} - \frac{u_{BE}}{U_B} \right)$$

où U_A est la tension positive d'Early, et U_B la tension positive d'Early inverse.

• **Modèle « petits signaux ».** L'effet Early se traduit par la présence de la résistance dynamique r_{ce} (souvent notée ρ) dans le schéma équivalent « petits signaux »

(Fig. 17.11). Bien qu'on puisse la définir partout, elle trouve son intérêt en conduction directe.

$$\begin{cases} u_{be} = r_{be} i_b \\ i_c = \beta_F i_b + \frac{u_{ce}}{r_{ce}} \\ i_e = i_c + i_b \end{cases} \quad \text{et} \quad r_{ce} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_C} = \frac{|U_A| + U_{CE1}}{I_{C1}} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} (U_{CE1}, I_{C1}) \\ \text{Point de polarisation} \end{matrix}$$

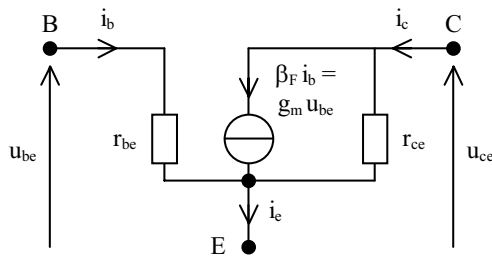


Fig. 17.11 Schéma équivalent « petits signaux » en conduction directe avec effet Early

c) Comportement dynamique pour les « larges signaux »

On rend compte du comportement dynamique en ajoutant les capacités C_{BE} et C_{BC} des jonctions BE et BC (Fig. 17.12). Elles sont semblables à la capacité d'une diode. Ces capacités dépendent des tensions à leurs bornes.

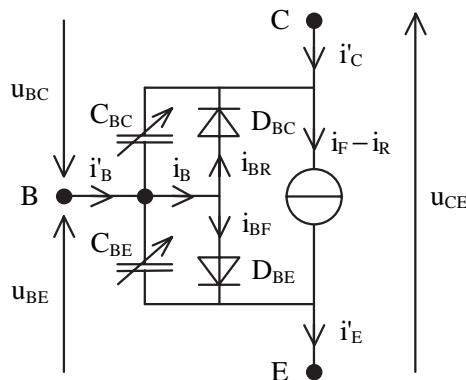


Fig. 17.12 Schéma équivalent dynamique « larges signaux »

À partir du schéma (Fig. 17.12), on peut établir un schéma équivalent dynamique « larges signaux » pour chacun des quatre régimes de fonctionnement. En conduction directe, on trouve le schéma (Fig. 17.13).

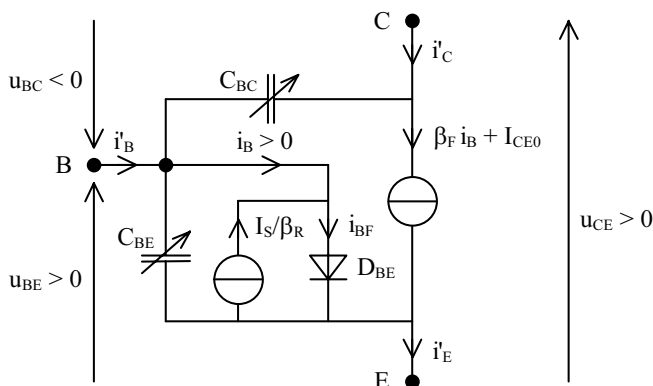


Fig. 17.13 Schéma équivalent dynamique « larges signaux » en conduction directe

d) Retards en commutation

On considère un transistor en commutation monté selon le schéma classique (voir Fig. 17.8). Pour un transistor fonctionnant en commutation sur charge résistive, on obtient le diagramme temporel (Fig. 17.14).

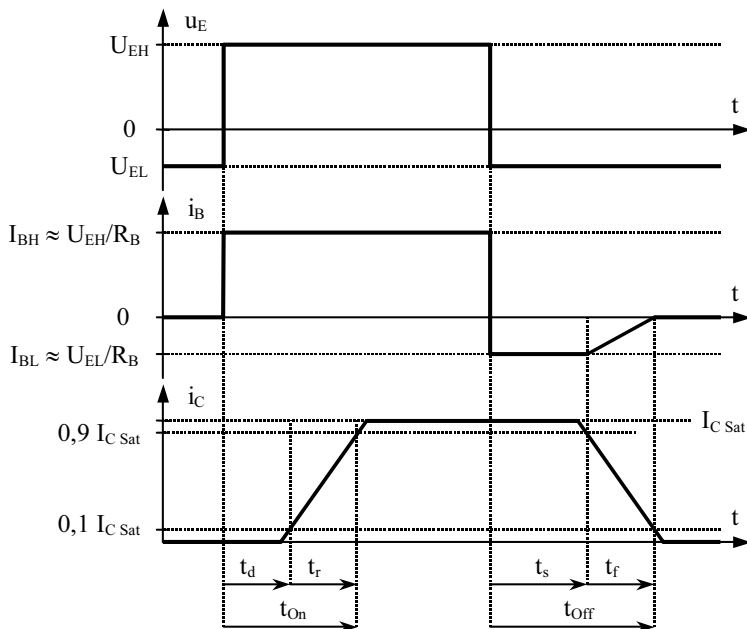


Fig. 17.14 Retards schématisés en commutation

t_d est le temps de retard (*delay time*) de 0 % à 10 % de $I_{C\text{ Sat}}$, t_r le temps de montée (*rise time*) de 10 % à 90 % de $I_{C\text{ Sat}}$, t_s le temps de stockage (*storage time*) de 100 % à 90 % de $I_{C\text{ Sat}}$, t_f le temps de descente (*fall time*) de 90 % à 10 % de $I_{C\text{ Sat}}$, t_{On} le

temps de mise en conduction (*turn-on time*) : $t_{on} = t_d + t_r$, et t_{off} le temps de blocage (*turn-off time*) : $t_{off} = t_s + t_f$.

Ces temps résultent des capacités des jonctions C_{BE} et C_{BC} (voir Fig. 17.12) qui dépendent des tensions à leurs bornes, et de l'effet Miller pendant le fonctionnement en amplificateur. Pour réduire les temps de commutation, il faut charger et décharger ces capacités le plus rapidement possible en augmentant les courants I_{BH} et I_{BL} . Mais, en contrepartie, le temps de stockage augmente avec I_{BH} (plus le transistor est saturé et plus t_s est important). Deux solutions sont envisageables.

- Augmenter le courant de charge et de décharge uniquement pendant les transitions (Fig. 17.15) : c'est le rôle de la capacité C d'accélération de la charge et de la décharge.
- Éviter une saturation importante du transistor (Fig. 17.16) : c'est le rôle de la diode d'antisaturation D_2 montée entre base et collecteur, la diode D_1 assurant le passage du courant de base en conduction et la diode D_3 au blocage.

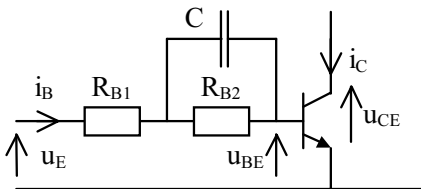


Fig. 17.15 Accélération par capacité

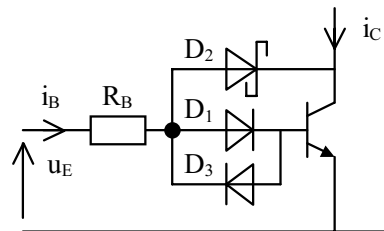


Fig. 17.16 Diode d'antisaturation

e) Comportement dynamique pour les « petits signaux » - Effet Miller

Le schéma équivalent dynamique « larges signaux » (voir Fig. 17.13) en conduction directe, engendre le schéma équivalent dynamique « petits signaux » (Fig. 17.17) en conduction directe, sur lequel est ajouté une résistance de charge R_L . En ajoutant au schéma (Fig. 17.17) une résistance en série dans la base et éventuellement une résistance en parallèle sur C_{bc} on obtient le *schéma dit de Giacoleto*.

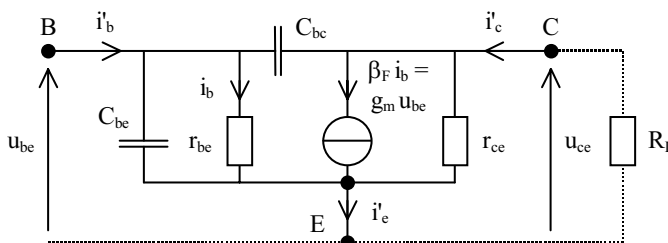


Fig. 17.17 Schéma équivalent dynamique « petits signaux » en conduction directe

• **Amplification en courant complexe du transistor.** On définit alors une amplification en courant complexe, notée $\underline{\beta}$, telle que $\beta_F \underline{i_b} = g_m \underline{u_{be}} = \underline{\beta} \underline{i'_b}$

$$\underline{\beta} = \left. \frac{\underline{i'_c}}{\underline{i'_b}} \right|_{\underline{u_{ce}}=0} \approx \frac{\beta_F}{1 + j \frac{f}{f_\beta}} \quad \text{avec} \quad f_\beta = \frac{1}{2\pi r_{be} (C_{be} + C_{bc})}$$

Avec cette approximation, c'est une fonction de transfert du premier ordre où f_β est la *fréquence de coupure* à -3 dB, c'est-à-dire la fréquence pour laquelle $|\underline{\beta}|$ est divisé par $\sqrt{2}$. On définit aussi la *fréquence de transition* f_T pour laquelle $|\underline{\beta}|$ vaut 1. La fréquence de transition est donnée dans les documents techniques des transistors. Dans l'approximation du premier ordre, on a la relation :

$$f_T = f_\beta \sqrt{\beta_F^2 - 1} \approx \beta_F f_\beta$$

• **Capacité C_{bc} ramenée entre BE et entre CE – Effet Miller.** Par application du théorème de Miller, le schéma (Fig. 17.17) est transformé en un nouveau schéma équivalent (Fig. 17.18) où la capacité C_{bc} est ramenée entre BE et entre CE. Dans ce schéma, A est l'amplification en tension du montage (R_L comprise).

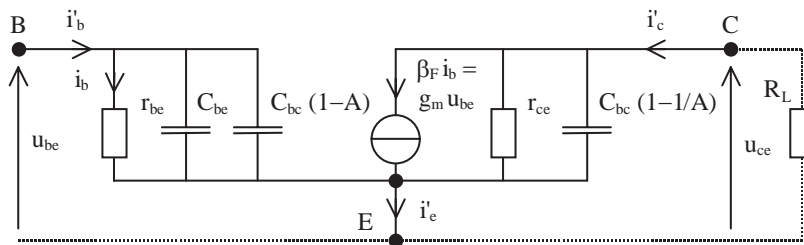


Fig. 17.18 Schéma équivalent avec C_{bc} ramenée entre BE et entre CE

On établit :

$$\underline{A} = \frac{\underline{u_{ce}}}{\underline{u_{be}}} = \frac{-R g_m \left(1 - j \frac{C_{bc}}{g_m} \omega \right)}{1 + j R C_{bc} \omega} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_{ce}}$$

Pour $\omega \ll \frac{1}{R C_{bc}}$ et $\omega \ll \frac{g_m}{C_{bc}}$ l'amplification devient :

$$A_0 = \frac{\underline{u_{ce}}}{\underline{u_{be}}} = -R g_m$$

Dans ces conditions, la capacité C_{bc} ramenée entre BE et entre CE est :

$$C_{\text{Miller be}} = (1 - A_0) C_{bc} = (1 + R_{g_m}) C_{bc} \quad \text{si } |A_0| \gg 1 \quad \text{alors } C_{\text{Miller be}} \approx -A_0 C_{bc}$$

$$C_{\text{Miller ce}} = \left(1 - \frac{1}{A_0}\right) C_{bc} = \left(1 + \frac{1}{R_{g_m}}\right) C_{bc} \quad \text{si } |A_0| \gg 1 \quad \text{alors } C_{\text{Miller ce}} \approx C_{bc}$$

Remarque : La capacité vue entre base et émetteur (C_{be} plus $C_{\text{Miller be}}$) est d'autant plus importante que l'amplification en basses fréquences est élevée. Elle abaisse grandement les fréquences de coupure du montage (l'ajout d'une simple résistance en série dans la base génère un filtre passe-bas du premier ordre). Ce phénomène est connu sous le nom d'*Effet Miller*.

17.3 TRANSISTOR PNP

En adoptant les mêmes sens des courants et des tensions que pour le NPN (voir Fig. 17.1), tout ce qui a été énoncé pour le NPN, reste globalement valable pour le PNP. Il faut cependant inverser les diodes des schémas équivalents, et garder en mémoire que, pour un fonctionnement analogue, les courants et les tensions sont de signes opposés quand on passe du NPN au PNP.

17.4 TRANSISTORS PARTICULIERS

17.4.1 Darlington

Deux transistors NPN sont montés en Darlington NPN lorsque l'émetteur du premier est relié à la base du second, les collecteurs étant reliés (Fig. 17.19). On réalise de façon similaire un Darlington PNP. L'ensemble se comporte globalement comme un seul transistor. En ajoutant l'indice 1 aux paramètres du transistor T_1 et l'indice 2 aux paramètres du transistor T_2 , on a :

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2 \approx \beta_1 \beta_2$$

$$I_{CE0} = (1 + \beta_2) I_{CE01} + I_{CE02}$$

$$u_{BE} = u_{BE1} + u_{BE2}$$

Remarques :

- Amplification en courant β élevée et résistance d'entrée « petits signaux » élevée.
- Courant de fuite I_{CE0} élevé, résistance de sortie « petits signaux » r_{ce} réduite, tension u_{BE} deux fois plus élevée qu'avec un seul transistor.
- Pour éviter que le courant de fuite I_{CB01} de T_1 soit du même ordre de grandeur que le courant de base de T_2 , on ajoute une résistance entre base et

émetteur de T_2 . Cela dérive une partie du courant. Cette résistance permet aussi l'écoulement du courant de base de T_2 lors du blocage.

- Pour améliorer le blocage de T_2 , on ajoute une diode d'évacuation (ou de déstockage) sur la jonction BE de T_1 (cathode sur la base et anode sur l'émetteur).

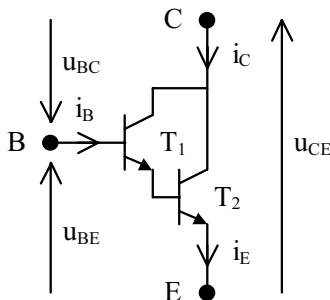


Fig. 17.19 Darlington NPN

17.4.2 Deux transistors complémentaires

L'association du PNP T_1 commandant le NPN T_2 est globalement équivalente à un seul transistor PNP (Fig. 17.20). Les sens choisis des courants et des tensions font que i_B , i_C , i_E , u_{BE} et u_{CE} sont négatifs. En permutant les rôles de T_1 et T_2 , on réalise de façon similaire un montage équivalent à un NPN.

$$\beta = \beta_1 + \beta_1\beta_2 \approx \beta_1\beta_2$$

$$I_{CE0} = (1 + \beta_2) I_{CE01} - I_{CE02} \quad (I_{CE0} \text{ et } I_{CE01} \text{ positifs, } I_{CE02} \text{ négatif})$$

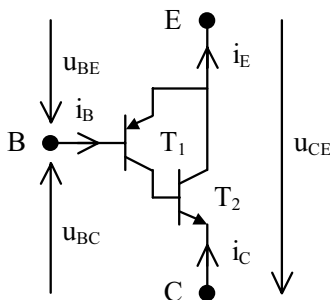


Fig. 17.20 Deux transistors complémentaires – PNP

Remarques :

- Amplification β élevée. La tension u_{BE} est celle du premier transistor.
- Courant de fuite I_{CE0} élevé.

17.4.3 Transistor Schottky

- **Symboles** (Fig. 17.21). On les trouve dans les circuits intégrés.

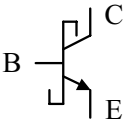
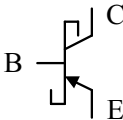
NPN	PNP
	

Fig. 17.21 Symboles

- **Constitution** (Fig. 17.22). Un transistor Schottky est un transistor bipolaire NPN ou PNP avec une diode Schottky d’antisaturation entre base et collecteur, qui augmente la vitesse de commutation du transistor.

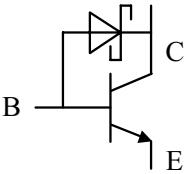


Fig. 17.22 Constitution d’un transistor Schottky

Chapitre 18

Transistors MOS

18.1 SYMBOLES – CONSTITUTION

- **Symboles** (Fig. 18.1). S : Source, D : Drain, G : Grille (Gate), B : Substrat (Bulk). Il existe quatre types de transistors MOS : le MOSFET canal N à enrichissement, le MOSFET canal P à enrichissement, le MOSFET canal N à appauvrissement et le MOSFET canal P à appauvrissement. La flèche figurant sur le substrat (B) des symboles IEEE indique le sens passant des jonctions substrat-source (BS) et substrat-drain (BD). Ces jonctions doivent être bloquées. Les symboles simplifiés ne visualisant pas les substrats, on suppose que les jonctions BS et BD sont bloquées.

- **Constitution.** Les *MOSFET* (Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor) ou *TECMOS* (transistor à effet de champ métal-oxyde-semi-conducteur) doivent leur nom à leur structure en sandwich : un semi-conducteur, une couche d'oxyde (SiO_2), une métallisation (aluminium, silicium polycristallin) constituant la grille. Cette structure permet de contrôler par effet de champ le courant circulant dans un canal situé entre la source (S) et le drain (D) à l'aide d'une tension appliquée entre la grille (G) et la source, le substrat (B) étant relié de telle façon que les jonctions substrat-drain et substrat-source soient bloquées. Dans un MOSFET, la conduction est due à un seul type de porteur : les électrons pour un canal N et les trous pour un canal P.

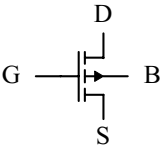
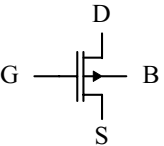
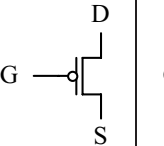
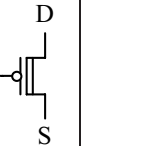
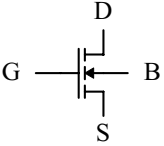
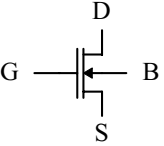
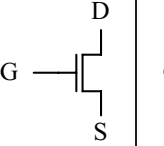
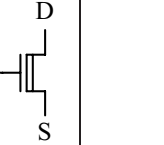
MOSFET	Symboles normalisés IEEE		Symboles simplifiés	
	à enrichissement	à appauvrissement	à enrichis.	à appauvris.
Canal P				
Canal N				

Fig. 18.1 Symboles

18.2 MOSFET CANAL N À ENRICHISSEMENT

• *Structure schématisée d'un NMOS à enrichissement* (Fig. 18.2). Entre la source et le drain, le canal de longueur L (*Length*) et de largeur W (*Width*) est couvert d'une fine couche d'oxyde de silicium d'épaisseur \mathcal{D} (*Depth*) et de permittivité ϵ . Selon la technologie, \mathcal{D} vaut de 4 nm à 100 nm. Le rapport W/L s'appelle le facteur géométrique, ou de forme, du transistor.

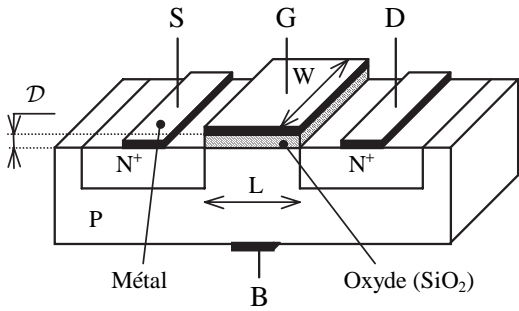


Fig. 18.2 Structure d'un NMOS à enrichissement

18.2.1 Modèle de base

La source et le drain peuvent permuter. En conséquence, le cas $u_{DS} < 0$ se déduit directement du cas $u_{DS} > 0$.

a) Équations

• *Les trois régimes de fonctionnement.* ($u_{GS} \geq 0$ et $u_{DS} \geq 0$). La tension de seuil (*threshold voltage*) du NMOS est notée $U_{Th N}$.

① Blocage : $u_{GS} \leq U_{Th\ N}$

$$i_{DS} = 0$$

② Conduction non-saturée : $u_{GS} \geq U_{Th\ N} \geq 0$ et $u_{DS} \leq u_{DS\ pinc}$

$$i_{DS} = \beta_N \left[(u_{GS} - U_{Th\ N}) u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2} \right] \quad \text{Expression quadratique en } u_{DS}$$

③ Conduction saturée : $u_{GS} \geq U_{Th\ N} \geq 0$ et $u_{DS} \geq u_{DS\ pinc}$

$$i_{DS} = \frac{\beta_N}{2} (u_{GS} - U_{Th\ N})^2 \quad \text{Source de courant parfaite commandée par } u_{GS}$$

• **Limite entre conduction saturée et conduction non-saturée.** $u_{DS\ pinc}$ et $i_{DS\ pinc}$ sont dits tension et courant de pincement du canal (*channel pinch-off*).

$$u_{DS\ pinc} = u_{GS} - U_{Th\ N} \quad \Rightarrow \quad i_{DS\ pinc} = \frac{\beta_N}{2} u_{DS\ pinc}^2$$

• **Transconductances** β_N (A/V²) et K_N (A/V²). μ_N est la mobilité des électrons libres, C_{OX} la capacité de la grille par unité de surface (voir Fig. 18.2). Pour un dopage habituel, $\mu_N \approx 670$ cm²/Vs.

$$\beta_N = \mu_N C_{OX} \frac{W}{L}$$

$$K_N = \mu_N C_{OX}$$

$$C_{OX} = \frac{\varepsilon}{D}$$

Exemple 18.2.1

Un des modèles SPICE du MOSFET BS170 (ZETEX) spécifie $\beta_N = 0,1233$ et $U_{Th\ N} = 1,824$ V à $U_{SB} = 0$ V.

b) Caractéristiques

• **Caractéristique de transfert** $i_{DS} = f(u_{GS})$ à $U_{DS} = \text{constante}$ (Fig. 18.3).

① Blocage : $u_{GS} \leq U_{Th\ N} \Rightarrow i_{DS} = 0$

③ Conduction saturée : $U_{Th\ N} \leq u_{GS} \leq U_{DS} + U_{Th\ N}$
 $\Rightarrow i_{DS}$ dépend quadratiquement de u_{GS}

② Conduction non-saturée : $u_{GS} \geq U_{DS} + U_{Th\ N} \Rightarrow i_{DS}$ est proportionnel à u_{GS}

• **Caractéristique de sortie** $i_{DS} = f(u_{DS})$ à $U_{GS} = \text{constante}$ (Fig. 18.4).

② Conduction non-saturée : $u_{DS} \leq U_{GS} - U_{Th\ N}$
 $\Rightarrow i_{DS}$ dépend quadratiquement de u_{DS}

③ Conduction saturée : $u_{DS} \geq U_{GS} - U_{Th\ N} \Rightarrow i_{DS}$ est indépendant de u_{DS}

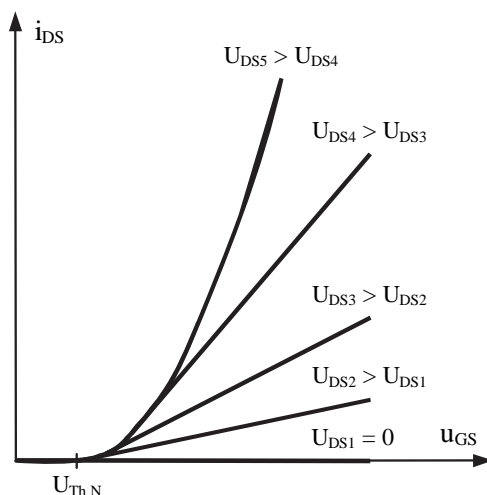


Fig. 18.3 Caractéristique de transfert – Modèle de base

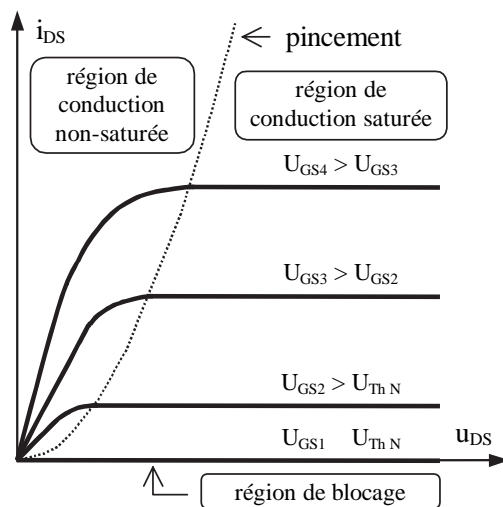


Fig. 18.4 Caractéristique de sortie – Modèle de base

c) Schémas équivalents

- **Schémas équivalents « larges signaux »** (Fig. 18.5 et Fig. 18.6). Le schéma équivalent « Résistance commandée » est utilisé pour mettre en évidence un comportement plutôt résistif en conduction non-saturée.

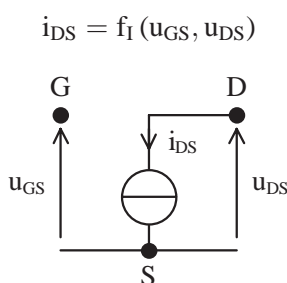


Fig. 18.5 Source de courant commandée

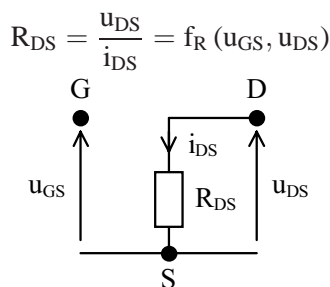


Fig. 18.6 Résistance commandée

• *Schéma équivalent « petits signaux »* (Fig. 18.7)

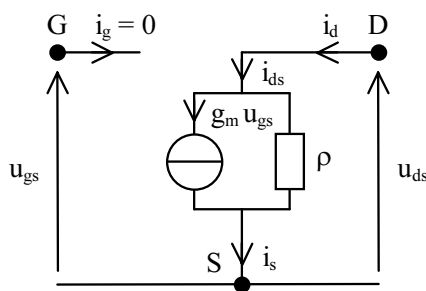


Fig. 18.7 Schéma équivalent « petits signaux »

Le courant i_{DS} dépend des tensions u_{GS} et u_{DS} ($U_{Th N}$ est supposée constante).

$$D'où : di_{DS} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{GS}} du_{GS} + \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{DS}} du_{DS}$$

En notant respectivement i_{ds} , u_{gs} et u_{ds} à la place de di_{DS} , du_{GS} et du_{DS} on écrit plus simplement : $i_{ds} = g_m u_{gs} + g_{ds} u_{ds}$ avec

$$g_m = \left. \frac{i_{ds}}{u_{gs}} \right|_{u_{ds}=0} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{GS}} = \left. \frac{di_{DS}}{du_{GS}} \right|_{u_{DS}=U_{DS}=\text{constante}} \quad \text{Unités : } S = A/V$$

$$g_{ds} = \frac{1}{\rho} = \left. \frac{i_{ds}}{u_{ds}} \right|_{u_{gs}=0} = \frac{\partial i_{DS}}{\partial u_{DS}} = \left. \frac{di_{DS}}{du_{DS}} \right|_{u_{GS}=U_{GS}=\text{constante}} \quad \text{Unités : } S = A/V$$

② Conduction non-saturée	$g_m = \beta_N U_{DS}$	$g_{ds} = \beta_N (U_{GS} - U_{Th N} - U_{DS})$
③ Conduction saturée	$g_m = \beta_N (U_{GS} - U_{Th N})$	$g_{ds} = 0$

Remarque : Les valeurs trouvées pour g_m avec ces formules s'écartent des valeurs réelles lorsque la tension de polarisation augmente, car ce modèle ne rend compte ni des résistances séries dans le drain et la source, ni d'un effet similaire à l'effet « Early » (voir § 18.2.2).

d) *Fonctionnement en résistance variable*

Pour qu'un MOSFET se comporte en résistance variable entre drain et source (R_{DS}) commandée par la tension u_{GS} , il faut qu'il fonctionne en conduction non-saturée (voir Fig. 18.4 et Fig. 18.6). De plus, pour que R_{DS} soit quasiment indépendante de u_{DS} , il faut :

$$u_{DS} \ll 2(u_{GS} - U_{ThN}) \Rightarrow R_{DS} \approx \frac{1}{\beta_N (u_{GS} - U_{ThN})}$$

e) *Fonctionnement en commutation*

• *Schéma de base* (Fig. 18.8)

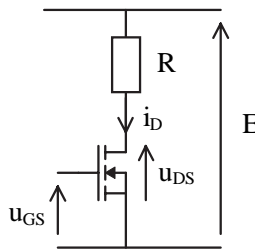


Fig. 18.8 Schéma de base

• *Deux états continus possibles* (Fig. 18.9)

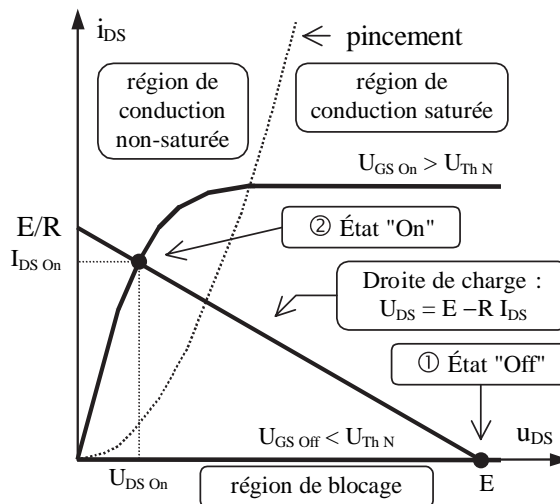


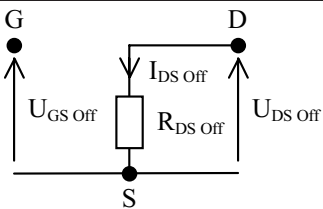
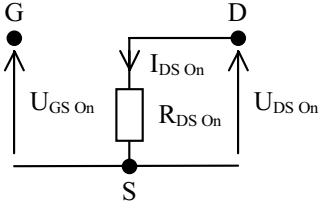
Fig. 18.9 États « On » et « Off »

① *L'état d'isolement* (Off-State) est caractérisé par la résistance d'isolement $R_{DS\ Off}$. En raison de l'imprécision de $U_{Th\ N}$ et du fait que $dU_{Th\ N}/dT$ est négatif, on choisit $U_{GS\ Off}$ suffisamment inférieure à $U_{Th\ N\ Min}$. Par exemple, $U_{GS\ Off} \approx 0\ V$ pour un NMOS à enrichissement.

② *L'état de connexion* (On-State) est caractérisé par la résistance de connexion $R_{DS\ On}$. Le pincement sépare la région de conduction non-saturée de la région de conduction saturée (voir Fig. 18.9). Pour obtenir une conduction non-saturée, il faut appliquer une tension de commande $U_{GS\ On}$ telle que l'on se situe dans la région de conduction non-saturée.

$$U_{GS\ On} > \sqrt{\frac{2 I_{DS\ On\ Max}}{\beta_{N\ Min}}} + U_{Th\ N\ Max}$$

Remarque : Les documents constructeurs fournissent les caractéristiques nécessaires au bon choix de $U_{GS\ On}$ dans le pire cas ($I_{DS\ On\ Max}$, température maximale, etc.).

	Schéma continu ($U_{DS} \geq 0$)	Modèle de base
① État d'isolement (Off-State)		Le NMOS est bloqué. $R_{DS\ Off} = +\infty$
② État de connexion (On-State)		Le NMOS est en conduction non-saturée. Si $U_{DS\ On} \ll 2 (U_{GS\ On} - U_{Th\ N})$ alors $R_{DS\ On} \approx \frac{1}{\beta_N (U_{GS\ On} - U_{Th\ N})}$

Attention ! La notion de conduction saturée n'est pas la même pour un MOSFET que pour un transistor bipolaire. La conduction saturée dans le cas d'un MOSFET correspond à une limitation du courant i_{DS} .

• Puissance dissipée en continu

① État d'isolement	② État de connexion
$P_{Off} = U_{DS\ Off} I_{DS\ Off} \approx 0$	$P_{On} = U_{DS\ On} I_{DS\ On} = R_{DS\ On} I_{DS\ On}^2$

f) Associations de deux MOSFET

• **Mise en parallèle de 2 NMOS** (Fig. 18.10). Le montage en parallèle de 2 NMOS « identiques » (même β_N et même $U_{Th\ N}$), les grilles étant reliées ensemble, est équivalent à un seul NMOS de transconductance égale à $2\beta_N$. Ce résultat se généralise à q NMOS mis en parallèle.

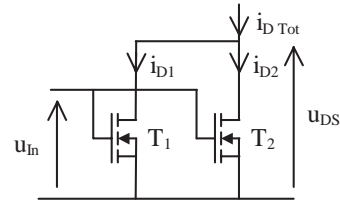


Fig. 18.10 Mise en parallèle

• **Mise en série de 2 NMOS** (Fig. 18.11). Le montage en série de 2 NMOS « identiques » (même β_N et même $U_{Th\ N}$), les grilles étant reliées ensemble, est équivalent à un seul NMOS de transconductance égale à $\beta_N/2$. Ce résultat se généralise à q NMOS mis en série.

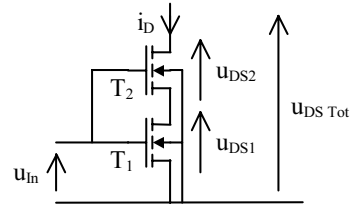


Fig. 18.11 Mise en série

Remarque : $u_{DS\ Tot}$ ne se répartie pas également entre u_{DS1} et u_{DS2} . T_1 n'est jamais en conduction saturée, alors que T_2 peut être en conduction saturée ou en conduction non-saturée.

$$\begin{aligned}
 u_{DS1} &= (u_{In} - U_{Th\ N}) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{i_D}{2i_{D\ pinc}}} \right] \\
 &\leq (u_{In} - U_{Th\ N}) \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \approx 0,3 (u_{In} - U_{Th\ N}) \\
 u_{DS2} &= u_{DS\ Tot} - u_{DS1}
 \end{aligned}$$

18.2.2 Limites et imperfections

a) *Effet substrat*

La tension de seuil $U_{Th\ N}$ du NMOS dépend de la tension substrat-source U_{BS} .

b) *Comportement en température*

– Quand la température augmente, $U_{Th\ N}$ diminue.

$$\frac{dU_{Th\ N}}{dT} \approx -1 \text{ mV/K} \quad \text{à} \quad -7 \text{ mV/K}$$

– Si i_{DS} est suffisamment grand alors $di_{DS}/dT < 0$. C'est cette propriété qui facilite la mise en parallèle de deux MOSFET.

c) *Modèle de Schichman-Hodges*• *Les trois régimes de fonctionnement.*

Parmi les nombreux modèles existants de simulation SPICE des transistors MOS, le plus simple est celui de Schichman-Hodges. Pour rendre compte de la légère augmentation de i_{DS} avec u_{DS} (effet semblable à l'effet « Early »), ce modèle propose l'introduction d'un paramètre de modulation de la longueur du canal noté λ dans les équations.

① Blocage : $u_{GS} \leq U_{Th\ N}$

$$i_{DS} = 0$$

② Conduction non-saturée : $u_{GS} \geq U_{Th\ N} \geq 0$ et $u_{DS} \leq u_{DS\ pinc}$

$$i_{DS} = \beta_N (1 + \lambda u_{DS}) \left[(u_{GS} - U_{Th\ N}) u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2} \right]$$

③ Conduction saturée : $u_{GS} \geq U_{Th\ N} \geq 0$ et $u_{DS} \geq u_{DS\ pinc}$

$$i_{DS} = \frac{\beta_N}{2} (1 + \lambda u_{DS}) (u_{GS} - U_{Th\ N})^2$$

• *Limite entre conduction saturée et conduction non-saturée*

$$u_{DS\ pinc} = u_{GS} - U_{Th\ N} \quad \Rightarrow \quad i_{DS\ pinc} = \frac{\beta_N}{2} (1 + \lambda u_{DS\ pinc}) u_{DS\ pinc}^2$$

• *Caractéristique de sortie* $i_{DS} = f(u_{DS})$ à $U_{GS} = \text{constante}$ (Fig. 18.12). La légère augmentation de i_{DS} avec u_{DS} dans la région de conduction saturée est volontairement exagérée.

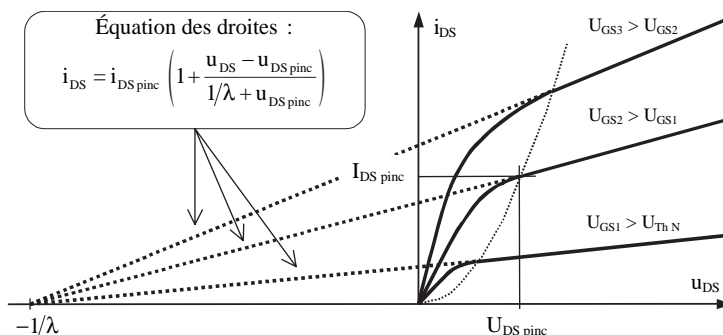


Fig. 18.12 Caractéristique de sortie – Modèle de Schichman-Hodges

• *Paramètres du schéma équivalent « petits signaux »*

② Conduction non-saturée	③ Conduction saturée
$g_m = \beta_N (1 + \lambda U_{DS}) U_{DS}$	$g_m = \beta_N (1 + \lambda U_{DS}) (U_{GS} - U_{Th N})$
$g_{ds} = \beta_N [U_{GS} - U_{Th N} - U_{DS} + 2\lambda U_{DS} (U_{GS} - U_{Th N} - 3U_{DS}/4)]$	$g_{ds} = \frac{\beta_N}{2} \lambda (U_{GS} - U_{Th N})^2$

d) *Comportement dynamique pour les « larges signaux »*

– Les sens conventionnels adoptés pour les courants et les tensions sont précisés (Fig. 18.13).

– Le courant drain-source i_{DS} est donné par les équations précédentes (modèle de base, modèle de Schichman-Hodges ou un autre modèle plus élaboré).

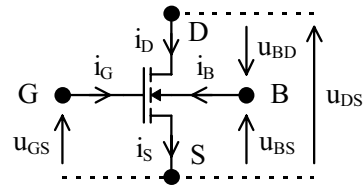


Fig. 18.13 Sens des courants et tensions

• *Schéma équivalent dynamique « larges signaux » complet* (Fig. 18.14)

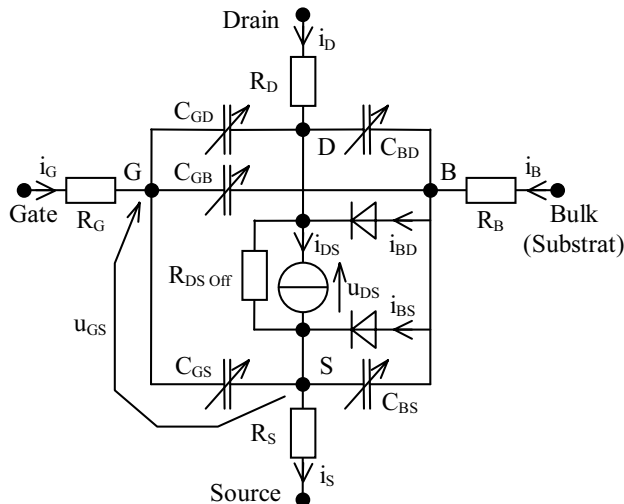


Fig. 18.14 Schéma équivalent « larges signaux » complet

R_G , R_D , R_B et R_S sont respectivement les résistances séries de grille, de drain, de substrat et de source. $R_{DS\ off}$ est la résistance d'isolement drain-source. C_{GB} est la capacité grille-substrat due à la structure même du MOS. C_{GD} et C_{GS} sont les capacités grille-drain et grille-source dues aux recouvrements partiels de la grille sur le drain et de la grille sur la source. C_{BD} et C_{BS} sont les capacités substrat-drain et substrat-source dues aux jonctions substrat-drain et substrat-source représentées par les deux diodes.

• **Schéma équivalent dynamique « larges signaux » simplifié** à $U_{BS} = 0$ (Fig. 18.15). On considère la source et le substrat reliés ensembles ($U_{BS} = 0$), les résistances séries dans le drain, la source et le substrat nulles, et la résistance d'isolement drain-source infinie.

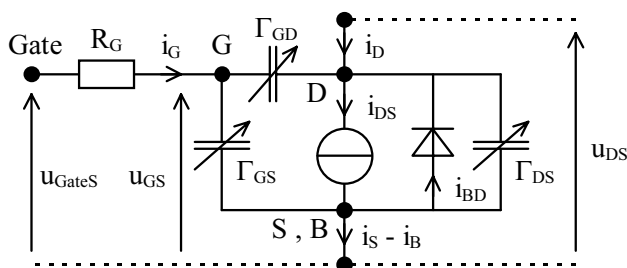


Fig. 18.15 Schéma équivalent « larges signaux » simplifié à $U_{BS} = 0$

Γ_{GS} est la capacité totale entre grille et source, Γ_{GD} la capacité totale entre grille et drain, Γ_{DS} la capacité totale entre drain et source, et R_G la résistance série dans la grille (souvent négligeable).

Remarques :

- On note $C_{ISS} = \Gamma_{GS} + \Gamma_{GD}$ la capacité d'entrée (input capacitance). Cette capacité varie avec le potentiel de drain.
- Les capacités dépendent des tensions à leurs bornes.
- Les courants substrat-drain i_{BD} et substrat-source i_{BS} sont donnés par les équations des jonctions. Ces diodes parasites représentent les jonctions de structure.
- Les schémas équivalents dynamiques « larges signaux lentement variables » et « continu » s'obtiennent à partir des schémas équivalents précédents en supprimant les condensateurs.

Exemple 18.2.2

Un des modèles SPICE du BS170 (ZETEX), sachant que source et substrat sont au même potentiel, spécifie $\beta_N = 0,1233$, $U_{ThN} = 1,824$ V, $I_S = 1$ fA, $\lambda = 0$, $R_S = 1,572$ Ω , $R_D = 1,436$ Ω , $C_{GS} = 28$ pF, $C_{GD} = 3$ pF, $C_{BD} = 35$ pF. Les capacités sont données pour une tension de polarisation nulle. Ce modèle est complété par la mise entre drain et source d'une diode bloquée en polarisation normale.

e) Retards en commutation

On considère un transistor en commutation monté selon le schéma de base (voir Fig. 18.8). Pour un transistor fonctionnant en commutation sur charge résistive dans des conditions spécifiées, on obtient le diagramme temporel (Fig. 18.16).

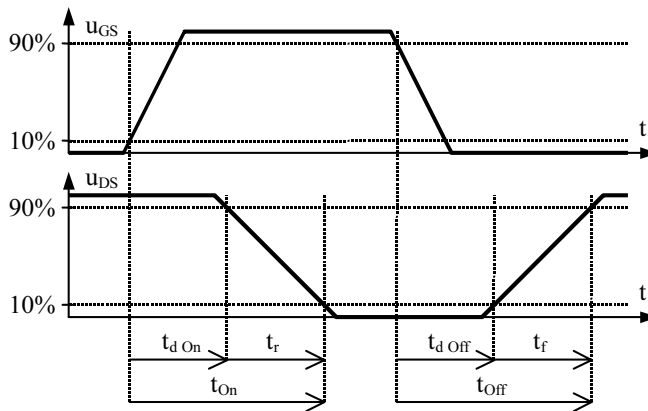


Fig. 18.16 Retards schématisés en commutation

$t_{d\text{ On}}$ est le retard à la conduction (Turn-On Delay Time), t_r le temps de montée (*Rise Time*) du courant i_{DS} , $t_{d\text{ Off}}$ le retard au blocage (Turn-Off Delay Time), t_f le temps de descente (*Fall Time*) du courant i_{DS} , t_{on} le temps de mise en conduction (turn-on time), et t_{off} le temps de blocage (turn-off time).

Remarque : Ces temps résultent des capacités du schéma équivalent (Fig. 18.14 ou Fig. 18.15). Une commutation rapide du MOSFET s'obtient avec un fort courant de grille, et une commutation douce s'obtient par une maîtrise de celui-ci.

f) Comportement dynamique pour les « petits signaux »

Le schéma équivalent dynamique « petits signaux » simplifié à $U_{BS} = 0$ (Fig. 18.17) est obtenu à partir du schéma équivalent simplifié (Fig. 18.15), en considérant la résistance de grille nulle, la diode parfaite et polarisée en inverse.

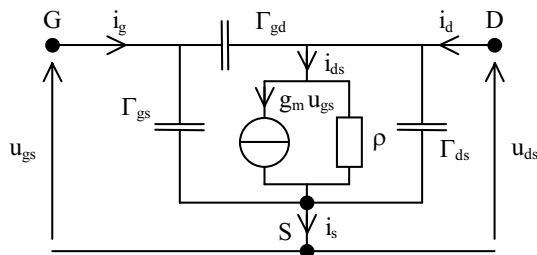


Fig. 18.17 Schéma équivalent « petits signaux » simplifié à $U_{BS} = 0$

Pour la détermination de g_m et ρ voir § 18.2.1c). Les capacités dépendent aussi du point de fonctionnement. Les documents constructeurs indiquent les capacités suivantes mesurées en source commune ($U_{GS} = 0$) généralement à $f = 1\text{ MHz}$ pour

différentes valeurs de U_{DS} . $C_{iss} = \Gamma_{gs} + \Gamma_{gd}$ (à $u_{ds} = 0$ V) est la capacité d'entrée (input capacitance), $C_{oss} = \Gamma_{ds} + \Gamma_{gd}$ (à $u_{gs} = 0$ V) est la capacité de sortie (output capacitance), et $C_{rss} = \Gamma_{gd}$ est la capacité de transfert inverse (reverse transfer capacitance).

Exemple 18.2.3

Un document constructeur du MOSFET BS170 spécifie $C_{iss} = 24$ pF, $C_{oss} = 17$ pF et $C_{rss} = 7$ pF en valeurs typiques.

Remarque : La capacité Γ_{gd} est à l'origine d'un effet Miller comme dans le cas du transistor bipolaire (voir Chapitre 17 : Transistors bipolaires).

18.3 MOSFET CANAL P À ENRICHISSEMENT

18.3.1 Modèle de base

La structure d'un PMOS à enrichissement ressemble à celle d'un NMOS à enrichissement, les zones N étant remplacées par des zones P et réciproquement.

• **Les trois régimes de fonctionnement.** La tension de seuil (threshold voltage) du PMOS est notée $U_{Th P}$ ($U_{Th P} < 0$). β_P est positif.

① Blocage : $u_{GS} \geq U_{Th P}$

$$i_{DS} = 0$$

② Conduction non-saturée : $u_{GS} \leq U_{Th P} \leq 0$ et $u_{DS} \geq u_{DS \text{ pinc}}$

$$-i_{DS} = \beta_P \left[(u_{GS} - U_{Th P}) u_{DS} - \frac{u_{DS}^2}{2} \right] \quad \text{Expression quadratique en } u_{DS}$$

③ Conduction saturée : $u_{GS} \leq U_{Th P} \leq 0$ et $u_{DS} \leq u_{DS \text{ pinc}}$

$$-i_{DS} = \frac{\beta_P}{2} (u_{GS} - U_{Th P})^2 \quad \text{Source de courant parfaite commandée par } u_{GS}$$

Méthode

Pour un fonctionnement donné, les tensions (u_{GS} , u_{DS} , u_{BS} , u_{BD} , $U_{Th P}$) et les courants (i_D , i_S , i_G , i_B , i_{DS}) d'un PMOS à enrichissement sont de signes opposés aux tensions et courants d'un NMOS à enrichissement.

• **Limite entre conduction saturée et conduction non-saturée**

$$u_{DS \text{ pinc}} = u_{GS} - U_{Th P} \quad \Rightarrow \quad -i_{DS \text{ pinc}} = \frac{\beta_P}{2} u_{DS \text{ pinc}}^2$$

• **Transconductances** β_P (A/V^2) et K_P (A/V^2). μ_P est la mobilité des trous, C_{OX} la capacité de la grille par unité de surface (voir Fig. 18.2). Pour un dopage habituel, $\mu_P \approx 250 \text{ cm}^2/Vs$. Comme μ_P est environ 2,5 fois inférieur à μ_N , un PMOS est moins rapide qu'un NMOS « semblable » pour une même géométrie et des niveaux de dopage identiques.

$$\beta_P = \mu_P C_{OX} \frac{W}{L}$$

$$K_P = \mu_P C_{OX}$$

$$C_{OX} = \frac{\epsilon}{D}$$

• **Caractéristiques – Schémas équivalents.** Les caractéristiques du PMOS sont semblables à celles données pour le NMOS (§ 18.2.1b) en valeur absolue. Pour les signes, il faut remplacer i_{DS} par $-i_{DS}$, u_{GS} par $-u_{GS}$ et u_{DS} par $-u_{DS}$. Les schémas équivalents donnés pour le NMOS (§ 18.2.1c) restent valables.

18.3.2 Limites et imperfections

– Effet substrat : Similaire au NMOS.

– Comportement en température : Similaire au NMOS.

$$dU_{Th P}/dT \approx +1 \text{ mV/K} \quad \text{à} \quad +7 \text{ mV/K}$$

– Modèle de Schichman-Hodges : Les équations données pour le NMOS à enrichissement (§ 18.2.2c)) s'adaptent similairement au modèle de base, sachant que λ est positif.

– Comportement dynamique : Les schémas équivalents « larges signaux » et « petits signaux » donnés pour le NMOS à enrichissement restent valables à l'exception de la diode (jonction substrat-drain) qu'il faut inverser. Compte tenu des sens adoptés, les tensions u_{GS} et u_{DS} et le courant i_D sont négatifs en fonctionnement normal.

18.4 MOSFET À APPAUVRISSEMENT

La structure d'un MOSFET canal N (resp. P) à appauvrissement ressemble à celle d'un MOSFET canal N (resp. P) à enrichissement, à la différence essentielle près que le canal N (resp. P) est conducteur en l'absence de tension u_{GS} grâce à une implantation ionique d'atomes donneurs (resp. accepteurs) dans la zone de canal. Pour diminuer la conduction, il faut rétrécir le canal en l'appauvrissant de porteurs, ce qui s'obtient en repoussant les électrons (resp. les trous) en appliquant une tension u_{GS} négative (resp. positive). À une certaine tension u_{GS} , dite tension de seuil, la conduction s'interrompt. La tension de seuil du MOSFET canal N à appauvrissement est négative et celle du canal P positive.

• **Caractéristiques comparées** $i_{DS} = f(u_{GS})$ des quatre types de MOSFET (Fig. 18.18). Les caractéristiques sont données pour une tension U_{DS} constante donnée.

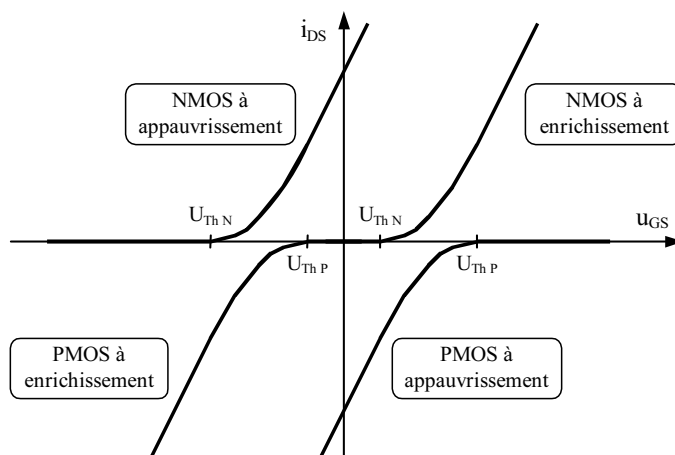


Fig. 18.18 Comparaison des quatre types de MOSFET

– Pour $u_{GS} = 0$, les MOSFET à appauvrissement conduisent, alors que les MOSFET à enrichissement sont bloqués.

– Pour $u_{GS} > 0$, le NMOS à appauvrissement fonctionne en enrichissement. Et pour $u_{GS} < 0$, le PMOS à appauvrissement fonctionne en enrichissement.

• **Modèles d'un MOSFET canal N ou P à appauvrissement.** Les modèles donnés pour les NMOS et PMOS à enrichissement restent valables. Seules les tensions de seuil diffèrent. Celle d'un NMOS à appauvrissement est négative et celle d'un PMOS à appauvrissement positive.

• **Schémas équivalents d'un MOSFET canal N ou P à appauvrissement.** Les schémas équivalents donnés pour les NMOS et PMOS à enrichissement restent valables.

18.5 L² FET (LOGIC LEVEL FET)

Avec un L² FET, il suffit d'une tension grille-source de 5 V pour qu'il soit fortement conducteur contrairement à un MOSFET standard pour lequel il faut 10 V. L'utilisation d'un L² FET peut permettre de simplifier l'interface de commande. Il n'est pas adapté aux applications analogiques.

18.6 MOSFET À MESURE DE COURANT (SENSORFET)

Un MOSFET de puissance est un circuit intégré comprenant plusieurs milliers de petits transistors identiques connectés en parallèle. Il suffit de séparer les sources en deux groupes pour obtenir un MOSFET à mesure de courant (SensorFET). Le rapport du nombre de transistors dans un groupe sur le nombre de transistors dans l'autre groupe, fixe le rapport des courants i_S/i_M .

• **Symbole** (Fig. 18.19). D : Drain, G : Grille (Gate), K : Kelvin, M : Mesure (Measure), S : Source

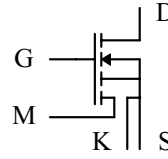


Fig. 18.19 Symbole

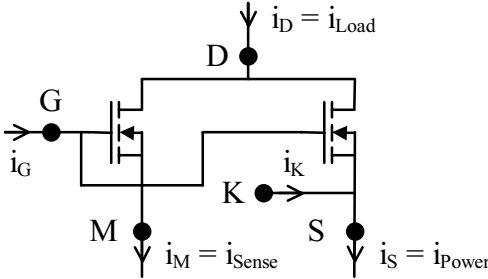
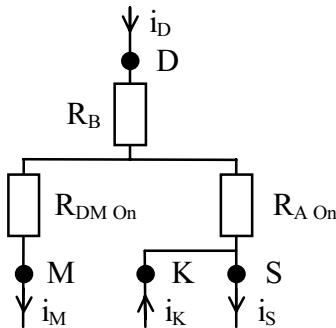


Fig. 18.20 Circuit équivalent

$$n = \left. \frac{i_S}{i_M} \right|_{U_{MK} = 0}$$

• **Modèle résistif du SensorFET à l'état de connexion** (Fig. 18.21)



$$R_{DM\ On} = n R_{A\ On}$$

Fig. 18.21 Modèle résistif à l'état de connexion

Ordre de grandeur : $n \approx 1500 \Rightarrow R_{A\ On} \ll R_{DM\ On}$. R_B est la résistance drain-substrat commune, $R_{DM\ On}$ la résistance drain-mesure à l'état de connexion, $R_{A\ On}$ la résistance « active » (partie puissance) à l'état de connexion.

• **Imperfections**

- Le rapport des courants n varie en fonction de la tension grille-source.
- La résistance $R_{DM\ On}$ varie en fonction de la température :

$$R_{DM\ On} = R_{DM\ On}(25\ ^\circ\text{C}) e^{a(\theta - 25)} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{125} \ln \left(\frac{R_{DM\ On}(150\ ^\circ\text{C})}{R_{DM\ On}(25\ ^\circ\text{C})} \right)$$

18.7 FREDFET (FAST RECOVERY EPITAXIAL DIODE FET)

Un MOSFET possède une diode intrinsèque inhérente à sa structure entre substrat et drain. Dans les applications où cette diode conduit en direct, il faut tenir compte de ses caractéristiques qui ne sont pas excellentes si on la compare à une diode rapide FRED (*Fast Recovery Epitaxial Diode*). Un FREDFET est un MOSFET dont les caractéristiques de la diode intrinsèque ont été améliorées.

18.8 I.G.B.T.

- **Fonction – Symbole** (Fig. 18.22). L'I.G.B.T. (Insulated Gate Bipolar Transistor) est un interrupteur électronique unidirectionnel de puissance commandé par une tension. G : Grille (*Gate*), C : Collecteur (*Collector*), E : Émetteur (*Emitter*).

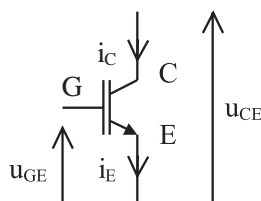


Fig. 18.22 Symbole

- **Constitution** (Fig. 18.23). L'I.G.B.T. est constitué d'un transistor bipolaire PNP et d'un MOSFET canal N (NMOS), l'objectif étant de combiner les avantages des transistors bipolaires (commutation de forts courants sous des tensions élevées) et des MOSFET (commande en tension sans courant).

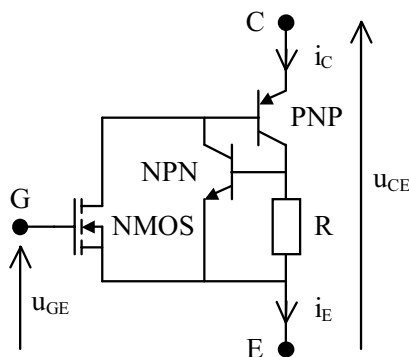


Fig. 18.23 Constitution

Fonctionnement normal. Si la tension u_{GE} est supérieure à la tension de seuil du NMOS, le NMOS conduit, entraînant la conduction du PNP par extraction de son courant de base. Si le NMOS est suffisamment conducteur ($R_{DS\ On}$ faible), le PNP se sature. Au contraire, si la tension u_{GE} est inférieure à la tension de seuil du NMOS, le NMOS est bloqué, entraînant le blocage du PNP. Le tout se comporte comme un transistor NPN commandé par une tension (le courant de commande est quasi nul en dehors des commutations).

Remarque : Par construction, un transistor NPN parasite est présent. Avec le transistor PNP, il réalise une structure thyristor (NPN plus PNP) à l'origine du risque de verrouillage (latch-up) qui se produit uniquement pour les forts courants lors de du_{CE}/dt importants. Des protections sont à prévoir (réseau d'amortissement, écrêteur, etc.).

Chapitre 19

Thyristors

Thyristor est le nom générique qui désigne une famille entière de semi-conducteurs ayant au moins trois jonctions, c'est à dire au moins quatre couches semi-conductrices. Ce nom a été donné par analogie aux anciennes technologies : les tubes thyatron, ou tubes électroniques à gaz. Ces composants ont un fonctionnement bistable. Ils possèdent un état passant ou conducteur (*On-state*) et un état bloqué (*Off-state*), et ils peuvent être unidirectionnels ou bidirectionnels.

19.1 S.C.R. (REDRESSEURS COMMANDÉS)

19.1.1 Fonction – Symbole

Un *S.C.R.* (*Silicon Controlled Rectifier*) ou *redresseur commandé* est un interrupteur électronique unidirectionnel à fermeture commandée. Un S.C.R. est communément appelé *thyristor*, il est aussi connu sous le nom de thyristor triode à blocage inverse.

- **Symbole** (Fig. 19.1). A : Anode, K : Cathode, G : Gâchette (*Gate*) ou électrode de commande. La pointe du triangle indique le sens passant en direct du courant.

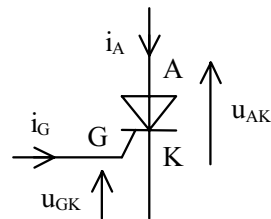


Fig. 19.1 Symbole d'un S.C.R.

19.1.2 Modèle idéal (Fig. 19.2)

L'amorçage du S.C.R. (fermeture du contact) s'effectue par le courant de gâchette, et son blocage (ouverture du contact) s'effectue en annulant le courant d'anode i_A , point ($i_A = 0$, $u_{AK} = 0$).

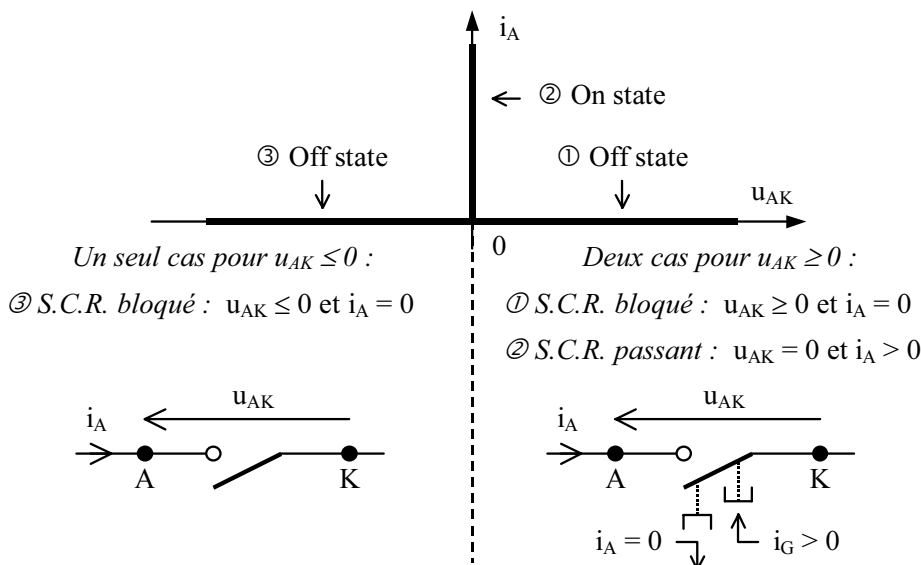


Fig. 19.2 Caractéristique – Modèle idéal d'un S.C.R.

19.1.3 Constitution – Modèle des deux transistors imbriqués

• Constitution (Fig. 19.3)

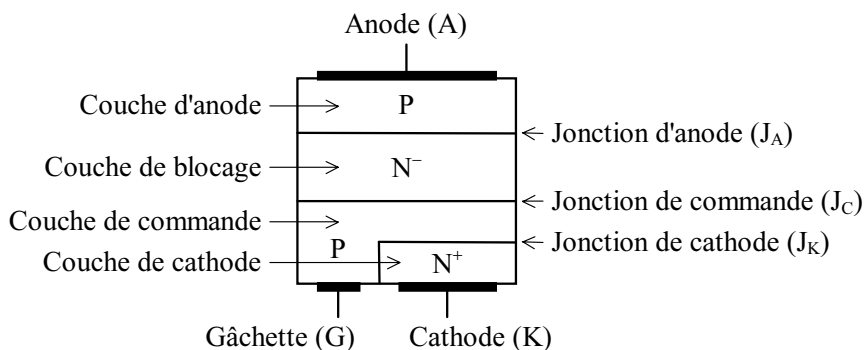


Fig. 19.3 Constitution d'un S.C.R.

• **Modèle des deux transistors imbriqués** (Fig. 19.4) - **Fonctionnement**

1) Sous tension directe ($u_{AK} > 0$). Au repos, aucun des transistors n'est conducteur : $i_G = 0$ et $i_A = 0$. Si on injecte un courant dans la gâchette du S.C.R., T_N devient conducteur, ce qui entraîne la conduction de T_P : le S.C.R. est *amorcé* et $i_A > 0$. Si on supprime alors le courant de gâchette, l'ensemble reste conducteur car chacun des transistors assure la circulation du courant de base de l'autre : le S.C.R. est *verrouillé* et $i_A > 0$.

2) Sous tension inverse ($u_{AK} < 0$). Les jonctions J_A et J_K sont polarisées en inverse et la jonction J_C est polarisée en direct : le S.C.R. est *bloqué*.

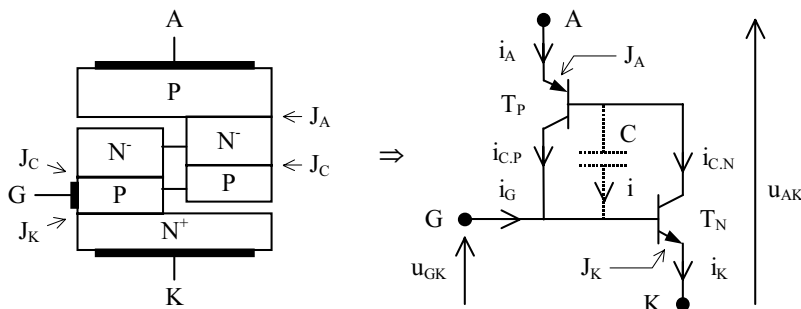


Fig. 19.4 Modèle équivalent des deux transistors imbriqués

19.1.4 Caractéristique tension – courant (Fig. 19.5)

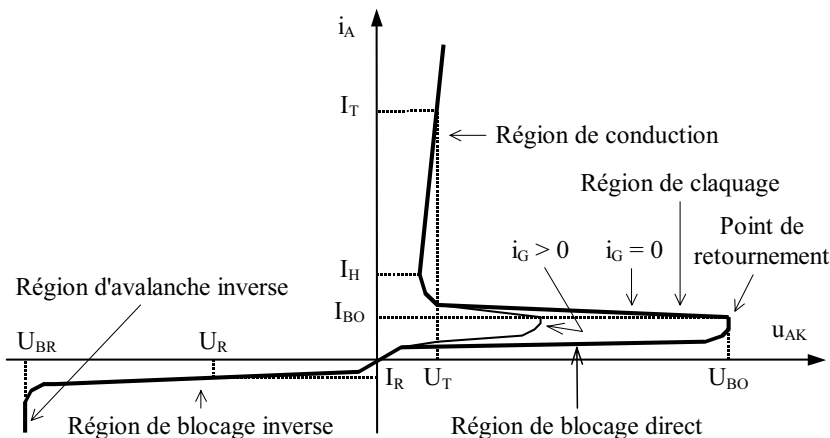


Fig. 19.5 Caractéristique $i_A = f(u_{AK})$

- **Polarisation directe** ($u_{AK} > 0$ et $i_A > 0$). La région de blocage directe (forward blocking region) se situe de l'origine jusqu'à la tension de retournement par avalanche U_{BO} (breakover voltage). On notera l'influence du courant de gâchette i_G qui abaisse la tension d'amorçage.
- **Polarisation inverse** ($u_{AK} < 0$ et $i_A < 0$). La caractéristique ressemble à celle d'une diode en inverse. La région de blocage inverse (*Reverse blocking region*) est suivie de la région d'avalanche inverse (*Reverse avalanche region*). Le dépassement de U_{BR} peut provoquer la destruction du composant si le courant n'est pas maîtrisé.
- **Notations.** U_T (*On-state voltage*) : Tension directe à l'état passant (typiquement 1 à 3 V). I_T (*On-state current*) : Intensité directe à l'état passant. r_T : Résistance dynamique à l'état passant. U_{BO} (*breakover voltage*) : Tension de claquage en direct. I_{BO} (*breakover current*) : Courant de claquage en direct. I_H (*Holding current*) : Intensité de maintien ou hypostatique. I_L (*Latching current*) : Intensité d'accrochage, toujours supérieure ou égale à I_H . U_R (*Reverse voltage*) : Tension inverse. I_R (*Reverse current*) : Intensité inverse. U_{BR} (*Breakdown reverse voltage*) : Tension inverse de retournement.

19.1.5 Amorçage d'un S.C.R.

Pour qu'un S.C.R. s'amorce, il faut à la fois :

- que le courant de gâchette i_G soit supérieur au courant de gâchette d'amorçage, noté I_{GT} (*Gate Trigger Current*),
- que le courant d'anode i_A atteigne une intensité minimale appelée *courant d'accrochage* notée I_L (*Latching current*) avant la disparition du courant de gâchette,
- que la tension anode-cathode u_{AK} soit positive.

Attention ! Pour $u_{AK} > 0$, l'amorçage d'un S.C.R. peut aussi se produire dans les conditions suivantes, même en l'absence du courant i_G .

- 1) Si u_{AK} atteint la tension de retournement U_{BO} (voir Fig. 19.5). Ce mode d'amorçage est utilisé pour les diodes à quatre couches.
- 2) Si une énergie lumineuse suffisante éclaire la jonction de commande (J_C). Ce mode d'amorçage est utilisé pour les photo-thyristors.
- 3) Si du_{AK}/dt est trop élevée. La variation de la tension u_{AK} par rapport au temps produit un courant $i \approx C du_{AK}/dt$ qui peut entraîner l'amorçage ; C étant la capacité de la jonction de commande J_C (en pointillé sur Fig. 19.4).
- 4) Si la température augmente. L'amorçage est alors favorisé rendant le S.C.R. plus sensible aux amorçages intempestifs.

19.1.6 Blocage d'un S.C.R.

Pour qu'un S.C.R. se bloque, il faut que l'intensité du courant d'anode i_A devienne inférieure à une intensité minimale appelée *intensité de maintien* ou *hypostatique* notée I_H (*Holding current*) pendant un temps minimum.

Deux solutions sont possibles :

- soit par *extinction naturelle*, c'est-à-dire par passage à zéro du courant d'anode (cas des courants alternatifs),
- soit par *extinction forcée*, c'est-à-dire par application d'une tension inverse ($u_{AK} < 0$) qui entraîne l'annulation du courant d'anode i_A .

L'extinction naturelle est peu perturbatrice à l'ouverture du circuit.

19.1.7 Aspects temporels

• **Temps d'amorçage par la gâchette.** Le temps d'amorçage par la gâchette, noté t_{gt} (*Gate controlled turn on time*), est la durée qui sépare l'instant d'application d'une commande de gâchette et l'instant où le S.C.R. devient passant. Pour diminuer le temps d'amorçage il faut augmenter l'intensité du courant de gâchette i_G ou diminuer autant que possible le temps de montée du courant de gâchette.

• **Temps de désamorçage ou de blocage par commutation.** Le temps de désamorçage, noté t_q (*Circuit commutated turn off time*), est la durée qui sépare l'instant où le courant direct i_A s'annule de l'instant où une tension directe u_{AK} peut être de nouveau appliquée sans risque de réamorçage. Le temps de blocage fixe la fréquence maximale de fonctionnement du S.C.R. car il est bien supérieur au temps d'amorçage. Le temps de blocage peut être diminué en imposant une tension inverse conséquente qui génère un courant inverse.

19.1.8 Limites principales

- Courant direct à l'état passant (noté I_T pour Triggered) maximal.
- Contrainte thermique I^2t .
- Vitesse critique de croissance du courant d'anode à l'état passant (noté di/dt).
- Tension directe à l'état bloqué (notée U_D pour Direct) maximale.
- Tension inverse (notée U_R pour Reverse) maximale.
- Vitesse critique de croissance de la tension u_{AK} à l'état bloqué (noté du/dt). Cette grandeur décroît vite quand la température augmente.
- Puissance maximale dissipable, fonction de la température maximale admissible par la jonction et de la résistance thermique.

19.2 G.T.O. THYRISTORS

Le *G.T.O. Thyristor* (*Gate-Turn-Off Thyristor*) ou *S.C.R. blocable* est un interrupteur électronique unidirectionnel à fermeture et ouverture commandées. Il est aussi appelé G.C.O. (*Gate-Cut-Off*) ou G.C.S. (*Gate-Controlled-Switch*). Ce composant est surtout destiné à travailler avec des sources de tensions continues, comme, par exemple, dans les onduleurs en pont.

- **Symbole** (Fig. 19.6). A : Anode, K : Cathode, G : Gâchette (*Gate*).
- **Amorçage et blocage.** Le G.T.O. est amorçable comme le S.C.R. Il présente la possibilité supplémentaire d'être blocable par application d'une tension Gâchette-Cathode négative, générant un courant négatif de gâchette élevé (typiquement un tiers du courant d'anode devant être annulé). La tension directe à l'état passant aux bornes d'un G.T.O. est typiquement de 2 à 3 V.
- **Polarisation inverse** ($u_{AK} < 0$ et $i_A < 0$). En inverse, le G.T.O. est équivalent à une résistance incapable de bloquer une tension et ne permettant pas un courant significatif. Si nécessaire, pour assurer une tenue en tension inverse il faut ajouter une diode en série avec le G.T.O. (Fig. 19.7).

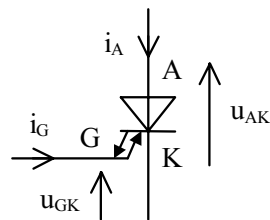


Fig. 19.6 Symbole d'un G.T.O.

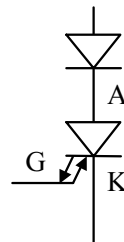


Fig. 19.7 Diode en série

19.3 TRIAC

19.3.1 Fonction – Symbole

Le *TRIAC* (*TRIode Alternative Current semiconductor*) est un interrupteur électronique bidirectionnel à fermeture commandée. Le TRIAC est plus particulièrement conçu pour fonctionner sur un réseau alternatif.

- **Symbole** (Fig. 19.8). A₁ : Anode 1, A₂ : Anode 2, G : Gâchette (*Gate*) ou électrode de commande. Les deux triangles indiquent que le courant peut passer dans les deux sens.

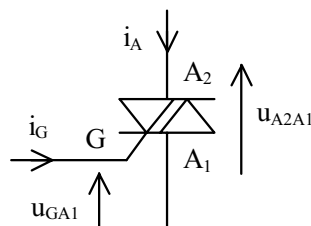


Fig. 19.8 Symbole d'un TRIAC

19.3.2 Modèle idéal (Fig. 19.9)

L'amorçage du TRIAC (fermeture du contact) s'effectue par le courant de gâchette, et son blocage (ouverture du contact) s'effectue par *extinction naturelle* ($i_A = 0$).

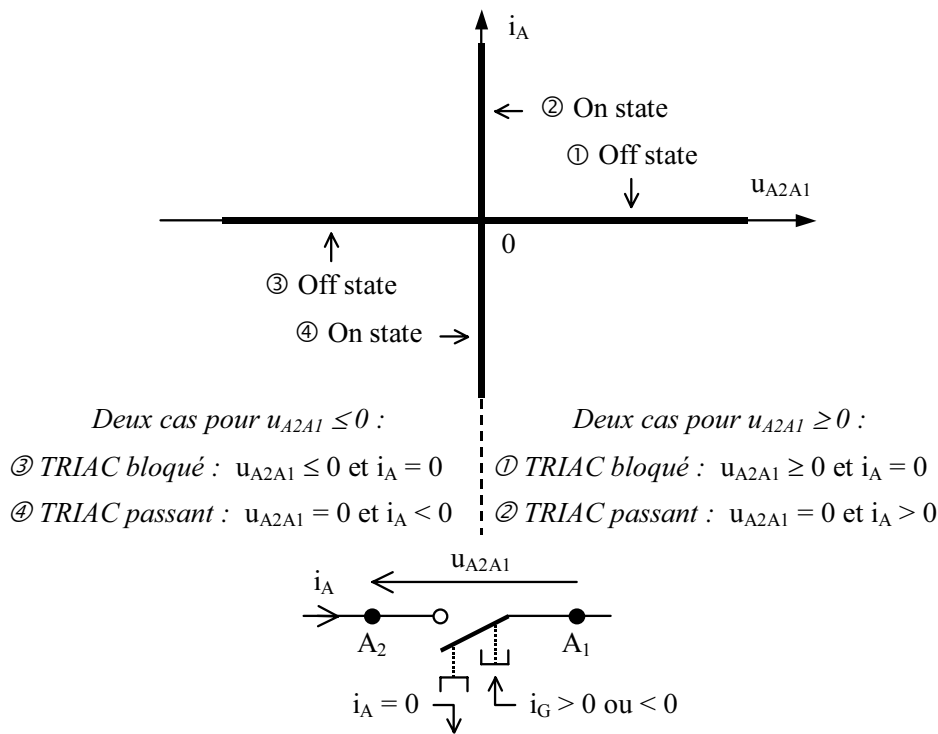


Fig. 19.9 Caractéristique – Modèle idéal d'un TRIAC

19.3.3 Constitution – Schéma équivalent à deux S.C.R. (Fig. 19.10)

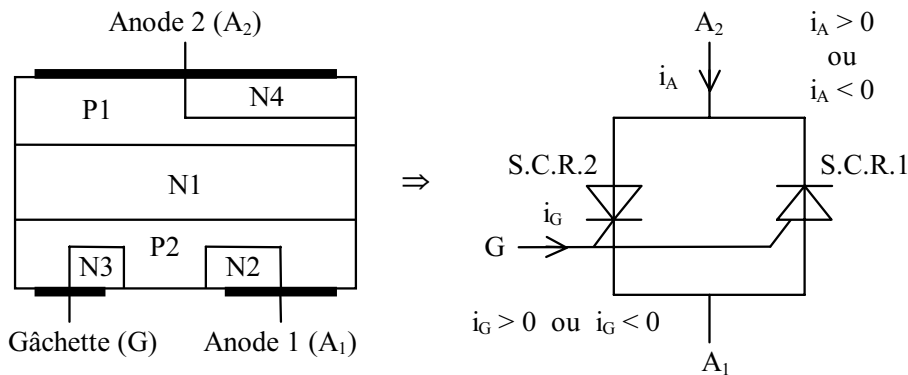


Fig. 19.10 Constitution d'un TRIAC – Schéma équivalent à deux S.C.R.

Un TRIAC peut être représenté de façon simplifiée par un schéma électrique équivalent composé de deux S.C.R. connectés tête-bêche, l'un avec une gâchette de

- que le courant d’anode i_A atteigne en valeur absolue une intensité minimale appelée *courant d’accrochage* notée I_L (*Latching current*) avant la disparition du courant de gâchette,
- que la tension u_{A2A1} soit positive ou négative.

Du fait de la structure de commande de gâchette, l’amorçage peut s’effectuer dans les quatre quadrants définis par u_{A2A1} et i_G (Fig. 19.12). Le rapport I_L/I_H (sensibilité), est donné pour des TRIAC d’intensités inférieures à 10 A.

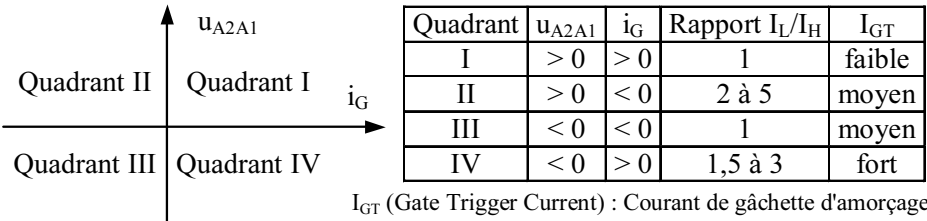


Fig. 19.12 Amorçage dans les quatre quadrants

Attention ! L’amorçage d’un TRIAC peut aussi se produire dans les conditions suivantes.

- 1) Si la tension entre anodes atteint la tension de retournement positive U_{BO}^+ ou la tension de retournement négative U_{BO}^- . Cet amorçage est utilisé pour les DIAC.
- 2) Si une énergie lumineuse suffisante éclaire la jonction de commande. Ce mode d’amorçage est utilisé pour les photo-triac.
- 3) Si du_{A2A1}/dt est trop élevée, similairement à un S.C.R. Ceci définit le du/dt dit *statique*. Ce paramètre est modifié lors du blocage du TRIAC du fait du couplage important entre les deux S.C.R. équivalents, ce qui définit un du/dt dit *en commutation* noté $(du/dt)_C$ qui est généralement plus faible.
- 4) Si la température augmente. L’amorçage est alors favorisé rendant le TRIAC plus sensible aux amorçages intempestifs.

19.3.6 Blocage d’un TRIAC

Conçu pour fonctionner en courant alternatif, le blocage d’un TRIAC s’effectue par suppression du courant des anodes (*extinction naturelle*). Précisément, pour qu’un TRIAC se bloque, il faut que l’intensité du courant i_A devienne inférieure en valeur absolue à une intensité minimale appelée *intensité de maintien* ou *hypostatique* notée I_H (*Holding current*).

19.3.7 Aspects temporels

Le temps d'amorçage par la gâchette, noté t_{gt} (*Gate controlled turn on time*), est la durée qui sépare l'instant d'application d'une commande de gâchette et l'instant où le TRIAC devient passant. Ce temps est défini pour les quatre quadrants.

Remarque : Le temps de désamorçage (*Circuit commutated turn off time*), n'est pas défini pour un TRIAC, le blocage s'effectuant par extinction naturelle.

19.4 DIAC

19.4.1 Fonction – Symbole (Fig. 19.13)

Le *DIAC* (*Diode Alternating Current switch*) est une *diode de déclenchement* (trigger diode) bidirectionnelle dont l'utilité est la production d'impulsions positives et négatives. Il est constitué de trois couches : N-P-N. Les deux triangles indiquent que le courant peut passer dans les deux sens.

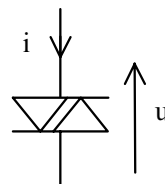


Fig. 19.13 Symbole d'un DIAC

19.4.2 Modèle quasi-idéal (Fig. 19.14)

De manière très simplifiée, on peut considérer qu'il s'agit d'un TRIAC sans gâchette de commande, mais ayant une tension « élevée » à l'état passant (en général de l'ordre d'une vingtaine de volts).

- L'amorçage du DIAC (fermeture du contact) s'effectue lorsque la tension à ses bornes atteint la tension de déclenchement positive ou la tension de déclenchement négative. Elles sont notées U_{BO} (*breakover voltage*), et valent un trentaine de volts en général.
- Le blocage du DIAC (ouverture du contact) s'effectue lorsque l'intensité du courant devient inférieure en valeur absolue à l'intensité de maintien (I_H).

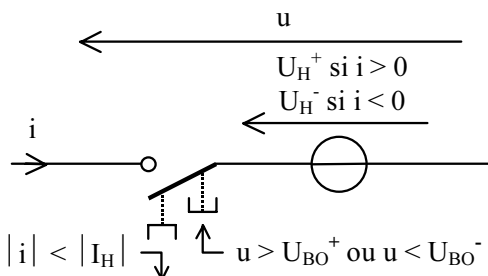


Fig. 19.14 Modèle quasi-idéal d'un DIAC

19.4.3 Caractéristique tension – courant (Fig. 19.15)

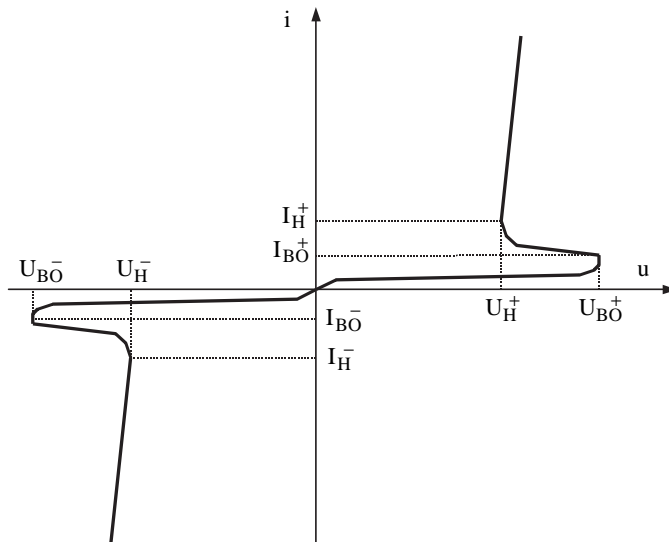


Fig. 19.15 Caractéristique $i = f(u)$

19.5 CONTRAINTES DE MISE EN ŒUVRE DES S.C.R. ET TRIAC

(voir aussi chapitre 35 : Relais statiques – Gradateurs)

19.5.1 Vitesse de variation de la tension u_{AK} ou u_{A2A1}

Une vitesse de variation rapide de la tension u_{AK} dans le cas d'un S.C.R., ou de la tension u_{A2A1} dans le cas d'un TRIAC, peut amorcer le composant.

Méthode

Contraintes à respecter pour éviter l'amorçage

- Le TRIAC étant bloqué, la vitesse de variation de la tension u_{A2A1} doit rester inférieure au du/dt statique.

$$\frac{du_{A2A1}}{dt} < \frac{du}{dt}$$

- Pendant le blocage du TRIAC la vitesse de variation de la tension u_{A2A1} doit rester inférieure au du/dt en commutation.

$$\frac{du_{A2A1}}{dt} < \left(\frac{du}{dt} \right)_c$$

- Le S.C.R. étant bloqué ou pendant son blocage, la vitesse de variation de la tension u_{AK} doit rester inférieure au du/dt . Le du/dt en commutation d'un S.C.R. est égal au du/dt statique.

$$\frac{du_{AK}}{dt} < \frac{du}{dt}$$

• **Réseaux amortisseurs.** Pour freiner la variation de cette tension, on place un réseau RC (*snubbing network*) en parallèle sur le composant (Fig. 19.16). La résistance est nécessaire pour limiter l'intensité du courant i_A de décharge du condensateur dans le composant ; elle permet aussi de contrôler l'amortissement du circuit. Le montage peut être amélioré, dans le cas où la tension u_{AK} d'un S.C.R. est toujours positive, en plaçant une diode en parallèle sur la résistance (la diode court-circuite la résistance lorsque le S.C.R. est bloqué) ; le condensateur freine alors plus fortement la variation de la tension u_{AK} .

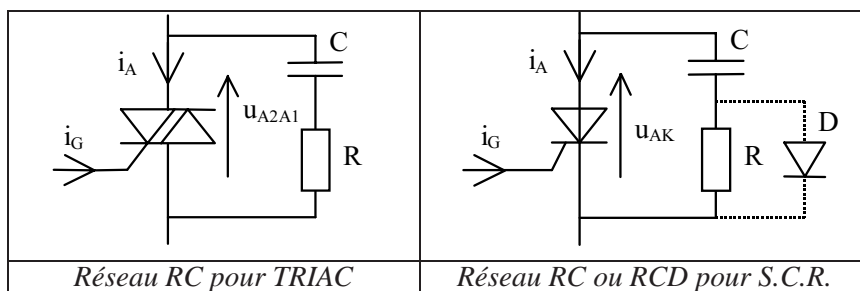


Fig. 19.16 Réseaux amortisseurs

Exemple 19.5.1

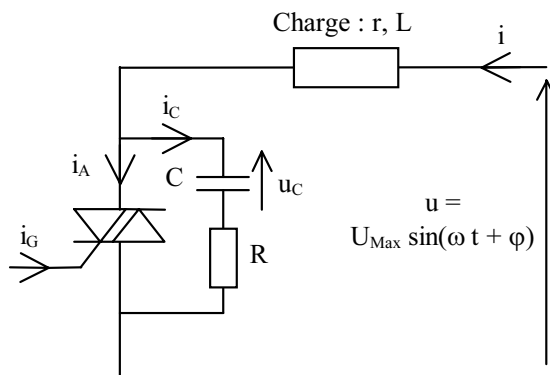


Fig. 19.17 Exemple couramment rencontré

Le schéma (Fig. 19.17) représente un cas très général (gradateurs, commutateurs synchrones, etc.). Les relations permettant de déterminer les éléments du réseau RC restent valables dans un bon nombre de situations.

1) La contrainte du du/dt statique d'un TRIAC ou S.C.R. conduit à une première condition sur C. Cette inégalité est déterminée pour un échelon de tension de valeur U_{Max} , le composant étant bloqué (mise sous tension dans le pire cas).

$$C > \frac{U_{Max}^2}{L \left(du/dt \right)^2}$$

2) La contrainte du $(du/dt)_C$ en commutation d'un TRIAC conduit à une deuxième condition sur C. Cette inégalité est déterminée lorsque le TRIAC se bloque, la tension u étant en avance de phase de φ sur le courant i .

$$C > \frac{(U_{Max} \sin \varphi)^2}{L \left((du/dt)_C \right)^2}$$

3) La résistance doit limiter le courant en dessous du courant maximal admissible ($I_{T Max}$ répétitif) lors de la mise en conduction du TRIAC (ou S.C.R.) dans le pire cas ($u_C = U_{Max}$).

$$R > \frac{U_{Max}}{I_{T Max}}$$

4) Pour limiter l'amplitude des oscillations (perturbations par rayonnement) et éviter les surtensions aux bornes du TRIAC (ou S.C.R.), la résistance R est déterminée si possible pour un amortissement critique. La valeur de R ne doit pas être trop importante car elle diminue l'efficacité du condensateur C.

$$R = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} - r \quad (\text{pour l'amortissement critique})$$

Remarques :

- Dans le cas d'un S.C.R., le du/dt en commutation est égal au du/dt statique. En conséquence, l'inégalité donnée en 2) n'est pas à prendre en compte.
- Dans le cas d'un TRIAC, si le déphasage est mal connu ou s'il varie de façon importante, l'inégalité donnée en 2) est à considérer dans le cas le plus défavorable. C'est à dire pour un déphasage de 90° . L'inégalité donnée en 1) n'est plus alors à prendre compte car $(du/dt)_C$ en commutation est toujours inférieur à du/dt statique. Ce cas se rencontre fréquemment : contacteurs et électroaimants (variation de réductance), moteurs (variation de charge), etc.
- Si la valeur de l'inductance L est faible, voire inconnue, il est conseillé d'ajouter une inductance (une centaine de micro-henrys) en série avec la charge, ce qui limite la capacité C.

- Si la charge varie beaucoup, il faut envisager le pire des cas.
- Lors de l'utilisation d'une V.D.R. (varistance) on peut admettre que les calculs ne sont pas modifiés.

19.5.2 Valeur maximale de la tension u_{AK} ou u_{A2A1}

Une valeur de la tension u_{AK} dans le cas d'un S.C.R., ou de la tension u_{A2A1} dans le cas d'un TRIAC, supérieure à la tension de retournement par avalanche U_{BO} amorce le composant. De telles surtensions sont générées par le montage (charge inductive) ou conduites par le réseau d'alimentation. D'une façon générale, le réseau RC limite les surtensions générées par le montage, l'amortissement critique étant recherché (mais pas toujours obtenu). Par contre, le réseau RC ne limite généralement pas suffisamment les surtensions conduites par le réseau qui possèdent une énergie importante. L'utilisation d'une varistance améliore cette protection (Fig. 19.18).

Exemple 19.5.2

Pour une tension réseau de 230 V (la tension efficace maximale étant de 244 V, on a : $U_{Max} = 244\sqrt{2} \approx 345$ V) on choisira une tension d'écrtage de la varistance de 710 V à 100 A (environ deux fois plus). Cela impose l'utilisation d'un S.C.R. ou TRIAC de tension U_{DRM} correspondante (≈ 700 V).

19.5.3 Valeur maximale du courant i_A

Il faut obligatoirement ajouter une protection pour limiter la durée et la fréquence des surcharges accidentelles dues à des dysfonctionnements. L'utilisation d'un fusible rapide répond à cette exigence (Fig. 19.18).

Méthode

Choix d'un fusible rapide

- Le i^2t du fusible doit être inférieur au i^2t du composant.
- La tension nominale du fusible doit être supérieure ou égale à la tension d'alimentation.
- Le courant nominal du fusible doit être supérieur au courant en régime établi dans le composant.
- Le courant crête du fusible doit être supérieur au courant crête dans le composant.

Remarque : Le i^2t d'un TRIAC (ou S.C.R.) est relié à l'intensité crête de surcharge accidentelle directe à l'état passant I_{TSM} (*Non-repetitive surge on-state*

current) sur une demi-période (10 ms) par la relation :

$$i^2 t_{(10\text{ms})} = \frac{I_{\text{TSM}}^2}{2} 0,010_{(\text{s})}$$

($I_{\text{TSM}}^2/2$ correspond au carré de l'intensité efficace d'un courant sinusoïdal d'amplitude I_{TSM}).

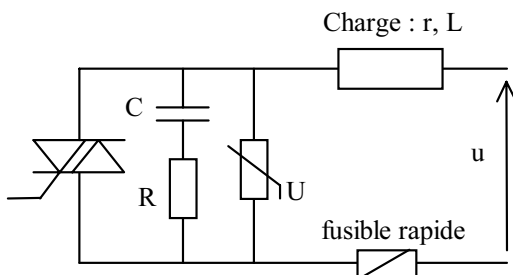


Fig. 19.18 Réseau RC – Varistance – Fusible rapide

19.5.4 Vitesse de variation du courant i_A

Une augmentation rapide du courant i_A détruit le TRIAC (ou S.C.R.). C'est notamment le cas lorsque la charge est résistive, enclenchée au maximum de u_{AK} ou u_{A1A2} , ou bien capacitive. Lorsque la vitesse de variation du courant i_A dépasse le di/dt admissible par le TRIAC (ou S.C.R.), il faut ajouter une faible inductance en série avec celui-ci. Cette inductance peut être saturable.

Chapitre 20

Photocomposants

20.1 GÉNÉRALITÉS

20.1.1 Photon – Onde électromagnétique

Un photon est un grain d'énergie sans masse. Il se propage à la vitesse de 300 000 km/s environ dans le vide en vibrant à une fréquence f (aussi notée ν), formant ainsi dans l'espace une onde électromagnétique. Un photon transporte l'énergie

$$E = h\nu \quad \text{avec} \quad h \approx 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{Constante de Planck})$$

La puissance rayonnante d'un faisceau lumineux monochromatique (une seule fréquence ν) comprenant n_p photons par seconde est

$$P = n_p E \quad \text{Unités :} \quad W = s^{-1} J$$

La vitesse (ou célérité) des photons dépend du milieu traversé. En conséquence, la longueur d'onde aussi. Dans le vide, comme dans l'air, $C \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

$$\lambda = \frac{C}{\nu} \quad \text{Unités :} \quad m = \frac{m/s}{Hz} = \frac{m/s}{s^{-1}}$$

La fréquence définit la couleur (pour le visible) de l'onde électromagnétique. Bien que la longueur d'onde dépende du milieu traversé, on la préfère généralement à la fréquence.

20.1.2 Grandeurs et unités optiques

Il existe deux systèmes d'unités optiques (Fig. 20.1) : les unités énergétiques et les unités lumineuses en référence à la perception visuelle humaine.

Grandeurs énergétiques	Symbole Unité	Grandeurs visuelles ou photométriques	Symbole Unité
Flux énergétique = Puissance totale (<i>radiant flux or power</i>)	Φ_e Watt : W	Flux lumineux (<i>luminous flux</i>)	Φ_v Lumen : lm
Eclairement énergétique = Flux reçu par unité de surface (<i>irradiance</i>)	E_e W/m ²	Eclairement lumineux (<i>illuminance</i>)	E_v Lux : lx = lm/m ²
Intensité énergétique = flux émis par unité d'angle solide (<i>radiant intensity</i>)	I_e W/sr	Intensité lumineuse (<i>luminous intensity</i>)	I_v Candela : cd = lm/sr
Brillance énergétique = Intensité par unité de surface (<i>Radiance</i>)	L_e ou B W/sr/m ²	Luminance (<i>luminance</i>)	L_v cd/m ²

Fig. 20.1 Correspondance des grandeurs et unités

20.1.3 Perception visuelle humaine

a) La perception visuelle humaine dépend de la longueur d'onde du rayonnement reçu et de sa luminance (Fig. 20.2).

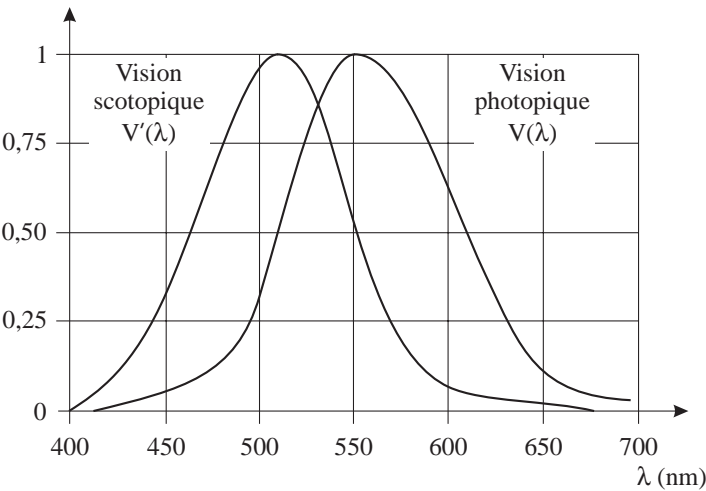


Fig. 20.2 Vision photopique et vision scotopique de « l'œil standard »

- En vision diurne (ou photopique) on obtient la courbe *photopique* d'efficacité lumineuse relative qui est maximale et égale à l'unité pour une longueur d'onde de 555 nm.
- En vision nocturne (ou scotopique) on obtient la courbe *scotopique* d'efficacité lumineuse relative qui est maximale et égale à l'unité pour une longueur d'onde de 507 nm. La vision nocturne est décalée vers le bleu.
- Entre les domaines photopique et scotopique, se situe le *mésopique*, mal défini, correspondant à la vision crépusculaire.

Méthode

Pour passer des unités énergétiques aux unités visuelles, et réciproquement, on utilise les courbes (Fig. 20.2) d'efficacité lumineuse relative de « l'œil standard » retenues par la commission internationale de l'éclairage (C.I.E.), en conjonction avec les expressions suivantes où U_e est une unité énergétique et U_v une unité visuelle.

Vision photopique :

$$U_v = K V(\lambda) U_e \quad \text{avec} \quad K = 683 \text{ lm/W} \quad \text{et} \quad V(\lambda) \text{ sans unité}$$

Vision scotopique :

$$U_v = K' V'(\lambda) U_e \quad \text{avec} \quad K' = 1703 \text{ lm/W} \quad \text{et} \quad V'(\lambda) \text{ sans unité}$$

Remarque : La valeur du coefficient K a été fixée à 683 lm/W pour tenir compte de l'ancienne unité de luminance appelée bougie.

Exemple 20.1.1

En vision photopique, à $\lambda = 555 \text{ nm}$, la courbe est maximale soit $V(\lambda) = 1$, et on a $1 \text{ W} = 683 \text{ lm}$, $1 \text{ W/m}^2 = 683 \text{ lx}$, $1 \text{ W/sr} = 683 \text{ cd}$ et $1 \text{ W/sr/m}^2 = 683 \text{ cd/m}^2$.

Attention ! Ces relations ne sont valables que dans le cas d'un rayonnement monochromatique (une seule longueur d'onde). Pour des rayonnements polychromatiques, il faut remplacer $L_e(\lambda) d\lambda$ par $L_v(\lambda) d\lambda = K V(\lambda) L_e(\lambda) d\lambda$ pour passer des unités énergétiques aux visuelles.

b) La perception visuelle humaine n'est pas instantanée

Dans le cas d'un éclairage périodique, on distingue trois plages selon la fréquence.

1) Lorsque l'éclairage est lentement variable (fréquence inférieure à quelques hertz), l'œil suit les variations au plus près et l'observateur les ressent.

2) Lorsque la fréquence de variation de l'éclairement se situe entre quelques hertz et une fréquence particulière appelée *fréquence critique*, l'œil ne suit plus les variations exactes et l'observateur ressent un papillotement ou scintillement.

3) Lorsque la fréquence de variation de l'éclairement est supérieure à la fréquence critique, l'œil ne suit plus les variations du fait de la persistance rétinienne et l'observateur ressent un éclairement continu égal à la valeur moyenne de l'éclairement variable réel (loi de Talbot).

Remarque : La *fréquence critique* (ou *de fusion de l'œil*) dépend de nombreux paramètres, on considère qu'elle varie habituellement entre 5 Hz et 70 Hz.

20.1.4 Rayonnement infrarouge

L'intensité du rayonnement infrarouge dans l'atmosphère est réduite d'environ 6 dB/km (facteur 0,25/km). Dans le cas où on utilise un réflecteur pour diriger le faisceau, les pertes peuvent atteindre, suivant l'état de surface, environ 60 % par réflexion et environ 20 % par diffraction. Le brouillard peut opacifier et même interdire toute transmission.

20.1.5 Émetteurs optoélectroniques ou antennes (Fig. 20.3)

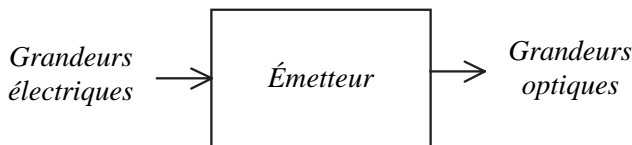


Fig. 20.3 Émetteur optoélectronique

– Rendement énergétique :

$$\eta_e = \frac{\text{puissance rayonnée}}{\text{puissance électrique appliquée}}$$

– Rendement lumineux :

$$\eta_v = K_\lambda \eta_e = \frac{\text{puissance lumineuse en lumens}}{\text{puissance électrique appliquée}}$$

– Rendement quantique :

$$\eta_q = \frac{\text{nombre de photons émis}}{\text{nombre d'électrons injectés}}$$

– Temps de réponse de l'émission lumineuse par rapport à l'application d'un signal électrique.

20.1.6 Récepteurs optoélectroniques (Fig. 20.4)



Fig. 20.4 Récepteur optoélectronique

- Rendement quantique :

$$\eta_q = \frac{\text{nombre d'électrons générés}}{\text{nombre de photons reçus}}$$

- Sensibilité : Elle s'exprime en A/W, A/W/m² ou A/lx
- Temps de réponse du signal électrique par rapport au signal lumineux reçu.

20.2 DIODES ÉLECTROLUMINESCENTES (OU LED)

Les diodes électroluminescentes ou LED (*Light Emitting Diodes*) sont des diodes qui émettent des radiations électromagnétiques dans le visible (du bleu au rouge), ou proche du visible (infrarouge et ultra violet). Dans la jonction PN d'une LED, la recombinaison d'un électron avec un trou provoque l'émission spontanée d'un photon (Fig. 20.5).

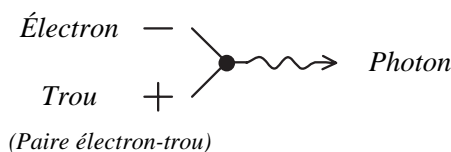


Fig. 20.5 Emission spontanée

La perte d'énergie électrique E par l'électron est convertie en énergie optique $E = h\nu$ au photon. La couleur (longueur d'onde) d'émission dépend essentiellement de la largeur de la bande interdite du matériau utilisé.

$$\lambda = \frac{hc}{E_G} \quad \text{Unités :} \quad m = \frac{J \cdot s \cdot m/s}{J}$$

où λ est la longueur d'onde en m, $h \approx 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js la constante de Planck, $C \approx 3 \cdot 10^8$ m/s la vitesse de la lumière dans le vide, et E_G la largeur de la bande interdite en eV ou J.

20.2.1 Symbole – Grandeurs lumineuses – Modèles

• **Symbole** (Fig. 20.6). A : Anode, K : Cathode. Tension u_D et courant i_D : convention récepteur. La pointe du triangle indique le sens passant en direct du courant. Les LED émettent des radiations électromagnétiques lorsqu’elles sont traversées par un courant dans le sens direct.

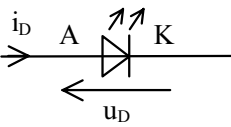


Fig. 20.6 Symbole d’une LED

• **Flux lumineux (ou puissance lumineuse) émis.** Il est quasiment proportionnel au courant traversant la LED. Le rendement quantique η_q diminue fortement avec le vieillissement de la LED.

$$\phi_e = \eta_q i_D \qquad \text{Unités :} \qquad W = \frac{W}{A} A$$

• **Intensité lumineuse** (répartition du flux émis, selon la direction). Elle est proportionnelle au courant traversant la LED.

• « **Couleur** » et **longueur d’onde centrale d’émission** (Fig. 20.7).

Longueur d’onde λ (nm)	Couleur
> 800, par ex. 900	infrarouge
660	rouge
610	orange
590	jaune
560	vert
470	bleu
420	violet
< 400	ultraviolet

Fig. 20.7 « Couleur » et longueur d’onde

• **Tension de seuil d’une LED.** Elle peut s’obtenir très approximativement à partir de sa couleur d’émission.

$$U_{D0} \approx \frac{E_G}{q} = \frac{hC}{q\lambda} \approx \frac{1240}{\lambda_{(nm)}} \qquad \text{avec} \quad q : \text{Valeur absolue de la charge de l’électron}$$

• **Modèles.** Les modèles vus pour la diode à jonction PN restent valables, seules les valeurs des paramètres changent (voir Chapitre 16 : Diodes).

Méthode

Dans la pratique, les documents constructeurs fournissent les courbes nécessaires à la détermination des grandeurs lumineuses (énergétiques ou visuelles) à partir de la polarisation de la LED.

20.2.2 Types de conduction

On distingue deux types de pilotage des LED : la conduction continue et la conduction pulsée ou hachée. Pour choisir le bon type de pilotage, il faut tenir compte des propriétés suivantes.

- La perception visuelle humaine n'est pas instantanée (voir § 20.1.3).
- Le flux énergétique émis ϕ_e diminue lorsque la température de jonction θ_J augmente. Le flux lumineux et les intensités énergétique et lumineuse suivent la même loi.

$$\phi_e(\theta_J) = \Phi_e(25^\circ\text{C}) e^{-k(\theta_J - 25)}$$

où k est le coefficient thermique de la LED en K^{-1} (ordre de grandeur : $k \approx 0,01/^\circ\text{C}$)

- La réponse en fonction du temps de la température de jonction θ_J à un échelon de puissance dissipée P_D est donnée par la relation suivante (voir Chapitre 23 : Dissipation thermique).

$\theta_J(t) = \Theta_A + P_D R_{th JA} (1 - e^{-t/\tau_{th}})$ où τ_{th} est la constante de temps thermique de la LED, et Θ_A la température ambiante.

Attention ! La résistance thermique jonction-ambiant d'une LED est la somme de la résistance thermique jonction-pin et de la résistance thermique pin-ambiant ($R_{th JA} = R_{th JP} + R_{th PA}$). Cette dernière dépend du montage de la LED.

a) Cas d'une visualisation humaine (unités visuelles)

Ce qui compte en général dans le cas d'applications visuelles, c'est l'éclairement lumineux moyen perçu par l'observateur.

- D'une manière générale, on préfère la conduction continue pour sa simplicité et parce que la conduction pulsée à courant de pic élevé et faible rapport cyclique ne permet pas d'obtenir des flux lumineux moyens plus élevés qu'avec la conduction continue (à l'exception des LED GaP et GaAsP).
- La conduction pulsée est nécessaire dans deux cas : l'affichage multiplexé (par exemple « N » afficheurs 7 segments) pour économiser des ressources matérielles, et le contrôle de la luminosité par le rapport cyclique dans des rapports pouvant aller de 1 à 2000. La fréquence de rafraîchissement doit être choisie supérieure à 100 Hz (valeur conseillée) pour éviter l'effet de papillotement, et même mieux supérieure à 1 kHz, car en dessous de cette valeur la température de jonction maximale est significativement supérieure à la température de jonction moyenne.

b) Cas d'une transmission optoélectronique (unités énergétiques)

Ce qui compte dans le cas d'applications non-visuelles, c'est l'éclairement énergétique maximal reçu par le photodétecteur.

D’une manière générale, on utilise une conduction pulsée car cela autorise des impulsions élevées de courant dans la LED et donc de lumière émise, ce qui se traduit au niveau du photodétecteur par un photocourant élevé. De plus, pour éviter une baisse du rendement énergétique, il est préférable de piloter la LED par des impulsions « éloignées » les unes des autres afin que la température de jonction ne s’élève pas trop.

20.3 DIODES LASER

Les diodes LASER (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) peuvent émettre un rayonnement dans le domaine de l’infrarouge ($\lambda \approx 0,8 \text{ }\mu\text{m}$ à $1,6 \text{ }\mu\text{m}$ selon le matériau). Dans une diode LASER, un photon incident provoque la recombinaison d’un électron avec un trou qui génère l’émission d’un deuxième photon en phase avec le photon incident (Fig. 20.8).

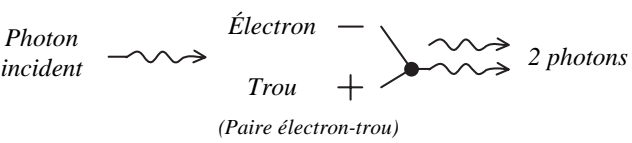


Fig. 20.8 Émission stimulée

La lumière émise par une diode LASER est dite *cohérente*. Cela signifie que l’on a conjointement :

- cohérence temporelle : les ondes émises possèdent même phase et même longueur d’onde, la lumière émise est donc monochromatique (une seule couleur) ;
- cohérence spatiale : la direction de propagation des photons est unidirectionnelle.

En pratique, on considère qu’une lumière est cohérente si la largeur spectrale est suffisamment étroite et le diagramme de rayonnement suffisamment directif (la lumière émise par une diode LASER est considérée comme cohérente, et celle d’une LED comme incohérente).

Comparaison	Diode LASER	LED
Largeur spectrale	0,1 nm à 5 nm	20 nm à 50 nm
Elargissement d’une impulsion pour 1 km de fibre 100 ps/nm	10 ps à 500 ps	2 ns à 5ns
Temps de montée (10 % à 90 % d’une impulsion de puissance)	inférieur à 1 ns	quelques ns
Diagramme de rayonnement	10°	50°
Puissance émise	quelques mW	1 mW
Puissance couplée	quelques mW	0,1 mW

20.4 PHOTODIODES

Dans la jonction PN d'une photodiode, en sens opposé à l'émission spontanée, l'*absorption* d'un photon incident provoque la création d'une paire électron-trou (Fig. 20.9).

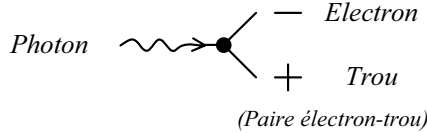


Fig. 20.9 Absorption

L'énergie optique $E = h\nu$ du photon est convertie en un gain d'énergie électrique E à l'électron.

20.4.1 Symbole (Fig. 20.10)

A : Anode, K : Cathode. Tension u et courant i : convention récepteur. La pointe du triangle indique le sens passant en direct du courant.

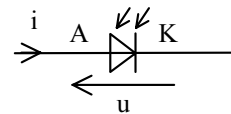


Fig. 20.10 Symbole d'une photodiode

20.4.2 Modèle de base

- **Équation en fonctionnement normal.** On considère que le courant de la photodiode est la superposition du courant i_D d'une diode non-éclairée et du courant i_{CC} généré par l'éclairement. Le photocourant i_{CC} est noté ainsi car il correspond au courant en court-circuit, c'est-à-dire à $u = 0$.

$$i = i_D - i_{CC} = I_S \left(e^{\frac{u}{NU_T}} - 1 \right) - i_{CC}$$

– Sensibilité K : Le courant i_{CC} est quasiment proportionnel au flux incident ϕ . Le flux ϕ est ici le flux mesuré compte tenu de la réponse spectrale de la photodiode. On peut ajouter des filtres devant la photodiode afin de modifier sa réponse spectrale, par exemple pour l'adapter à une mesure du flux lumineux conforme à l'efficacité lumineuse de « l'œil standard ».

$$i_{CC} = K\phi \quad \text{Unités : } A = \frac{A}{W} W$$

La sensibilité K est reliée au rendement quantique et à la fréquence, ou la longueur d'onde par :

$$K = \eta_q \frac{q}{h\nu} = \eta_q \frac{q\lambda}{hc} \approx \frac{\eta_q \lambda_{(nm)}}{1240}$$

– Courant d'obscurité : C'est le courant i_D ($\phi = 0 \Rightarrow i_{CC} = 0$). En polarisation inverse, si $u < -3NU_T$ alors $i_D \approx -I_S$

- **Fonctionnement en zone de claquage.** Le comportement est similaire à celui d'une diode (voir Chapitre 16 : Diodes).

- **Caractéristique hors zone de claquage** (Fig. 20.11). La caractéristique en obscurité ($\phi = 0$) correspond à la caractéristique d'une diode classique. On obtient un réseau de caractéristiques $i = f(u)$ paramétré par le flux incident. La photodiode est un récepteur dans les quadrants I et III, et un générateur dans le quadrant IV.

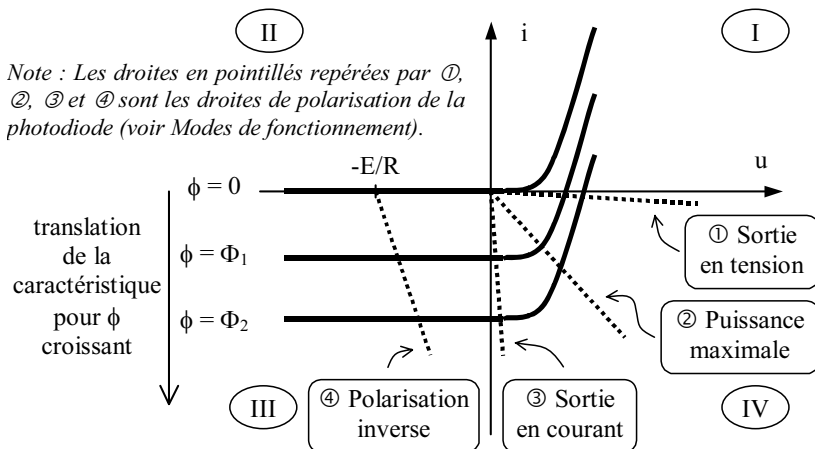


Fig. 20.11 Caractéristique $i = f(u)$ du modèle de base d'une photodiode

- **Schéma équivalent « larges signaux »** (Fig. 20.12). C'est une source de courant i_{CC} commandée par le flux incident, en parallèle sur le modèle de base d'une diode (source de courant i_D commandée par la tension à ses bornes).

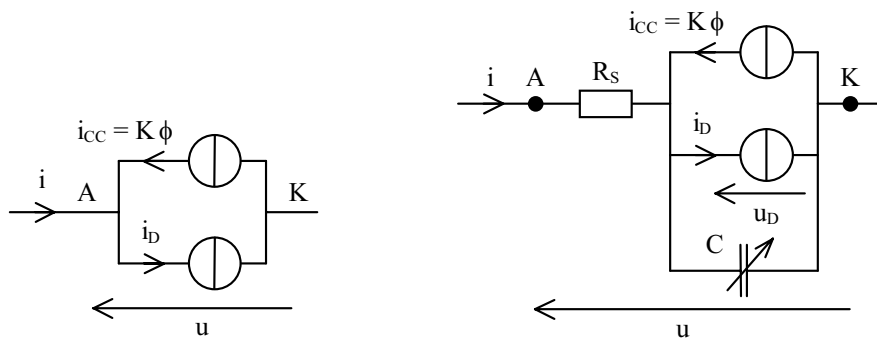


Fig. 20.12 Schéma équivalent de base « larges signaux »

Fig. 20.13 Schéma équivalent dynamique « larges signaux »

20.4.3 Modèle dynamique

C'est une source de courant i_{CC} commandée par le flux incident, superposée au modèle dynamique « larges signaux » d'une diode (Fig. 20.13). Pour plus de détails, voir Chapitre 16 : Diodes.

20.4.4 Modes de fonctionnement

• **Polarisation de la photodiode** (Fig. 20.14). On ne s'intéresse ici qu'aux seules polarisations dans les quadrants III et IV (voir Fig. 20.11), c'est-à-dire pour $i \leq 0$ et $E \geq 0$.

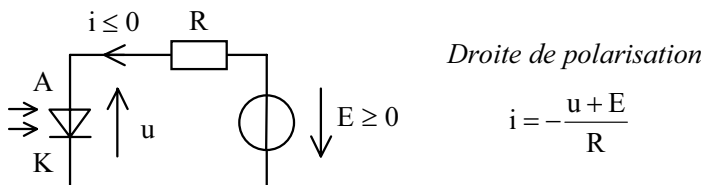


Fig. 20.14 Polarisation de la photodiode

• **Mode photovoltaïque - Quadrant IV**. La photodiode est génératrice. On distingue trois cas.

① Sortie en tension : $E = 0$ et $R \rightarrow +\infty \Rightarrow i \rightarrow 0$. La tension à vide est :

$$u_{\text{vide}} = NU_T \ln \left(\frac{i_{\text{CC}}}{I_S} + 1 \right)$$

Pour réaliser la condition $R \rightarrow +\infty$, on peut utiliser le montage (Fig. 20.15).

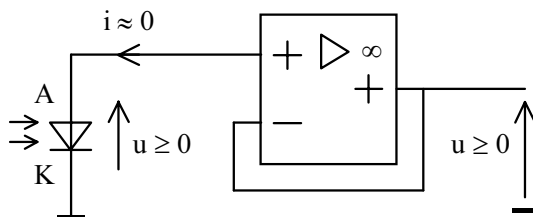


Fig. 20.15 Mode photovoltaïque – Sortie en tension

Remarques :

- La tension est une fonction logarithmique du flux incident.
- Le circuit est très lent à cause de la grande constante de temps du circuit (résistance élevée en parallèle sur la photodiode). Le courant I_S est fonction de nombreux paramètres et varie énormément avec la température.

② Sortie à puissance maximale : Pour $E = 0$, on cherche la résistance R optimale qui assure que la puissance en sortie soit maximale. On a :

$$P_{\text{Max}} = -U_{\text{Opt}} I_{\text{Opt}}$$

Ce fonctionnement est utilisé pour les piles solaires (ou photopiles) ou le transport d'informations par la lumière.

③ Sortie en courant : $E = 0$ et $R \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$. Le courant i en court-circuit est $-i_{CC}$ qui est proportionnel au flux incident. On appelle aussi ce fonctionnement : le *mode photoampérique*. Pour réaliser la condition $R \rightarrow 0$, on utilise le montage (Fig. 20.16).

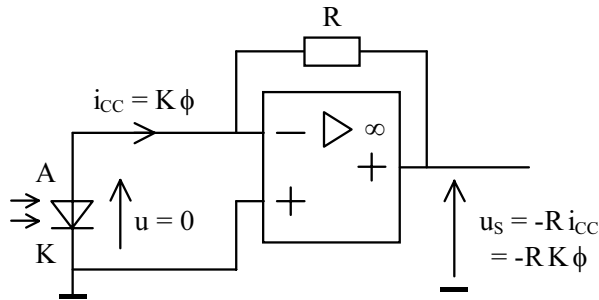


Fig. 20.16 Mode photovoltaïque – Sortie en courant

Remarques :

- La tension de sortie est proportionnelle au flux incident. Le montage a une bonne linéarité et présente un faible bruit en sortie car le courant de fuite I_S est quasiment nul.
- Le montage est moins rapide qu'en polarisation inverse.

● **Mode photoconductif – Quadrant III.** La photodiode est réceptrice, elle est polarisée en inverse.

④ Polarisation inverse : $E > 0$, $i < 0$ et $u < 0$

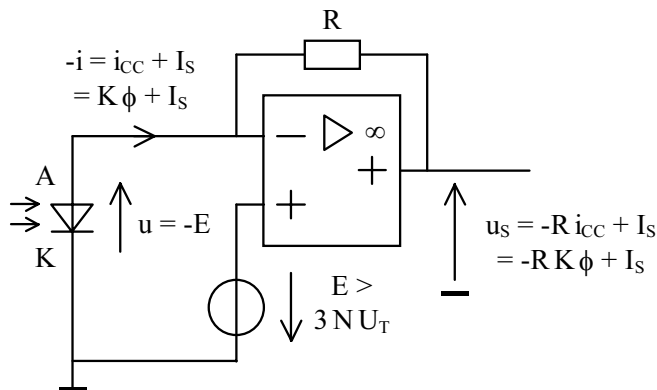


Fig. 20.17 Mode photoconductif – Sortie en courant

Remarques :

- Rapidité.
- Augmentation du courant inverse de fuite dû à la polarisation ($i \neq 0$ pour $\phi = 0$), et par conséquent du niveau de bruit. Dans le schéma équivalent de la photodiode, on a $i_D = -I_S$.
- Pour obtenir une résistance $R = 0$, et retrouver une partie des avantages du mode photoampérique, on utilise le montage (Fig. 20.17).

20.5 PHOTOTRANSISTORS

• **Symbole** (Fig. 20.18). B : Base, C : Collecteur (*Collector*), E : Emetteur (*Emitter*).

• **Description.** La jonction CB est utilisée en photodiode polarisée en inverse. La sensibilité est multipliée par l'amplification en courant d'un transistor β . Les inconvénients d'un phototransistor sont : sa faible linéarité, sa sensibilité à la température, et surtout sa lenteur car la capacité ramenée à l'entrée (effet Miller) est importante. Il est donc conseillé de sortir sur l'émetteur plutôt que sur le collecteur. Le plus souvent, la base n'est pas accessible.

• **Modèles.** Tous les modèles donnés pour le transistor restent valables (voir Chapitre 17 : Transistors bipolaires). Il suffit de considérer que la diode entre base et collecteur est une photodiode (voir § 20.4). Par exemple, en conduction directe, avec $u_{BC} < -3N_R U_T$ (Fig. 20.19), les équations deviennent :

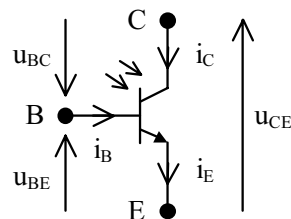


Fig. 20.18 Symbole d'un phototransistor

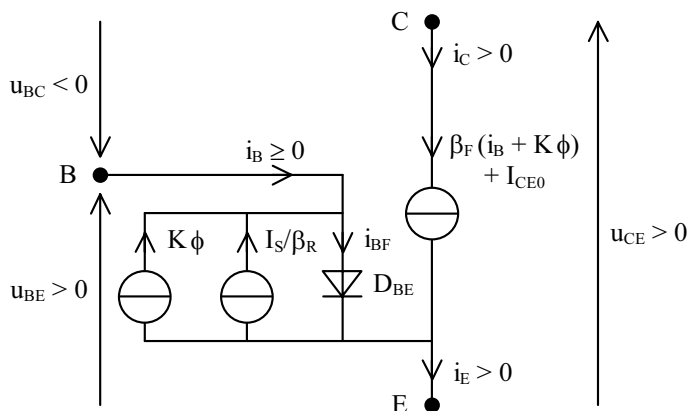


Fig. 20.19 Schéma équivalent « larges signaux » en conduction directe

$$\begin{cases} i_B + K\phi = i_{BF} - \frac{I_S}{\beta_R} \\ i_C = \beta_F (i_B + K\phi) + I_{CE0} \\ i_E = i_C + i_B \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{avec } i_{BF} = \frac{I_S}{\beta_F} (e^{\frac{u_{BE}}{N_F U_T}} - 1) \\ &\text{et } I_{CE0} = \frac{I_S}{\beta_R} (\beta_F + \beta_R + 1) \end{aligned}$$

Remarque : Le courant de fuite I_{CE0} est le courant d'obscurité à $i_B = 0$.

20.6 PHOTOPILES OU PILES SOLAIRES

• **Symbole** (Fig. 20.20). u, i : convention générateur. Pour la génération d'énergie solaire, la jonction est de grande surface. Le fonctionnement s'effectue dans le quadrant IV de la photodiode (voir § 20.4.4). La puissance maximale reçue sur terre est, pour ordre de grandeur, de 1000 W/m^2 . Les rendements actuels des cellules au Si dépassent difficilement 15 %.

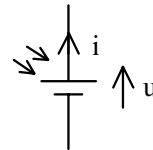


Fig. 20.20 Symbole d'une photopile

20.7 PHOTOCOUPLEURS

• **Description.** Un photocoupleur, ou coupleur optique, permet de réaliser un isolement galvanique. Il est constitué d'un émetteur (LED), d'un récepteur (photodiode, phototransistor, photothyristor, phototriac), et éventuellement de circuits spécifiques, montés dans un même boîtier.

• **Différents types de photocoupleurs**

- Photocoupleur à phototransistor : couramment utilisé.
- Photocoupleur à photodiode et transistor : plus rapide que le phototransistor.
- Photocoupleur à photodarlington : gain en courant élevé mais peu rapide.
- Photocoupleur à photodiode et darlington : gain en courant élevé et plus rapide que le photodarlington.
- Photocoupleur à photothyristor : isolement d'une alimentation à courant alternatif.
- Photocoupleur à phototriac : interrupteur optique de courants alternatifs.
- Photocoupleur à phototriac à enclenchement à tension nulle
- Photocoupleur à photodiode et circuit logique : grande rapidité et compatibilité avec des signaux logiques.
- Photocoupleur à deux émetteurs LED : tension d'entrée alternative.

Chapitre 21

Amplificateurs opérationnels

21.1 SYMBOLES – CONSTITUTION

Un amplificateur opérationnel (A.Op.) est un amplificateur différentiel à très grande amplification destiné à être utilisé en boucle fermée. Son nom « opérationnel » provient de son utilisation originelle : réaliser des opérations pour les calculateurs et simulateurs analogiques. Seuls les A.Op. classiques à contre réaction de tension sont étudiés ici.

- **Symboles** (Fig. 21.1)



Fig. 21.1 Symboles d'un A.Op.

- **Constitution** (Fig. 21.2). L'A.Op. possède une entrée inverseuse repérée par le signe « - » et une entrée non-inverseuse repérée par le signe « + ». D'une manière très simplifiée, un A.Op. est typiquement composé de trois étages à liaisons directes, c'est-à-dire passant le continu.

- 1) L'étage d'entrée différentiel à sortie non-symétrique : Son rôle est de fournir un signal (courant ou tension) proportionnel à la différence de potentiels des entrées.

- 2) L'étage de translation de niveau : Son rôle est d'adapter le signal pour l'étage de sortie. Dans le cas d'alimentations symétriques, le signal est centré sur le zéro.
- 3) L'étage de sortie d'amplification en courant : Son rôle est d'avoir la plus faible résistance possible en sortie. L'amplification en tension de cet étage est généralement voisine de l'unité, par exemple dans le cas d'un « push-pull ».



Fig. 21.2 Constitution typique

Remarque : Un A.Op. peut être alimenté par deux sources de tension, l'une positive, notée U_{CC}^+ , et l'autre négative notée U_{CC}^- , mais aussi par une seule source de tension notée U_{CC} .

21.2 MODÈLE ÉLÉMENTAIRE – MODÈLE PARFAIT

- **Schéma équivalent** (Fig. 21.3)

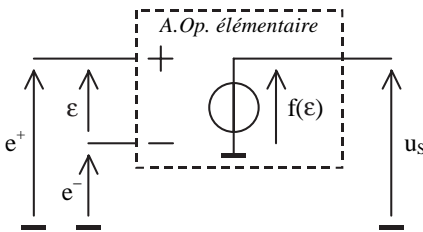
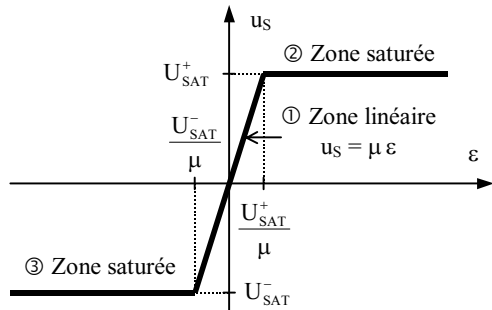


Fig. 21.3 Schéma équivalent – Modèle élémentaire

Fig. 21.4 Caractéristique $u_s = f(\varepsilon)$ – Modèle élémentaire

- **Caractéristique tension différentielle d'entrée – tension de sortie** (Fig. 21.4). La tension de sortie u_s est une fonction continue par morceaux de ε .

- **Propriétés de l'A.Op. élémentaire**

① Zone linéaire : $\frac{U_{SAT}^-}{\mu} \leq \varepsilon \leq \frac{U_{SAT}^+}{\mu}$

– Amplification de mode commun nulle

$$\Rightarrow u_s \text{ dépend uniquement de la différence } \varepsilon = e^+ - e^-$$

– Bande passante infinie, y compris le continu $\Rightarrow \mu$ indépendant de la fréquence.

- Impédance d'entrée infinie \Rightarrow Courants dans les entrées « + » et « - » nuls.
- Impédance de sortie nulle $\Rightarrow u_S = \mu \varepsilon$

② Zone saturée haute : $\varepsilon \geq \frac{U_{SAT}^+}{\mu}$ et ③ Zone saturée basse : $\frac{U_{SAT}^-}{\mu} \leq \varepsilon$

- Courants dans les entrées « + » et « - » nuls.
- Impédance de sortie nulle $\Rightarrow u_S = U_{SAT}^+$ ou $u_S = U_{SAT}^-$

● **Modèle parfait.** Le modèle parfait est obtenu à partir du modèle élémentaire en considérant que l'amplification différentielle μ est infinie.

Attention ! La tension différentielle d'entrée ε est considérée comme nulle UNIQUEMENT si la sortie n'est pas saturée, et si l'amplification différentielle μ peut être considérée comme infinie.

21.3 LIMITES ET IMPERFECTIONS

Pour simplifier l'analyse, on traite les imperfections les unes après les autres.

21.3.1 Tension de décalage – Courants de polarisation

Validité : Régime continu. Ces erreurs sont classées dans la catégorie des erreurs dites statiques.

● **Tension de décalage ou tension résiduelle d'entrée (input offset voltage).** C'est la tension continue que doit fournir un générateur de tension parfait connecté aux deux entrées, pour que la tension de sortie u_S soit nulle. On représente la tension de décalage U_D (ou U_{IO}), par un générateur de tension parfait en série avec l'une quelconque des deux entrées de l'A.Op. (Fig. 21.5). La tension de décalage peut être positive ou négative.

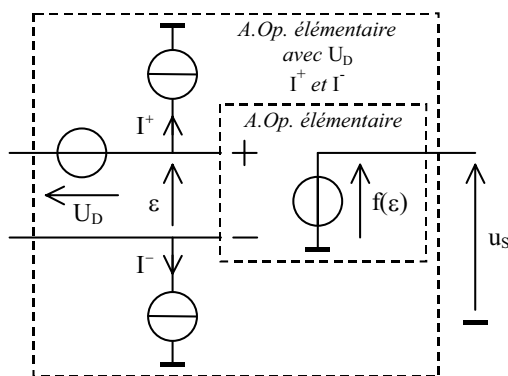


Fig. 21.5 Schéma équivalent avec générateurs U_D , I^+ et I^-

● **Courant de polarisation d'entrée (input bias current) – Courant de décalage ou courant résiduel d'entrée (input offset current).** Le courant de polarisation I_P (ou

I_{IB}) est la moyenne des courants de polarisation des entrées I^+ (ou I_{IB}^+) et I^- (ou I_{IB}^-). Le courant de décalage I_D (ou I_{IO}) est la différence des courants de polarisation des entrées. Les signes et les valeurs des courants de polarisation des entrées dépendent de l'étage d'entrée différentiel : bipolaire (NPN ou PNP), JFET ou MOSFET (canal N ou canal P). Les courants de polarisation des entrées sont représentés par deux générateurs de courant parfaits (voir Fig. 21.5).

$$I_P = \frac{I^+ + I^-}{2}$$

$$I_D = I^+ - I^-$$

• **Influence des générateurs** U_D , I^+ et I^- (Fig. 21.6). Compte tenu des polarités adoptées, on établit :

$$U_S = - \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_D + R_2 I^- - R_3 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) I^+$$

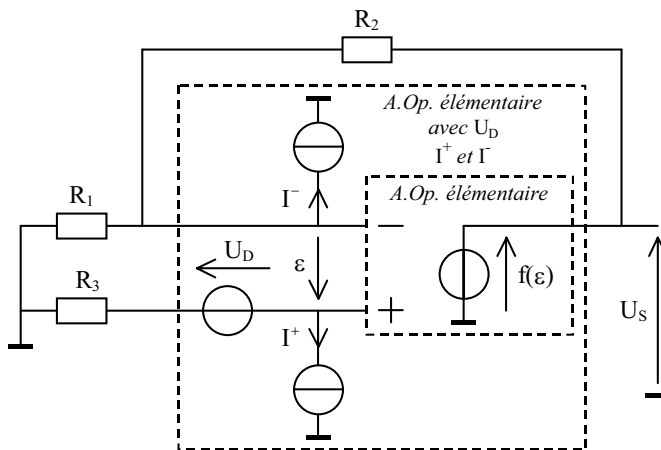


Fig. 21.6 Influence des générateurs U_D , I^+ et I^-

Méthode

Minimisation de l'influence des courants de polarisation des entrées.

$$\text{Si } R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{alors} \quad U_S = - \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) U_D - R_2 I_D$$

- L'influence des courants de polarisation des entrées est réduite au minimum si chaque entrée « voit » la même valeur de résistance.
- Après minimisation de l'influence des courants de polarisation des entrées, l'influence du courant de décalage I_D est proportionnelle à R_2 .
- L'influence de la tension de décalage est proportionnelle à $(1 + R_2/R_1)$.

- Avec cette condition et en considérant les coefficients de température des résistances nuls, la variation de U_S en fonction de la température s'écrit :

$$\frac{dU_S}{dT} = - \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dU_D}{dT} - R_2 \frac{dI_D}{dT}$$

Remarque : « L'annulation » de l'influence de la tension de décalage et du courant de décalage est théoriquement possible, mais elle est délicate à mettre en œuvre car la tension de décalage et le courant de décalage dépendent de la température.

21.3.2 Comportement en fréquence

Validité : Régime dynamique linéaire, c'est-à-dire avec des signaux d'amplitude réduite (usuellement inférieure à 1 volt) tels que l'on puisse toujours considérer que le régime est linéaire. En particulier, on considère que le slew-rate (voir § 21.3.5) est sans effet. Ces erreurs sont classées dans la catégorie des erreurs dites dynamiques.

Attention ! Les très fortes valeurs de l'amplification différentielle μ ne sont obtenues qu'aux fréquences basses. Pour chaque type d'A.Op., est spécifiée la *bande au gain unité* (unity gain bandwidth) ou *facteur de mérite*, noté B_W , qui est la fréquence pour laquelle l'amplification μ vaut 1.

a) A.Op. compensé en fréquence

Avec une bonne approximation, on peut considérer qu'un A.Op. compensé en fréquence se comporte comme un circuit de type passe-bas d'ordre 1, ce qui assure une stabilité inconditionnelle en boucle fermée en débit sur charge résistive.

• Amplification différentielle

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{f}{f_1}} \quad \text{avec } f_1 : \text{fréquence de coupure à } -3 \text{ dB}$$

$$\text{Module : } \mu = |\underline{\mu}| = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + (f/f_1)^2}} \quad \text{Argument : } \text{Arg} \underline{\mu} = -\arctan \left(\frac{f}{f_1} \right)$$

Si $f > 3f_1$ alors $\mu \approx \mu_0 f_1 / f$. Le produit μf (amplification \times fréquence), dit « *produit gain-bande* » reste constant sur une large plage de fréquences, de $3f_1$ à B_W au moins.

On a :

$$\mu f \approx \mu_0 f_1 = B_W$$

• **Conséquences sur l'amplificateur de base** (Fig. 21.7)

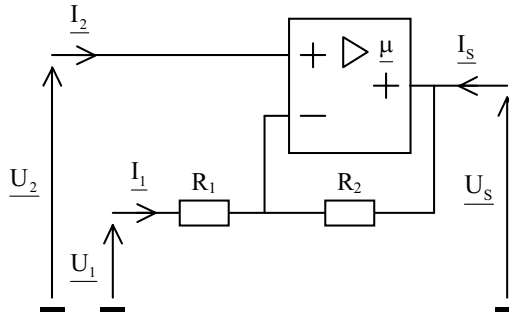


Fig. 21.7 Amplificateur de base

Relation générale entre la tension de sortie et les tensions d'entrées :

$$\underline{U_S} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu\beta}} [\underline{U_2} - (1 - \beta) \underline{U_1}] \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

En remplaçant μ par son expression, on obtient :

$$\underline{U_S} = \frac{A_0}{1 + j \frac{f}{f_C}} [\underline{U_2} - (1 - \beta) \underline{U_1}] \quad \text{avec} \quad f_C = (1 + \mu_0\beta) f_1 \quad \text{et} \quad A_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\beta}$$

Remarques : (Fig. 21.8)

- La fréquence de coupure à -3 dB est multipliée par $(1 + \mu_0\beta)$
- L'amplification est divisée par $(1 + \mu_0\beta)$
- Le produit « gain-bande » est constant : $A_0 f_C = \mu_0 f_1 = B_W$
- Pour $\mu_0\beta \gg 1$ on a $f_C \approx \mu_0\beta f_1$ et $A_0 \approx \frac{1}{\beta}$
- Ces effets résultent de la contre réaction (voir Chapitre 27 : Systèmes bouclés : Contre réaction – Oscillateurs).

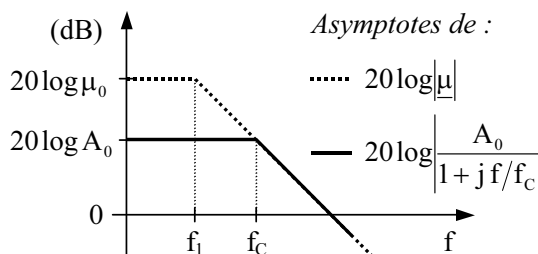


Fig. 21.8 Amplification et fréquence de coupure

Méthode

En régime dynamique linéaire, le temps de montée (ou de descente) d'un signal, mesuré entre 10 % et 90 % du saut d'amplitude, se calcule par la relation classique

$$t_r \approx \frac{0,35}{f_c} = \frac{0,35 A_0}{B_w}$$

b) Cas général

Plus généralement, un A.Op. se comporte en passe-bas d'ordre 2. Bien que théoriquement stable en boucle fermée en débit sur charge résistive, le montage est alors sujet à des dépassements en régime transitoire (overshoot), et même à d'éventuelles instabilités (oscillations) du fait d'éléments parasites qui conduisent en réalité à des fonctions de transfert d'ordre ≥ 3 .

• **Amplification différentielle.** On considère qu'un A.Op. classique se réduit à deux étages du premier ordre aux fréquences de coupures éloignées mis en cascade.

$$\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{\left(1 + j \frac{f}{f_1}\right) \left(1 + j \frac{f}{f_2}\right)} \quad f_1 \text{ et } f_2 : \text{fréquences de coupures à } -3 \text{ dB}$$

Soit aussi : $\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + 2mj \frac{f}{f_0} + j^2 \frac{f^2}{f_0^2}}$ avec $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ et $m = \frac{f_1 + f_2}{2\sqrt{f_1 f_2}}$

• **Conséquences sur l'amplificateur de base** (voir Fig. 21.7). On obtient :

$$\underline{U_S} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \beta} \frac{1}{1 + 2 \frac{m}{\sqrt{1 + \mu_0 \beta}} j \frac{f}{f_0 \sqrt{1 + \mu_0 \beta}} + j^2 \frac{f^2}{f_0^2 (1 + \mu_0 \beta)}} [U_2 - (1 - \beta) U_1]$$

Remarque :

- La fréquence de résonance est multipliée par $\sqrt{1 + \mu_0 \beta}$: $f'_0 = f_0 \sqrt{1 + \mu_0 \beta}$
- L'amplification est divisée par $(1 + \mu_0 \beta)$: $A'_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0 \beta}$
- L'amortissement est divisé par $\sqrt{1 + \mu_0 \beta}$: $m' = \frac{m}{\sqrt{1 + \mu_0 \beta}}$
- Pour $\mu_0 \beta \gg 1$ on a $f'_0 \approx f_0 \sqrt{\mu_0 \beta}$, $m' \approx \frac{m}{\sqrt{\mu_0 \beta}}$ et $A'_0 \approx \frac{1}{\beta}$
- L'amortissement m' de l'amplificateur de base devient d'autant plus petit que son amplification A'_0 est faible. Plus l'amortissement m' est petit et plus l'amplificateur de base est sujet à des dépassements en régime transitoire, et même à d'éventuelles instabilités. D'une manière générale, un A.Op. ne possédant pas de compensation interne, doit être compensé de manière externe.

21.3.3 Impédances d'entrée et de sortie

Validité : Régime dynamique linéaire.

- **Schéma équivalent** (Fig. 21.9)

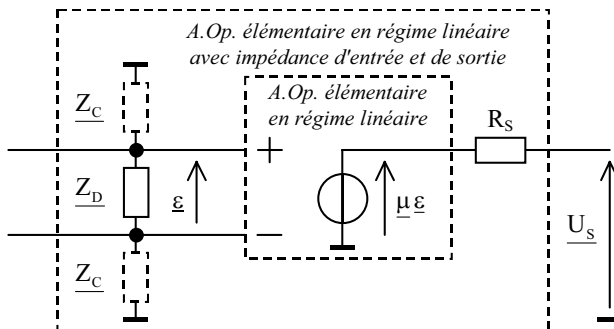


Fig. 21.9 Impédances d'entrée et de sortie

\underline{Z}_D est l'impédance d'entrée différentielle, généralement de faible influence ; \underline{Z}_C les impédances de mode commun, négligées compte tenu de leurs très grandes valeurs ; \underline{Z}_D et \underline{Z}_C dépendent beaucoup de la fréquence, elles sont constituées d'une résistance en parallèle avec une capacité.

- **Conséquences de la seule impédance d'entrée différentielle \underline{Z}_D sur les impédances des entrées \underline{Z}_{E1} et \underline{Z}_{E2} de l'amplificateur de base** (Fig. 21.7)

$$\underline{Z}_{E1} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + \frac{R_2}{1 + \underline{\mu} + R_2/\underline{Z}_D} \quad \underline{Z}_{E2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \underline{Z}_D (1 + \underline{\mu} \beta)$$

Compte tenu des ordres de grandeurs habituels ($\underline{Z}_D \gg R_2$, $\underline{Z}_D \gg R_1 // R_2$ et $\mu_0 \gg 1$) et dans l'approximation du passe-bas d'ordre 1 pour l'A.Op., on a :

$$\underline{Z}_{E1} = \frac{U_1}{I_1} \approx R_1 + \frac{R_2}{\mu_0} \frac{1 + j \frac{f}{f_1}}{1 + j \frac{f}{B_W}}$$

$$\underline{Z}_{E2} = \frac{U_2}{I_2} \approx \underline{Z}_D \left(1 + \frac{\mu_0 \beta}{1 + j \frac{f}{f_1}} \right)$$

Remarque : Côté entrée inverseuse, l'impédance d'entrée est à peu près égale à R_1 puis augmente avec la fréquence pour tendre vers $R_1 + R_2$ car $B_W = \mu_0 f_1$. Côté entrée non-inverseuse, l'impédance d'entrée est toujours supérieure à \underline{Z}_D .

- **Conséquences de la seule résistance de sortie R_S sur l'impédance de sortie \underline{Z}_S de l'amplificateur de base** (Fig. 21.7). On obtient :

$$\frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{I_S}{U_S} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1 + \underline{\mu} \beta}{R_S}$$

Compte tenu des ordres de grandeurs habituels ($R_S \ll R_1 + R_2$) et dans l'approximation du passe-bas d'ordre 1 pour l'A.Op., on a :

$$\underline{Z_S} \approx \frac{R_S}{1 + \mu_0 \beta} \frac{1 + j \frac{f}{f_1}}{1 + j \frac{f}{f_C}}$$

Remarque : L'impédance de sortie, très petite car divisée par $(1 + \mu_0 \beta)$, augmente avec la fréquence pour tendre vers R_S .

21.3.4 T.R.M.C.

Validité : Régime dynamique linéaire.

La tension de sortie d'un A.Op. suit en réalité la loi classique d'un amplificateur différentiel.

$$\underline{U_S} = \underline{\mu} (\underline{E^+} - \underline{E^-}) + \underline{\mu_C} \frac{\underline{E^+} + \underline{E^-}}{2} \quad \text{où } \underline{\mu_C} \text{ est l'amplification en mode commun.}$$

Soit

$$\underline{U_S} = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} + \underline{\mu_C} \underline{U_C} \quad \text{en posant } \underline{U_C} = \frac{\underline{E^+} + \underline{E^-}}{2} \text{ (} \underline{u_C} : \text{ tension de mode commun)}$$

Un A.Op. est un amplificateur différentiel à très grande amplification. En conséquence : $u_C \approx e^+ \approx e^-$. On définit le *T.R.M.C.* (Taux de Réjection du Mode Commun) ou *C.M.R.R.* (common-mode rejection ratio) par :

$$\text{C.M.R.R.} = 20 \log \frac{|\underline{\mu}|}{|\underline{\mu_C}|} \quad \text{qui s'exprime en dB}$$

Remarque : Le T.R.M.C. est généralement élevé (100 dB), mais il diminue lorsque la fréquence augmente, similairement à l'amplification différentielle μ . Si l'entrée non-inverseuse est directement reliée à la masse, la tension de mode commun u_C est pratiquement nulle.

21.3.5 Vitesse max. de variation de la tension de sortie (Slew-Rate)

Validité : Régime dynamique « larges signaux ».

• **Origine du Slew-Rate.** La vitesse de variation de la tension de sortie est plafonnée par une limitation de courant interne : le courant maximal disponible en sortie du premier étage doit charger la capacité de compensation C_S (Fig. 21.10).

En considérant l'amplificateur, d'amplification $-A$, parfait (résistance d'entrée infinie, résistance de sortie nulle), on obtient le schéma équivalent (Fig. 21.11) par application du théorème de Miller.

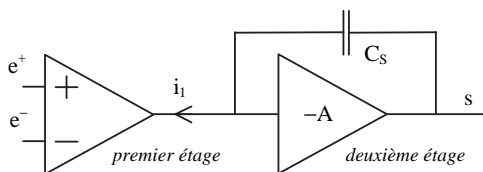


Fig. 21.10 Les deux étages d'un A.Op. – Slew-Rate

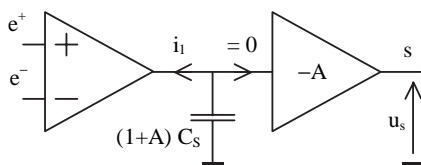


Fig. 21.11 Schéma équivalent – Slew-Rate

La vitesse maximale de variation de la tension de sortie ou *slew-rate* est :

$$SR = \left. \frac{du_s}{dt} \right|_{\text{Max}} = \frac{AI_{\text{Max}}}{(1+A)C_S} \quad \text{Unité : } V/\mu S$$

Remarque : Pour les grands signaux, le Slew-Rate provoque une déformation du signal et une limitation de la fréquence maximale d'utilisation.

- 1) Signal sinusoïdal : Un signal sinusoïdal ne subit pas de distorsion uniquement si sa vitesse de variation est inférieure ou égale au Slew-Rate.

Soit une tension de sortie sinusoïdale $u_s = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$

Sa vitesse de variation est $\frac{du_s}{dt} = U_{S \text{ Max}} \omega \cos(\omega t)$

Sa vitesse de variation maximale est $\left. \frac{du_s}{dt} \right|_{\text{Max}} = U_{S \text{ Max}} \omega$

En conséquence, la tension sinusoïdale en sortie n'est pas distordue si, et seulement si :

$$2\pi U_{S \text{ Max}} f \leq SR$$

- 2) Signal rectangulaire : Un échelon ΔU_E en entrée est transformé en une rampe de pente SR le temps d'atteindre la valeur voulue (Fig. 21.12). La durée de la rampe est $t_R = \Delta U_S / SR$.

Remarque : Pour les signaux d'amplitude réduite tels que l'on puisse toujours considérer que le régime est linéaire (régime dynamique linéaire), c'est la bande passante qui limite la vitesse de variation de la tension de sortie (voir § 21.3.2).

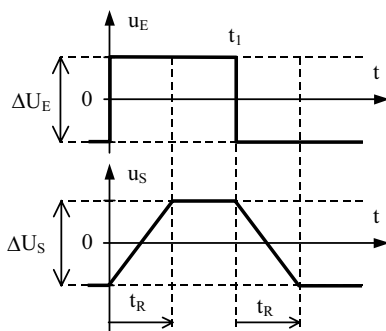


Fig. 21.12 Effet du Slew-Rate sur un signal rectangulaire

Chapitre 22

Comparateurs analogiques

22.1 SYMBOLES - DESCRIPTION

Le comparateur est un circuit spécialisé destiné à effectuer des comparaisons analogiques. Bien que proche d'un A.Op. d'un point de vue fonctionnel, sa structure, son comportement et ses caractéristiques sont optimisés et adaptés aux besoins de la comparaison analogique industrielle. On peut citer en particulier : les temps de réponse, la précision, l'absence d'instabilité en sortie, et des configurations de sorties variées.

- *Symboles* (Fig. 22.1)

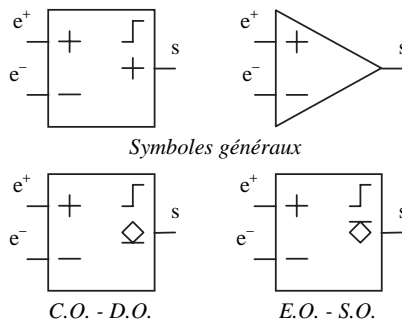


Fig. 22.1 Symboles d'un comparateur

• **Description.** Le comparateur possède une entrée inverseuse repérée par le signe « - », une entrée non-inverseuse repérée par le signe « + », et une sortie non-inverseuse repérée par le signe « + ». Les signaux d'entrée sont analogiques, et le signal de sortie est du type TOR (Tout Ou Rien).

Remarques :

- Les sorties sont de différents types : push-pull, totem-pole, collecteur ou drain ouvert (C.O. / D.O.), émetteur ou source ouvert (E.O. / S.O.), assurant la compatibilité avec les circuits logiques TTL, CMOS, HCMOS, ECL, etc. Les sorties peuvent être symétriques ou asymétriques par rapport au zéro. Elles peuvent parfois commander directement des charges comme des relais ou des lignes de transmission.
- Les sorties C.O. / D.O. ou E.O. / S.O. autorisent la réalisation de fonctions logiques câblées.
- Les alimentations peuvent être doubles (pas obligatoirement symétriques) ou uniques. Les valeurs permises peuvent être relativement élevées.

22.2 MODÈLE ÉLÉMENTAIRE – MODÈLE PARFAIT

Le modèle de comparateur présenté ici tient compte des éventuels éléments extérieurs assurant sa polarisation. Par exemple, dans le cas d'une sortie C.O. / D.O., la tension de saturation côté haut est fixée par une résistance de rappel, et celle côté bas par un transistor interne au circuit.

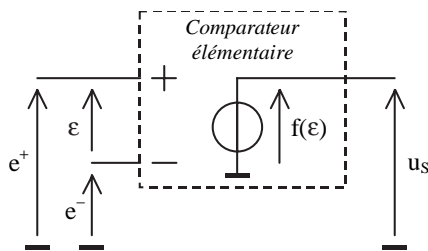


Fig. 22.2 Schéma équivalent - Modèle élémentaire

• **Schéma équivalent** (Fig. 22.2). La tension de sortie u_s est une fonction de ε continue par morceaux (voir Fig. 22.3).

• **Caractéristique tension différentielle d'entrée - tension de sortie** (Fig. 22.3)

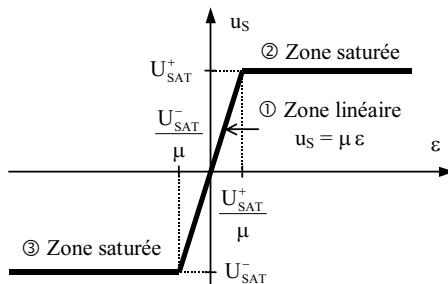


Fig. 22.3 Caractéristique $u_s = f(\varepsilon)$ - Modèle élémentaire

• **Modèle parfait.** Le modèle parfait est obtenu à partir du modèle élémentaire en considérant en plus que l'amplification différentielle μ est infinie.

22.3 LIMITES ET IMPERFECTIONS

Plusieurs sont semblables à celles présentées pour les amplificateurs opérationnels (voir Chapitre 21). D'autres sont plus spécifiques ou doivent être considérées de manière particulière.

• **Tension de décalage U_D et courants de polarisation I^+ et I^- (Fig. 22.4).** Si l'impédance du générateur qui attaque une entrée du comparateur n'est pas négligeable, le courant de polarisation de l'entrée produit une tension de décalage supplémentaire. La condition de changement d'état de la sortie est alors :

$$\left. \begin{array}{l} U_E = E_G - R_G I^+ \\ U_E = U_{\text{Réf}} + U_D \end{array} \right\} \Rightarrow E_G = U_{\text{Réf}} + U_D + R_G I^+$$

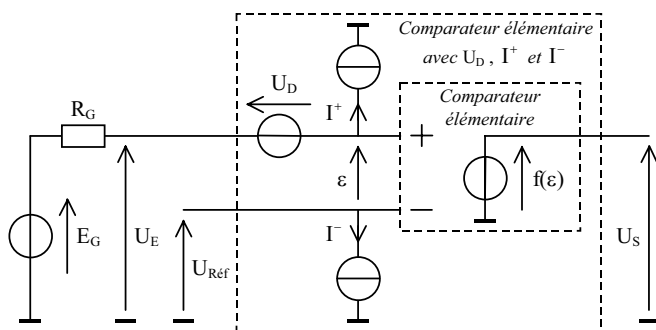


Fig. 22.4 Influence des générateurs U_D , I^+ et I^-

Remarque : La présence d'une impédance de source peut aussi conduire à des oscillations parasites en sortie lorsque le signal d'entrée évolue lentement. Pour éviter ces problèmes, il faudra utiliser des comparateurs ayant des faibles courants de polarisation (entrées JFET ou MOSFET), ou veiller à ce que l'impédance du générateur soit faible. Une autre solution peut être d'utiliser une configuration en "trigger de Schmitt".

• **Tensions de sortie au niveau haut et bas.** Ce sont les tensions de saturation côté haut et côté bas. Elles dépendent de la configuration de la sortie.

• **Temps de réponse, ou de propagation** (Fig. 22.5). Il ne faut pas confondre le temps de réponse (t_{pd}^+ et t_{pd}^-) avec le temps de transition (t_{TLH} et t_{THL} ou temps de montée t_r et de descente t_f) de la tension de sortie, mesuré entre 10 % et 90 % de l'excursion totale.

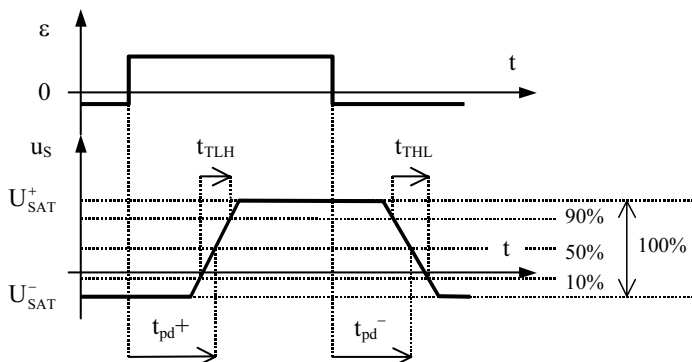


Fig. 22.5 Temps de réponse

Question : Soit le schéma d'un trigger de Schmitt inverseur (Fig. 22.6) où $R_1 = 500 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 3,3 \text{ k}\Omega$, $U_{\text{Réf}} = V_{\text{CC}}/2$ et $V_{\text{CC}} = 10 \text{ V}$. La sortie du comparateur est à collecteur ouvert ; la tension de saturation du transistor de sortie est $U_{\text{CE Sat}} \approx 0,2 \text{ V}$. Le comparateur est alimenté entre V_{CC} et la masse. Exprimer et calculer les tensions du seuil bas et du seuil haut.

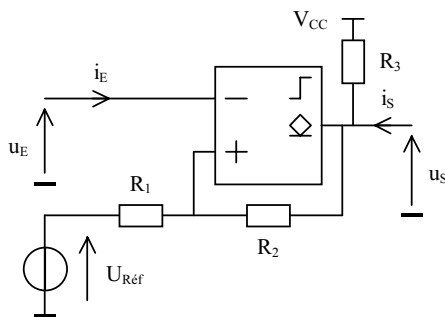


Fig. 22.6 Trigger de Schmitt inverseur

Réponse : Il faut commencer par repérer le transistor de sortie du comparateur (Fig. 22.7). Il est alors clair que le niveau bas en sortie est fixé par la saturation dudit transistor, et le niveau haut par la résistance R_3 dite de « pull-up ».

– Seuil bas. Le transistor est initialement saturé. D'où :

$$u^+ = \frac{R_1 U_{\text{CE Sat}} + R_2 U_{\text{Réf}}}{R_1 + R_2}$$

Le transistor passe de la saturation au blocage pour $u_E = u^+$. D'où :

$$U_{\text{E Bas}} = \frac{R_1 U_{\text{CE Sat}} + R_2 U_{\text{Réf}}}{R_1 + R_2} \Rightarrow U_{\text{E Bas}} \approx 3,4 \text{ V}$$

- Seuil haut. Le transistor est initialement bloqué. D'où, en supposant $i_s = 0$:

$$u^+ = \frac{R_1 V_{CC} + (R_2 + R_3) U_{R\acute{e}f}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Le transistor passe du blocage à la saturation pour $u_E = u^+$. D'où :

$$U_{E \text{ Haut}} = \frac{R_1 V_{CC} + (R_2 + R_3) U_{R\acute{e}f}}{R_1 + R_2 + R_3} \Rightarrow U_{E \text{ Haut}} \approx 6,7 \text{ V}$$

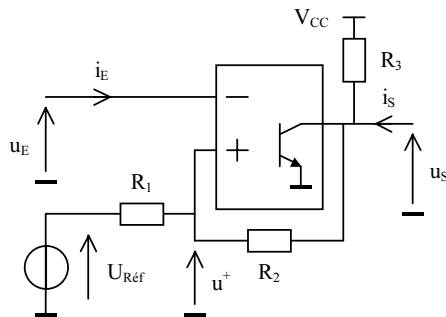
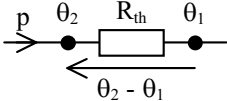
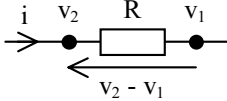
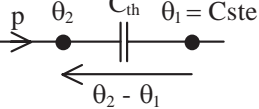
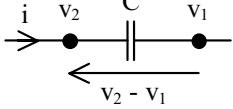


Fig. 22.7 Trigger de Schmitt - Transistor de sortie

Chapitre 23

Dissipation thermique

23.1 ANALOGIE ÉLECTRIQUE DU MODÈLE THERMIQUE

Modèle thermique à constantes localisées		Analogie électrique	
Grandeurs – Relations	Unités	Grandeurs – Relations	Unités
Température θ	kelvin K	Potentiel v	volt V
Différence de température $\theta_2 - \theta_1$	kelvin K	Différence de potentiel $v_2 - v_1$	volt V
Puissance p	watt W	Intensité i	ampère A
Résistance thermique R_{th}	kelvin par watt K/W	Résistance électrique R	ohm Ω
Loi « d'Ohm thermique » $\theta_2 - \theta_1 = R_{th} p$ 	$K = K/W$	Loi d'Ohm $v_2 - v_1 = R i$ 	$V = \Omega A$
Capacité thermique C_{th}	joule par kelvin J/K	Capacité électrique C	farad F
$p = C_{th} \frac{d(\theta_2 - \theta_1)}{dt}$ 	$W = J/K \frac{K}{s}$	$i = C \frac{d(v_2 - v_1)}{dt}$ 	$A = F \frac{V}{s}$

Remarques :

- Le modèle thermique décrit ici est un modèle à constantes localisées, ce qui suppose que la température dans chaque élément est uniforme. Il admet un schéma électrique analogue.
- Une température absolue s'exprime en kelvins. Si seules des différences de température interviennent dans les calculs, alors on peut exprimer indifféremment les températures en kelvins ou en degrés Celsius ($0\text{ }^{\circ}\text{C} = 273,15\text{ K}$).
- Les associations (mise en série, mise en parallèle) de résistances thermiques obéissent aux mêmes règles que les associations des résistances électriques. *Idem* pour les capacités.

23.2 CHAÎNE DE DISSIPATION THERMIQUE

Sans perte de généralité, on illustre le propos avec un composant électronique du type semi-conducteur (diode, transistor, régulateur, circuit intégré, etc.) monté sur refroidisseur. L'assemblage des éléments est schématisé (Fig. 23.1).

• **Chaîne de dissipation thermique** (Fig. 23.2). La jonction est entièrement dans le boîtier : toute la puissance p traverse le boîtier. Avec refroidisseur, p_2 est généralement petite devant p_1 , et sans refroidisseur $p_2 = p$.

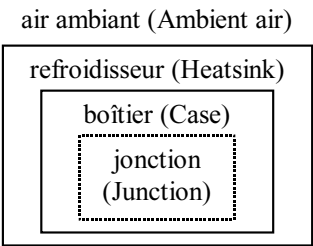


Fig. 23.1 Assemblage schématisé des éléments

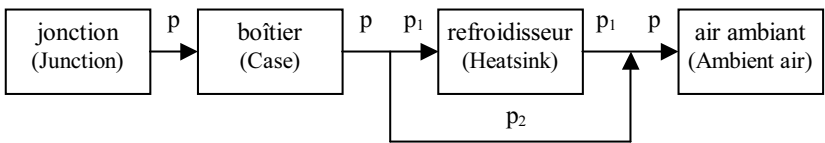


Fig. 23.2 Chaîne de dissipation thermique

23.3 MODÈLE THERMIQUE STATIQUE (OU CONTINU)

L'analogie électrique permet de dessiner le schéma (Fig. 23.3).

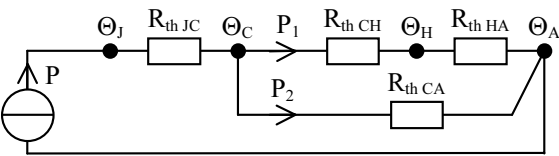


Fig. 23.3 Modèle thermique statique

Où P est la puissance continue produite par la jonction et dissipée sous forme de chaleur ; Θ_J , Θ_C , Θ_H , Θ_A sont les températures continues respectivement de jonction (*Junction*), du boîtier (*Case*), du refroidisseur (*Heatsink*), de l'air ambiant (*Ambient*) ; R_{thJC} , R_{thCH} , R_{thHA} , R_{thCA} sont les résistances thermiques respectivement jonction-boîtier, boîtier-refroidisseur, refroidisseur-ambiant, boîtier-ambiant.

Attention ! La valeur de la résistance thermique boîtier-ambiant donnée par le fabricant du composant n'est pas celle du schéma (Fig. 23.3). C'est celle que l'on aurait sans refroidisseur rapporté.

Méthode

Si la valeur effective de la résistance thermique boîtier-ambiant est inconnue, il faut utiliser le schéma (Fig. 23.4) pour ne pas surestimer la résistance thermique refroidisseur-ambiant.

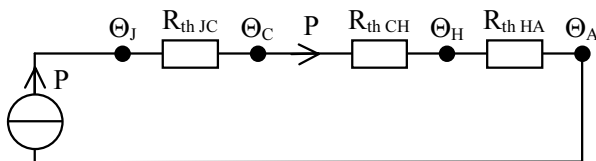


Fig. 23.4 Modèle thermique statique sans R_{thCA}

La loi « d'Ohm thermique » appliquée à la (Fig. 23.4) permet alors de déterminer la valeur maximale de R_{thHA} dans le cas d'une puissance continue.

$$\Theta_J - \Theta_A = P (R_{thJC} + R_{thCH} + R_{thHA})$$

23.4 MODÈLE THERMIQUE DYNAMIQUE (OU TRANSITOIRE)

Le modèle statique n'est pas satisfaisant pour évaluer la température crête de la jonction dans les applications impulsionnelles. L'analogie électrique permet de dessiner le schéma (Fig. 23.5).

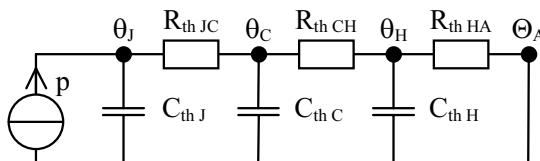


Fig. 23.5 Modèle thermique dynamique

Où p est la puissance instantanée produite par la jonction et dissipée sous forme de chaleur ; θ_J , θ_C , θ_H sont les températures instantanées respectivement de jonction (*Junction*), du boîtier (*Case*), du refroidisseur (*Heatsink*) ; Θ_A est la température supposée continue de l'air ambiant (*Ambient*) ; R_{thJC} , R_{thCH} , R_{thHA} , R_{thCA} sont les résistances thermiques respectivement jonction-boîtier, boîtier-refroidisseur, refroidisseur-ambiant, boîtier-ambiant ; C_{thJ} , C_{thC} , C_{thH} sont les capacités thermiques respectivement de jonction, du boîtier, du refroidisseur.

23.4.1 Train d'impulsions de puissance en régime permanent

Soit la puissance p (Fig. 23.6) de période T et de rapport cyclique $\alpha = t_1/T$.

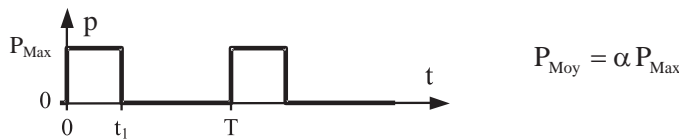


Fig. 23.6 Train d'impulsions de puissance en régime permanent

• **Température moyenne de jonction.** La température moyenne de jonction se détermine à partir du modèle statique (Fig. 23.7).

$$\Theta_{JMoy} - \Theta_A = P_{Moy} (R_{thJC} + R_{thCH} + R_{thHA})$$

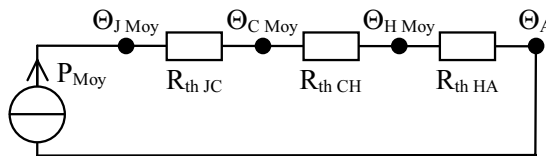


Fig. 23.7 Modèle thermique statique – Valeurs moyennes

• **Température maximale de jonction à température de boîtier supposée constante.** En régime permanent, si la température du boîtier peut être considérée comme constante alors elle est égale à sa valeur moyenne (Fig. 23.8).

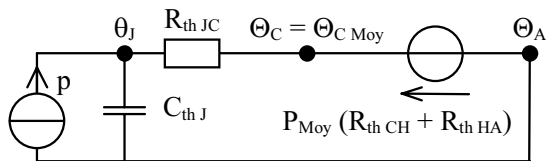


Fig. 23.8 Modèle dynamique pour $\Theta_C = \Theta_{CMoy}$

Équation différentielle du modèle dynamique pour $\Theta_C = \Theta_{CMoy}$:

$$\tau_{th} \frac{d(\theta_J - \Theta_C)}{dt} + (\theta_J - \Theta_C) = p R_{thJC} \quad \text{avec} \quad \tau_{th} = R_{thJC} C_{thJ}$$

La résolution de l'équation différentielle pour le train d'impulsions de puissance permet de tracer le diagramme temporel en régime permanent (Fig. 23.9).

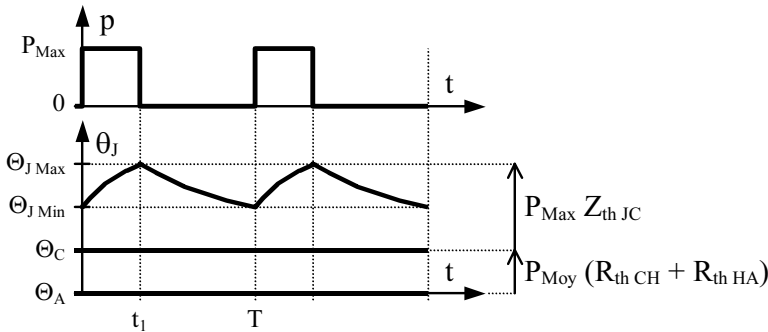


Fig. 23.9 Diagramme temporel en régime permanent

Méthode

Plus simplement, on peut déterminer Θ_{JMax} à partir de « l'impédance thermique » ou « résistance thermique transitoire » entre jonction et boîtier, notée Z_{thJC} , qui dépend du rapport cyclique et de la durée de l'impulsion.

$$\Theta_{JMax} - \Theta_C = P_{Max} Z_{thJC} \quad \text{avec} \quad Z_{thJC} = R_{thJC} \frac{1 - e^{-t_1/\tau_{th}}}{1 - e^{-T/\tau_{th}}}$$

Pratiquement, pour chaque composant, le constructeur donne un graphe de l'impédance thermique Z_{thJC} en fonction de la durée de l'impulsion t_1 et paramétré par le rapport cyclique α . L'équation complète du modèle avec impédance thermique (Fig. 23.10) s'écrit :

$$\Theta_{JMax} - \Theta_A = P_{Max} Z_{thJC} + P_{Moy} (R_{thCH} + R_{thHA})$$

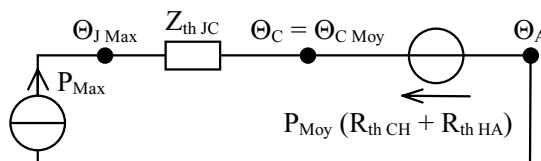


Fig. 23.10 Modèle n°1 avec impédance thermique

Ou encore, puisque $P_{\text{Moy}} = \alpha P_{\text{Max}}$ (Fig. 23.11) :

$$\Theta_{\text{JMax}} - \Theta_{\text{A}} = P_{\text{Max}} Z_{\text{thJC}} + \alpha P_{\text{Max}} (R_{\text{thCH}} + R_{\text{thHA}})$$

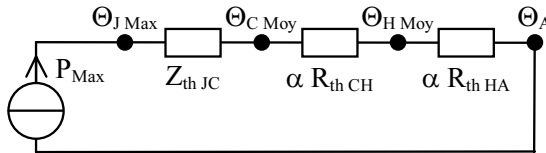


Fig. 23.11 Modèle n°2 avec impédance thermique

Remarque : On a considéré ici une température de boîtier Θ_{C} constante (et égale à Θ_{CMoy}). Cela est généralement vrai, compte tenu des constantes de temps thermiques, pour une durée d'impulsion t_1 inférieure à une seconde environ.

• **Température maximale de jonction pour une durée d'impulsion t_1 grande devant la constante de temps thermique $\tau_{\text{th}} = R_{\text{thJC}} C_{\text{thJ}}$.** Cela est généralement vrai pour une durée d'impulsion supérieure à une seconde environ.

$$t_1 \gg \tau_{\text{th}} \Rightarrow T \gg \tau_{\text{th}} \Rightarrow Z_{\text{thJC}} = R_{\text{thJC}}$$

Si Θ_{C} peut encore être considérée constante (Fig. 23.12) :

$$\Theta_{\text{JMax}} - \Theta_{\text{A}} = P_{\text{Max}} R_{\text{thJC}} + \alpha P_{\text{Max}} (R_{\text{thCH}} + R_{\text{thHA}})$$

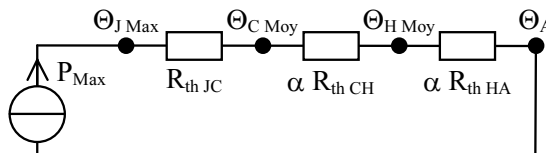


Fig. 23.12 $t_1 \gg \tau_{\text{th}}$ et Θ_{C} constante

Si Θ_{H} peut encore être considérée constante (Fig. 23.13) :

$$\Theta_{\text{JMax}} - \Theta_{\text{A}} = P_{\text{Max}} (R_{\text{thJC}} + Z_{\text{thCH}}) + \alpha P_{\text{Max}} R_{\text{thHA}}$$

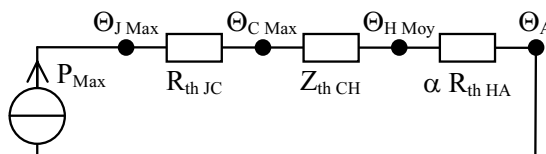


Fig. 23.13 Θ_{H} constante

Si Θ_H ne peut pas être considérée constante (Fig. 23.14) :

$$\Theta_{J\text{Max}} - \Theta_A = P_{\text{Max}} (R_{\text{thJC}} + R_{\text{thCH}} + Z_{\text{thHA}})$$

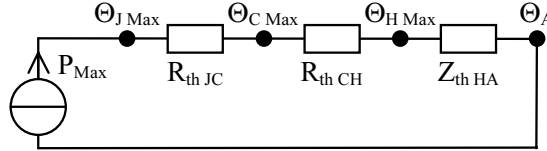


Fig. 23.14 Θ_H non-constante

• *Température maximale de jonction pour une période T petite devant la constante de temps thermique $\tau_{\text{th}} = R_{\text{thJC}} C_{\text{thJ}}$ (Fig. 23.15)*

$$T \ll \tau_{\text{th}} \Rightarrow t_1 \ll \tau_{\text{th}} \Rightarrow Z_{\text{thJC}} = \frac{t_1}{T} R_{\text{thJC}} = \alpha R_{\text{thJC}}$$

D'où :

$$\Theta_{J\text{Max}} - \Theta_A = \Theta_{J\text{Moy}} - \Theta_A = \alpha P_{\text{Max}} (R_{\text{thJC}} + R_{\text{thCH}} + R_{\text{thHA}})$$

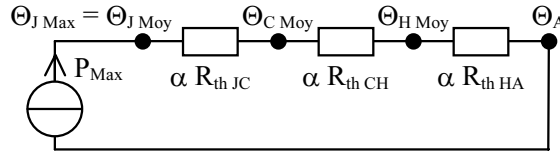


Fig. 23.15 $T \ll \tau_{\text{th}}$

23.4.2 Unique impulsion de puissance

Soit la puissance p (Fig. 23.16). On considère la période T très grande (théoriquement infinie) devant la constante de temps thermique τ_{th} . D'où :

$$Z_{\text{thJC}} = R_{\text{thJC}} \left(1 - e^{-t_1/\tau_{\text{th}}} \right)$$

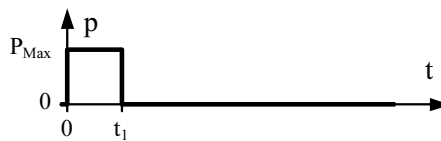


Fig. 23.16 Unique impulsion de puissance

• **Température maximale de jonction à température de boîtier supposée constante.**
Si la température du boîtier peut être considérée comme constante alors elle est égale à la température ambiante Θ_A (Fig. 23.17). D'où :

$$\Theta_{JMax} - \Theta_C = P_{Max} Z_{thJC} \quad \text{avec} \quad \Theta_C = \Theta_H = \Theta_A$$

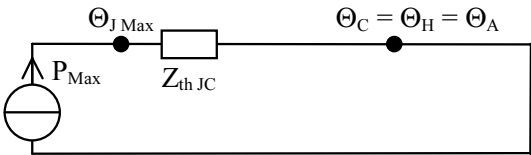


Fig. 23.17 Θ_C constante

23.4.3 Train d'impulsions de puissance en régime permanent superposé à une puissance continue

Soit la puissance p (Fig. 23.18) de période T et de rapport cyclique $\alpha = t_1/T$. La puissance moyenne est :

$$P_{Moy} = \alpha P_{Max} + (1 - \alpha) P_{Min} = \alpha (P_{Max} - P_{Min}) + P_{Min}$$

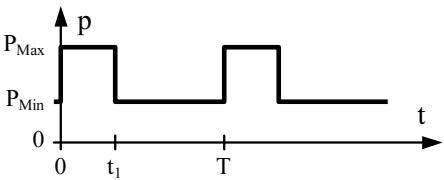


Fig. 23.18 Train d'impulsions + continu

Méthode

- 1) Le train d'impulsions de puissance $P_{Pulse} = P_{Max} - P_{Min}$ donne $\Theta_{JMaxPulse}$
- 2) La puissance continue $P_{Direct} = P_{Min}$ donne $\Theta_{JDirect}$
- 3) On calcule $\Theta_{JMax} = \Theta_{JMaxPulse} + \Theta_{JDirect}$

23.5 PLUSIEURS COMPOSANTS SUR UN MÊME REFROIDISSEUR

Méthode

Le principe de calcul est le même que pour un seul composant. Il faut choisir un refroidisseur dont la résistance thermique R_{thHA} assure à chaque jonction une température inférieure à sa valeur maximale autorisée.

Question : Soit le modèle statique (Fig. 23.19) de deux composants montés sur un même refroidisseur. Déterminer les relations permettant de choisir R_{thHA} .

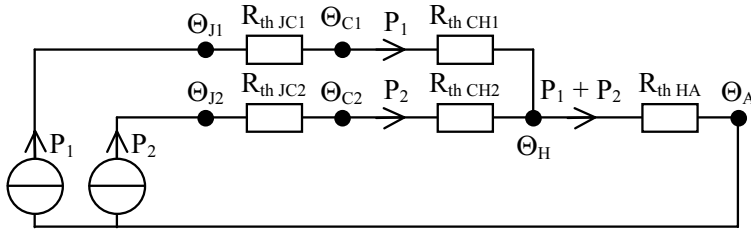


Fig. 23.19 Modèle statique de deux composants sur un même refroidisseur

Réponse : La loi « d'Ohm thermique » permet d'écrire :

$$\Theta_H - \Theta_A = (P_1 + P_2) R_{thHA}$$

$$\Theta_{J1} - \Theta_H = P_1 (R_{thJC1} + R_{thCH1}) \quad \Theta_{J2} - \Theta_H = P_2 (R_{thJC2} + R_{thCH2})$$

D'où :

$$R_{thHA} < \frac{\Theta_{J1} - \Theta_A - P_1 (R_{thJC1} + R_{thCH1})}{P_1 + P_2}$$

et

$$R_{thHA} < \frac{\Theta_{J2} - \Theta_A - P_2 (R_{thJC2} + R_{thCH2})}{P_1 + P_2}$$

PARTIE 3

Électronique du signal

Chapitre 24

Filtrage analogique

24.1 FONCTION – FILTRES IDÉAUX

● **Fonction.** Un *filtre analogique de fréquence* (à temps continu) réalise une opération linéaire sur un signal temporel dans le but de le modifier. Par exemple : régler les graves ou les aigus en audiofréquences, extraire certaines fréquences, diminuer le bruit, etc.

● **Définition de la F.T. (fonction de transfert) complexe.** Voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé – Étude en fréquence.

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{S_{\text{Max}}}{E_{\text{Max}}} e^{j(\varphi_S - \varphi_E)} = |\underline{T}| e^{j\varphi}$$

Remarque : Le passage à la F.T. dans le domaine de la transformée de Laplace s'effectue simplement en remplaçant $j\omega$ par l'opérateur p (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace).

● **Filtres idéaux.** En plus des courbes des modules et gains présentés (Fig. 24.1), le déphasage d'un filtre idéal devrait être linéaire.

Remarques : Contraintes des filtres physiquement réalisables

– Le signal de sortie, de tout filtre physiquement réalisable, est toujours déphasé par rapport au signal d'entrée, car la fonction de transfert complexe possède toujours une partie imaginaire non nulle. C'est une conséquence de la *causalité* (il ne peut rien y avoir à la sortie du filtre, tant qu'il n'y a rien à l'entrée).

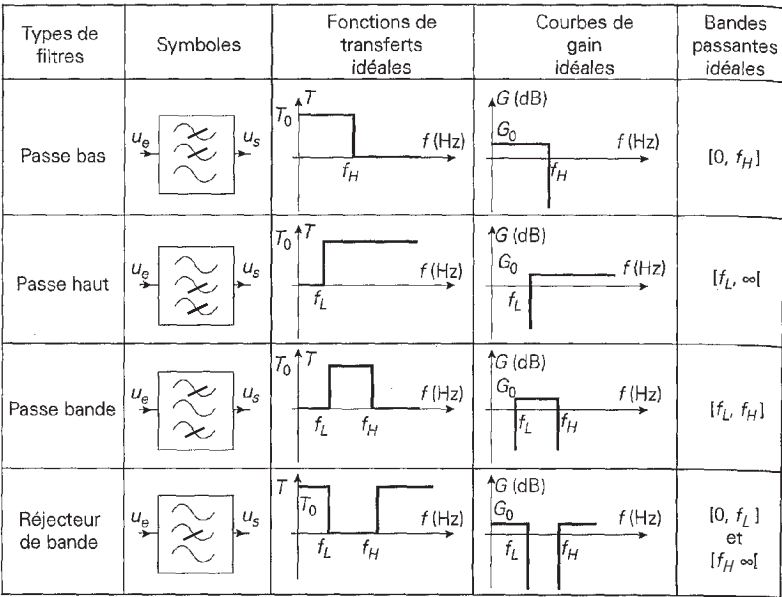


Fig. 24.1 Filtres idéaux

- Pour qu’un signal filtré ne soit pas déformé par des distorsions de phases, il faut que le déphasage du filtre soit linéaire (temps de propagation de groupe constant). Comme un filtre à déphasage linéaire est irréalisable de manière analogique, le signal en sortie d’un filtre analogique est toujours déformé. En pratique, si ce critère est primordial, on choisit un filtre analogique approchant au mieux la caractéristique de déphasage linéaire dans la bande passante du signal.
- Plus un filtre possède une coupure raide et plus le déphasage varie rapidement (Conséquence de la loi de Bode-Bayard).

24.2 FONCTIONS DE TRANSFERT ÉLÉMENTAIRES

Pulsation réduite – Fréquence réduite :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

avec

$$\omega = 2\pi f$$

24.2.1 Fonctions de transfert du premier ordre

a) Passe-bas du 1^{er} ordre : F.T. et diagramme de Bode (Fig. 24.2)

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jx}$$

	$T = T = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$G = -20 \log \sqrt{1+x^2}$	$\varphi = -\arctan(x)$
$x = 1$	$T = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G \approx -3 \text{ dB}$	$\varphi = -45^\circ$
Asymptotes pour $x \ll 1$	$T \approx 1$	$G \approx 0 \text{ dB}$	$\varphi \approx 0^\circ$
Asymptotes pour $1 \ll x$	$T \approx \frac{1}{x}$	$G \approx -20 \log(x)$ (-20 dB/décade)	$\varphi \approx -90^\circ$

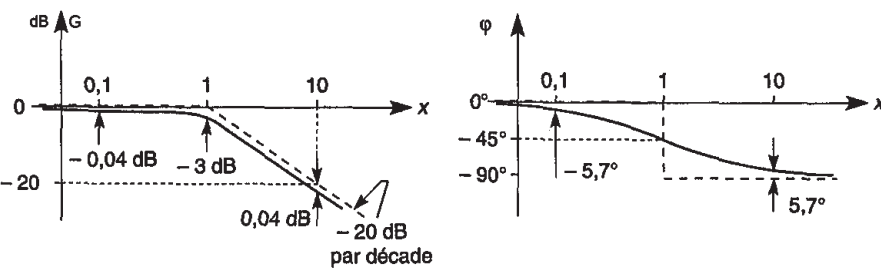


Fig. 24.2 Passe-bas du 1^{er} ordre

Exemples 24.2.1

(Fig. 24.3 et Fig. 24.4)

$$T = \frac{U_S}{U_E} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

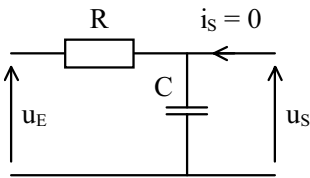


Fig. 24.3 Filtre passif R.C. passe-bas du 1^{er} ordre

$$T = \frac{U_S}{U_E} = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{R}{2\pi L}$$

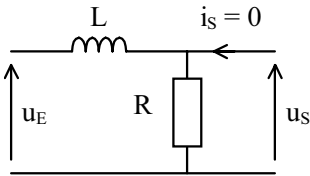


Fig. 24.4 Filtre passif L.R. passe-bas du 1^{er} ordre

b) Passe-haut du 1^{er} ordre : F.T. et diagramme de Bode (Fig. 24.5).

$$T = \frac{jx}{1 + jx}$$

	$T = \underline{T} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$G = 20 \log (x) - 20 \log \sqrt{1+x^2}$	$\varphi = 90^{\circ} - \arctan (x)$
$x = 1$	$T = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G \approx -3 \text{ dB}$	$\varphi = +45^{\circ}$
Asymptotes pour $x \ll 1$	$T \approx x$	$G \approx 20 \log (x) \quad (+20 \text{ dB/décade})$	$\varphi \approx +90^{\circ}$
Asymptotes pour $1 \ll x$	$T \approx 1$	$G \approx 0 \text{ dB}$	$\varphi \approx 0^{\circ}$

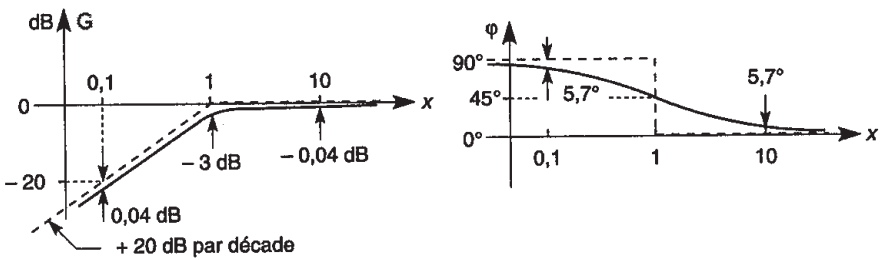


Fig. 24.5 Passe-haut du 1^{er} ordre

Exemples 24.2.2

(Fig. 24.6 et Fig. 24.7)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{j \frac{f}{f_0}}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

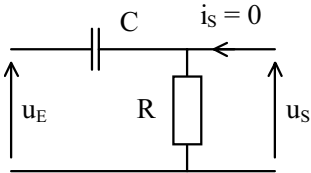


Fig. 24.6 Filtre passif C.R. passe haut du 1^{er} ordre

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{j \frac{f}{f_0}}{1 + j \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{R}{2\pi L}$$

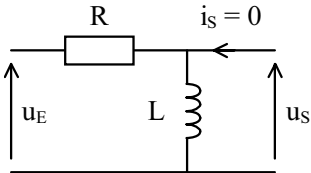


Fig. 24.7 Filtre passif R.L. passe-haut du 1^{er} ordre

Question : Établir l’expression de la F.T. du filtre C.R. (voir Fig. 24.6)

Réponse : En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

24.2.2 Fonctions de transfert du deuxième ordre

f_0 s'appelle la fréquence propre, ω_0 la pulsation propre, m le coefficient d'amortissement, et $Q_0 = 1/(2m)$ le coefficient de surtension.

a) Passe-bas du 2^e ordre

Quel que soit l'amortissement $m > 0$, les expressions générales de la fonction de transfert, de son module et de son déphasage, s'écrivent :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + 2mjx + j^2x^2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \begin{cases} x < 1 & \varphi = -\arctan \frac{2mx}{1-x^2} \\ x = 1 & \varphi = -90^\circ \\ x > 1 & \varphi = -180^\circ + \arctan \frac{2mx}{x^2-1} \end{cases}$$

On distingue trois cas selon la valeur de l'amortissement m .

► $m > 1$ (deux racines réelles). Diagramme de Bode (Fig. 24.8)

$$\underline{T} = \frac{1}{(1 + ja^{-1}x)(1 + jax)}$$

avec $a^{-1} = m - \sqrt{m^2 - 1}$ $a = m + \sqrt{m^2 - 1}$ $a^{-1} + a = 2m$

$$T = |\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^{-1}x)^2} \sqrt{1 + (ax)^2}}$$

$$G = -20 \log \sqrt{1 + (a^{-1}x)^2} - 20 \log \sqrt{1 + (ax)^2}$$

$$\varphi = -\arctan(a^{-1}x) - \arctan(ax)$$

	T	G	φ
$x = 1$	$T = \frac{1}{2m}$	$G = -20 \log(2m) \approx -6 - 20 \log(m)$	$\varphi = -90^\circ$
$x_L = -m + \sqrt{m^2 + 1}$			$\varphi = -45^\circ$
$x_H = +m + \sqrt{m^2 + 1}$			$\varphi = -135^\circ$
Asymptotes pour $x \ll 1/a$	$T \approx 1$	$G \approx 0 \text{ dB}$	$\varphi \approx 0^\circ$
Asymptotes pour $1/a \ll x \ll a$	$T \approx \frac{1}{ax}$	$G \approx -20 \log(ax) \quad (-20 \text{ dB/décade})$	$\varphi \approx -90^\circ$
Asymptotes pour $a \ll x$	$T \approx \frac{1}{x^2}$	$G \approx -40 \log(x) \quad (-40 \text{ dB/décade})$	$\varphi \approx -180^\circ$

Remarque : $x_H - x_L = 2m$

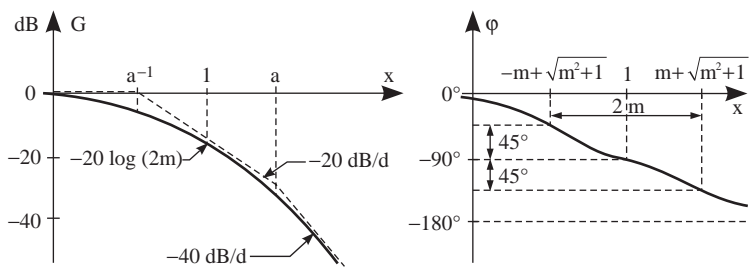


Fig. 24.8 Passe-bas du 2^{ième} ordre pour $m > 1$

► $m = 1$ (une racine réelle double). Diagramme de Bode (Fig. 24.9)

$$\underline{T} = \frac{1}{(1 + jx)^2} \quad (\text{deux passe-bas du 1^{er} ordre identiques en cascade})$$

	$T = \underline{T} = \frac{1}{1 + x^2}$	$G = -20 \log (1 + x^2)$	$\varphi = -2 \arctan (x)$
$x = 1$	$T = \frac{1}{2}$	$G \approx -6 \text{ dB}$	$\varphi = -90^\circ$
$x_L = -1 + \sqrt{2}$			$\varphi = -45^\circ$
$x_H = 1 + \sqrt{2}$			$\varphi = -135^\circ$
Asymptotes pour $x \ll 1$	$T \approx 1$	$G \approx 0 \text{ dB}$	$\varphi \approx 0^\circ$
Asymptotes pour $1 \ll x$	$T \approx \frac{1}{x^2}$	$G \approx -40 \log (x) \quad (-40 \text{ dB/décade})$	$\varphi \approx -180^\circ$

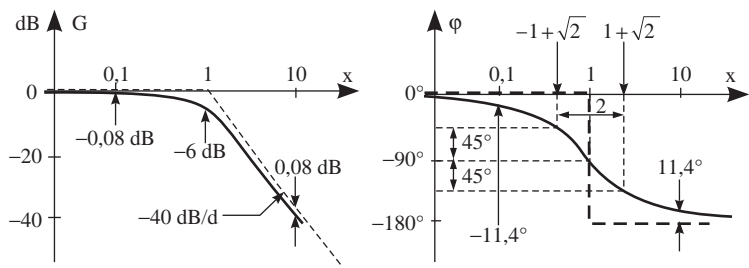


Fig. 24.9 Passe-bas du 2^{ième} ordre pour $m = 1$

► $m < 1$ (pas de racine réelle). Diagramme de Bode (Fig. 24.10)

Voir expressions générales.

	T	G	φ
$x = 1$	$T = \frac{1}{2m}$	$G = -20 \log(2m)$ $\approx -6 - 20 \log(m)$	$\varphi = -90^\circ$
$x_L = -m + \sqrt{m^2 + 1}$			$\varphi = -45^\circ$
$x_H = +m + \sqrt{m^2 + 1}$			$\varphi = -135^\circ$
Asymptotes pour $x \ll 1$	$T \approx 1$	$G \approx 0 \text{ dB}$	$\varphi \approx 0^\circ$
Asymptotes pour $1 \ll x$	$T \approx \frac{1}{x^2}$	$G \approx -40 \log(x)$ (-40 dB/décade)	$\varphi \approx -180^\circ$

Plusieurs cas sont possibles

- a) $\sqrt{2}/2 < m < 1$: Le gain ne présente pas de maximum et reste au-dessous des asymptotes.
- b) $m = \sqrt{2}/2$: Le gain est le plus plat possible. Pour $x = 1$, $T = 1/\sqrt{2}$ et $G \approx -3 \text{ dB}$
- c) $m < \sqrt{2}/2$: Pour $x = \sqrt{1 - 2m^2}$ le gain présente un maximum.

$$G_{\text{Max}} = 20 \log(T_{\text{Max}}) \quad T_{\text{Max}} = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

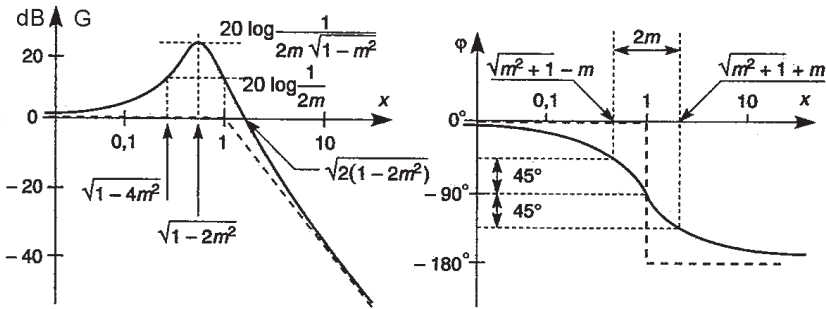


Fig. 24.10 Passe-bas du 2^e ordre pour $m < \sqrt{2}/2$

Exemples 24.2.3

(Fig. 24.11 et Fig. 24.12)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + 2mj \frac{f}{f_0} + j^2 \frac{f^2}{f_0^2}}$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

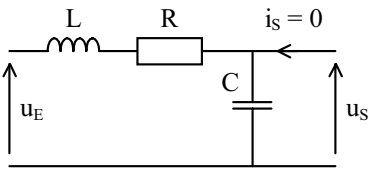
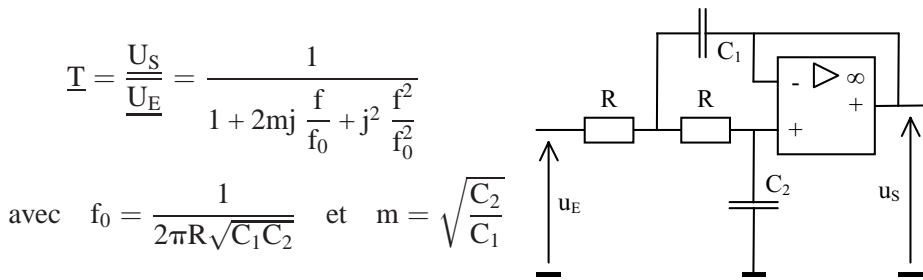


Fig. 24.11 Filtre passif R.L.C. passe-bas du 2^e ordre

Fig. 24.12 Filtre actif de Sallen & Key passe-bas du 2^e ordreb) Passe-haut du 2^e ordre

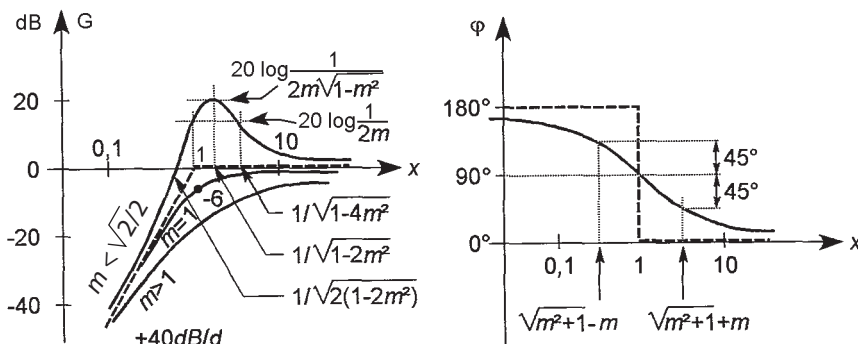
Quel que soit l'amortissement $m > 0$, les expressions générales de la fonction de transfert, de son module et de son déphasage, s'écrivent :

$$\underline{T} = \frac{j^2 x^2}{1 + 2mjx + j^2 x^2}$$

$$T = \frac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \begin{cases} x < 1 & \varphi = 180^\circ - \arctan \frac{2mx}{1 - x^2} \\ x = 1 & \varphi = +90^\circ \\ x > 1 & \varphi = \arctan \frac{2mx}{x^2 - 1} \end{cases}$$

Le diagramme de Bode (Fig. 24.13) de la fonction de transfert passe-haut du 2^e ordre se déduit de celui de la fonction de transfert passe-bas du 2^e ordre :

- Pour le gain G , en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
- Pour la phase φ , en effectuant une translation de $+180^\circ$.

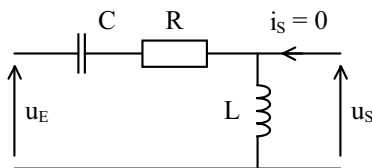
Fig. 24.13 Passe haut du 2^e ordre

Exemples 24.2.4

(Fig. 24.14)

$$\underline{T} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{j^2 \frac{f^2}{f_0^2}}{1 + 2mj \frac{f}{f_0} + j^2 \frac{f^2}{f_0^2}}$$

avec $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

**Fig. 24.14** Filtre passif R.L.C. passe haut du 2^e ordre**Question :** Établir l'expression de la F.T. du filtre R.L.C. (voir Fig. 24.14)*Réponse :* En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{T} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} = \frac{j^2 LC\omega^2}{1 + jRC\omega + j^2 LC\omega^2}$$

$$\text{D'où : } \underline{T} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{j^2 \omega^2 / \omega_0^2}{1 + 2mj\omega / \omega_0 + j^2 \omega^2 / \omega_0^2}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{2m}{\omega_0} = RC \Rightarrow m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

c) Passe-bande du 2^e ordre

Quel que soit l'amortissement $m > 0$, les expressions générales de la fonction de transfert, de son module et de son déphasage, s'écrivent :

$$\underline{T} = \frac{2mjx}{1 + 2mjx + j^2 x^2} = \frac{1}{1 + jQ_0 \left(x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec} \quad Q_0 = \frac{1}{2m}$$

$$T = \frac{2mx}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \begin{cases} x < 1 & \varphi = 90^\circ - \arctan \frac{2mx}{1 - x^2} \\ x = 1 & \varphi = 0^\circ \\ x > 1 & \varphi = -90^\circ + \arctan \frac{2mx}{x^2 - 1} \end{cases}$$

	T	G	φ
x = 1	T = 1	G = 0	φ = 0°
x _L = -m + √(m² + 1)	T = 1/√2	G ≈ -3 dB	φ = 45°
x _H = m + √(m² + 1)	T = 1/√2	G ≈ -3 dB	φ = -45°
Asymptotes pour x ≪ 1	T ≈ 2mx	G ≈ 20 log (2m) + 20 log (x) (+20 dB/décade)	φ ≈ 90°
Asymptotes pour 1 ≪ x	T ≈ 2m/x	G ≈ 20 log (2m) - 20 log (x) (-20 dB/décade)	φ ≈ -90°
Les deux asymptotes du gain se coupent sur la droite d'équation x = 1, qui est l'axe de symétrie de la courbe de gain. Elles se coupent à 0 dB pour m = 1/2, en-dessous pour m < 1/2 et en-dessus pour m > 1/2.			

Bande passante à -3 dB :

$$\frac{BP_{(-3\text{ dB})}}{f_0} = x_H - x_L = 2m = \frac{1}{Q_0}$$

Le diagramme de Bode (Fig. 24.15) de la fonction de transfert passe-bande du 2^e ordre se déduit de celui de la fonction de transfert passe-bas du 2^e ordre :

- Pour le gain G, en ajoutant 20 log (2mx) au gain du passe-bas du 2^e ordre.
- Pour la phase φ, en effectuant une translation de +90°.

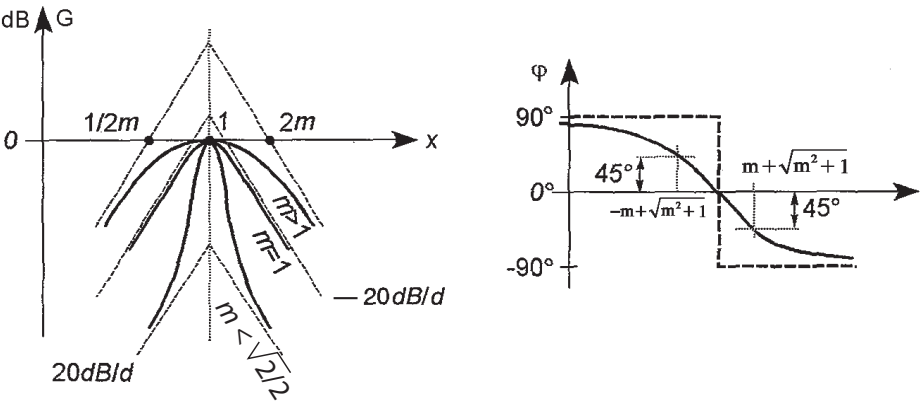


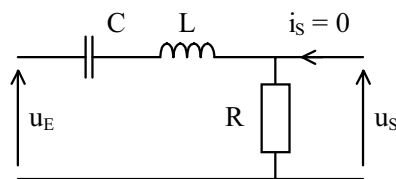
Fig. 24.15 Passe-bande du 2^e ordre

Exemple 24.2.5

(Fig. 24.16)

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{2mj \frac{f}{f_0}}{1 + 2mj \frac{f}{f_0} + j^2 \frac{f^2}{f_0^2}}$$

$$\text{avec } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

**Fig. 24.16** Filtre passif R.L.C. passe-bande du 2^e ordre**Question :** Établir l'expression de la F.T. du filtre R.L.C. (voir Fig. 24.16)*Réponse :* En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{R}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega + j^2LC\omega^2}$$

$$\text{D'où : } \underline{T} = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{2mj\omega/\omega_0}{1 + 2mj\omega/\omega_0 + j^2\omega^2/\omega_0^2}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{2m}{\omega_0} = RC \quad \Rightarrow \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

d) Réjecteur de bande du 2^e ordre

Quel que soit l'amortissement $m > 0$, les expressions générales de la fonction de transfert, de son module et de son déphasage, s'écrivent :

$$\underline{T} = \frac{1 + j^2x^2}{1 + 2mjx + j^2x^2} = 1 - \frac{2mjx}{1 + 2mjx + j^2x^2} \quad \text{avec } Q_0 = \frac{1}{2m}$$

$$T = \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + (2mx)^2}} \quad \begin{cases} x < 1 & \varphi = -\arctan \frac{2mx}{1 - x^2} \\ x = 1^- & \varphi = -90^\circ \\ x = 1^+ & \varphi = +90^\circ \\ x > 1 & \varphi = +\arctan \frac{2mx}{x^2 - 1} \end{cases}$$

Remarque : La F.T. d'un réjecteur de bande du 2^e ordre est égale à la F.T. d'un passe-bas du 2^e ordre moins la F.T. d'un passe-bande du 2^e ordre. C'est aussi la somme de la F.T. d'un passe-bas du 2^e ordre et de la F.T. d'un passe-haut du 2^e ordre.

24.3 APPROXIMATION DES FILTRES ANALOGIQUES IDÉAUX

Les filtres idéaux n'étant pas réalisables, on les approche par des fonctions de transfert de la forme :

$$\underline{T} = \frac{N(jx)}{D(jx)} = \frac{b_0 + b_1 jx + b_2 (jx)^2 + \dots + b_m (jx)^m}{a_0 + a_1 jx + a_2 (jx)^2 + \dots + a_n (jx)^n} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$$

Remarque : On considère souvent la fonction d'affaiblissement, ou d'atténuation, \underline{A} à la place de la fonction de transfert \underline{T} .

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{T}} = \frac{D(jx)}{N(jx)}$$

Méthode

Ces fonctions de transfert sont réalisables en mettant en cascade des fonctions de transfert élémentaires d'ordres 1 et 2. Pratiquement, on choisit le gabarit et le type du filtre souhaité, puis à l'aide d'un programme, ou de tables, on détermine les différentes fonctions de transfert élémentaires à mettre en cascade. Pour le principe de la mise en cascade de fonctions de transfert : Voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé - Étude en fréquence.

• Gabarits d'atténuation des filtres (Fig. 24.17)

A_P : Atténuation maximale dans la bande passante (*Passband Attenuation*) en dB.

A_S : Atténuation minimale dans la bande atténuée (*Stopband Attenuation*) en dB.

f_P : Fréquence limite de la bande passante (*Passband frequency*).

f_S : Fréquence limite de la bande atténuée (*Stopband frequency*).

B_P : Largeur de bande au niveau de la bande passante (*Passband Bandwith*).

B_S : Largeur de bande au niveau de la bande atténuée (*Stopband Bandwith*).

$$B_P = f_P^+ - f_P^- \quad B_S = f_S^+ - f_S^-$$

f_0 : Fréquence centrale (*Center frequency*).

$$f_0 = \sqrt{f_S^+ f_S^-} = \sqrt{f_P^+ f_P^-}$$

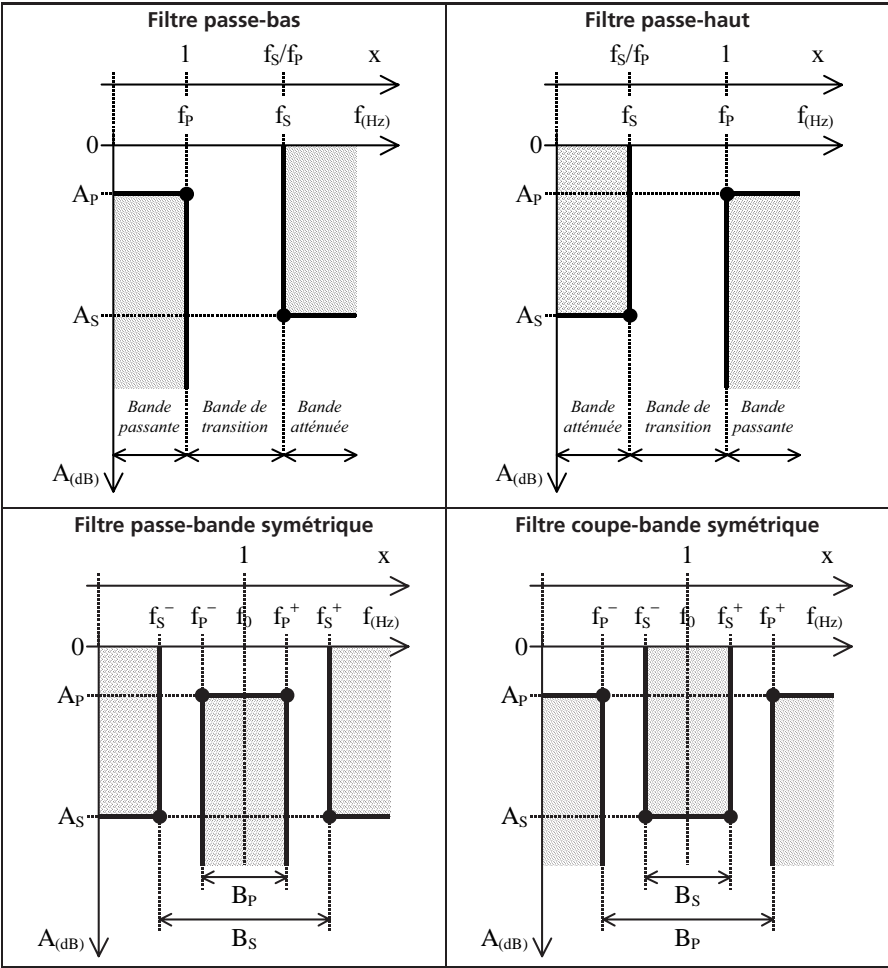


Fig. 24.17 Gabarits d'atténuation des filtres

• *Types de filtres* (Fig. 24.18)

	Caractéristiques
Butterworth	<ul style="list-style-type: none">– Atténuation la plus plate possible dans la bande passante (<i>maximally flat</i>).– La fréquence de coupure est toujours définie à $G \approx -3$ dB.– Pour un gabarit donné, l'ordre du filtre est relativement élevé.
Legendre	<ul style="list-style-type: none">– Régularité de l'atténuation dans la bande passante.– Coupure raide dans la bande de transition.– Presque aussi régulier que Butterworth pour un ordre moins élevé.– Temps de propagation de groupe régulier.

	Caractéristiques
Chebyshev	<div><div>– Ondulation d’amplitude constante dans la bande passante (<i>equal ripple</i>).</div><div>– Coupure raide dans la bande de transition.</div></div>
Chebyshev inverse	<div><div>– Pour un gabarit donné, l’ordre du filtre est relativement peu élevé.</div><div>– Temps de propagation de groupe faible et régulier.</div><div>– Bon compromis raideur / complexité / régularité / retard de groupe.</div></div>
Cauer (ou elliptique)	<div><div>– Ondulation dans la bande passante.</div><div>– Coupure raide dans la bande de transition.</div><div>– Pour un gabarit donné, l’ordre du filtre est relativement petit.</div><div>– Zéro de transmission en bande atténuée.</div></div>
Bessel	<div><div>– Déphasage sensiblement linéaire dans la bande passante.</div></div>

Fig. 24.18 Types de filtres

Exemples 24.3.6

Type Butterworth. Le module d’un quelconque polynôme de Butterworth (Fig. 24.19) de degré n est

$$|\underline{A}(jx)| = \sqrt{1 + x^{2n}}$$

ordre n	Polynôme de Butterworth $\underline{A}(s)$ où $s = jx$ et factorisation pour réalisation par mise en cascade	Amortissements des 2 ^e ordres
1	$s + 1$	
2	$s^2 + \sqrt{2} s + 1$	0,707
3	$s^3 + 2 s^2 + 2 s + 1 = (s + 1) (s^2 + s + 1)$	0,5
4	$s^4 + 2,613 s^3 + 3,414 s^2 + 2,613 s + 1$ $= (s^2 + 0,765 s + 1) (s^2 + 1,848 s + 1)$	0,383 - 0,924
5	$s^5 + 3,236 s^4 + 5,236 s^3 + 5,236 s^2 + 3,236 s + 1$ $= (s + 1) (s^2 + 0,618 s + 1) (s^2 + 1,618 s + 1)$	0,309 - 0,809
6	$s^6 + 3,863 s^5 + 7,464 s^4 + 9,141 s^3 + 7,464 s^2 + 3,863 s + 1$ $= (s^2 + 0,518 s + 1) (s^2 + \sqrt{2} s + 1) (s^2 + 1,932 s + 1)$	0,259 - 0,707 0,966

Fig. 24.19 Polynômes de Butterworth jusqu’à l’ordre 6

Méthode

Filtre du type Butterworth.

- 1) *Filtre passe-bas*. Le module de la fonction de transfert normalisée d’un filtre passe-bas de Butterworth d’ordre n, c’est-à-dire ayant pour déno-

minateur un polynôme de Butterworth de degré n , est :

$$|\underline{I}(jx)| = \frac{1}{|\underline{A}(jx)|} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{f}{f_0}$$

A partir du gabarit, l'ordre n d'un filtre passe-bas de Butterworth est donné par :

$$n \geq \frac{\log \frac{10^{0,1A_{(dB)} s} - 1}{10^{0,1A_{(dB)} p} - 1}}{2 \log \frac{f_s}{f_p}}$$

- 2) *Filtre passe haut.* D'une façon générale, on ramène l'étude d'un filtre passe haut à celle d'un filtre passe-bas en utilisant la transformation suivante dans le gabarit et la fonction de transfert.

$$s \leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (\Rightarrow \quad x \leftrightarrow \frac{1}{x} \quad \text{pour la fréquence réduite dans le gabarit})$$

Compte tenu de la symétrie des coefficients des polynômes de Butterworth, le module de la fonction de transfert normalisée d'un filtre passe haut de Butterworth d'ordre n est :

$$|\underline{I}(jx)| = \frac{x^n}{|\underline{A}(jx)|} = \frac{x^n}{\sqrt{1+x^{2n}}}$$

- 3) *Filtre passe-bande.* D'une façon générale, on ramène l'étude d'un filtre passe-bande à celle d'un filtre passe-bas en utilisant la transformation suivante dans le gabarit et la fonction de transfert.

$$s \leftrightarrow \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) \quad \text{avec} \quad B = \frac{B_p}{f_0}$$

Une fonction de transfert d'ordre n se trouve alors remplacée par une autre d'ordre $2n$, ce qui n'est pas forcément simple à résoudre. On peut aussi réaliser un passe-bande en utilisant conjointement un passe haut d'ordre n et un passe-bas d'ordre n .

- 4) *Filtre coupe bande.* D'une façon générale, on ramène l'étude d'un filtre coupe bande à celle d'un filtre passe-bas en utilisant la transformation suivante dans le gabarit et la fonction de transfert. On peut aussi réaliser un coupe bande en utilisant conjointement un passe haut et un passe-bas.

$$\frac{1}{s} \leftrightarrow \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right) \quad \text{avec} \quad B = \frac{B_s}{f_0}$$

24.4 FRÉQUENCE D'ÉCHANTILLONNAGE – FILTRE ANTI-REPLIEMENT

La numérisation d'un signal implique nécessairement son échantillonnage. Pour que le signal ne soit pas détérioré par l'échantillonnage, l'échantillonneur doit obligatoirement être précédé d'un filtre dit d'anti-repliement qui ne peut être qu'un filtre analogique à temps continu.

• Fréquence d'échantillonnage – Théorème de Shannon

Un signal dont la limite en fréquence est f_{Max} (Fig. 24.20) peut être reconstruit à partir du signal échantillonné à la fréquence f_{Ech} si :

$$f_{\text{Ech}} > 2f_{\text{Max}}$$

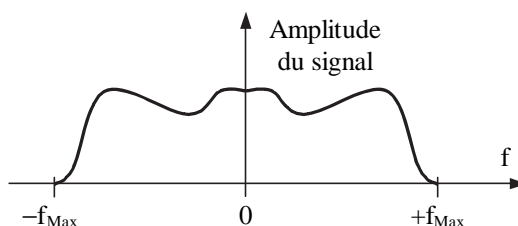


Fig. 24.20 Limite en fréquence d'un signal

Exemple 24.4.7

La fréquence d'échantillonnage des informations pour un disque audio-numérique est $f_{\text{Ech}} = 44,1$ kHz afin de permettre la restitution d'un signal de qualité haute fidélité ($f_{\text{Max}} = 20$ kHz).

• **Filtre anti-repliement.** Si le théorème de Shannon n'est pas respecté, l'échantillonnage détériore irrémédiablement le signal. Ainsi, un bruit parasite possédant une réponse en fréquence supérieure à f_{Max} pourra, par l'effet de l'échantillonnage, perturber gravement le signal utile échantillonné. Pour cette raison, un filtre passe bas d'anti-repliement est placé juste avant l'échantillonneur pour limiter la bande passante de l'entrée à la fréquence f_{Lim} , choisie supérieure à f_{Max} pour ne pas trop atténuer le signal utile.

Méthode

Soit α le *coefficient de sur-échantillonnage* défini par :

$$f_{\text{Ech}} = 2\alpha f_{\text{Lim}}$$

Il est donné pour le filtre (Fig. 24.21) par

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(10^{A/S} + 1 \right)$$

où A (en dB) est l’affaiblissement souhaité de l’effet du repliement dans la bande passante de 0 à f_{Lim} , et S (en dB/décade) est la pente de la courbe au-delà de f_{Lim} . Le tableau (Fig. 24.22) donne des valeurs de α .

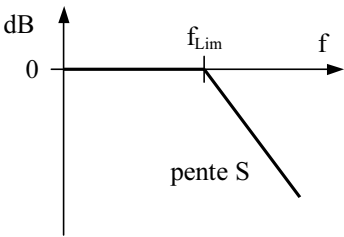


Fig. 24.21 Asymptotes d’un filtre passe-bas

Filtre		Affaiblissement souhaité de l’effet du repliement : A (dB)						
Ordre	S (dB/décade)	−20	−30	−40	−50	−60	−70	−80
1	−20	5,5	16,3	50,5	158,6	500,5	1581,6	5000,5
2	−40	2,1	3,3	5,5	9,4	16,3	28,6	50,5
3	−60	1,6	2,1	2,8	3,9	5,5	7,8	11,3
4	−80	1,4	1,7	2,1	2,6	3,3	4,2	5,5
5	−100	1,3	1,5	1,8	2,1	2,5	3,0	3,7
6	−120	1,2	1,4	1,6	1,8	2,1	2,4	2,8

Fig. 24.22 Coefficients de sur-échantillonnage

Chapitre 25

Amplification et opérations analogiques

25.1 GÉNÉRALITÉS – DÉFINITIONS

- Les définitions qui suivent sont générales, elles doivent être adaptées aux particularités de chaque type d'amplificateur. Par exemple, pour un amplificateur « petits signaux », les amplifications sont définies pour les variations des signaux autour d'un point de polarisation.
- Les définitions sont données en notation complexe (analyse en fréquence). Le passage au domaine de Laplace s'effectue simplement en remplaçant $j\omega$ par l'opérateur p (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace).
- La convention adoptée est celle des quadripôles (courants entrants pour l'entrée et la sortie).
- **Fonction** (Fig. 25.1). Un amplificateur est un quadripôle qui augmente l'amplitude d'un signal et sa puissance en le multipliant par un coefficient dit d'amplification.

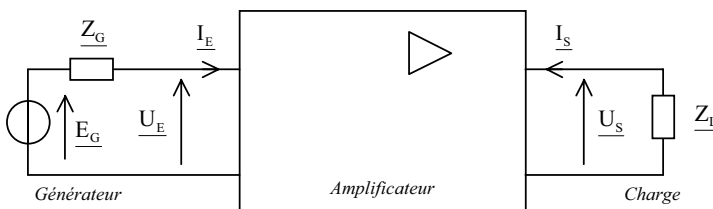


Fig. 25.1 Amplificateur

- **Amplification en tension, ou transfert en tension, \underline{T}_U – Amplification en tension à vide \underline{T}_{U0} – Gain en tension G_U – Déphasage φ_U**

$$\underline{T}_U = \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} \quad \underline{T}_{U0} = \left. \frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} \right|_{\underline{I}_S=0}$$

$$G_U = 20 \log |\underline{T}_U| \quad \text{en décibels (dB) tel que} \quad 1 \text{ bel} = 10 \text{ dB}$$

$$\varphi_U = \text{Arg} \underline{T}_U = \varphi_{US} - \varphi_{UE} \quad \text{Unités : radians (rad) ou degrés (°)}$$

- **Amplification en courant, ou transfert en courant, \underline{T}_I – Amplification en courant en court-circuit \underline{T}_{ICC} – Gain en courant G_I – Déphasage φ_I**

$$\underline{T}_I = \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_E} \quad \underline{T}_{ICC} = \left. \frac{\underline{I}_S}{\underline{I}_E} \right|_{\underline{U}_S=0}$$

$$G_I = 20 \log |\underline{T}_I| \quad \text{en décibels (dB)}$$

$$\varphi_I = \text{Arg} \underline{T}_I = \varphi_{IS} - \varphi_{IE} \quad \text{Unités : radians (rad) ou degrés (°)}$$

- **Transimpédance, ou impédance de transfert, \underline{T}_Z – Transimpédance à vide \underline{T}_{Z0} .**
Le module de la transimpédance s'exprime en ohms (Ω).

$$\underline{T}_Z = \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_E} \quad \underline{T}_{Z0} = \left. \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_E} \right|_{\underline{I}_S=0}$$

- **Transadmittance (ou transconductance), ou admittance (ou conductance) de transfert, \underline{T}_Y – Transadmittance en court-circuit \underline{T}_{YCC} .** Le module de la transadmittance s'exprime en siemens (S).

$$\underline{T}_Y = \frac{\underline{I}_S}{\underline{U}_E} \quad \underline{T}_{YCC} = \left. \frac{\underline{I}_S}{\underline{U}_E} \right|_{\underline{U}_S=0}$$

- **Impédance d'entrée \underline{Z}_E – Impédance d'entrée à vide \underline{Z}_{E0} – Impédance d'entrée en court-circuit \underline{Z}_{ECC}**

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} \quad \underline{Z}_{E0} = \left. \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} \right|_{\underline{I}_S=0} \quad \underline{Z}_{ECC} = \left. \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} \right|_{\underline{U}_S=0}$$

- **Impédance de sortie \underline{Z}_S – Impédance de sortie à vide \underline{Z}_{S0} – Impédance de sortie en court-circuit \underline{Z}_{SCC} .** Le générateur est rendu passif : $\underline{E}_G = 0$.

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S}$$

$$\underline{Z}_{S0} = \left. \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S} \right|_{\underline{I}_E=0}$$

$$\underline{Z}_{SCC} = \left. \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S} \right|_{\underline{U}_E=0}$$

Attention ! En toute généralité, l'amplification en tension, l'amplification en courant, la transimpédance, la transadmittance et l'impédance d'entrée dépendent de l'impédance de charge ; quant à l'impédance de sortie, elle dépend de l'impédance du générateur.

- **Schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie** (Fig. 25.2), en l'absence de réaction interne de la sortie sur l'entrée. La tension de sortie à vide \underline{U}_{S0} , c'est-à-dire à $\underline{I}_S = 0$, s'écrit :

$$\underline{U}_{S0} = \underline{T}_{U0} \underline{U}_E = \underline{T}_{Z0} \underline{I}_E \quad \text{avec} \quad \underline{T}_{Z0} = \underline{T}_{U0} \underline{Z}_E$$

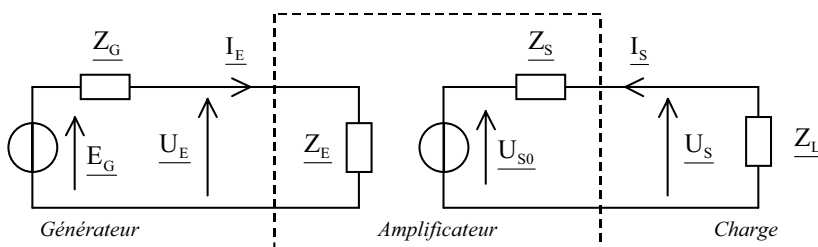


Fig. 25.2 Schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie

- **Schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie** (Fig. 25.3), en l'absence de réaction interne de la sortie sur l'entrée. Le courant de sortie en court-circuit \underline{I}_{SCC} , c'est-à-dire à $\underline{U}_S = 0$, s'écrit :

$$\underline{I}_{SCC} = \underline{T}_{ICC} \underline{I}_E = \underline{T}_{YCC} \underline{U}_E \quad \text{avec} \quad \underline{T}_{YCC} = \frac{\underline{T}_{ICC}}{\underline{Z}_E}$$

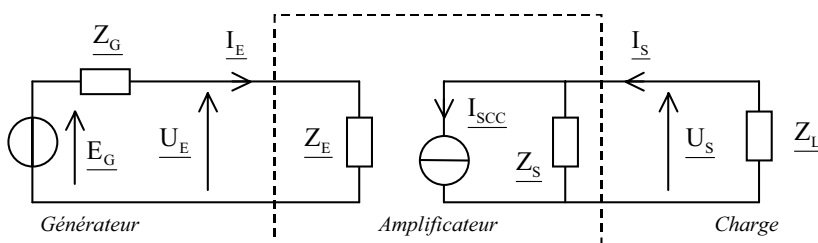


Fig. 25.3 Schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie

• **Réaction interne de la sortie sur l'entrée.** Cette réaction peut parfois ne plus être négligeable, en particulier aux fréquences élevées. Il faut alors adjoindre à l'impédance d'entrée \underline{Z}_E des schémas équivalents (Fig. 25.2 et Fig. 25.3) une source de tension en série (modèle de Thévenin) ou une source de courant en parallèle (modèle de Norton) qui rend compte de la réaction interne de la sortie sur l'entrée.

• **Bande passante.** Elle est généralement définie à -3 dB du gain maximal (f_L est la fréquence de coupure basse et f_H la fréquence de coupure haute). Plus exactement, les fréquences de coupure dites à -3 dB sont les fréquences pour lesquelles le module est égal au module maximal divisé par $\sqrt{2}$; la puissance du signal est alors la moitié de la puissance maximale.

$$BP = f_H - f_L$$

• **Distorsion harmonique.** Les non-linéarités d'un amplificateur déforment le signal. Pour mesurer cette distorsion, on applique à l'entrée un signal sinusoïdal. On obtient alors en sortie, du fait des non-linéarités, un signal périodique non-sinusoïdal décomposable en série de Fourier (Voir Chapitre 8 : Régime périodique – Séries de Fourier). Le taux de distorsion harmonique est défini par :

$$d = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} A_{n \text{ Eff}}^2}}{A_{1 \text{ Eff}}} = \frac{\sqrt{A_{2 \text{ Eff}}^2 + A_{3 \text{ Eff}}^2 + \dots + A_{n \text{ Eff}}^2 + \dots}}{A_{1 \text{ Eff}}}$$

où les $A_n = \sqrt{2} A_{n \text{ Eff}}$ sont les amplitudes (valeurs maximales) du fondamental et des harmoniques de la décomposition en série de Fourier du signal de sortie.

• **Amplificateur défini par ses paramètres internes.** Comme tout quadripôle, un amplificateur peut être défini par ses paramètres impédances, admittances, hybrides, etc.

1) *Paramètres impédances*

$$\begin{cases} \underline{U}_E = \underline{Z}_{11} \underline{I}_E + \underline{Z}_{12} \underline{I}_S \\ \underline{U}_S = \underline{Z}_{21} \underline{I}_E + \underline{Z}_{22} \underline{I}_S \end{cases} \quad \text{où} \quad \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{E0} \quad \underline{Z}_{21} = \underline{T}_{Z0} \quad \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{S0}$$

2) *Paramètres admittances*

$$\begin{cases} \underline{I}_E = \underline{Y}_{11} \underline{U}_E + \underline{Y}_{12} \underline{U}_S \\ \underline{I}_S = \underline{Y}_{21} \underline{U}_E + \underline{Y}_{22} \underline{U}_S \end{cases} \quad \text{où} \quad \underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}_{ECC} \quad \underline{Y}_{21} = \underline{T}_{YCC} \quad \underline{Y}_{22} = 1/\underline{Z}_{SCC}$$

3) *Paramètres hybrides*

$$\begin{cases} \underline{U}_E = \underline{H}_{11} \underline{I}_E + \underline{H}_{12} \underline{U}_S \\ \underline{I}_S = \underline{H}_{21} \underline{I}_E + \underline{H}_{22} \underline{U}_S \end{cases} \quad \text{où} \quad \underline{H}_{11} = \underline{Z}_{ECC} \quad \underline{H}_{21} = \underline{T}_{ICC} \quad \underline{H}_{22} = 1/\underline{Z}_{S0}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} \underline{I}_E = \underline{G}_{11} \underline{U}_E + \underline{G}_{12} \underline{I}_S \\ \underline{U}_S = \underline{G}_{21} \underline{U}_E + \underline{G}_{22} \underline{I}_S \end{cases} \quad \text{où} \quad \underline{G}_{11} = 1/\underline{Z}_{E0} \quad \underline{G}_{21} = \underline{T}_{U0} \quad \underline{G}_{22} = \underline{Z}_{SCC}$$

4) Impédances et amplifications exprimées avec les paramètres Z, Y et H

	Paramètres Z	Paramètres Y	Paramètres H
$\underline{Z_E} = \frac{U_E}{I_E} =$	$\frac{Z_{11} \underline{Z_L} + \underline{\Delta Z}}{Z_{22} + \underline{Z_L}}$	$\frac{Y_{22} \underline{Z_L} + 1}{Y_{11} + \underline{\Delta Y} \underline{Z_L}}$	$\frac{H_{11} + \underline{\Delta H} \underline{Z_L}}{H_{22} \underline{Z_L} + 1}$
$\underline{Z_S} = \frac{U_S}{I_S} =$	$\frac{Z_{22} \underline{Z_G} + \underline{\Delta Z}}{Z_{11} + \underline{Z_G}}$	$\frac{Y_{11} \underline{Z_G} + 1}{Y_{22} + \underline{\Delta Y} \underline{Z_G}}$	$\frac{H_{11} + \underline{Z_G}}{H_{22} \underline{Z_G} + \underline{\Delta H}}$
$\underline{T_U} = \frac{U_S}{U_E} =$	$\frac{Z_{21} \underline{Z_L}}{Z_{11} \underline{Z_L} + \underline{\Delta Z}}$	$\frac{-Y_{21} \underline{Z_L}}{Y_{22} \underline{Z_L} + 1}$	$\frac{-H_{21} \underline{Z_L}}{H_{11} + \underline{\Delta H} \underline{Z_L}}$
$\underline{T_I} = \frac{I_S}{I_E} =$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22} + \underline{Z_L}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11} + \underline{\Delta Y} \underline{Z_L}}$	$\frac{H_{21}}{H_{22} \underline{Z_L} + 1}$

Avec :

$\underline{\Delta Z} = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{1} = \frac{H_{11}}{\underline{\Delta Y}} = \frac{H_{11}}{H_{22}}$	$\underline{\Delta Y} = \frac{Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}}{1} = \frac{H_{22}}{\underline{\Delta Z}} = \frac{H_{22}}{H_{11}}$	$\underline{\Delta H} = \frac{H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}}{Z_{11}} = \frac{Y_{22}}{Z_{22}} = \frac{Y_{11}}{Y_{11}}$
--	--	---

Remarque :

- Ces équations sont valables pour les « larges signaux » et, pour les « petits signaux » autour d’un point de polarisation (on note alors souvent les paramètres par des minuscules). D’une façon générale, les paramètres dépendent du point de fonctionnement.
- Les paramètres peuvent être réels (généralement le cas en basses fréquences) ou complexes (généralement le cas aux fréquences élevées).
- En l’absence de réaction interne de la sortie sur l’entrée, les paramètres $\underline{Z_{12}}$, $\underline{Y_{12}}$ et $\underline{H_{12}}$ sont nuls, et les expressions se simplifient notablement.

5) Paramètres de transfert. Ils peuvent être utilisés pour la mise en cascade d’amplificateurs.

$$\begin{cases} \underline{U_S} = \underline{T_{11}} \underline{U_E} + \underline{T_{12}} (-\underline{I_E}) \\ \underline{I_S} = \underline{T_{21}} \underline{U_E} + \underline{T_{22}} (-\underline{I_E}) \end{cases}$$

25.2 AMPLIFICATION EN TENSION

• **Symbole et fonction d’un amplificateur de tension** (Fig. 25.4). T_U est l’amplification en tension.

• **Amplificateur de tension idéal** (Fig. 25.5). Résistance d’entrée infinie, résistance de sortie nulle, et amplification en tension constante.

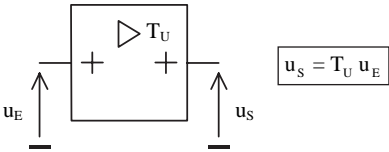


Fig. 25.4 Symbole et fonction d’un amplificateur de tension

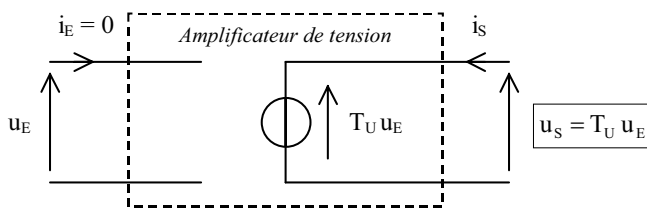


Fig. 25.5 Amplificateur de tension idéal

Question : Soit le schéma d'un amplificateur non-inverseur (Fig. 25.6). Exprimer l'amplification en tension. Dessiner son schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie.

Réponse : En supposant l'amplificateur différentiel parfait (courants nuls dans les entrées « + » et « - », tension d'entrée différentielle nulle en régime linéaire), on a :

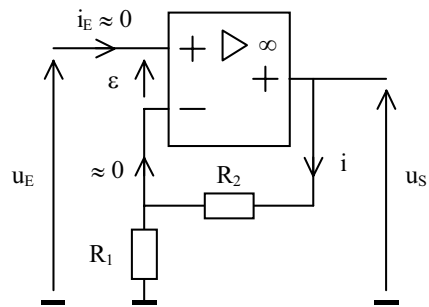


Fig. 25.6 Amplificateur non-inverseur

$$\begin{cases} u_E = R_1 i \\ u_S = (R_1 + R_2) i \end{cases} \Rightarrow T_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie (Fig. 25.7).

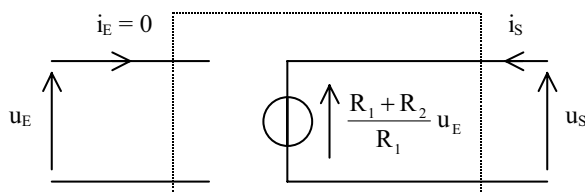


Fig. 25.7 Schéma équivalent de l'amplificateur non-inverseur

Remarque : En pratique, la résistance d'entrée $R_E = u_E / i_E$ est très grande, c'est la résistance de l'entrée « + » de l'amplificateur différentiel.

Attention ! Dans le cas d'un amplificateur différentiel à contre réaction de courant, la résistance de contre-réaction R_2 fixe la bande passante : sa valeur, spécifiée dans le document constructeur, ne peut jamais être nulle. Par contre, dans le cas d'un amplificateur différentiel à contre-réaction de tension (AOp), la résistance de contre-réaction peut être nulle pour un suiveur ($T_U = 1$).

Question : Soit le schéma d'un amplificateur inverseur (Fig. 25.8). Exprimer l'amplification en tension et la résistance d'entrée. Dessiner son schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie.

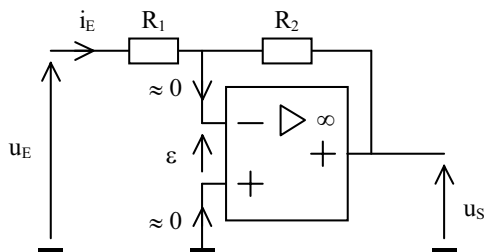


Fig. 25.8 Amplificateur inverseur (1^{ère} version)

Réponse : En supposant l'amplificateur différentiel parfait (cou-

rants nuls dans les entrées « + » et « - », tension d'entrée différentielle nulle en régime linéaire), on a :

$$\begin{cases} u_E = R_1 i_E \\ u_S = -R_2 i_E \end{cases} \Rightarrow T_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{-R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R_1$$

Schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie (Fig. 25.9).

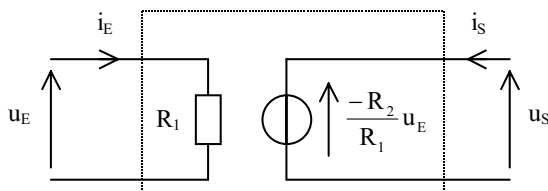


Fig. 25.9 Schéma équivalent de l'amplificateur inverseur (1^{ère} version)

Remarque : Pour une amplification en tension importante, on préfère le montage (Fig. 25.10) au montage (Fig. 25.8), car il autorise une résistance d'entrée plus élevée. On a :

$$T_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{-R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_2} \right) \quad \text{et} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R_1$$

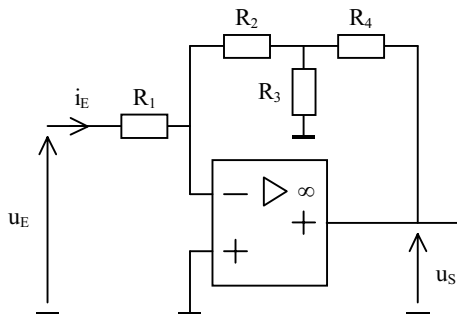


Fig. 25.10 Amplificateur inverseur (2^{ème} version)

25.3 AMPLIFICATION EN COURANT

• **Symbole et fonction d'un amplificateur de courant** (Fig. 25.11). T_I est l'amplification en courant.

• **Amplificateur de courant idéal** (Fig. 25.12). Résistance d'entrée nulle, résistance de sortie infinie, et amplification en courant constante.

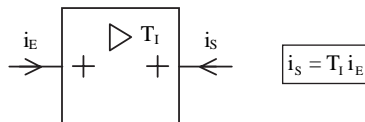


Fig. 25.11 Symbole et fonction d'un amplificateur de courant

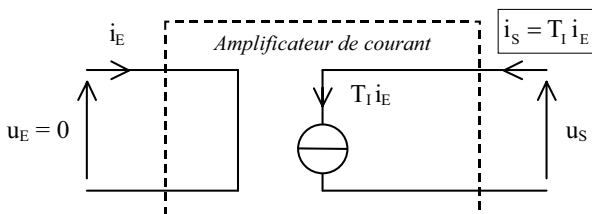


Fig. 25.12 Amplificateur de courant idéal

Exemple 25.3.1

Un simple transistor bipolaire réalise une amplification de courant (Fig. 25.13). Son amplification en courant n'est ni précise, ni stable, ni exactement linéaire ; sa résistance d'entrée n'est pas constante (voir Chapitre 17 : Transistors bipolaires).

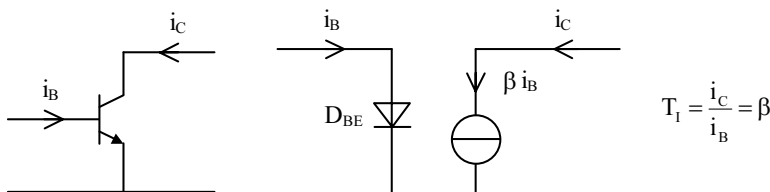


Fig. 25.13 Transistor bipolaire et son schéma équivalent très simplifié

Question : Soit le schéma d'un amplificateur en courant (Fig. 25.14) dont la charge est flottante. Exprimer l'amplification en courant et la résistance d'entrée. Dessiner son schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie.

Réponse : En supposant l'amplificateur différentiel parfait (courants

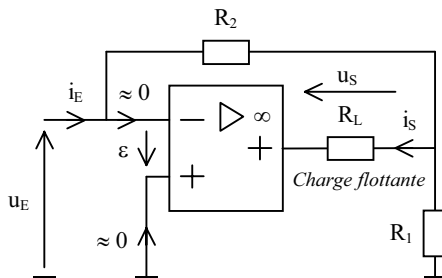


Fig. 25.14 Amplificateur en courant (charge flottante)

nuls dans les entrées « + » et « - », tension d'entrée différentielle nulle en régime linéaire), on a :

$$R_2 i_E = R_1 (i_S - i_E) \Rightarrow T_I = \frac{i_S}{i_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = 0$$

Schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie (Fig. 25.15).

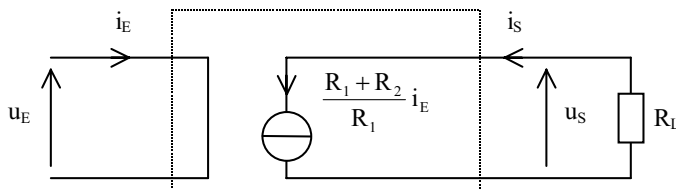


Fig. 25.15 Schéma équivalent de l'amplificateur en courant (charge flottante)

25.4 CONVERSION COURANT-TENSION (TRANSIMPÉDANCE)

- **Symbole et fonction d'un amplificateur de transimpédance** (Fig. 25.16). T_Z est la transimpédance.

- **Amplificateur de transimpédance, ou convertisseur courant-tension, idéal** (Fig. 25.17). Résistance d'entrée nulle, résistance de sortie nulle, et transimpédance constante.

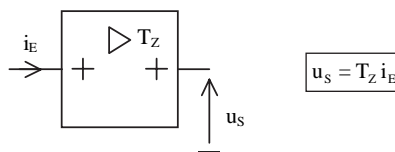


Fig. 25.16 Symbole et fonction d'un amplificateur de transimpédance

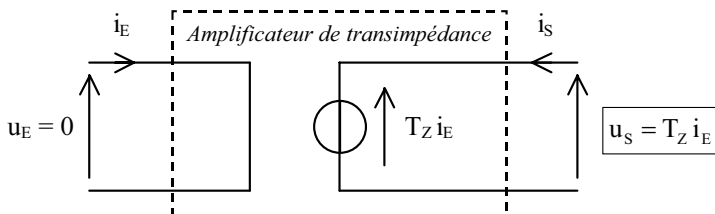


Fig. 25.17 Amplificateur de transimpédance idéal

Question : Soit le schéma d'un convertisseur courant-tension (Fig. 25.18). Exprimer la transimpédance et la résistance d'entrée. Dessiner son schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie.

Réponse : En supposant l'amplificateur différentiel parfait (courants nuls dans les entrées « + » et « - », tension d'entrée différentielle nulle en régime linéaire), on a :

$$R i_E = -u_S \Rightarrow T_Z = \frac{u_S}{i_E} = -R$$

$$\text{et } R_E = \frac{u_E}{i_E} = 0$$

Schéma équivalent avec modèle de Thévenin en sortie (Fig. 25.19).

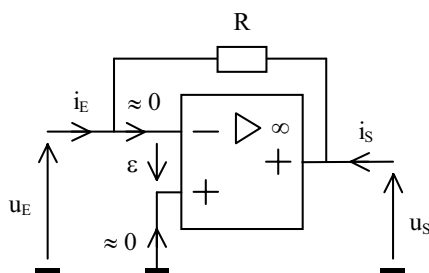


Fig. 25.18 Convertisseur courant-tension

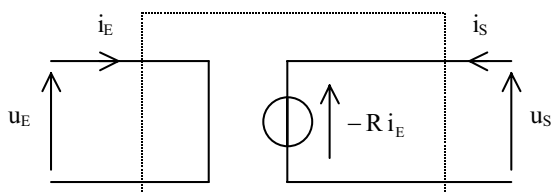


Fig. 25.19 Schéma équivalent du convertisseur courant-tension

25.5 CONVERSION TENSION-COURANT (TRANSADMITTANCE)

- *Symbole et fonction d'un amplificateur de transadmittance* (Fig. 25.20). T_Y est la transadmittance.

- *Amplificateur de transadmittance ou de transconductance, ou convertisseur tension-courant, idéal* (Fig. 25.21). Résistance d'entrée infinie, résistance de sortie infinie, et transadmittance constante.

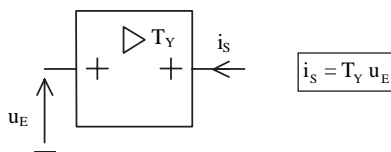


Fig. 25.20 Symbole et fonction d'un amplificateur de transadmittance

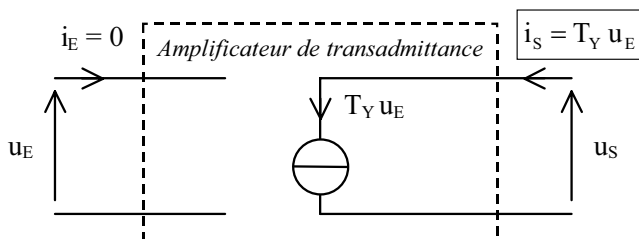


Fig. 25.21 Amplificateur de transadmittance idéal

Exemple 25.5.2

Un simple transistor MOS réalise une conversion tension-courant (Fig. 25.22). Sa transadmittance n'est ni précise, ni stable, ni linéaire (voir Chapitre 18 : Transistors MOS).

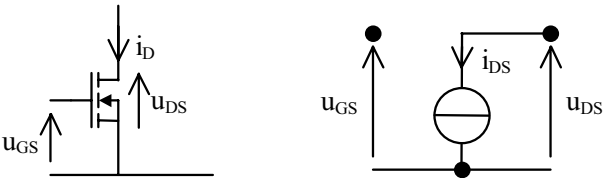


Fig. 25.22 Transistor MOS et son schéma équivalent très simplifié

Question : Soit le schéma d'un convertisseur tension-courant (Fig. 25.23) dont la charge est flottante. Exprimer la transadmittance et la résistance d'entrée. Dessiner son schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie.

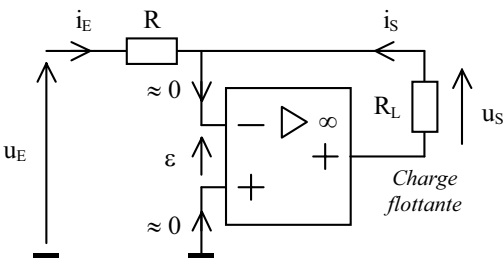


Fig. 25.23 Convertisseur tension-courant (charge flottante)

Réponse : En supposant l'amplificateur différentiel parfait

(courants nuls dans les entrées « + » et « - », tension d'entrée différentielle nulle en régime linéaire), on a :

$$\begin{cases} Ri_E = u_E \\ i_S = -i_E \end{cases} \Rightarrow T_Y = \frac{i_S}{u_E} = \frac{-1}{R} \quad \text{et} \quad R_E = \frac{u_E}{i_E} = R$$

Schéma équivalent avec modèle de Norton en sortie (Fig. 25.24).

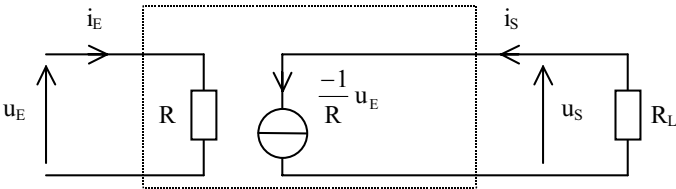


Fig. 25.24 Schéma équivalent du convertisseur tension-courant

25.6 AMPLIFICATION DIFFÉRENTIELLE

- **Fonction – Symbole** (Fig. 25.25).

Un amplificateur différentiel de tension amplifie la différence de deux tensions d'entrée.

- **Réjection du mode commun.** Soient \underline{T}_D l'amplification différentielle, et \underline{T}_C l'amplification en mode commun. La tension de sortie d'un amplificateur différentiel s'écrit :

$$\underline{U}_S = \underline{T}_D (\underline{U}_E^+ - \underline{U}_E^-) + \underline{T}_C \frac{\underline{U}_E^+ + \underline{U}_E^-}{2}$$

On pose : $\underline{U}_D = \underline{U}_E^+ - \underline{U}_E^-$ (u_D : tension différentielle)

et : $\underline{U}_C = \frac{\underline{U}_E^+ + \underline{U}_E^-}{2}$ (u_C : tension de mode commun)

D'où : $\underline{U}_S = \underline{T}_D \underline{U}_D + \underline{T}_C \underline{U}_C$

On définit le *T.R.M.C.* (Taux de Réjection du Mode Commun) ou *C.M.R.R.* (common-mode rejection ratio) par :

$$\text{C.M.R.R.} = 20 \log \frac{|\underline{T}_D|}{|\underline{T}_C|} \quad \text{en décibels (dB)}$$

- **Autres amplificateurs différentiels.** Amplificateur différentiel de courant, de transimpédance, de transadmittance.

- **Modèles idéaux des amplificateurs différentiels.** Ce sont les modèles donnés (Fig. 25.5, Fig. 25.12, Fig. 25.17 et Fig. 25.21) en remplaçant l'entrée en tension u_E par l'entrée différentielle de tension $u_D = u_E^+ - u_E^-$ (Fig. 25.26), et l'entrée en courant i_E par l'entrée différentielle de courant $i_D = i_E^+ - i_E^-$ (Fig. 25.27).

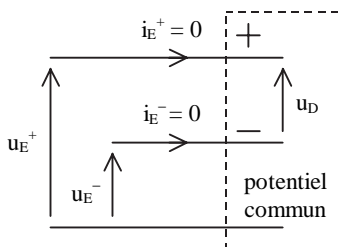


Fig. 25.26 Entrée diff. de tension

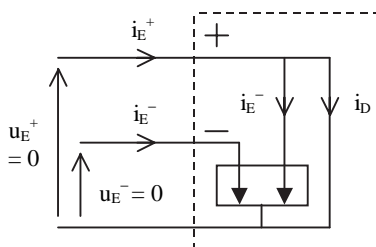


Fig. 25.27 Entrée diff. de courant

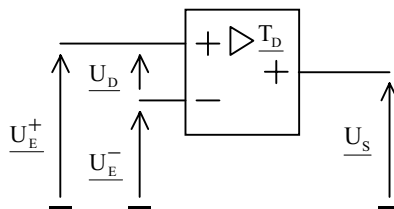


Fig. 25.25 Symbole d'un amplificateur différentiel de tension

25.6.1 Amplificateur de différence élémentaire

Soit le schéma d'un amplificateur de différence élémentaire (Fig. 25.28).

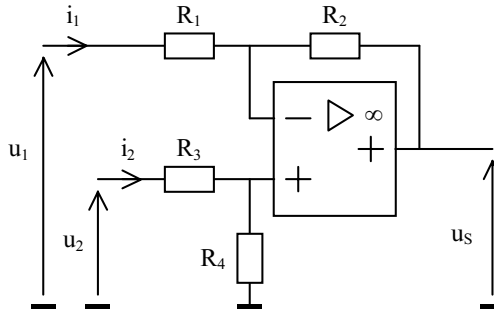


Fig. 25.28 Amplificateur de différence élémentaire

Question :

- 1) Exprimer la tension de sortie en fonction des tensions d'entrées.
- 2) En déduire l'amplification en mode différentiel A_D et l'amplification en mode commun A_C .
- 3) En déduire le C.M.R.R. Exprimer la condition théorique permettant d'annuler l'amplification en mode commun.

Réponse :

- 1) Par application du théorème de superposition, on écrit :

$$u_S = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_2 - \frac{R_2}{R_1} u_1$$

- 2) Par définition, on a :

$$u_S = A_D u_D + A_C u_C = A_D (u_2 - u_1) + A_C \frac{u_2 + u_1}{2}$$

$$\text{D'où : } \left. \begin{array}{l} u_D = u_2 - u_1 \\ u_C = \frac{u_2 + u_1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u_2 = u_C + \frac{u_D}{2} \\ u_1 = u_C - \frac{u_D}{2} \end{array} \right.$$

En remplaçant dans l'expression de la tension de sortie, on obtient :

$$u_S = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{u_D}{2} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1} \right) u_C$$

Par identification, on en déduit :

$$A_D = \frac{R_1 R_4 + 2 R_2 R_4 + R_2 R_3}{2 R_1 (R_3 + R_4)} \quad \text{et} \quad A_C = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 (R_3 + R_4)}$$

3) C.M.R.R.

$$\text{C.M.R.R.} = 20 \log K \quad \text{avec} \quad K = \frac{R_1 R_4 + 2R_2 R_4 + R_2 R_3}{2(R_1 R_4 - R_2 R_3)}$$

Condition théorique d'annulation de l'amplification en mode commun :

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \quad \Rightarrow \quad A_C = 0 \quad \text{et} \quad A_D = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

Remarque : Le taux de réjection du mode commun dépend de la précision avec laquelle on réalise l'égalité $R_1 R_4 = R_2 R_3$. En supposant l'amplificateur parfait, et pour de petites variations des résistances autour de leurs valeurs, on a :

$$A_D \approx A_{D0} + dA_D \quad \text{avec} \quad A_{D0} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$\text{et} \quad dA_D = \frac{A_{D0}}{2(1 + A_{D0})} \left[(1 + 2A_{D0}) \left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1} \right) + \left(\frac{dR_4}{R_4} - \frac{dR_3}{R_3} \right) \right]$$

$$A_C \approx A_{C0} + dA_C \quad \text{avec} \quad A_{C0} = 0$$

$$\text{et} \quad dA_C = \frac{A_{D0}}{1 + A_{D0}} \left[\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_4}{R_4} \right]$$

$$\text{D'où :} \quad K \approx \frac{A_{D0}}{A_C} = \frac{1 + A_{D0}}{\frac{dR_1}{R_1} - \frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_3}{R_3} + \frac{dR_4}{R_4}}$$

Cela donne l'incertitude relative sur l'amplification différentielle et le facteur de réjection du mode commun K en fonction des tolérances des résistances.

$$\frac{\Delta A_D}{A_{D0}} = \frac{1}{2(1 + A_{D0})} \left[(1 + 2A_{D0}) \left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_1}{R_1} \right) + \left(\frac{\Delta R_4}{R_4} + \frac{\Delta R_3}{R_3} \right) \right]$$

$$K \approx \frac{A_{D0}}{A_C} = \frac{1 + A_{D0}}{\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_4}{R_4}}$$

$$\text{Pour} \quad \frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta R_2}{R_2} = \frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{\Delta R_4}{R_4} \quad \text{on obtient :}$$

$$\frac{\Delta A_D}{A_{D0}} = 2 \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad \text{et} \quad K \approx \frac{A_{D0}}{A_C} = \frac{1 + A_{D0}}{4 \frac{\Delta R_1}{R_1}}$$

Le facteur de réjection du mode commun K est inversement proportionnel aux tolérances des résistances. Par exemple, avec $A_{D0} = 1$ on obtient dans le pire cas un C.M.R.R. de 20 dB pour $\Delta R_1/R_1 = 5\%$, et un C.M.R.R. de 40 dB seulement pour $\Delta R_1/R_1 = 0,5\%$. En conclusion, la seule bonne solution qui permet d'obtenir une

importante réjection du mode commun est l'emploi d'un amplificateur différentiel intégré, l'égalité $R_1 R_4 = R_2 R_3$ étant réalisée au mieux par ajustage laser d'une des résistances.

25.6.2 Amplificateur différentiel d'instrumentation

Pour amplifier de faibles signaux et rejeter correctement des modes communs élevés, il faut utiliser des amplificateurs différentiels spéciaux dits d'instrumentation, lesquels possèdent des taux de réjection élevés et des grandes impédances d'entrées. Le schéma de principe typique d'un amplificateur différentiel intégré est donné (Fig. 25.29).

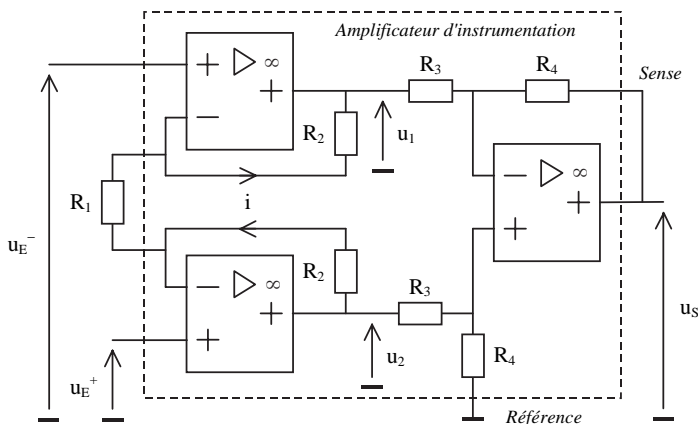


Fig. 25.29 Principe d'un amplificateur différentiel d'instrumentation

La borne « Référence » permet d'effectuer un décalage de la tension de sortie, et d'effectuer différents contrôles. La borne « Sense » permet d'ajouter en sortie un amplificateur de puissance, ou de réaliser une conversion tension-courant par exemple. La résistance R_1 permet de régler l'amplification différentielle lorsqu'elle est accessible.

Question : Exprimer la tension de sortie en fonction des tensions d'entrées.

Réponse : D'une part, on a :

$$\left. \begin{array}{l} u_E^+ - u_E^- = R_1 i \\ u_2 - u_1 = (2R_2 + R_1) i \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{u_2 - u_1}{u_E^+ - u_E^-} = 1 + \frac{2R_2}{R_1}$$

D'autre part, en supposant l'amplification en mode commun nulle, on a :

$$u_S = \frac{R_4}{R_3} (u_2 - u_1) \quad (\text{voir § 25.6.1})$$

$$\text{D'où : } T_D = \frac{u_S}{u_E^+ - u_E^-} = \frac{R_4}{R_3} \left(1 + \frac{2R_2}{R_1} \right)$$

25.6.3 Amplificateur différentiel d'isolement

Les amplificateurs d'isolement (symbole Fig. 25.30) permettent d'ouvrir les boucles de masse, de bloquer les signaux hautes tensions et de rejeter des modes communs élevés. Les masses peuvent être différentes. L'isolement est réalisé par coupleur magnétique, par coupleur optique, par capacité basculante, ou par numérisation du signal.

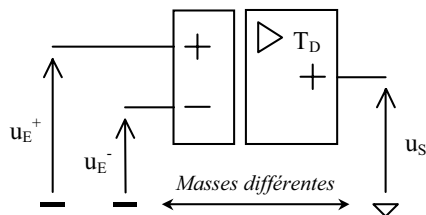


Fig. 25.30 Symbole d'un amplificateur différentiel d'isolement

Exemple 25.6.3

Soit le principe d'un amplificateur d'isolement à capacité basculante (Fig. 25.31). Les inverseurs analogiques commandés passent périodiquement de la position 1 à la position 2 à la fréquence $1/T$. En régime permanent et pour une tension d'entrée continue, la tension de sortie (continue) est donnée par :

$$\frac{U_S}{U_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

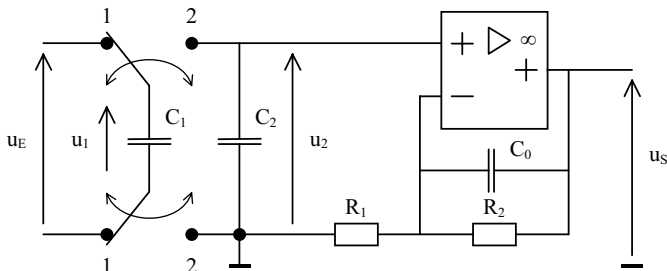


Fig. 25.31 Amplificateur d'isolement à capacité basculante

25.7 AMPLIFICATION DE PUISSANCE

25.7.1 Généralités – Définitions

- *Bilan des puissances* (Fig. 25.32)

$$P_E + P_A = P_S + P_D \quad \text{et} \quad P_S = P_{S\text{ AC}} + P_{S\text{ DC}}$$

Où P_E est la puissance moyenne du signal d'entrée apportée par la source, P_A la puissance moyenne fournie par l'alimentation, P_D la puissance moyenne dissipée par l'amplificateur sous forme de chaleur, P_S la puissance moyenne du signal de sortie consommée par la charge, $P_{S\text{ AC}}$ la puissance moyenne de la composante alternative du signal de sortie, et $P_{S\text{ DC}}$ la puissance moyenne de la composante continue du signal de sortie.

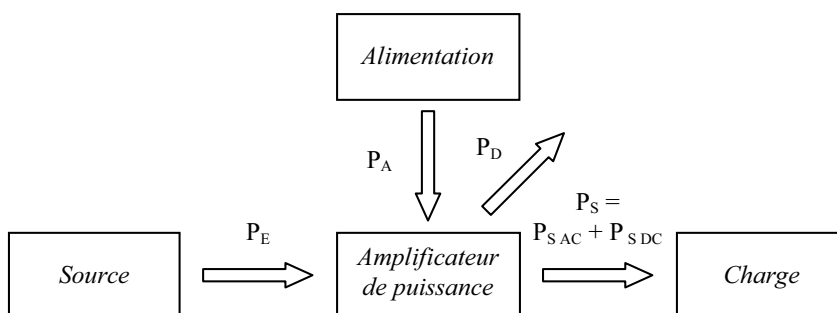


Fig. 25.32 Bilan des puissances

Remarque : Selon l'application, le signal utile est composé : soit des composantes alternative et continue, soit de la seule composante alternative.

- **Rendements.** On définit le rendement η relatif à la puissance totale (composantes alternative et continue) du signal de sortie, et le rendement η_{AC} relatif à la seule composante alternative du signal de sortie.

$$\eta = \frac{P_S}{P_E + P_A}$$

$$\eta_{AC} = \frac{P_{S\ AC}}{P_E + P_A}$$

- **Amplifications en puissance.** On définit l'amplification en puissance T_P totale (composantes alternatives et continues) des signaux d'entrée et de sortie, et l'amplification en puissance $T_{P\ AC}$ des seules composantes alternatives des signaux d'entrée et de sortie.

$$T_P = \frac{P_S}{P_E}$$

$$T_{P\ AC} = \frac{P_{S\ AC}}{P_{E\ AC}}$$

Pour des composantes alternatives sinusoïdales, on a :

$$T_{P\ AC} = \frac{U_{S\ Eff} I_{S\ Eff} \cos(-\varphi_S)}{U_{E\ Eff} I_{E\ Eff} \cos \varphi_E} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_S = \text{Arg} \underline{U_S} - \text{Arg} \underline{I_S} \\ \varphi_E = \text{Arg} \underline{U_E} - \text{Arg} \underline{I_E} \end{cases}$$

- **Gains en puissance**

$$G_P = 10 \log T_P$$

$$G_{P\ AC} = 10 \log T_{P\ AC}$$

en décibels (dB)

- **Classes de fonctionnement d'un transistor.** La classe de fonctionnement d'un transistor est repérable par la position de son point de polarisation sur la droite de charge (Fig. 25.33).

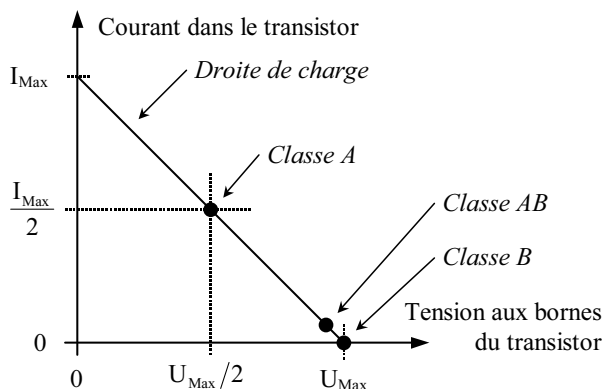


Fig. 25.33 Classes de fonctionnement d'un transistor

25.7.2 Amplification en classe A

Le principe d'un amplificateur en classe A et son fonctionnement sont donnés (Fig. 25.34). Le point de repos M est généralement choisi au milieu de la droite de charge pour permettre une excursion maximale du signal utile avec une distorsion minimale; les transistors de puissance conduisent en permanence.

Droite de charge :
$$I_C = \frac{U_{CC} - U_{CE}}{R}$$

Puissances et rendements au repos (absence de composante alternative) et en régime sinusoïdal pour une excursion maximale. La puissance d'entrée P_E est négligée.

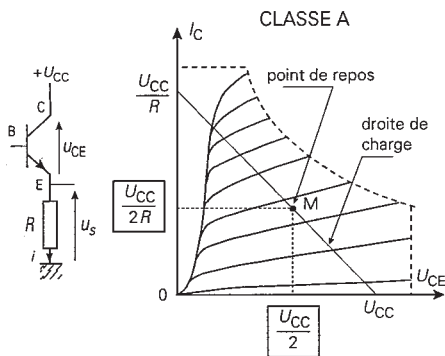


Fig. 25.34 Fonctionnement d'un amplificateur en classe A

	Au repos	En régime sinusoïdal pour une excursion maximale
Puissance de sortie totale dans la charge	$P_S = \frac{U_{CC}^2}{4R}$	$P_S = \frac{3U_{CC}^2}{8R}$
Puissance de sortie utile dans la charge	$P_{S\ AC} = 0$	$P_{S\ AC} = \frac{U_{CC}^2}{8R}$
Puissance dissipée par le transistor	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{4R}$	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{8R}$
Puissance fournie par l'alimentation	$P_A = \frac{U_{CC}^2}{2R}$	$P_A = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Rendement théorique maximal		$\eta_{AC} = \frac{1}{4} = 25\%$

Remarque :

- La puissance dissipée par le transistor est $P_D = U_{CC}^2/4R$ dans le cas le plus défavorable en régime sinusoïdal.
- La consommation au repos est aussi importante qu'en fonctionnement.
- Une composante continue est présente dans la charge.
- On obtient une très faible distorsion dans le cas d'un amplificateur contre réactionné (Fig. 25.35).

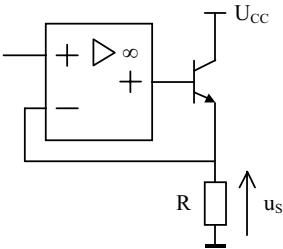


Fig. 25.35 Amplificateur classe A contre réactionné

25.7.3 Amplification en classe B – Montage « Push-Pull »

Un amplificateur fonctionne en classe B si les transistors de puissance sont bloqués à la limite de conduction au repos. Le point de repos M est placé à la limite de conduction des transistors. Ils conduisent une alternance sur deux en régime alternatif. Le principe d'un amplificateur en classe B (étage « Push-Pull ») est donné (Fig. 25.36), et son fonctionnement (Fig. 25.37).

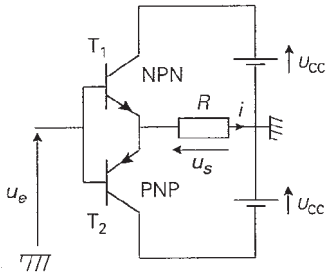


Fig. 25.36 Etage « Push-Pull » d'un amplificateur en classe B

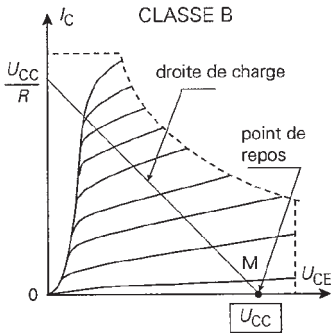


Fig. 25.37 Fonctionnement d'un amplificateur en classe B

Puissances et rendements au repos (absence de composante alternative) et en régime sinusoïdal pour une excursion maximale. La puissance d'entrée P_E est négligée.

	Au repos	En régime sinusoïdal pour une excursion maximale
Puissance de sortie totale dans la charge	$P_S = 0$	$P_S = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Puissance de sortie utile dans la charge	$P_{S\ AC} = 0$	$P_{S\ AC} = \frac{U_{CC}^2}{2R}$
Puissance dissipée par les transistors	$P_D = 0$	$P_D = \frac{U_{CC}^2}{R} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)$
Puissance fournie par l'alimentation	$P_A = 0$	$P_A = \frac{2U_{CC}^2}{\pi R}$
Rendement théorique maximal		$\eta_{AC} = \frac{\pi}{4} \approx 78\ %$

Remarque :

- La puissance dissipée par les transistors est $P_D = 2U_{CC}^2/\pi^2 R$ dans le cas le plus défavorable en régime sinusoïdal.
- Distorsion de croisement (Fig. 25.38). Pour un signal d'entrée sinusoïdal, on observe une distorsion de croisement sur le signal de sortie. Cette distorsion est due à la caractéristique de transfert de l'étage « Push-Pull » (Fig. 25.39). La contre-réaction diminue notablement cette distorsion (Fig. 25.40).

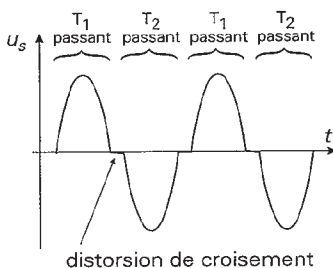


Fig. 25.38 Distorsion de croisement d'un étage « Push-Pull »

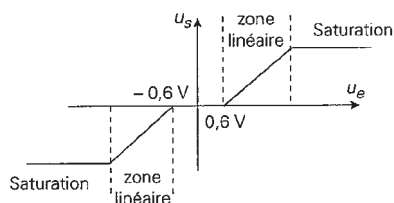


Fig. 25.39 Caractéristique de transfert de l'étage « Push-Pull »

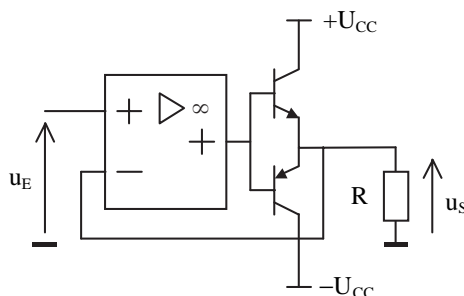


Fig. 25.40 Amplificateur classe B contre réactionné

25.7.4 Amplification en classe AB

Un amplificateur fonctionne en classe AB si les transistors de puissance sont légèrement conducteurs au repos. Le point de repos est fixé légèrement au-dessus du seuil de conduction des transistors par une polarisation adéquate. La classe AB est un compromis entre la classe A et la classe B. La distorsion de croisement est réduite au prix d'une augmentation de la consommation au repos et d'une baisse du rendement.

25.7.5 Amplification en classe D

La classe D désigne un fonctionnement en commutation. Le but est de limiter la puissance dissipée par les transistors afin d'obtenir un rendement élevé (100 % en théorie). Le signal d'erreur $\varepsilon = u_E - Bu_S$ (Fig. 25.41) commande le rapport cyclique

d'un générateur de signal rectangulaire « h » dont la fréquence, fixée par l'horloge, reste constante. Le signal « h » est donc modulé en largeur d'impulsion (M.L.I. : *Modulation de Largeur d'Impulsion*, ou P.W.M. : *Pulse Width Modulation*) de telle façon que sa valeur moyenne soit l'image du signal d'erreur. Le filtre passe-bas permet d'éliminer les fréquences parasites dues aux commutations. Si l'amplification de la chaîne directe est suffisamment grande, on peut considérer que $u_S = u_E/B$.

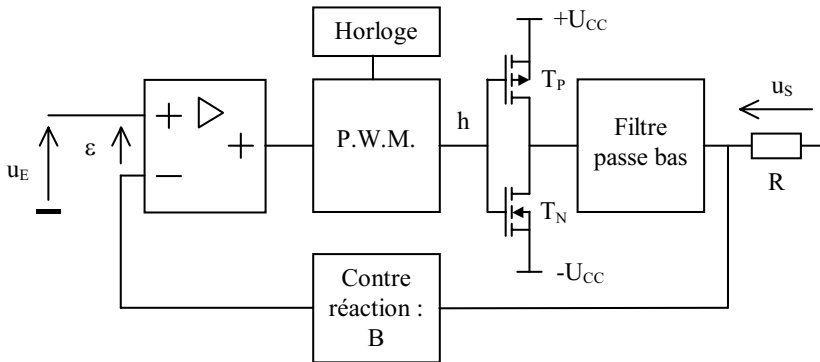


Fig. 25.41 Principe d'un amplificateur en classe D

25.8 ADAPTATION D'IMPÉDANCE

25.8.1 Introduction

L'adaptation des impédances permet une transmission maximale de puissance. Elle évite les réflexions d'un signal sur une ligne de transmission (ou entre deux étages en hautes fréquences). C'est un problème crucial, car les réflexions sur une ligne dégradent le signal, et peuvent même le rendre totalement inexploitable. Le modèle idéal d'un amplificateur adapté en impédances est celui donné (Fig. 25.2 ou Fig. 25.3), les deux conditions suivantes d'adaptation des impédances étant satisfaites (Adaptations des impédances en entrée et en sortie).

$$\underline{Z_E} = \overline{\underline{Z_G}} \quad (\text{en entrée}) \quad \text{et} \quad \underline{Z_S} = \overline{\underline{Z_L}} \quad (\text{en sortie})$$

25.8.2 Étude de l'adaptation en sortie

Soit le schéma équivalent d'un amplificateur avec modèle de Thévenin en sortie (Fig. 25.2). On pose : $\underline{Z_L} = R_L + jX_L$ (charge), et $\underline{Z_S} = R_S + jX_S$ (sortie).

– Puissance moyenne ou active transmise à la charge :

$$P_S = \frac{R_L U_{S0 \text{ Eff}}^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

- Condition d'adaptation d'impédance : $\underline{Z}_S = \overline{\underline{Z}_L} \Leftrightarrow \begin{cases} R_S = R_L, & \text{et} \\ X_S = -X_L \end{cases}$
- Puissance moyenne maximale transmise à la charge : $P_{S \text{ Max}} = \frac{U_{S0 \text{ Eff}}^2}{4R_S}$

25.8.3 Quadripôles d'adaptation

Le plus simple est bien sûr de respecter la condition d'adaptation d'impédance précédente, directement, lorsque cela est possible. Mais, le plus souvent, les impédances de sortie et de la charge étant imposées, il est nécessaire d'intercaler un quadripôle d'adaptation entre lesdites impédances.

• **Adaptation par transformateur** (Fig. 25.42). Soit un transformateur parfait de rapport de transformation m (voir Chapitre 15 : Transformateurs). Ramenée au primaire, l'impédance \underline{Z}_L est divisée par m^2 . La sortie de l'amplificateur voit donc l'impédance :

$$\frac{\underline{Z}_L}{m^2} = \frac{R_L}{m^2} + j \frac{X_L}{m^2}$$

En conséquence, l'adaptation est réalisée pour :

$$\frac{\underline{Z}_L}{m^2} = \underline{Z}_S \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R_L}{m^2} = R_S \quad \text{et} \quad \frac{X_L}{m^2} = -X_S$$

Le transformateur ne permet pas d'adapter indépendamment les parties réelles et les parties imaginaires des impédances, et il ne permet pas de modifier le signe entre les parties imaginaires. Le transformateur permet facilement d'adapter en puissance les impédances lorsqu'elles sont purement résistives ou se comportent comme telles dans une bande de fréquence donnée.

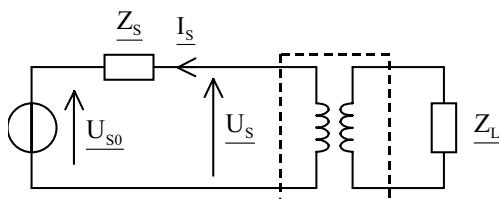
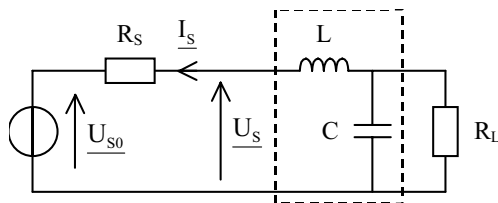


Fig. 25.42 Adaptation d'impédance par transformateur

• **Adaptation par quadripôle réactif LC.** L'adaptation est réalisée pour une seule fréquence. On a deux cas :

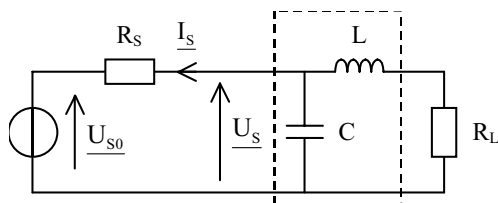
1) $R_L > R_S$ (Fig. 25.43). On obtient :

$$C = \frac{1}{R_L \omega} \sqrt{\frac{R_L}{R_S} - 1} \quad \text{et} \quad L = R_L R_S C$$

Fig. 25.43 Adaptation d'impédance par quadripôle LC ($R_L > R_S$)

2) $R_L < R_S$ (Fig. 25.44). On obtient :

$$L = \frac{R_L}{\omega} \sqrt{\frac{R_S}{R_L} - 1} \quad \text{et} \quad C = \frac{L}{R_L R_S}$$

Fig. 25.44 Adaptation d'impédance par quadripôle LC ($R_L < R_S$)

25.9 AUTRES OPÉRATIONS ANALOGIQUES SUR LES SIGNAUX

Pour les montages présentés ici, les composants sont supposés parfaits. Ils sont basés sur l'emploi de composants intégrés.

25.9.1 Sommateur

Un sommateur de tension (symbole Fig. 25.45) effectue la somme pondérée de plusieurs tensions d'entrées selon la relation suivante.

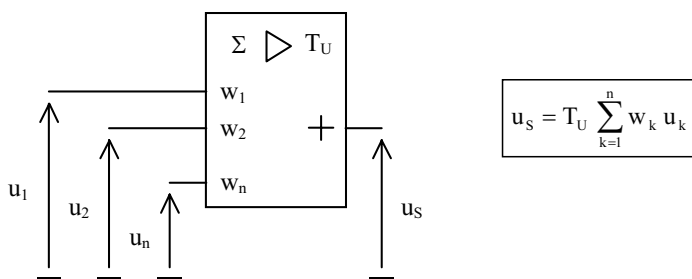


Fig. 25.45 Sommateur de tension

Exemple 25.9.4

Sommateur non-inverseur (Fig. 25.46)

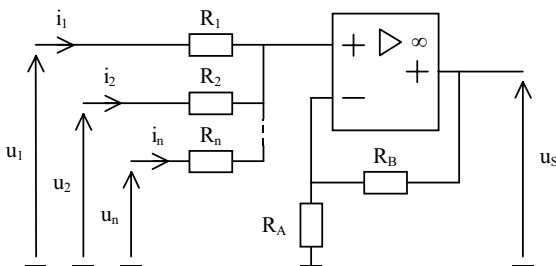


Fig. 25.46 Sommateur non-inverseur

$$u_S = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{\sum_{q=1}^n \frac{u_q}{R_q}}{\sum_{q=1}^n \frac{1}{R_q}} \quad \text{et} \quad R_{Ek} = \frac{u_k}{i_k} \Big|_{\forall q \in [1, n] \text{ et } q \neq k, u_q=0} = R_k + \frac{1}{\sum_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^n \frac{1}{R_q}}$$

Si $R_1 = R_2 = \dots = R_n$ alors $u_S = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n u_q$ et $R_{Ek} = \frac{n}{n-1} R_1$

Question : Soit le schéma d'un sommateur inverseur (Fig. 25.47). Exprimer la tension de sortie et la résistance de chaque entrée.

Réponse :

$$\forall q \in [1, n], u_q = R_q i_q$$

$$\text{et } u_S = -R_0 \sum_{q=1}^n i_q$$

$$\text{D'où : } u_S = -R_0 \sum_{q=1}^n \frac{u_q}{R_q} \quad \text{et} \quad R_{Ek} = \frac{u_k}{i_k} = R_k$$

$$\text{Si } R_1 = R_2 = \dots = R_n \text{ alors } u_S = \frac{-R_0}{R_1} \sum_{q=1}^n u_q$$

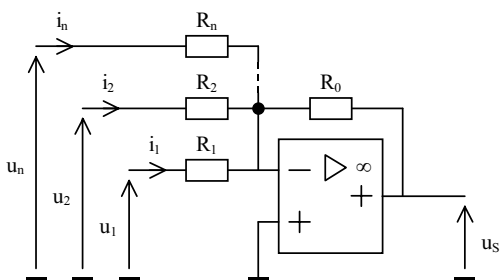


Fig. 25.47 Sommateur inverseur

25.9.2 Dérivateur

Un dérivateur (symbole Fig. 25.48) effectue la dérivée d'une tension selon la relation suivante où τ est une constante qui s'exprime en secondes.

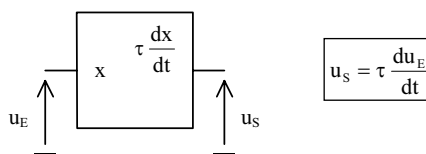


Fig. 25.48 Dérivateur

Question : Soit le schéma d'un dérivateur actif (Fig. 25.49). Pour $r = 0$, exprimer la tension de sortie et la relation d'entrée dans le domaine temporel, puis en notation complexe.

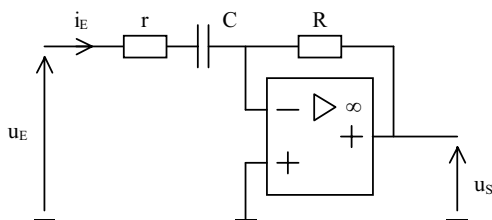


Fig. 25.49 Dérivateur actif

Réponse : Pour $r = 0$, on a :

$$i_E = C \frac{du_E}{dt} \quad \text{et} \quad u_S = -Ri_E$$

D'où : $u_S = -RC \frac{du_E}{dt}$ ou, en complexe $\underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = -jRC\omega$

Et : $i_E = C \frac{du_E}{dt}$ ou, en complexe $\underline{Z_E} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} = \frac{1}{jC\omega}$

Remarque : Il peut être nécessaire d'amortir le montage en insérant une résistance r en série avec le condensateur C . On obtient alors :

$$rC \frac{du_S}{dt} + u_S = -RC \frac{du_E}{dt} \quad \text{ou, en complexe} \quad \underline{T_U} = \frac{\underline{U_S}}{\underline{U_E}} = \frac{-jRC\omega}{1 + jrC\omega}$$

$$C \frac{du_E}{dt} = rC \frac{di_E}{dt} + i_E \quad \text{ou, en complexe} \quad \underline{Z_E} = \frac{\underline{U_E}}{\underline{I_E}} = r + \frac{1}{jC\omega}$$

Le montage avec la résistance r se comporte comme un dérivateur si $\omega \ll 1/rC$

Exemple 25.9.5

Pseudo-dérivateurs R.C. et R.L. ; voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire, et Chapitre 24 : Filtrage analogique.

25.9.3 Intégrateur

Un intégrateur (symbole Fig. 25.50) effectue l'intégrale d'une tension selon la relation suivante où τ est une constante qui s'exprime en secondes.

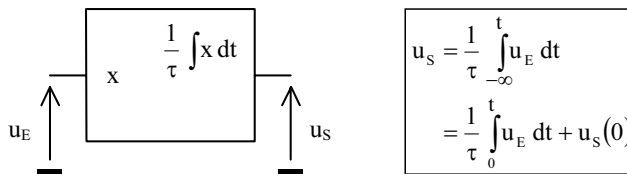


Fig. 25.50 Intégrateur

Question : Soit le schéma d'un intégrateur actif (Fig. 25.51). Pour $r \rightarrow +\infty$, exprimer la tension de sortie et la relation d'entrée dans le domaine temporel, puis en notation complexe.

Réponse :

Pour $r \rightarrow +\infty$, on a :

$$i_E = -C \frac{du_S}{dt} \quad \text{et} \quad u_E = R i_E$$

$$\text{D'où : } RC \frac{du_S}{dt} = -u_E \quad \text{ou, en complexe} \quad \underline{T_U} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{-1}{jRC\omega}$$

$$\text{Et : } R_E = \frac{u_E}{i_E} = R$$

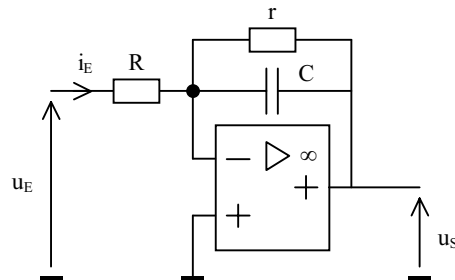


Fig. 25.51 Intégrateur actif

Remarque : En l'absence de résistance r et pour $u_E = 0$, l'amplificateur part en saturation du fait de l'existence des courants de polarisation et de la tension d'offset. En conséquence, il est nécessaire (sauf éventuellement si l'intégrateur se situe dans une boucle fermée) d'ajouter une résistance r en parallèle sur le condensateur C afin de fixer l'amplification pour le continu. On obtient alors :

$$rC \frac{du_S}{dt} + u_S = \frac{-r}{R} u_E \quad \text{ou, en complexe} \quad \underline{T_U} = \frac{U_S}{U_E} = \frac{-r/R}{1 + jrC\omega}$$

Le montage avec la résistance r se comporte comme un intégrateur si $\omega \gg 1/rC$

Exemple 25.9.6

Pseudo-intégrateurs R.C. et R.L. ; voir Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire, et Chapitre 24 : Filtrage analogique.

25.9.4 Fonction réciproque – Opération réciproque

On présente ici les principes qui permettent d'obtenir la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f et l'opération réciproque $*^{-1}$ d'une opération $*$, en introduisant la fonction f ou l'opération $*$ dans la boucle de contre-réaction, sous réserve d'existence et de stabilité.

- **Fonction réciproque** (Fig. 25.52 et Fig. 25.53). Exemples de fonctions réciproques : dérivée et intégrale, logarithme et exponentielle, etc.

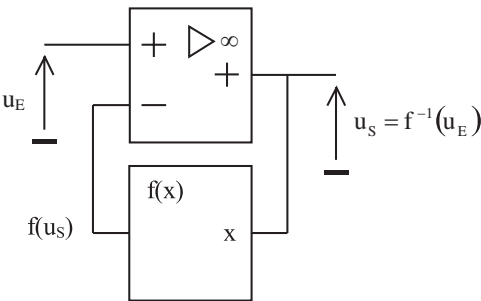


Fig. 25.52 Fonction réciproque sans changement de signe

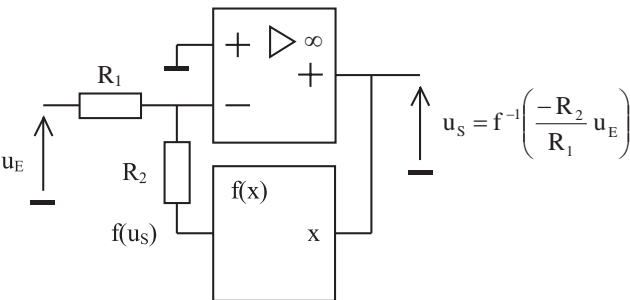


Fig. 25.53 Fonction réciproque avec changement de signe

- **Opération réciproque** (Fig. 25.54 et Fig. 25.55). Exemples d'opérations réciproques : addition et soustraction, multiplication et division, etc.

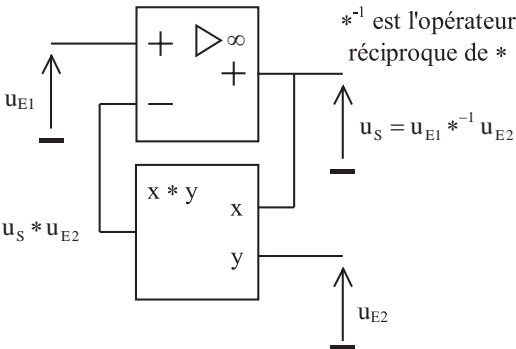


Fig. 25.54 Opération réciproque sans changement de signe

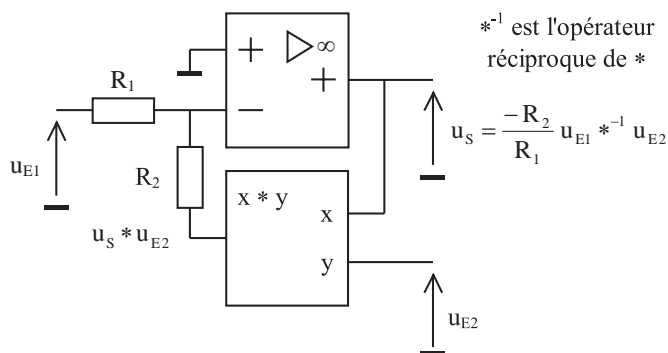


Fig. 25.55 Opération réciproque avec changement de signe

25.9.5 Multiplieur

Un multiplieur (symbole Fig. 25.56) effectue la multiplication de deux tensions. La constante C s'exprime en V^{-1} .

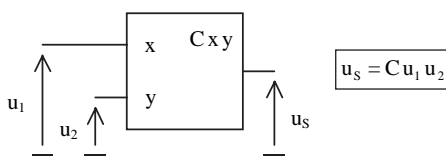
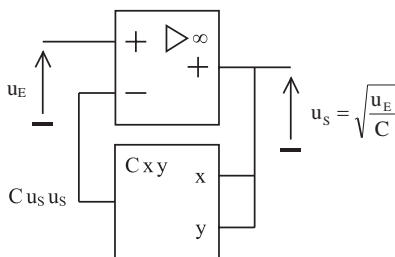
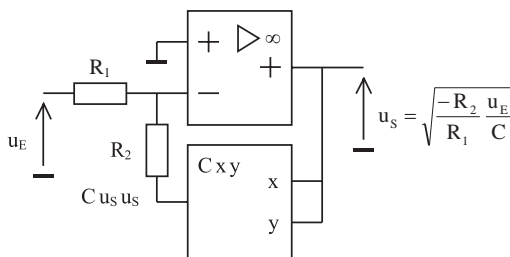


Fig. 25.56 Multiplieur

Exemple 25.9.7

Racine carrée pour $u_E > 0$ (Fig. 25.57) et pour $u_E < 0$ (Fig. 25.58)

Fig. 25.57 Racine carrée pour $u_E > 0$ Fig. 25.58 Racine carrée pour $u_E < 0$

Exemple 25.9.8

Division (Fig. 25.59). On propose ici la solution sans changement de signe, la solution avec changement de signe est également possible.

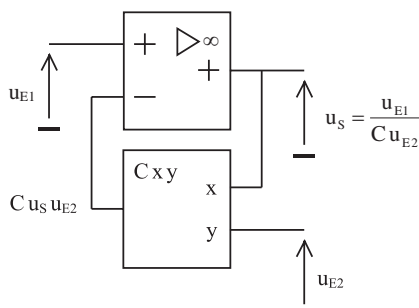


Fig. 25.59 Division

Exemple 25.9.9

Modulation d'amplitude (Fig. 25.60). Soient le signal modulant e et la porteuse u : $e = E_{\text{Max}} \cos(\Omega t)$ et $u = U_{\text{Max}} \cos(\omega_0 t)$ avec $\Omega \ll \omega_0$

Signal modulé sans porteuse :

$$S_1 = CE_{\text{Max}} U_{\text{Max}} \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = m U_{\text{Max}} \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t)$$

où m est le taux de modulation :

$$m = CE_{\text{Max}}$$

Signal modulé avec porteuse :

$$S_2 = U_{\text{Max}} [1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t)$$

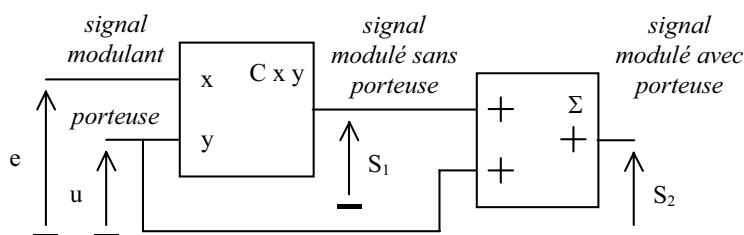


Fig. 25.60 Modulation d'amplitude

Exemple 25.9.10

Démodulation synchrone d'amplitude (Fig. 25.61). Ce principe est utilisable que le signal modulé en amplitude soit avec ou sans porteuse. Il autorise un taux de modulation supérieur ou égal à 100 %. Lorsque la porteuse n'est pas directement accessible, cas le plus fréquent, elle doit être reconstituée grâce une boucle à verrouillage de phase (P.L.L.).

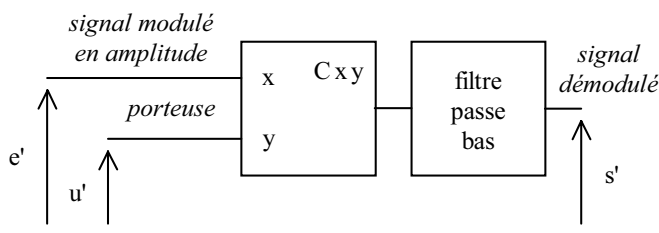


Fig. 25.61 Démodulation synchrone d'amplitude

Exemple 25.9.11

Doubleur de fréquence. Soient les tensions sinusoïdales u_1 et u_2 de même fréquence.

$$u_1 = U_{\text{Max1}} \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2 = U_{\text{Max2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_2)$$

La tension en sortie du multiplieur est :

$$u_s = \frac{CU_{\text{Max1}}U_{\text{Max2}}}{2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega_0 t + \varphi_1 + \varphi_2)]$$

La composante continue est nulle si, et seulement si :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{k\pi}{2} \quad (k : \text{entier relatif})$$

Cette condition étant satisfaite, la tension de sortie devient :

$$u_s = \frac{CU_{\text{Max1}}U_{\text{Max2}}}{2} \sin(2\omega_0 t + 2\varphi_1)$$

Pratiquement, il suffit par exemple de déphaser la tension u_2 de $\pm 90^\circ$ à partir de u_1 (Fig. 25.62), ou encore de déphaser u_1 de $+45^\circ$ par rapport à une tension sinusoïdale u_0 et u_2 de -45° par rapport à cette même tension u_0 .

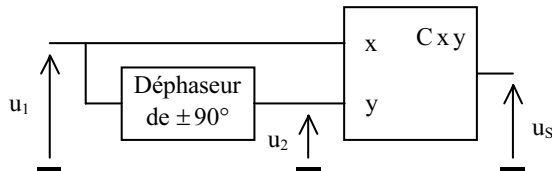


Fig. 25.62 Doubleur de fréquence

Autres exemples

Fonction carré, amplification contrôlée par tension, wattmètre, voltmètre R.M.S., filtre avec fréquence de coupure contrôlée par tension, changement ou translation de fréquence, etc.

Chapitre 26

Conditionnement des signaux

26.1 INTRODUCTION

Le *conditionnement d'un signal* consiste à conformer (décaler, changer d'échelle, linéariser, filtrer, etc.) ledit signal de telle façon que la mesure de la grandeur souhaitée soit la plus précise possible sur une étendue (ou plage) de mesure donnée, et la moins sensible possible à diverses conditions environnementales (température, humidité, alimentations, vieillissement, altération chimique, etc.).

- **Précision.** C'est l'aptitude à délivrer une valeur proche de la vraie valeur. La vraie valeur ne peut être qu'estimée.
- **Sensibilité.** C'est la variation du signal consécutive à la variation d'une grandeur donnée.
- **Erreurs.** L'écart entre la vraie valeur et la valeur mesurée s'appelle l'erreur de mesure. L'erreur de mesure ne peut être qu'estimée. On distingue les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires (ou accidentelles).
 - Une *erreur systématique* est soit constante (pour une valeur de la grandeur à mesurer), soit à variation lente par rapport à la durée de la mesure. Elle peut être réduite par un perfectionnement de la méthode, un étalonnage régulier, ou par une correction adéquate du résultat.
 - Une *erreur aléatoire* est inévitable et indépendante de la volonté de l'opérateur. Certaines causes peuvent être connues, mais les erreurs qu'elles entraînent au moment de la mesure sont inconnues. Elles sont à l'origine de la notion d'incertitude (voir § 26.4).

26.2 CALCUL DIFFÉRENTIEL – SENSIBILITÉ

But : Définitions et règles de calcul sur les infinitésimaux (infiniment petits).

- **Dérivée.** La dérivée de la fonction f de la variable x est la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

Remarque : On note δx l'accroissement de x , car on réserve la notation Δx à l'incertitude absolue (voir § 26.4).

- **Différentielle.** La différentielle de la fonction f de la variable x est définie par :

$$d f(x) = f'(x) dx$$

- **Règles de dérivation et de différentiation.** u et v sont des fonctions de la variable x .

Fonction	Dérivée	Différentielle
$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$	$d(u + v) = du + dv$
uv	$(uv)' = u'v + uv'$	$d(uv) = vdu + u dv$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$
u^n	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$	$d(u^n) = nu^{n-1}du$
e^u	$(e^u)' = u'e^u$	$d(e^u) = e^u du$
$\ln(u)$	$[\ln u]' = \frac{u'}{u}$	$d[\ln u] = \frac{du}{u}$

- **Dérivée partielle.** Les dérivées partielles de la fonction f des n variables x_1 à x_n sont les fonctions f'_{x_k} définies par : $\forall k \in [1 \cdot n]$,

$$f'_{x_k}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} = \lim_{\delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_k + \delta x_k, \dots, x_n) - f(x_k, \dots, x_n)}{\delta x_k}$$

- **Différentielle partielle.** Les différentielles partielles de la fonction f des n variables x_1 à x_n sont définies par : $\forall k \in [1 \cdot n]$,

$$d_{x_k} f(x_1, \dots, x_n) = f'_{x_k}(x_1, \dots, x_n) dx_k = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} dx_k$$

- **Différentielle totale.** La différentielle totale de la fonction f des n variables x_1 à x_n est la somme des différentielles partielles.

$$d f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(x_1, \dots, x_n) dx_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} dx_k$$

Exemple 26.2.1

La différentielle totale de la fonction f des trois variables x , y et z est la somme des différentielles partielles. Ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} d f(x, y, z) &= f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz \\ &= \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz \end{aligned}$$

Question : Soit $G = f(x, y, z) = xy - xz$. Exprimer les dérivées partielles de G , puis la différentielle totale dG .

Réponse :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y, z) &= \frac{\partial G}{\partial x} = y - z, & f'_y(x, y, z) &= \frac{\partial G}{\partial y} = x, & f'_z(x, y, z) &= \frac{\partial G}{\partial z} = -x \\ \Rightarrow dG &= (y - z) dx + xdy - xdz \end{aligned}$$

• **Sensibilité.** Les sensibilités de la fonction f des n variables x_1 à x_n sont définies par :

$$\forall k \in [1 \cdot \cdot n], \quad S_{x_k}^{f(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\frac{d_{x_k} f(x_1, \dots, x_k)}{f(x_1, \dots, x_k)}}{\frac{dx_k}{x_k}}$$

Question : Soit $G = f(x, y, z) = xy - xz$. Exprimer les sensibilités de G aux variables x , y et z .

Réponse :

$$S_x^G = \frac{\frac{(y - z) dx}{xy - xz}}{\frac{dx}{x}} = 1, \quad S_y^G = \frac{\frac{xdy}{xy - xz}}{\frac{dy}{y}} = \frac{y}{y - z}, \quad S_z^G = \frac{\frac{-xdz}{xy - xz}}{\frac{dz}{z}} = \frac{-z}{y - z}$$

26.3 PETITES VARIATIONS – CALCUL APPROCHÉ

But : Approcher la variation d'une grandeur consécutivement à des « petites variations » d'une ou plusieurs grandeurs (température, humidité, tensions de référence ou d'alimentation, etc.) autour d'un point de fonctionnement.

Méthode

Pour des accroissements suffisamment petits, on effectue une approximation au premier ordre (linéarisation autour du point de fonctionnement). On calcule alors la différentielle totale, et l'on remplace ensuite les différentielles par les accroissements correspondants. L'accroissement total de la fonction f des n variables x_1 à x_n est approché par :

$$\delta f(x_1, \dots, x_n) \approx \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \delta x_k \quad (\text{valeur approchée})$$

Question : Soit une résistance R de coefficient de température $TC = 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ (voir Chapitre 11 : Résistances). Calculer l'accroissement relatif $\delta R/R$ de la résistance pour une augmentation δT de température de 10°C .

Réponse :

$$\frac{\delta R}{R} \approx TC \delta T = 10^{-4} \quad (\text{valeur approchée})$$

Question : Soit le schéma de stabilisation de tension (Fig. 26.1). Autour du point de fonctionnement, la diode zener est modélisée par la f.c.e.m. U_0 en série avec la résistance r (voir Chapitre 16 : Diodes).

- 1) Exprimer U_S en fonction de U_E , I_S et U_0 .
- 2) Exprimer la différentielle totale dU_S en supposant R et r constantes.
- 3) Exprimer le coefficient de stabilisation amont $\partial U_S / \partial U_E$.
- 4) Exprimer le coefficient de stabilisation aval $\partial U_S / -\partial I_S$.

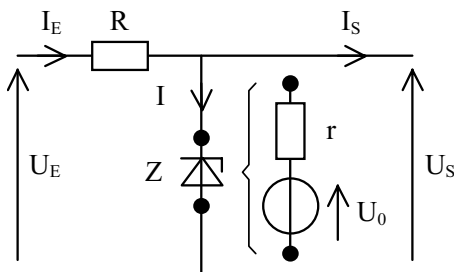


Fig. 26.1 Stabilisation de tension

Réponse : 1) Tension de sortie.

$$U_S = r(I_E - I_S) + U_0 = r \left(\frac{U_E - U_S}{R} - I_S \right) + U_0$$

$$\Rightarrow U_S \left(1 + \frac{r}{R} \right) = \frac{r}{R} U_E - r I_S + U_0$$

D'où :

$$U_S = \frac{r}{r+R} U_E - \frac{rR}{r+R} I_S + \frac{R}{r+R} U_0$$

2) Différentielle totale dU_S .

$$dU_S = \frac{\partial U_S}{\partial U_E} dU_E - \frac{\partial U_S}{\partial I_S} dI_S + \frac{\partial U_S}{\partial U_0} dU_0 \quad (r \text{ et } R \text{ supposés constants})$$

Soit :

$$dU_S = \frac{r}{r+R} dU_E - \frac{rR}{r+R} dI_S + \frac{R}{r+R} dU_0$$

3) Coefficient de stabilisation amont.

$$\frac{\partial U_S}{\partial U_E} = \left. \frac{dU_S}{dU_E} \right|_{dI_S=0 \text{ et } dU_0=0} = \left. \frac{dU_S}{dU_E} \right|_{I_S=Cste \text{ et } U_0=Cste} = \frac{r}{r+R}$$

4) Coefficient de stabilisation aval (résistance de sortie).

$$\frac{\partial U_S}{-\partial I_S} = \left. \frac{dU_S}{-dI_S} \right|_{dU_E=0 \text{ et } dU_0=0} = \left. \frac{dU_S}{-dI_S} \right|_{U_E=Cste \text{ et } U_0=Cste} = \frac{rR}{r+R}$$

En conclusion, on peut alors approcher la variation totale résultante de petites variations des grandeurs U_E , I_S et U_0 par :

$$\delta U_S \approx \frac{r}{r+R} \delta U_E - \frac{rR}{r+R} \delta I_S + \frac{R}{r+R} \delta U_0$$

26.4 ERREURS – INCERTITUDES – TOLÉRANCES

But : Estimer la précision d'une mesure, d'un montage, d'un calcul numérique, ou déterminer les tolérances de composants, dans le pire cas (*worst case*).

• **Erreur absolue.** On appelle erreur absolue la différence entre la valeur approchée x et la vraie valeur (ou valeur exacte) x_V .

$$\text{Erreur absolue} = x - x_V$$

- **Erreur relative.** L'erreur relative est le quotient de l'erreur absolue par la vraie valeur x_V .

$$\text{Erreur relative} = \frac{x - x_V}{x_V}$$

Attention ! Comme la vraie valeur est toujours ignorée, les erreurs absolue et relative restent inconnues. D'où la nécessité d'introduire la notion d'incertitude comme une estimation du maximum de l'erreur.

- **Incertainitude absolue.** On appelle incertitude absolue Δx tout majorant estimé de l'erreur absolue, pris en valeur absolue.

$$\text{Incertainitude absolue} = \Delta x = \text{Majorant } |x - x_V|$$

Remarque : $x - \Delta x \leq x_V \leq x + \Delta x$

- **Incertainitude relative.** L'incertitude relative (ou taux d'incertitude) est le quotient de l'incertitude absolue par la valeur absolue de la valeur approchée x .

$$\text{Incertainitude relative} = \frac{\Delta x}{|x|}$$

Méthode

Pour des incertitudes relatives suffisamment petites, on effectue une approximation au premier ordre (linéarisation autour des valeurs nominales). On calcule alors de la manière suivante

- 1) On calcule la différentielle totale.
- 2) On regroupe les coefficients des différentielles des variables indépendantes.
- 3) On remplace les différentielles par les incertitudes absolues, et on prend la valeur absolue des coefficients des différentielles. Cette dernière étape s'appelle la « majoration physique ».

Attention ! Les étapes 2) et 3) sont indispensables. Les incertitudes coefficientées des variables indépendantes s'ajoutent dans le calcul du pire cas.

Justification de la méthode : Soit la fonction f des n variables x_1 à x_n supposées indépendantes. On a :

$$\begin{aligned} df(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} dx_k \\ \Rightarrow |df(x_1, \dots, x_n)| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \right| |dx_k| \\ \Rightarrow \Delta f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \right| \Delta x_k \end{aligned}$$

Question : Soit le schéma d'un amplificateur non-inverseur à A.Op. supposé parfait (Fig. 26.2). Les tolérances des résistances R_1 et R_2 sont respectivement $\Delta R_1/R_1$ et $\Delta R_2/R_2$. Exprimer l'incertitude absolue et l'incertitude relative sur l'amplification en tension.

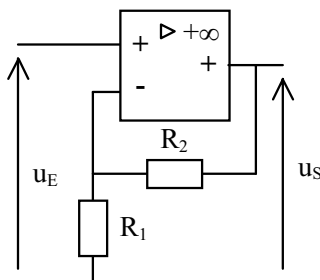


Fig. 26.2 Amplificateur non-inverseur à A.Op.

Réponse : L'amplification en tension du montage (voir Chapitre 25 : Amplification et opérations analogiques) est :

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

1) Différentielle totale.

$$dA_U = \frac{\partial A_U}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial A_U}{\partial R_2} dR_2 = -\frac{R_2}{R_1^2} dR_1 + \frac{1}{R_1} dR_2$$

2) Les coefficients des différentielles sont déjà regroupés par variables indépendantes.

3) Incertitudes absolue et relative.

$$\Delta A_U = \frac{R_2}{R_1^2} \Delta R_1 + \frac{1}{R_1} \Delta R_2 \quad (\text{car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ sont positifs})$$

$$\frac{\Delta A_U}{A_U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} \right) \quad (\text{car } A_U \text{ est positif})$$

Remarque : La méthode de calcul utilisée précédemment (celle des dérivées partielles) a permis d'obtenir la différentielle totale. Cette méthode est efficace quoique parfois un peu longue ; de plus, elle conduit de fait à considérer les variables indépendantes ce qui permet d'éviter l'étape 2). Deux autres méthodes permettent, selon le cas, de simplifier les calculs.

Méthode

Si on se trouve en présence de sommes et différences de produits et quotients, alors on calcule directement la différentielle.

Question : Reprendre la question précédente en considérant que l'amplification est écrite sous la forme suivante.

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Réponse :

$$dA_U = d \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{R_1 dR_2 - R_2 dR_1}{R_1^2}$$

$$\frac{dA_U}{A_U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1} \right)$$

Méthode

Si on se trouve en présence de produits et quotients de sommes et différences, alors on prend le logarithme de la fonction puis on calcule la différentielle.

Question : Reprendre la question précédente en considérant que l'amplification est écrite sous la forme suivante.

$$A_U = \frac{u_S}{u_E} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Réponse :

$$A_U = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow |A_U| = \frac{|R_1 + R_2|}{|R_1|}$$

$$\Rightarrow \ln |A_U| = \ln |R_1 + R_2| - \ln |R_1|$$

$$\Rightarrow d[\ln |A_U|] = d[\ln |R_1 + R_2| - \ln |R_1|] = d[\ln |R_1 + R_2|] - d[\ln |R_1|]$$

D'où :

$$\frac{dA_U}{A_U} = \frac{d(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2} - \frac{dR_1}{R_1} = \frac{dR_1 + dR_2}{R_1 + R_2} - \frac{dR_1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{dR_2}{R_2} - \frac{dR_1}{R_1} \right)$$

Question : On mesure une résistance par une méthode voltampèremétrique. La tension relevée est $U = 5 \text{ V}$ avec une précision de 2 %, et l'intensité du courant est $I = 100 \text{ mA}$ avec une précision de 3 %. Calculer les incertitudes absolues et relatives sur la mesure.

Réponse :

$$R = \frac{U}{I} = 50 \, \Omega \quad (\text{en valeur nominale})$$

$$\Rightarrow \ln |R| = \ln |U| - \ln |I| \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dU}{U} - \frac{dI}{I}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 5 \, \% \quad (R, U \text{ et } I \text{ sont positifs})$$

$$\Rightarrow \Delta R = 2,5 \, \Omega$$

Finalement, on peut écrire : $R = 50 \, \Omega \pm 2,5 \, \Omega$

26.5 CALIBRATION

But : La *calibration analogique* permet d'adapter une grandeur électrique (tension ou courant) issue d'un circuit amont à la plage pleine échelle d'un circuit aval pour que les conditions de fonctionnement de ce dernier soient optimales (Fig. 26.3).

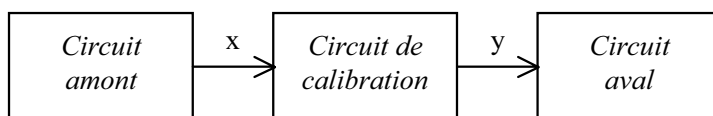


Fig. 26.3 Situation du problème de la calibration

La *plage pleine échelle* (F.S.R. : Full Scale Range) d'un circuit est la plus grande étendue possible exploitable par celui-ci.

D'un point de vue théorique, la calibration analogique consiste en une transformation affine d'une grandeur électrique (Fig. 26.4). A est l'*amplification* du circuit de calibration et B son *décalage*. A et B peuvent être positifs ou négatifs. Si $|A| > 1$ le circuit amplifie le signal, et si $|A| < 1$ le circuit l'atténue.

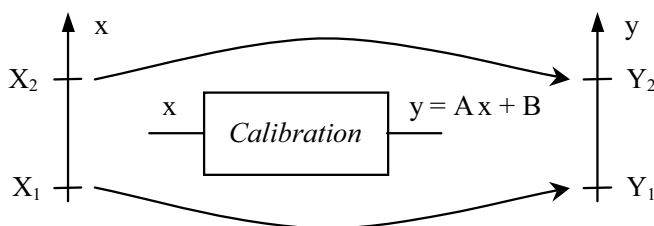


Fig. 26.4 Principe de la calibration analogique

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} Y_2 = AX_2 + B \\ Y_1 = AX_1 + B \end{cases}$$

D'où :

$$A = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \quad \text{et} \quad B = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1}$$

Remarque : Le choix de l'impédance d'entrée du circuit de calibration est très important. Dans le cas d'une attaque en tension, celle-ci doit être très grande devant l'impédance de la source pour ne pas générer d'erreur systématique. Tandis que dans le cas d'un fonctionnement aux fréquences élevées ou si une ligne sépare les circuits amont et de calibration, les impédances doivent être adaptées.

Question : Soit le schéma (Fig. 26.5) d'un circuit de calibration. La transmittance du capteur de température est : $u_{\text{Capt}} = a\theta$ avec $a = 10 \text{ mV/K}$, θ étant la température absolue en kelvins. On désire obtenir : $u_S = 0 \text{ V}$ pour $T = 0^\circ\text{C}$, et $u_S = 10 \text{ V}$ pour $T = 20^\circ\text{C}$. On suppose que les tensions u_{Capt} et $U_{\text{Réf}} = 5 \text{ V}$ sont des sources de tensions parfaites, et on pose $\alpha_1 = R_0/R_1$ et $\alpha_2 = R_0/R_2$.

1) Exprimer la tension de sortie.

2) Exprimer et calculer α_1 et α_2 .

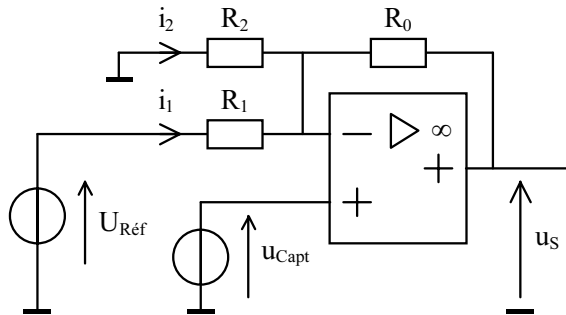


Fig. 26.5 Circuit de calibration d'un capteur de température

Réponse :

1) Tension de sortie. On a :

$$u_S = u_{\text{Capt}} - R_0 (i_1 + i_2) = u_{\text{Capt}} - R_0 \left(\frac{U_{\text{Réf}} - u_{\text{Capt}}}{R_1} + \frac{0 - u_{\text{Capt}}}{R_2} \right)$$

D'où :

$$u_S = (1 + \alpha_1 + \alpha_2) u_{\text{Capt}} - \alpha_1 U_{\text{Réf}} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{R_0}{R_1} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{R_0}{R_2}$$

La tension de sortie est de la forme :

$$u_S = Au_{\text{Capt}} + B \quad \text{avec} \quad A = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{et} \quad B = -\alpha_1 U_{\text{Réf}}$$

2) Calcul de α_1 et α_2 . D'après le § 26.5 on a :

$$A = \frac{U_{S2} - U_{S1}}{U_{\text{Capt}2} - U_{\text{Capt}1}} = \frac{U_{S2} - U_{S1}}{a(\Theta_2 - \Theta_1)} = 50$$

$$B = \frac{U_{\text{Capt}2} U_{S1} - U_{\text{Capt}1} U_{S2}}{U_{\text{Capt}2} - U_{\text{Capt}1}} = \frac{\Theta_2 U_{S1} - \Theta_1 U_{S2}}{\Theta_2 - \Theta_1} = -136,57$$

La tension de sortie est (θ en kelvins et T en $^{\circ}\text{C}$) :

$$u_S = 50u_{\text{Capt}} - 136,57 = 0,5(\theta) - 136,57$$

$$= 0,5(T + 273,15) - 136,57 = 0,5T$$

$$\text{D'où : } \alpha_1 = \frac{R_0}{R_1} = \frac{-B}{U_{\text{Réf}}} = 27,31 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{R_0}{R_2} = A - 1 + \frac{B}{U_{\text{Réf}}} = 21,68$$

Chapitre 27

Systèmes bouclés : Contre réaction – Oscillateurs

Ce chapitre est traité en notation complexe. Le passage au domaine de Laplace s'effectue simplement en remplaçant $j\omega$ par l'opérateur p (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace).

27.1 PRINCIPE DES SYSTÈMES BOUCLÉS : LA RÉACTION

Il y a *réaction*, ou *rétroaction*, (feed-back en anglais) lorsqu'une partie de la sortie est réinjectée en entrée. On peut représenter indifféremment un système bouclé par un schéma fonctionnel, dit *schéma bloc*, avec additionneur en entrée (§ 27.1.1) ou avec soustracteur en entrée (§ 27.1.2).

27.1.1 Schéma bloc avec additionneur en entrée (Fig. 27.1)

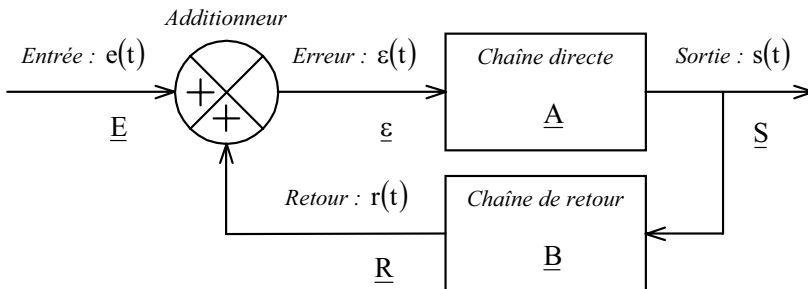


Fig. 27.1 Principe de la réaction avec additionneur en entrée

a) Fonctions de transfert (F.T.)

– F.T. de la chaîne directe ou chaîne d'action :

$$\underline{A} = \frac{\underline{S}}{\underline{\varepsilon}}$$

– F.T. de la chaîne de retour ou chaîne de réaction :

$$\underline{B} = \frac{\underline{R}}{\underline{S}}$$

– F.T.B.O. (F.T. en boucle ouverte) :

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{R}}{\underline{\varepsilon}} = \underline{A} \underline{B}$$

– F.T.B.F. (F.T. en boucle fermée) :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{S} = \underline{A} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\varepsilon} = \underline{E} + \underline{B} \underline{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{T_{BF}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{A}}{1 - \underline{A} \underline{B}}$$

b) Propriétés générales de la réaction

Hypothèses : Tous les éléments du système sont linéaires, et le système en boucle fermée est stable (voir § c).

● **Réaction négative (ou contre réaction) – Réaction positive**

– La réaction est négative si l'amplitude (module) du signal de sortie de l'additionneur (signal d'erreur) est inférieure à l'amplitude du signal d'entrée :

$$|\underline{T_{BF}}| < |\underline{A}| \Rightarrow |1 - \underline{A} \underline{B}| > 1$$

– La réaction est positive si l'amplitude du signal de sortie de l'additionneur (signal d'erreur) est supérieure à l'amplitude du signal d'entrée :

$$|\underline{T_{BF}}| > |\underline{A}| \Rightarrow |1 - \underline{A} \underline{B}| < 1$$

Remarque : En toute généralité, les F.T. des chaînes directe et de retour sont des fonctions de la fréquence. En conséquence, la réaction d'un système peut être positive dans une plage de fréquence et négative en dehors.

● **Module (amplification).** Le module de la transmittance (l'amplification) du système bouclé est inférieur au module de la transmittance de la chaîne directe pour une réaction négative, et supérieur pour une réaction positive (conséquence directe de ce qui précède).

● **Bande passante – Temps de réponse.** On suppose ici pour simplifier que la F.T. de la chaîne de retour est une constante réelle : $\underline{B} = k$.

– Cas où la F.T. de la chaîne directe est un passe-bas du 1^{er} ordre.

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j \omega / \omega_H} \Rightarrow \underline{T_{BF}} = \frac{A_0}{1 - A_0 k} \frac{1}{1 + j \omega / \omega_{H \text{ BF}}}$$

avec

$$\omega_{H\text{ BF}} = \omega_H (1 - A_0 k)$$

La fréquence de coupure à -3dB du système bouclé est supérieure à la fréquence de coupure à -3dB de la chaîne directe pour une réaction négative ($A_0 k < 0$), et inférieure pour une réaction positive ($A_0 k > 0$). Conséquemment, le temps de réponse (montée ou descente) est plus court pour une réaction négative et plus long pour une réaction positive.

– Cas où la F.T. de la chaîne directe est un passe-haut du 1^{er} ordre.

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 - j \omega_L / \omega} \Rightarrow \underline{T_{BF}} = \frac{A_0}{1 - A_0 k} \frac{1}{1 - j \omega_{L\text{ BF}} / \omega}$$

avec

$$\omega_{L\text{ BF}} = \omega_L / (1 - A_0 k)$$

La fréquence de coupure à -3dB du système bouclé est inférieure à la fréquence de coupure à -3dB de la chaîne directe pour une réaction négative ($A_0 k < 0$), et supérieure pour une réaction positive ($A_0 k > 0$).

– En considérant que la F.T. de la chaîne directe est le produit d'un passe-bas du 1^{er} ordre par un passe haut du 1^{er} ordre avec $\omega_L \ll \omega_H$, on en déduit que la bande passante du système bouclé est supérieure à la bande passante de la chaîne directe pour une réaction négative, et inférieure pour une réaction positive.

• **Sensibilité à une perturbation.** Le système bouclé est moins sensible que la chaîne directe à une perturbation (n'affectant pas la chaîne de retour) pour une réaction négative, et plus sensible pour une réaction positive.

La sensibilité de la chaîne directe à une perturbation x est :

$$S_x^{\underline{A}} = \frac{d\underline{A}/\underline{A}}{dx/x}$$

La sensibilité d'un système en boucle fermée à x est :

$$S_x^{T_{BF}} = \frac{dT_{BF}/T_{BF}}{dx/x}$$

En posant $\underline{D} = 1 - \underline{A} \underline{B}$, on peut écrire :

$$S_x^{T_{BF}} = \frac{d\underline{A}/\underline{A} - d\underline{D}/\underline{D}}{dx/x}$$

D'où, en supposant \underline{B} insensible à x :

$$S_x^{T_{BF}} = \frac{1}{\underline{D}} \frac{d\underline{A}/\underline{A}}{dx/x},$$

soit :

$$S_x^{T_{BF}} = \frac{S_x^A}{1 - \underline{A} \underline{B}}$$

c) *Stabilité (analyse simplifiée) – Marge de phase et marge de gain*

– Lorsque le dénominateur de la F.T.B.F. s'annule, le système est à la limite entre stabilité et instabilité (oscillations sinusoïdales possibles). D'où :

$$\underline{T}_{BO} = \underline{A} \underline{B} = |\underline{A}| |\underline{B}| e^{j(\varphi_A + \varphi_B)} = +1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{T}_{BO}| = |\underline{A} \underline{B}| = |\underline{A}| |\underline{B}| = 1 \\ \text{Arg} \underline{T}_{BO} = \varphi_A + \varphi_B = \pm 2k\pi \end{cases}$$

– On peut donc déterminer la stabilité d'un système à partir de sa F.T.B.O. : Aux fréquences possibles d'oscillation sinusoïdale, c'est-à-dire pour $\text{Arg} \underline{T}_{BO} = \pm 2k\pi$, un système est stable si $|\underline{T}_{BO}| < 1$, instable si $|\underline{T}_{BO}| > 1$, et oscille de manière sinusoïdale si $|\underline{T}_{BO}| = 1$ ($\Leftrightarrow G_{BO} = 0$ dB). On distingue différents cas :

- Si \underline{T}_{BO} est, quelle que soit la fréquence, un nombre complexe ou un réel négatif, le système en boucle fermée est stable.
- Si \underline{T}_{BO} est un réel positif égal à 1 pour une fréquence f_0 , le système en boucle fermée oscille à la fréquence f_0 , de manière sinusoïdale.
- Si \underline{T}_{BO} est un réel positif supérieur à 1 pour une fréquence f_0 , le système en boucle fermée oscille à une fréquence $f \neq f_0$, de manière non sinusoïdale.
- Si \underline{T}_{BO} est un réel positif supérieur à 1 pour une large plage de fréquences, le système en boucle fermée peut se bloquer (saturations).

– Plus un système est proche de la limite de stabilité, plus sa réponse temporelle est oscillante avec de forts dépassements, et plus le risque d'instabilité grandit (dérives de paramètres). Pour chiffrer le degré de stabilité, on définit les deux mesures suivantes.

1) La *marge de phase* :

$$M_\varphi = 2\pi + \text{Arg} \underline{T}_{BO}(\omega_X)$$

où ω_X est la pulsation pour laquelle $|\underline{T}_{BO}(\omega_X)| = 1$ ($\Leftrightarrow G_{BO}(\omega_X) = 0$ dB). En boucle fermée, le système est stable pour $M_\varphi > 0$, et instable pour $M_\varphi < 0$.

2) La *marge de gain* :

$$M_G = -G_{BO}(\omega_Y)$$

où ω_Y est la pulsation pour laquelle $\text{Arg} \underline{T}_{BO}(\omega_Y) = -2\pi$. En boucle fermée, le système est stable pour $M_G > 0$, et instable pour $M_G < 0$.

Remarque : On peut aussi déterminer la stabilité d'un système à partir du dénominateur de sa F.T.B.F. de la manière suivante : un système est stable si ses pôles (racines du dénominateur de la F.T.B.F. de Laplace, voir Chapitre 10 :

Étude symbolique – Transformée de Laplace) ont tous une partie réelle strictement négative ; ce qui est nécessaire pour que le régime libre puisse s'éteindre.

27.1.2 Schéma bloc avec soustracteur en entrée (Fig. 27.2)

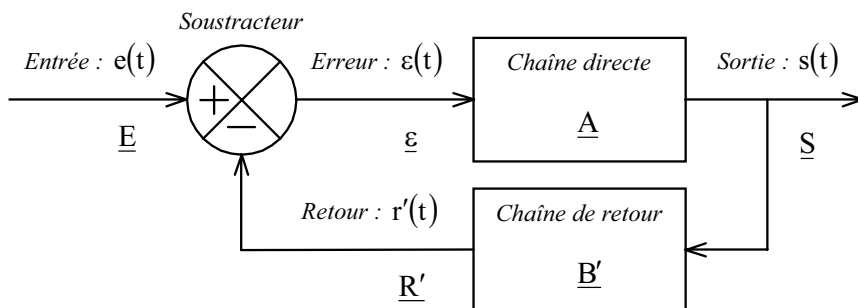


Fig. 27.2 Principe de la réaction avec soustracteur en entrée

Le résultat final est bien évidemment identique au schéma bloc avec additionneur en entrée (voir Fig. 27.1) ; mais il faut adapter les résultats donnés précédemment sachant que : $\underline{B}' = -\underline{B}$ et $\underline{R}' = -\underline{R}$. On a alors :

$$\frac{\underline{S}}{\underline{\varepsilon}} = \underline{A} \quad \frac{\underline{R}'}{\underline{S}} = \underline{B}' \quad \underline{T}'_{BO} = \frac{\underline{R}'}{\underline{\varepsilon}} = \underline{A} \underline{B}' \quad \underline{T}_{BF} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A} \underline{B}'}$$

$$\underline{T}'_{BO} = -\underline{T}_{BO} \Rightarrow |\underline{T}'_{BO}| = |\underline{T}_{BO}|, \quad \text{Arg} \underline{T}'_{BO} = -\pi + \text{Arg} \underline{T}_{BO} \quad \text{et} \quad G'_{BO} = G_{BO}$$

- La réaction est négative si : $|\underline{T}_{BF}| < |\underline{A}|$ soit $|1 + \underline{A} \underline{B}'| > 1$
- La réaction est positive si : $|\underline{T}_{BF}| > |\underline{A}|$ soit $|1 + \underline{A} \underline{B}'| < 1$
- La limite entre stabilité et instabilité est donnée par :

$$\underline{T}'_{BO} = \underline{A} \underline{B}' = |\underline{A}| |\underline{B}'| e^{j(\varphi_A + \varphi_{B'})} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{T}'_{BO}| = |\underline{A}| |\underline{B}'| = 1 \\ \text{Arg} \underline{T}'_{BO} = \varphi_A + \varphi_{B'} = \pm\pi \pm 2k\pi \end{cases}$$

Pour $\text{Arg} \underline{T}'_{BO} = \pm\pi \pm 2k\pi$, un système est stable si $|\underline{T}'_{BO}| < 1$, instable si $|\underline{T}'_{BO}| > 1$, et oscille de manière sinusoïdale si $|\underline{T}'_{BO}| = 1$ ($\Leftrightarrow G'_{BO} = 0$ dB).

1) La marge de phase :

$$M_\varphi = \pi + \text{Arg} \underline{T}'_{BO}(\omega_X)$$

où ω_X est la pulsation pour laquelle $|\underline{T}'_{BO}(\omega_X)| = 1$, ($\Leftrightarrow G'_{BO}(\omega_X) = 0$ dB).

2) La marge de gain :

$$M_G = -G'_{BO}(\omega_Y)$$

où ω_Y est la pulsation pour laquelle $\text{Arg}T'_{BO}(\omega_Y) = -\pi$.

Méthode

Le diagramme de Bode (voir Chapitre 5 : Régime sinusoïdal permanent monophasé – Étude en fréquence) de la F.T.B.O. permet de visualiser facilement les marges de phase et de gain.

Question : Soit le diagramme de Bode d'une F.T.B.O. d'ordre 3 (Fig. 27.3). Mesurer approximativement les marges de phase et de gain, en supposant que le système bouclé est du type : schéma bloc avec soustracteur. Conclure sur la stabilité.

Réponse :

$$G_1 = 0 \text{ dB} \Rightarrow f = f_X$$

$$\Rightarrow M_\phi = 180^\circ + \text{Arg}T_1(f_X) \approx 70^\circ$$

$$\phi_1 = -180^\circ \Rightarrow f = f_Y$$

$$\Rightarrow M_G = -G_1(f_Y) \approx 10 \text{ dB}$$

Le système en boucle fermée est donc stable.

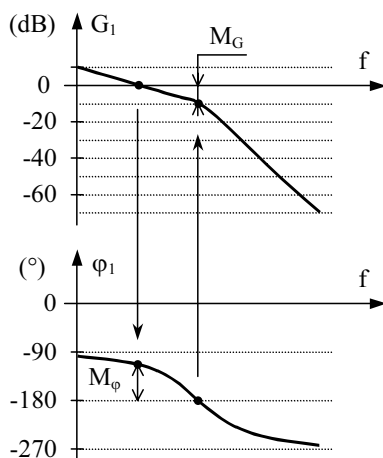


Fig. 27.3 Diagramme de Bode d'un 3^{ème} ordre

Remarques :

- En général, pour assurer un degré de stabilité convenable, on fixe la marge de phase aux alentours de 45° , et la marge de gain voisine de 12 dB.
- En supposant que le système bouclé est du type : schéma bloc avec soustracteur, on déduit des résultats précédents que les F.T.B.O. du 1^{er} ordre et 2^{ème} ordre sont toujours stables.

Attention cependant, il ne faut pas oublier qu'un 2^{ème} ordre est souvent un 3^{ème} ordre que l'on a simplifié en modélisant...

27.2 LA CONTRE-RÉACTION APPLIQUÉE À L'AMPLIFICATION

Dans le cas d'une réaction négative, appelée *contre-réaction*, on représente souvent un système bouclé par le schéma bloc avec soustracteur en entrée. On suppose ici que les systèmes sont stables et tels que $|1 + \underline{A} \underline{B}'| > 1$ (voir § 27.1.2).

27.2.1 Effets de la contre-réaction

- Diminution de l'amplification.
- Élargissement de la bande passante et, en conséquence, réduction des temps de montée et de descente des signaux.
- Réduction de la sensibilité aux perturbations.
- Réduction de la distorsion de non-linéarité de l'amplification.
- Modification des impédances d'entrée et de sortie.

27.2.2 Les quatre structures de réaction

Électriquement, il y a deux façons de réaliser le soustracteur (voir Fig. 27.2) : soit on soustrait des tensions, la sortie du quadripôle de retour est alors en série avec l'entrée du quadripôle direct (Fig. 27.4 et Fig. 27.5) ; soit on soustrait des courants, la sortie du quadripôle de retour est alors en parallèle sur l'entrée du quadripôle direct (Fig. 27.6 et Fig. 27.7). L'information en sortie est soit une tension, soit un courant.

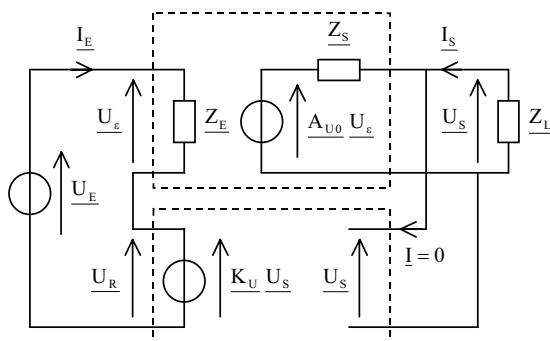


Fig. 27.4 Réaction série de tension ou tension-tension

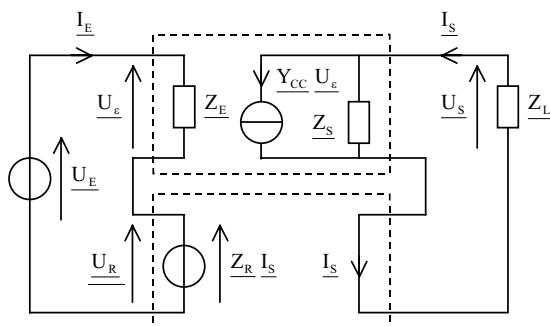


Fig. 27.5 Réaction série de courant ou courant-tension

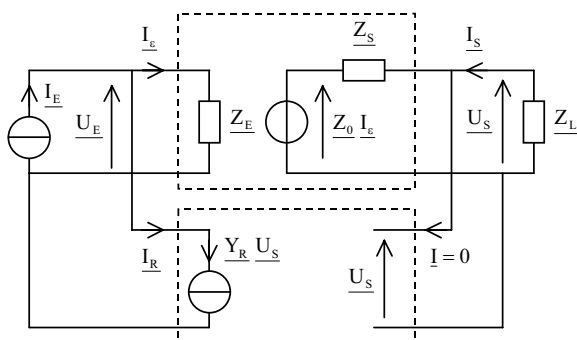


Fig. 27.6 Réaction parallèle de tension ou tension-courant

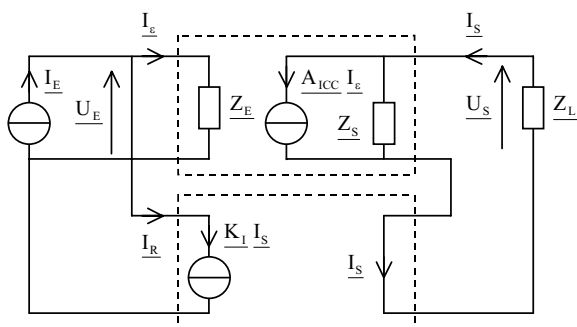


Fig. 27.7 Réaction parallèle de courant ou courant-courant

• Hypothèses et notations

- Le quadripôle de la chaîne directe (amplificateur) ne possède pas de réaction interne propre. Il est représenté par son schéma équivalent (voir Chapitre 25 : Amplification et opérations analogiques).
- Le quadripôle de la chaîne de retour consomme une part négligeable de la puissance de sortie. S'il mesure la tension de sortie \underline{U}_S , son impédance d'entrée doit pouvoir être considérée comme infinie (courant nul à l'entrée). Et s'il mesure le courant de sortie \underline{I}_S , son impédance d'entrée doit pouvoir être considérée comme nulle (tension nulle à l'entrée).
- Chaîne directe : \underline{A}_{U0} transmittance en tension, sortie à vide ; \underline{A}_{ICC} transmittance en courant, sortie en court-circuit ; \underline{Z}_0 transimpédance, sortie à vide ; \underline{Y}_{CC} transadmittance, sortie en court-circuit.
- Chaîne de retour : \underline{K}_U transmittance en tension ; \underline{K}_I transmittance en courant ; \underline{Z}_R transimpédance ; \underline{Y}_R transadmittance.

• Impédance d'entrée en boucle fermée – Modèle de Thévenin ou de Norton de la sortie en boucle fermée

Réaction	Impédance d'entrée en boucle fermée	Modèle de Thévenin ou de Norton de la sortie en boucle fermée	
		Transmittance	Impédance de sortie
Tension-tension (Fig. 27.4)	$\frac{Z_{EBF}}{Z_E} = \frac{\frac{U_E}{I_E}}{\left(1 + \frac{Z_L A_{U0} K_U}{Z_L + Z_S}\right)}$	$\begin{aligned} \underline{A_{U0BF}} &= \left. \frac{U_S}{U_E} \right _{I_S=0} \\ &= \frac{A_{U0}}{1 + \frac{A_{U0} K_U}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \underline{Z_{SBF}} &= \left. \frac{U_S}{I_S} \right _{U_E=0} \\ &= \frac{Z_S}{1 + \frac{A_{U0} K_U}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$
Courant-tension (Fig. 27.5)	$\frac{Z_{EBF}}{Z_E} = \frac{\frac{U_E}{I_E}}{\left(1 + \frac{Z_S Z_R Y_{CC}}{Z_L + Z_S}\right)}$	$\begin{aligned} \underline{Y_{CCBF}} &= \left. \frac{I_S}{U_E} \right _{U_S=0} \\ &= \frac{Y_{CC}}{1 + \frac{Y_{CC} Z_R}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \underline{Z_{SBF}} &= \left. \frac{U_S}{I_S} \right _{U_E=0} \\ &= Z_S \left(1 + \frac{Y_{CC} Z_R}{Z_L + Z_S}\right) \end{aligned}$
Tension-courant (Fig. 27.6)	$\frac{Z_{EBF}}{Z_E} = \frac{\frac{U_E}{I_E}}{1 + \frac{Y_R Z_0 Z_L}{Z_L + Z_S}}$	$\begin{aligned} \underline{Z_{0BF}} &= \left. \frac{U_S}{I_E} \right _{I_S=0} \\ &= \frac{Z_0}{1 + \frac{Y_R Z_0}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \underline{Z_{SBF}} &= \left. \frac{U_S}{I_S} \right _{I_E=0} \\ &= \frac{Z_S}{1 + \frac{Y_R Z_0}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$
Courant-courant (Fig. 27.7)	$\frac{Z_{EBF}}{Z_E} = \frac{\frac{U_E}{I_E}}{1 + \frac{A_{ICC} K_I Z_S}{Z_L + Z_S}}$	$\begin{aligned} \underline{A_{ICCBF}} &= \left. \frac{I_S}{I_E} \right _{U_S=0} \\ &= \frac{A_{ICC}}{1 + \frac{A_{ICC} K_I}{Z_L + Z_S}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \underline{Z_{SBF}} &= \left. \frac{U_S}{I_S} \right _{I_E=0} \\ &= Z_S \left(1 + \frac{A_{ICC} K_I}{Z_L + Z_S}\right) \end{aligned}$

Question : Soit l'amplificateur non-inverseur à A.Op. (Fig. 27.8) et son schéma équivalent (Fig. 27.9). Voir aussi Chapitre 21 : Amplificateurs Opérationnels.

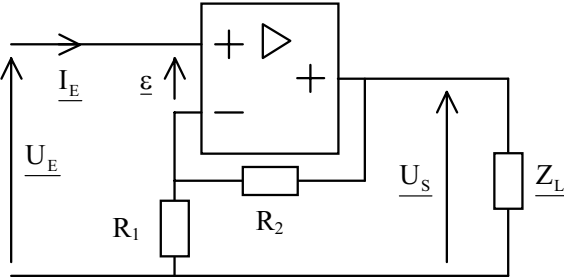


Fig. 27.8 Amplificateur non-inverseur à A.Op.

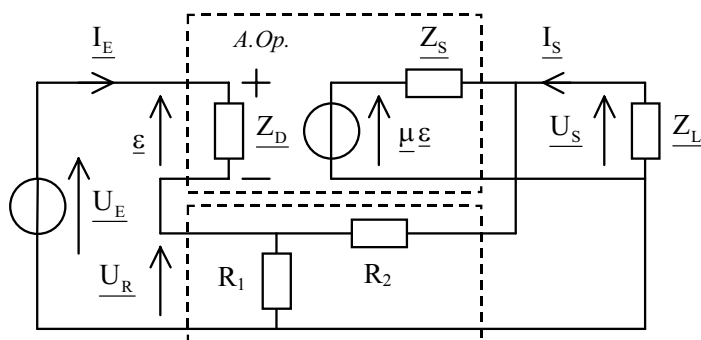


Fig. 27.9 Schéma équivalent

- 1) Quel est le type de la contre réaction ?
- 2) En supposant Z_D infinie et Z_S nulle : Exprimer la F.T.B.F., puis la fréquence de coupure à -3 dB sachant que $\underline{\mu} = \mu_0 / (1 + j f/f_1)$
- 3) Exprimer l'impédance de sortie en supposant Z_D infinie.
- 4) Exprimer l'impédance d'entrée en supposant Z_S nulle.

Réponses :

1) C'est une contre réaction tension-tension, puisque c'est la tension de sortie \underline{U}_S qui est partiellement appliquée à l'entrée en série avec la tension d'attaque \underline{U}_E . On a :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{U}_E - K_U \underline{U}_S \quad \text{avec} \quad K_U = R_1 / (R_1 + R_2)$$

2) F.T.B.F. :

$$\underline{A_{UBF}} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \underline{\mu} K_U} = \frac{A_0}{1 + j f/f_C}$$

Où A_0 est l'amplification en continu :

$$A_0 = \mu_0 / (1 + \mu_0 K_U)$$

et f_C la fréquence de coupure à -3 dB :

$$f_C = f_1 (1 + \mu_0 K_U)$$

Si $\mu_0 K_U \gg 1$ alors $\underline{A_{UBF}} \approx \frac{1}{K_U} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ L'amplification ne dépend plus que de la chaîne de retour.

3) Impédance de sortie en boucle fermée

$$\left. \begin{array}{l} \underline{U}_E = 0 \\ \underline{Z}_D = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = -K_U \underline{U}_S \Rightarrow \underline{U}_S = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} + \underline{Z}_S \underline{I}_S = -\underline{\mu} K_U \underline{U}_S + \underline{Z}_S \underline{I}_S$$

D'où :

$$\underline{Z}_{S\text{ BF}} = \left. \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_S} \right|_{\underline{U}_E=0} = \frac{\underline{Z}_S}{1 + \underline{\mu} \underline{K}_U}$$

4) Impédance d'entrée en boucle fermée

$$\underline{Z}_S = 0 \Rightarrow \underline{U}_E = \underline{\varepsilon} + \underline{K}_U \underline{U}_S = \underline{\varepsilon} (1 + \underline{\mu} \underline{K}_U) = \underline{Z}_D \underline{I}_E (1 + \underline{\mu} \underline{K}_U)$$

D'où :

$$\underline{Z}_{E\text{ BF}} = \frac{\underline{U}_E}{\underline{I}_E} = \underline{Z}_D (1 + \underline{\mu} \underline{K}_U)$$

Remarque : La contre réaction multiplie la fréquence de coupure à -3 dB par le facteur $(1 + \mu_0 K_U)$, et divise l'amplification en continu par ce même facteur. Le produit « gain-bande » est donc constant : $A_0 f_C = \mu_0 f_1$ (voir Chapitre 21 : Amplificateurs opérationnels).

27.3 OSCILLATEURS SINUSOÏDAUX

27.3.1 Schéma bloc d'un oscillateur sinusoïdal (Fig. 27.10)

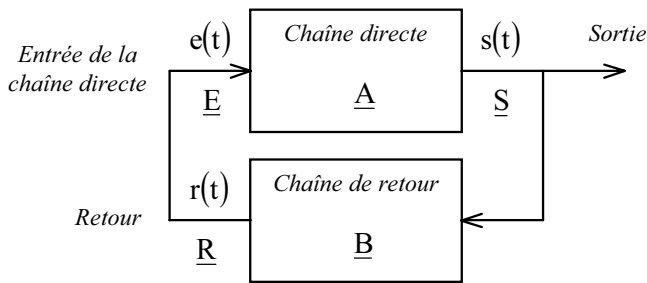


Fig. 27.10 Principe d'un oscillateur sinusoïdal

Le critère d'oscillation sinusoïdale, dit *critère de Barkhausen*, détermine la fréquence d'oscillation et la condition d'oscillation à partir de la F.T.B.O. :

$$\underline{A} \underline{B} = +1 \Leftrightarrow \begin{cases} |\underline{A} \underline{B}| = |\underline{A}| |\underline{B}| = 1 \\ \text{Arg}(\underline{A} \underline{B}) = \pm 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(\underline{A} \underline{B}) = 1 \\ \text{Im}(\underline{A} \underline{B}) = 0 \end{cases}$$

Ce critère signifie que le signal de retour et le signal d'entrée de la chaîne directe doivent être en phase et avoir même amplitude pour que le système oscille de manière sinusoïdale à une fréquence particulière f_0 .

Attention ! Le calcul de la F.T.B.O. ($T_{BO} = \underline{A} \underline{B} = U_R/U_E$) nécessite l'ouverture de la boucle entre la sortie de la chaîne de retour et l'entrée de la chaîne directe. Il faut alors penser à prendre en compte l'impédance d'entrée de la chaîne directe.

Méthode

Pratiquement, pour qu'un système en boucle fermée puisse osciller de manière sinusoïdale, il faut :

- 1) Qu'il existe une fréquence f_0 telle que la F.T.B.O. soit réelle ($\Rightarrow \text{Arg}(\underline{A} \underline{B}) = \pm 2k\pi$ ou $\text{Im}(\underline{A} \underline{B}) = 0$); c'est la condition de retour en phase.
- 2) Qu'à cette fréquence f_0 , le signal soit ni amplifié, ni affaibli, mais simplement entretenu ($\Rightarrow |\underline{A}| |\underline{B}| = 1$ ou $\text{Re}(\underline{A} \underline{B}) = 1$); c'est la condition d'entretien de l'amplitude du signal.

Remarque : À la fréquence f_0 , si $|\underline{A}| |\underline{B}| < 1$ alors les oscillations disparaissent, et si $|\underline{A}| |\underline{B}| > 1$ alors les oscillations ne sont pas sinusoïdales (le signal est déformé par les saturations ou non-linéarités) et la fréquence d'oscillation est différente de f_0 . En pratique, l'amplification est soit asservie à l'amplitude du signal, soit non linéaire ; ce qui fixe l'amplitude des oscillations (la condition d'entretien de l'amplitude ne détermine pas l'amplitude des oscillations).

27.3.2 Oscillateurs sinusoïdaux courants

Les oscillateurs à Pont de Wien, réseau déphaseur, Colpitts ou Hartley sont moins souvent utilisés. Les oscillateurs actuels utilisent des filtres céramiques ou à quartz permettant d'obtenir de grandes précision et stabilité.

a) Résonateur piézoélectrique à quartz ou céramique (Fig. 27.11)

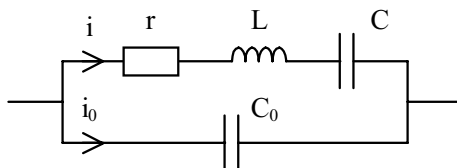


Fig. 27.11 Modèle électrique d'un résonateur piézoélectrique

– Paramètre statique.

C_0 : Capacité physique entre électrodes.

- Paramètres dynamiques ou « motionnels ». Ces trois éléments n'ont pas d'existence électrique mais représentent l'équivalent dynamique au modèle mécanique de la lame vibrante.

L : Inductance motionnelle équivalente à la masse de la lame vibrante.

C : Capacité motionnelle équivalente à l'élasticité de la lame vibrante.

r : Résistance équivalente aux frottements internes.

- Pulsations de résonance série et de résonance parallèle (ou d'anti-résonance) :

$$\omega_S = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_P = \frac{1}{\sqrt{L \frac{CC_0}{C+C_0}}}, \quad \omega_P = \omega_S \sqrt{1 + \frac{C}{C_0}}$$

- Facteur de qualité (mécanique) :

$$Q = \frac{\omega_S L}{r} = \frac{1}{\omega_S r C}$$

- Facteur de mérite (défini à la pulsation ω_S) :

$$F_M = \frac{I(\omega_S)}{I_0(\omega_S)} = \frac{1}{\omega_S r C_0}, \quad \frac{F_M}{Q} = \frac{C}{C_0}$$

- Impédances aux pulsations série et parallèle :

$$\underline{Z}(\omega_S) \approx r \text{ (pour } F_M \gg 1) \quad \text{et} \quad \underline{Z}(\omega_P) \approx F_M^2 r \text{ (pour } F_M \gg 1 \text{ et } C \ll C_0)$$

- Impédance \underline{Z} et réactance X pour $r = 0$ (Fig. 27.12) :

$$\underline{Z} = jX = \frac{-j}{(C+C_0)\omega} \frac{1 - (\omega/\omega_S)^2}{1 - (\omega/\omega_P)^2}$$

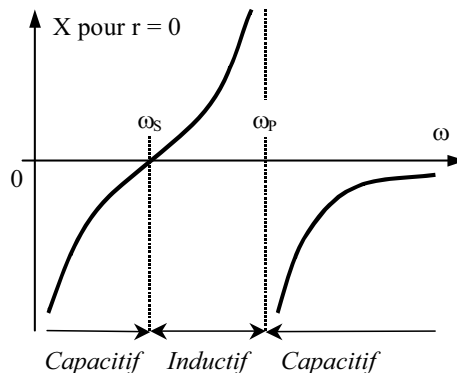


Fig. 27.12 Réactance d'un résonateur piézoélectrique pour $r = 0$

b) Oscillateur Pierce à T.E.C. (Fig. 27.13 et Fig. 27.14)

Le transistor T est un T.E.C. (Transistor à Effet de Champ) de transconductance g_m pour les « petits signaux ». La résistance R_3 assure la polarisation automatique. À la fréquence d'oscillation, les condensateurs C_3 , C_4 et C_5 se comportent comme des courts-circuits. La résistance r du modèle électrique du résonateur piézoélectrique est négligée.

Pour le schéma équivalent « petits signaux », on considère que les éléments englobent tous les éléments parasites ($R_2 \leftarrow R_2 // r_{ds} \text{ TEC}$, $C_2 \leftarrow C_2 // C_{ds} \text{ TEC}$, $R_1 \leftarrow R_1 // R_{\text{entrée TEC}}$, $C_1 \leftarrow C_1 // C_{\text{entrée TEC}}$, etc.).

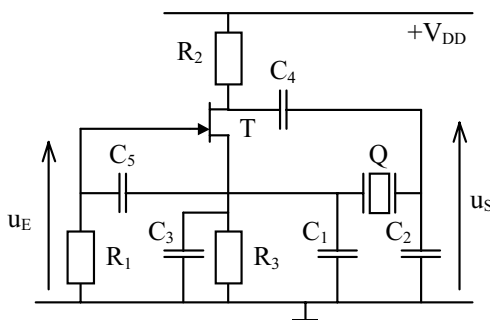


Fig. 27.13 Oscillateur Pierce à T.E.C.

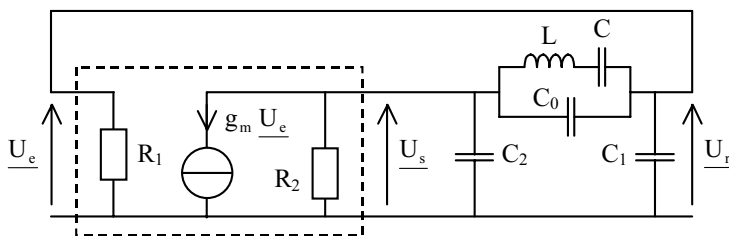


Fig. 27.14 Schéma équivalent pour les « petits signaux »

– F.T.B.O. :

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_r}}{\underline{U_e}} = \frac{-g_m R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}{1 - \frac{X(R_1 C_1 + R_2 C_2) \omega}{R_1 + R_2} + j \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega + X(1 - R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2)}{R_1 + R_2}}$$

– Condition de retour en phase : $\text{Im} \underline{T_{BO}} = 0$ avec $1 \ll R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 \Rightarrow$

$$\omega_0 = \omega_S \sqrt{1 + \frac{C}{C_{\text{Tot}}}} \quad \text{avec} \quad C_{\text{Tot}} = C_0 + C_{\text{Load}} \quad \text{et} \quad C_{\text{Load}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

– Condition d'entretien du signal : $\text{Re}T_{\text{BO}} = 1$ avec $1 \ll R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 \Rightarrow$

$$\underline{T_{\text{BO}}}(\omega_0) = \frac{g_m}{\frac{C_1}{R_2 C_2} + \frac{C_2}{R_1 C_1}} = 1 \Rightarrow g_m = \frac{C_1}{R_2 C_2} + \frac{C_2}{R_1 C_1} = \frac{x}{R_2} + \frac{1}{R_1 x}$$

La valeur minimale de g_m est obtenue pour :

$$\frac{dg_m}{dx} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1 x^2} = 0 \Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$$

D'où :

$$g_m = \frac{2}{\sqrt{R_1 R_2}}$$

– Variation relative de la pulsation d'oscillation :

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{d\omega_S}{\omega_S} + \frac{1}{2} \frac{C}{C + C_{\text{Tot}}} \left(\frac{dC}{C} - \frac{dC_{\text{Tot}}}{C_{\text{Tot}}} \right) \quad \text{avec} \quad C_{\text{Tot}} = C_0 + C_{\text{Load}} \gg C$$

Remarque : La fréquence d'oscillation est généralement donnée par le constructeur pour une capacité de charge C_{Load} spécifiée.

c) *Oscillateur Colpitts (Fig. 27.15)*

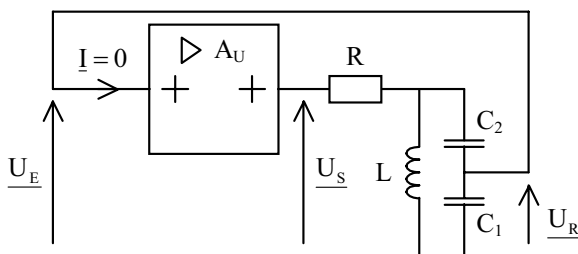


Fig. 27.15 Oscillateur Colpitts

Question : L'amplificateur en tension est supposé parfait.

- 1) Exprimer la F.T.B.O. En déduire la pulsation d'oscillation et la condition d'entretien du signal.
- 2) Exprimer la variation relative de la pulsation d'oscillation.

Réponse :

1) F.T.B.O. : En appliquant le diviseur de tension ($I = 0$), on obtient :

$$\underline{T_{\text{BO}}} = \frac{U_R}{U_E} = A_U \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{jL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \quad \text{avec} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- Condition de retour en phase :

$$\text{Im}\underline{T}_{\text{BO}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Condition d'entretien du signal :

$$\text{Re}\underline{T}_{\text{BO}} = 1 \Rightarrow \underline{T}_{\text{BO}}(\omega_0) = A_U \frac{C_2}{C_1 + C_2} = 1$$

D'où :

$$A_U = 1 + \frac{C_1}{C_2}$$

- 2) Variation relative de la pulsation d'oscillation :

$$\frac{d\omega_0}{\omega_0} = \frac{-1}{2} \left(\frac{dL}{L} + \frac{dC}{C} \right)$$

d) Oscillateur Hartley (Fig. 27.16)

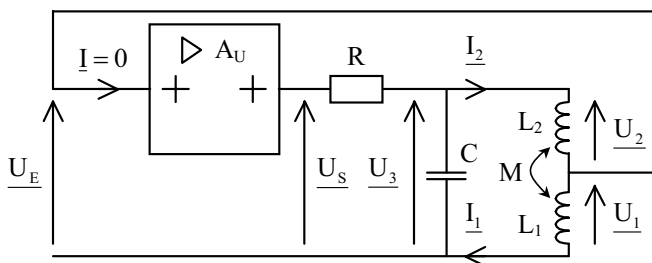


Fig. 27.16 Oscillateur Hartley

Question : L'amplificateur en tension est supposé parfait.

- 1) Exprimer l'inductance équivalente aux deux bobines couplées associées en série, puis le rapport $\underline{U}_1/\underline{U}_3$.
- 2) Exprimer la F.T.B.O. En déduire la pulsation d'oscillation et la condition d'entretien du signal.

Réponse : 1) Voir Chapitre 14 : Bobines couplées. On a :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = jL_1\omega\underline{I}_1 + jM\omega\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = jM\omega\underline{I}_1 + jL_2\omega\underline{I}_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{U}_3 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \end{cases}$$

D'où :

$$L_{\text{Equ}} = \frac{U_3}{j\omega I_1} = L_1 + L_2 + 2M \quad \text{et} \quad \frac{U_1}{U_3} = \frac{L_1 + M}{L_{\text{Equ}}}$$

2) F.T.B.O. : En appliquant le diviseur de tension ($I = 0$), on obtient :

$$\underline{T_{\text{BO}}} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{U_E}} = A_U \frac{L_1 + M}{L_{\text{Equ}}} \frac{jL_{\text{Equ}}\omega}{R(1 - L_{\text{Equ}}C\omega^2) + jL_{\text{Equ}}\omega}$$

– Condition de retour en phase :

$$\text{Im}\underline{T_{\text{BO}}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_{\text{Equ}}C}}$$

– Condition d'entretien du signal :

$$\text{Re}\underline{T_{\text{BO}}} = 1 \Rightarrow \underline{T_{\text{BO}}}(\omega_0) = A_U \frac{L_1 + M}{L_{\text{Equ}}} = 1$$

D'où :

$$A_U = \frac{L_{\text{Equ}}}{L_1 + M} = 1 + \frac{L_2 + M}{L_1 + M}$$

Si le couplage est maximal alors $L_2 = m^2 L_1$ et $M = mL_1$, m étant le rapport de transformation (de même signe que M). Dans ce cas :

$$L_{\text{Equ}} = (m + 1)^2 L_1 \quad \text{et} \quad A_U = m + 1$$

e) Oscillateur à pont de Wien

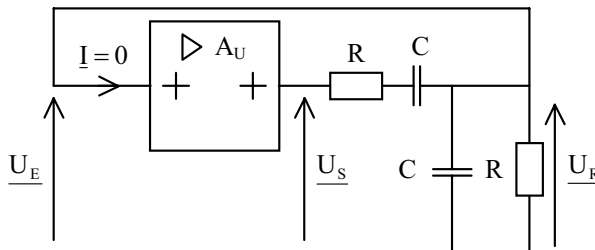


Fig. 27.17 Oscillateur à pont de Wien

Question : L'amplificateur en tension est supposé parfait. Exprimer la F.T.B.O. En déduire la pulsation d'oscillation et la condition d'entretien du signal.

Réponse : F.T.B.O. : En appliquant le diviseur de tension ($\underline{I} = 0$), on obtient :

$$\underline{T_{BO}} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{U_E}} = A_U \frac{jRC\omega}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3jRC\omega} = \frac{A_U}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

– Condition de retour en phase :

$$\text{Im}\underline{T_{BO}} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

– Condition d'entretien du signal :

$$\text{Re}\underline{T_{BO}} = 1 \Rightarrow \underline{T_{BO}}(\omega_0) = A_U/3 = 1$$

D'où : $A_U = 3$

Chapitre 28

Comparaison analogique

Pour une approche du composant, voir Chapitre 22 : Comparateurs analogiques.

28.1 COMPARAISON

- **Fonction.** Un comparateur permet d'indiquer si l'amplitude d'un signal u_E est supérieure ou inférieure à l'amplitude (prise comme référence) d'un autre signal $U_{Réf}$. Les signaux d'entrée sont analogiques, et le signal de sortie est du type TOR (Tout Ou Rien).
- **Symboles** (Fig. 28.1)

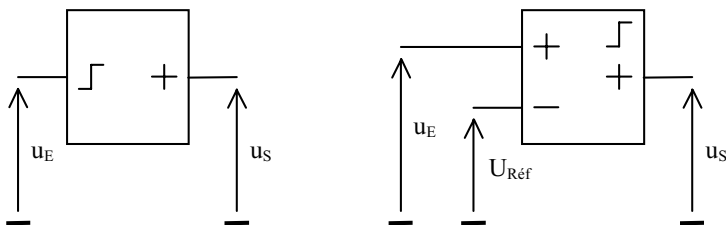


Fig. 28.1 Symboles d'un comparateur

• *Caractéristique idéale* (Fig. 28.2)

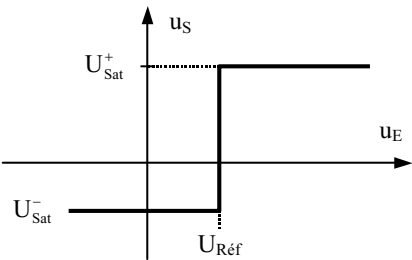


Fig. 28.2 Caractéristique idéale d'un comparateur

• *Diagramme temporel* (Fig. 28.3)

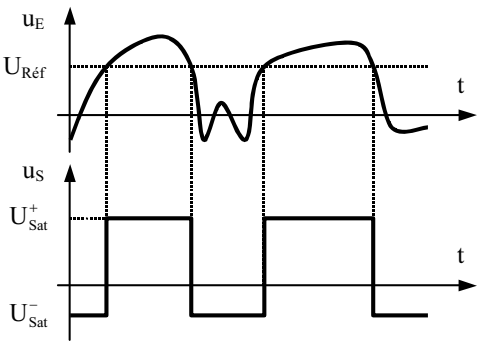


Fig. 28.3 Diagramme temporel pour un comparateur

Exemple 28.1.1

Modulation de largeur d'impulsion (Fig. 28.4 et Fig. 28.5). Le principe de la M.L.I. (Modulation de Largeur d'Impulsion) ou P.W.M. (*Pulse Width Modulation*), consiste en une comparaison du signal d'entrée u_E avec un signal triangulaire u_T . Le diagramme temporel est donné pour différentes valeurs de u_E . En pratique, le signal u_E doit être lentement variable par rapport au signal u_T .

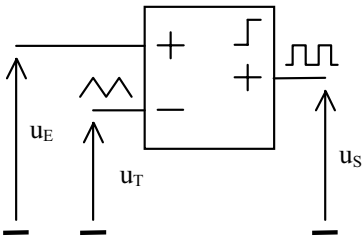


Fig. 28.4 Principe de la M.L.I.

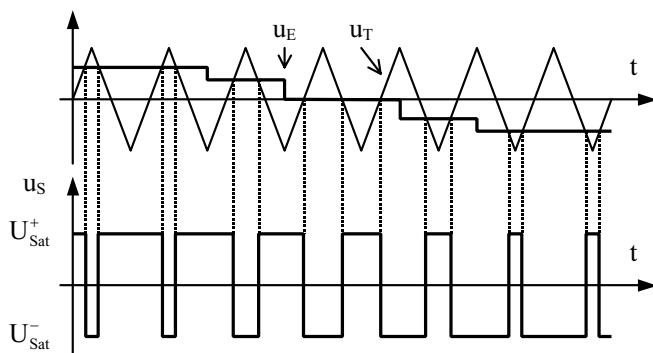


Fig. 28.5 Diagramme temporel de la M.L.I.

28.2 COMPARAISON À HYSTÉRÉSIS

• **Fonction.** Un comparateur à hystérésis (ou « trigger de Schmitt ») est un comparateur possédant deux seuils en amplitude :

- Un seuil haut U_H validé uniquement à la croissance du signal d'entrée u_E .
- Un seuil bas U_B validé uniquement à la décroissance du signal d'entrée u_E . On définit :
- La largeur du cycle hystérésis :

$$U_H - U_B$$

- La position du centre du cycle d'hystérésis :

$$\frac{U_H + U_B}{2}$$

- **Symbole** (Fig. 28.6)

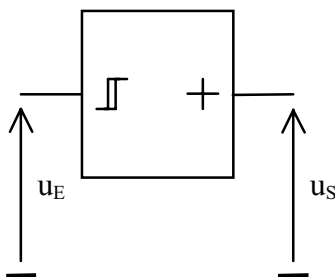


Fig. 28.6 Symbole d'un comparateur à hystérésis

• **Caractéristique idéale** (Fig. 28.7)

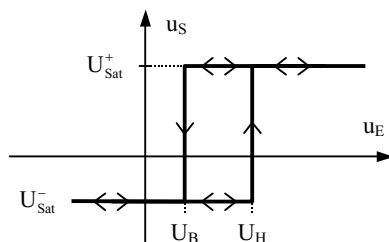


Fig. 28.7 Caractéristique idéale d'un comparateur à hystérésis

• **Diagramme temporel** (Fig. 28.8)

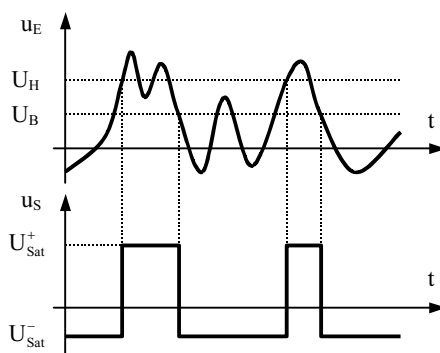


Fig. 28.8 Diagramme temporel pour un comparateur à hystérésis

Question : Soit le schéma (Fig. 28.9) d'un trigger de Schmitt non-inverseur à A.Op. supposé parfait. On suppose la résistance interne du générateur qui produit u_E négligeable devant R_1 (si ce n'est pas le cas, alors il faudrait en tenir compte dans les calculs, celle-ci étant en série avec R_1). Exprimer les seuils, la largeur et le centre du cycle d'hystérésis.

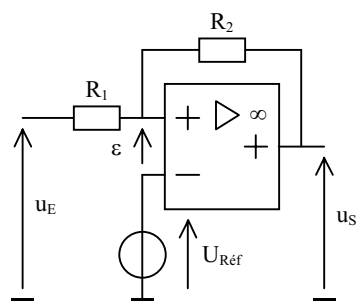


Fig. 28.9 Trigger de Schmitt non-inverseur à A.Op.

Méthode

Il faut toujours commencer par vérifier que le montage est du type bistable (deux états stables seulement). Ensuite, on calcule les seuils d'entrée en considérant le montage aux limites des changements d'états.

Réponse :

– L'A.Op. fonctionne en régime saturé car il possède une réaction positive (sortie « + » sur l'entrée « + »). Les deux seules valeurs stables en sortie sont donc U_{Sat}^+ et U_{Sat}^- (voir Chapitre 21 : Amplificateurs opérationnels).

– Expression de la tension u^+ entre l'entrée « + » et le 0V. En considérant le courant dans l'entrée « + » nul, on a (théorème de superposition) :

$$u^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_E + \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_S \quad \text{avec} \quad u_S = U_{\text{Sat}}^+ \quad \text{ou} \quad u_S = U_{\text{Sat}}^-$$

– Expressions des seuils. La tension u_S passe de U_{Sat}^+ à U_{Sat}^- lorsque la tension ε passe de 0^+ à 0^- . Réciproquement, u_S passe de U_{Sat}^- à U_{Sat}^+ lorsque ε passe de 0^- à 0^+ . En conséquence, les seuils se déterminent pour $\varepsilon = u^+ - U_{\text{Ref}} = 0$. D'où :

$$u_E = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{\text{Ref}} - \frac{R_1}{R_2} u_S \quad \text{avec} \quad u_S = U_{\text{Sat}}^+ \quad \text{ou} \quad u_S = U_{\text{Sat}}^-$$

$$\text{Soit : } U_H = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{\text{Ref}} - \frac{R_1}{R_2} U_{\text{Sat}}^- \quad \text{et} \quad U_B = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{\text{Ref}} - \frac{R_1}{R_2} U_{\text{Sat}}^+$$

– Largeur et centre du cycle d'hystérésis.

$$U_H - U_B = \frac{R_1}{R_2} (U_{\text{Sat}}^+ - U_{\text{Sat}}^-)$$

$$\frac{U_H + U_B}{2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} U_{\text{Ref}} - \frac{R_1}{R_2} \frac{U_{\text{Sat}}^+ + U_{\text{Sat}}^-}{2}$$

Exemple 28.2.2

Principe du trigger à bascule RS (Fig. 28.10). Ce principe est utilisé dans le mode astable du circuit 555.

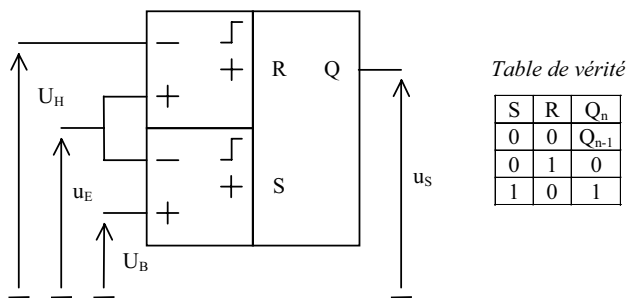


Fig. 28.10 Principe du trigger à bascule RS

Exemple 28.2.3

Inverseur CMOS à entrée trigger (Fig. 28.11). Les seuils dépendent de la référence du circuit.

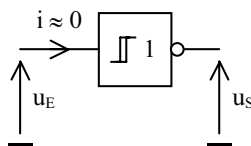


Fig. 28.11 Inverseur CMOS à entrée trigger

28.3 COMPARAISON À FENÊTRE

• **Fonction.** Un comparateur à fenêtre permet d'indiquer si l'amplitude d'un signal u_E est comprise, ou non comprise, entre une amplitude minimale U_{Min} et une amplitude maximale U_{Max} qui constituent la « fenêtre ». On définit :

- La largeur de la fenêtre : $U_{Max} - U_{Min}$
- La position du centre de la fenêtre : $\frac{U_{Max} + U_{Min}}{2}$

• **Principe** (Fig. 28.12). Pour éviter d'éventuelles instabilités en sortie, les comparateurs peuvent être remplacés par des comparateurs à faible hystérésis.

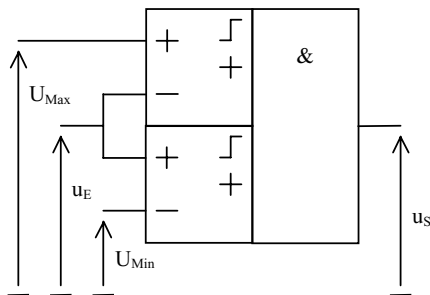


Fig. 28.12 Principe d'un comparateur à fenêtre

• **Caractéristique idéale** (Fig. 28.13)

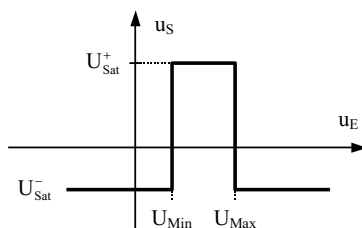


Fig. 28.13 Caractéristique idéale d'un comparateur à fenêtre

• *Diagramme temporel* (Fig. 28.14)

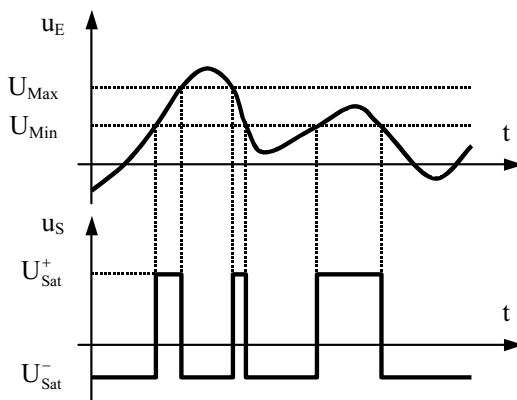


Fig. 28.14 Diagramme temporel pour un comparateur à fenêtre

Question : Soit le schéma (Fig. 28.15) d'un détecteur de zéro. Calculer les tensions repérées U_{Max} et U_{Min} sur le schéma. Puis, tracer l'allure de la tension de sortie pour une tension d'entrée sinusoïdale. Indiquer les valeurs de la tension de sortie à l'état haut et à l'état bas.

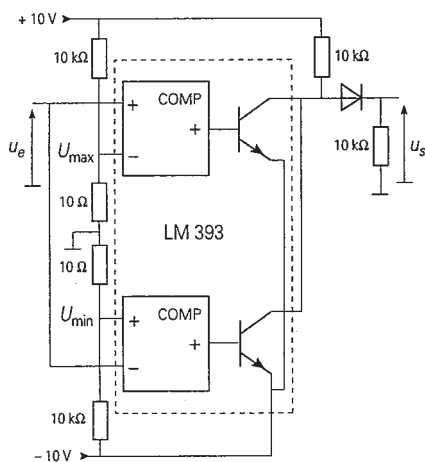


Fig. 28.15 Schéma d'un détecteur de zéro

Réponse : Allure de la tension de sortie pour une entrée sinusoïdale (Fig. 28.16)

$$U_{\text{Max}} = \frac{10 \times (+10)}{10 + 10 \text{ k}} \approx 10 \text{ mV}, U_{\text{Min}} = \frac{10 \times (-10)}{10 + 10 \text{ k}} \approx -10 \text{ mV}$$

$$\text{À l'état haut (diode passante)} : u_s = \frac{10 \text{ k} \times (+10 - 0,6)}{10 \text{ k} + 10 \text{ k}} \approx 4,7 \text{ V}$$

$$\text{À l'état bas (diode bloquée)} : u_s \approx 0 \text{ V}$$

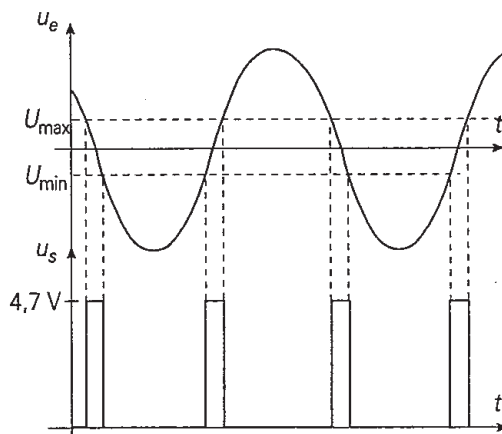


Fig. 28.16 Diagramme temporel – Détecteur de zéro

Chapitre 29

Génération de signaux « Tout Ou Rien » (TOR)

29.1 MONOSTABLE

• **Fonction.** Un monostable possède un état stable et un état instable. Lors d'un front actif sur l'entrée u_E , la sortie u_S passe et reste dans l'état instable pendant une durée fixée T , puis revient dans l'état stable. Le front actif est soit le front montant, soit le front descendant. Deux types de monostables existent :

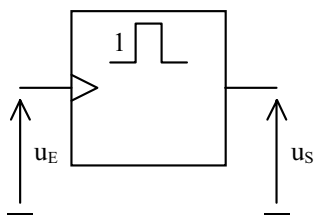
- Les non-redéclenchables : la durée T est initialisée au premier front actif.
- Les redéclenchables : la durée T est initialisée à chaque front actif.

Remarques :

- Le temps de récupération T_R est le temps minimum nécessaire au monostable entre deux déclenchements pour que la durée T soit respectée.
- Un monostable utilise soit un circuit intégrateur (filtre passe-bas), soit un circuit dérivateur (filtre passe haut) ; les monostables à intégration sont moins sensibles aux parasites par construction.

• **Symboles.** (Fig. 29.1)

Monostable non-redéclenchable



Monostable redéclenchable

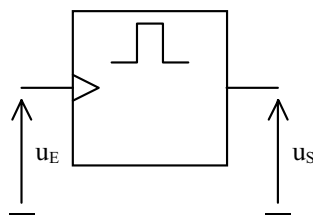


Fig. 29.1 Symboles des monostables

• **Diagrammes temporels.** (Fig. 29.2)

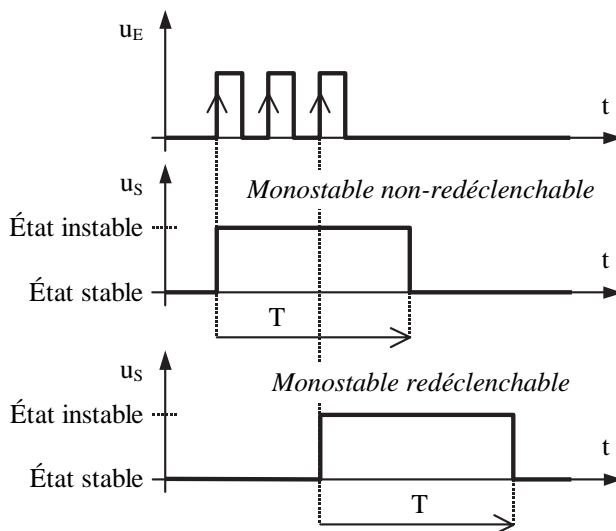


Fig. 29.2 Diagrammes temporels des monostables

Exemple 29.1.1

Principe d'un monostable numérique (Fig. 29.3). Une impulsion sur l'entrée u_E fait passer la sortie u_S dans l'état instable et met à zéro le compteur. La sortie de l'astable (voir § 29.2) incrémente le compteur. Lorsque la sortie $n-1$ du compteur passe au niveau logique haut, la sortie u_S retourne dans l'état stable.

Question : Exprimer la durée de l'état instable et le temps de récupération du monostable numérique (voir Fig. 29.3). Ce monostable est-il redéclenchable ou non-redéclenchable ?

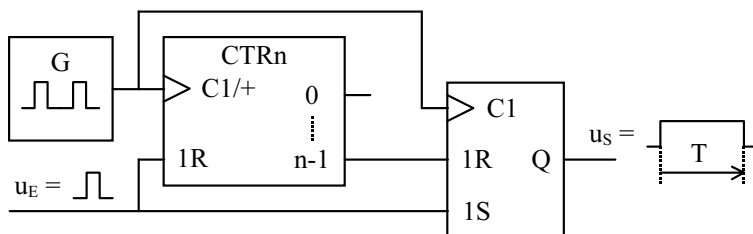


Fig. 29.3 Principe d'un monostable numérique

Réponse :

Soient T_A la période de l'astable et n le nombre d'étages du compteur. On a :

$$T = (2^{n-1} + 1) T_A \quad \text{et} \quad T_R \approx 0 \text{ à } T_A$$

Ce monostable est redéclenchable car chaque impulsion sur l'entrée u_E initialise le compteur. Pour réaliser un monostable non-redéclenchable, il faut inhiber l'entrée u_E lorsque la sortie u_S est à l'état haut.

29.2 ASTABLE

• **Fonction.** Un astable possède deux états instables. La sortie u_S passe indéfiniment de l'un à l'autre régulièrement dans le temps. Certains astables peuvent être synchronisés par un signal externe. Le signal de sortie est caractérisé par :

– sa période T en secondes (s), ou sa fréquence F en hertz (Hz) :

$$F = \frac{1}{T}$$

– son rapport cyclique α :

$$\alpha = \frac{t_H}{t_H + t_B} = \frac{t_H}{T}$$

où t_H est la durée au niveau haut du signal de sortie, et t_B sa durée au niveau bas.

• **Symbole** (Fig. 29.4)

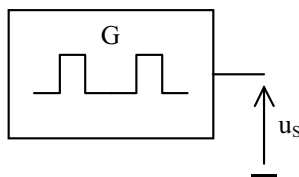


Fig. 29.4 Symbole d'un astable

• **Diagramme temporel** (Fig. 29.5)

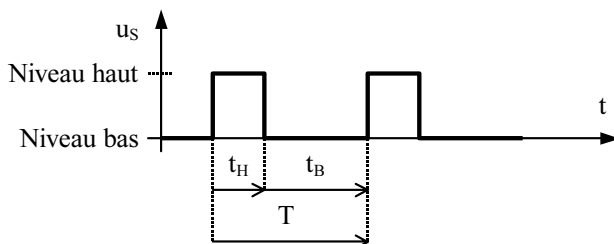


Fig. 29.5 Diagramme temporel pour un astable

Question : Soit le principe d'un astable numérique (Fig. 29.6). Exprimer la durée de la période du signal de sortie.

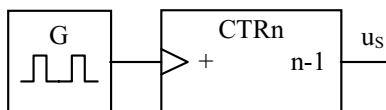


Fig. 29.6 Principe d'un astable numérique

Réponse : Soient T_A la période de l'astable et n le nombre d'étages du compteur. On a : $T = 2^n T_A$

Question : Soit le schéma (Fig. 29.7) d'un astable à trigger CMOS, avec sa caractéristique de transfert. Le circuit est alimenté entre $V_{CC} = 5\text{ V}$ et la masse.

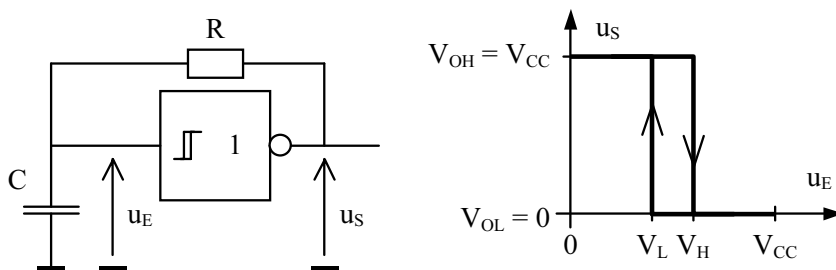


Fig. 29.7 Astable à trigger CMOS

- 1) Expliquer qualitativement le fonctionnement du montage.
- 2) Exprimer la période de l'astable.
- 3) Exprimer la condition à satisfaire pour que le rapport cyclique soit $\alpha = 1/2$.

Réponse : 1) Lorsque la tension d'entrée atteint le seuil haut du trigger, la tension de sortie passe à $u_S = 0$ V, et la tension d'entrée décroît exponentiellement. Lorsque la tension d'entrée atteint le seuil bas du trigger, la tension de sortie passe à $u_S = V_{CC}$, et la tension d'entrée croît exponentiellement.

2) On établit (voir § 29.4.1) :

$$t_H = RC \ln \frac{V_{CC} - V_L}{V_{CC} - V_H} \quad \text{et} \quad t_L = RC \ln \frac{V_H}{V_L}$$

$$T = t_H + t_L = RC \ln \frac{(V_{CC} - V_L) V_H}{(V_{CC} - V_H) V_L}$$

3) Il faut que la durée à l'état haut soit égale à la durée à l'état bas. D'où :

$$\frac{V_{CC} - V_L}{V_{CC} - V_H} = \frac{V_H}{V_L} \Rightarrow V_H^2 - V_L^2 - (V_H - V_L) V_{CC} = 0$$

$$\Rightarrow (V_H - V_L) (V_H + V_L - V_{CC}) = 0 \Rightarrow V_H + V_L = V_{CC}$$

D'où :

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad T = 2RC \ln \frac{V_H}{V_L}$$

Exemple 29.2.2

Astable à résonateur à quartz ou céramique (Fig. 29.8). C'est un oscillateur Pierce. La fréquence d'oscillation est principalement fixée par le résonateur piézoélectrique. Elle en possède donc la précision et la stabilité. On note A ($A < 0$) l'amplification de l'inverseur CMOS polarisé par la résistance R_1 . La résistance R_2 permet de diminuer l'énergie transmise au résonateur (R_2 est souvent nulle si la résistance de sortie de la porte est suffisante).

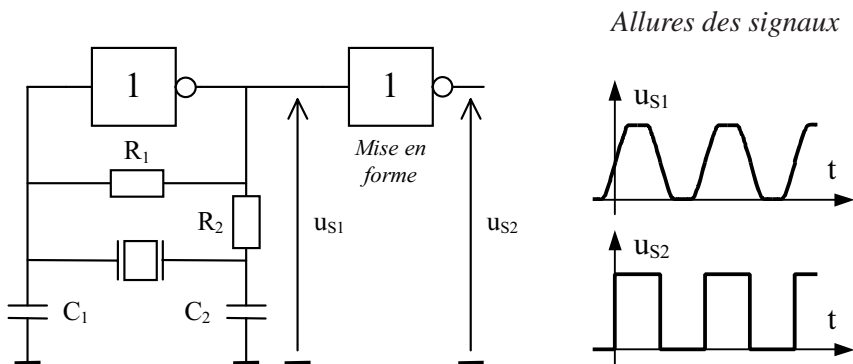


Fig. 29.8 Astable à résonateur

En négligeant les effets des résistances, on obtient les résultats ci-après.

– Fréquence d'oscillation et condition d'entretien :

$$f_O = f_S \sqrt{1 + \frac{C}{C_0 + C_L}} \quad \text{avec} \quad f_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad |A| \geq \frac{C_1}{C_2}$$

– Stabilité de la fréquence d'oscillation ($C_T = C_0 + C_L \gg C$) :

$$\frac{df_O}{f_O} = \frac{df_S}{f_S} + \frac{1}{2} \frac{C}{C + C_T} \left(\frac{dC}{C} - \frac{dC_T}{C_T} \right)$$

– L, C et C_0 sont les éléments du modèle du résonateur piézoélectrique (voir Chapitre 27 : Systèmes bouclés : Contre réaction – Oscillateurs).

– Les capacités parasites sont comprises dans C_1 et C_2 .

– La capacité d'entrée de l'inverseur CMOS C_E est en parallèle sur C_1 .

– La capacité de charge C_L est en parallèle sur C_0 . Elle comprend C_1 , C_2 et C_E .

$$C_L = \frac{(C_E + C_1) C_2}{C_E + C_1 + C_2}$$

La fréquence d'oscillation est généralement donnée par le constructeur pour une capacité de charge spécifiée.

Exemple 29.2.3

Principe d'un astable utilisant deux monostables rebouclés (Fig. 29.9).
 $T = T_1 + T_2$ avec T_1 (resp. T_2) durée de l'état instable du premier (resp. deuxième) monostable.

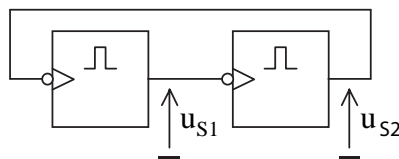


Fig. 29.9 Principe d'un astable utilisant deux monostables rebouclés

29.3 RETARD – TEMPORISATION

• **Fonction.** Un retardateur (ou temporisateur) permet d'obtenir un signal de sortie u_S retardé par rapport au signal d'entrée u_E . D'une façon générale, le retard à l'enclenchement t_1 est différent du retard au déclenchement t_2 . Il existe trois types de retardateurs :

- Retardateur à l'enclenchement, ou à l'apparition du signal d'entrée ($t_2 = 0$).
- Retardateur au déclenchement, ou à la disparition du signal d'entrée ($t_1 = 0$).
- Retardateur à l'enclenchement et au déclenchement ($t_1 \neq 0$ et $t_2 \neq 0$).

• *Symbole* (Fig. 29.10)

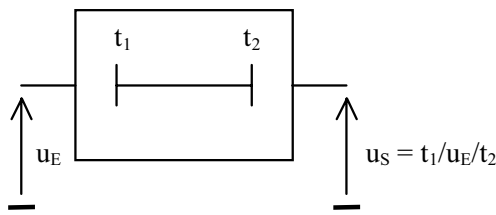


Fig. 29.10 Symbole d'un retardateur

• *Diagramme temporel* (Fig. 29.11)

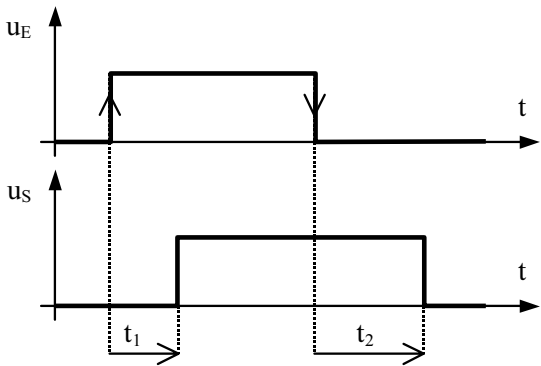


Fig. 29.11 Diagramme temporel pour un retardateur

Exemple 29.3.4

Principe d'un retardateur à circuit RC (Fig. 29.12 et Fig. 29.13). Une diode mise en parallèle sur la résistance R permet, selon son sens, de rendre nul t_1 ou t_2 .

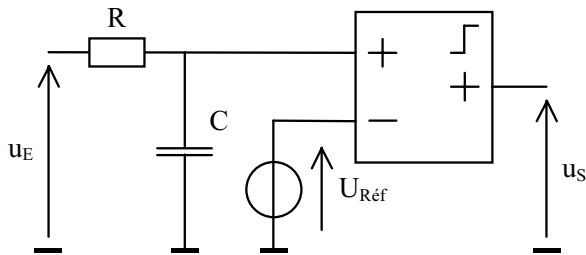


Fig. 29.12 Principe d'un retardateur à circuit RC

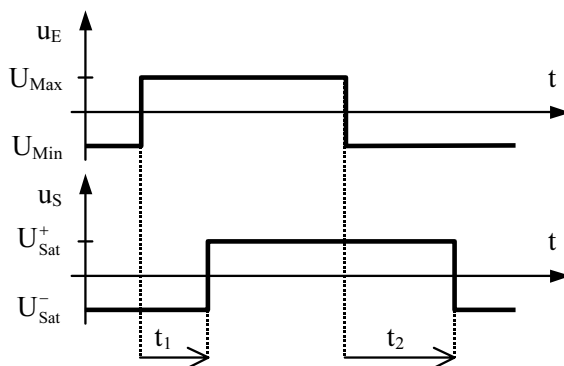


Fig. 29.13 Diagramme temporel du retardateur à circuit RC

Question : Soit le schéma du retardateur à circuit RC (Fig. 29.12).

- 1) Exprimer la tension aux bornes du condensateur u_C si $u_E = U_{\text{Max}}$ pour $t \geq 0$ avec $u_C(0^-) = U_{\text{Min}}$ et en déduire l'expression de t_1 .
- 2) Exprimer la tension aux bornes du condensateur u_C si $u_E = U_{\text{Min}}$ pour $t \geq 0$ avec $u_C(0^-) = U_{\text{Max}}$ et en déduire l'expression de t_2 .

Réponse : On est en présence d'un circuit RC commandé par un échelon de tension (voir § 29.4.1). En conséquence, la tension u_C est de la forme :

$$u_C = A e^{-t/\tau} + B \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

1) Premier cas :

$$u_E = U_{\text{Max}} \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad \text{avec} \quad u_C(0^-) = U_{\text{Min}}$$

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = A + B = U_{\text{Min}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = B = U_{\text{Max}} \end{cases} \Rightarrow u_C = (U_{\text{Min}} - U_{\text{Max}}) e^{-t/\tau} + U_{\text{Max}}$$

$$\text{Au temps } t_1, u_C(t_1) = (U_{\text{Min}} - U_{\text{Max}}) e^{-t_1/\tau} + U_{\text{Max}} = U_{\text{Réf}}$$

D'où :

$$t_1 = RC \ln \frac{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}{U_{\text{Max}} - U_{\text{Réf}}}$$

2) Deuxième cas :

$$u_E = U_{\text{Min}} \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \quad \text{avec} \quad u_C(0^-) = U_{\text{Max}}$$

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = A + B = U_{\text{Max}} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t) = B = U_{\text{Min}} \end{cases} \Rightarrow u_C = (U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}) e^{-t/\tau} + U_{\text{Min}}$$

Au temps t_2 , $u_C(t_2) = (U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}) e^{-t_2/\tau} + U_{\text{Min}} = U_{\text{Réf}}$

D'où :

$$t_2 = RC \ln \frac{U_{\text{Max}} - U_{\text{Min}}}{U_{\text{Réf}} - U_{\text{Min}}}$$

Exemple 29.3.5

Retardateur à porte CMOS (Fig. 29.14). La fonction réalisée dépend de la porte logique utilisée.

- Porte OUI : Retardateur à l'enclenchement et au déclenchement avec $t_1 = t_2$.
- Porte ET : Retardateur à l'enclenchement ($t_2 = 0$).
- Porte OU : Retardateur au déclenchement ($t_1 = 0$).
- Porte OU exclusif : Ce n'est pas une fonction retard. Au contraire, elle permet de détecter les changements de valeurs de la tension d'entrée u_E . Ce montage remplace avantageusement un circuit dérivateur CR car il est bien moins sensible aux parasites.

Pour un potentiel de seuil $V_T = V_{CC}/2$, on a $t_1 = t_2 = RC \ln 2$

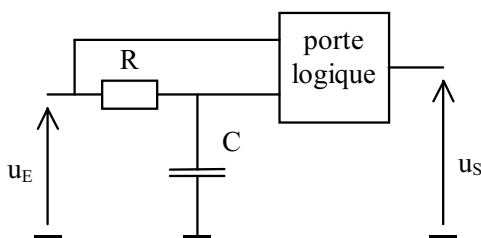


Fig. 29.14 Retardateur à porte CMOS

Exemple 29.3.6

Principe d'un retardateur numérique (Fig. 29.15). On peut utiliser un registre à décalage (Shift Register) à m bits commandé par une horloge.

$$(m - 1) T_A < t_1 = t_2 < m T_A$$

où T_A est la période de l'astable et m le nombre d'étages du registre à décalage.

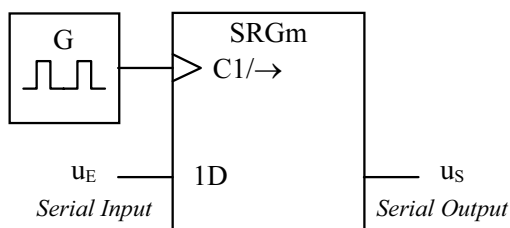


Fig. 29.15 Principe d'un retardateur numérique

29.4 CONDUITE DU RAISONNEMENT DANS DEUX CAS USUELS

(voir aussi la réponse indicielle d'un système du premier ordre, Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire)

29.4.1 Circuit RC excité par un échelon de tension ou de courant

- *Schémas équivalents rencontrés* (Fig. 29.16)

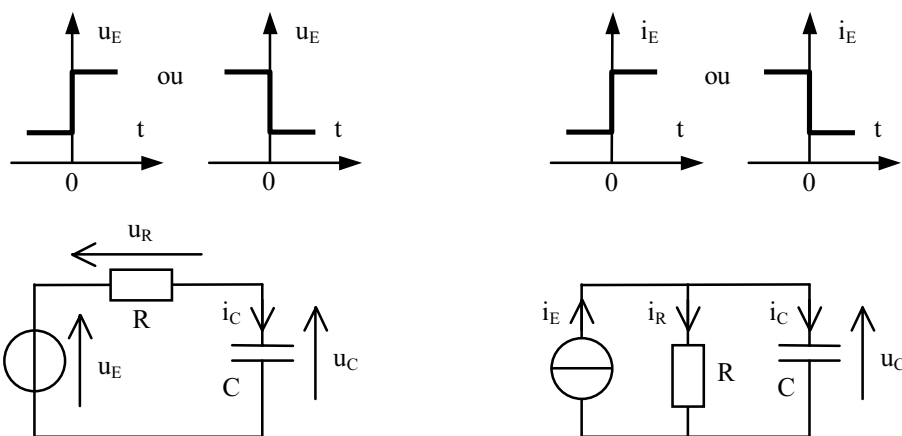


Fig. 29.16 Schémas équivalents rencontrés – Circuits RC

- **Équation.** Chacun des signaux (tensions u_R et u_C , courants i_R et i_C) admet l'expression générale suivante.

$$s = A e^{-t/\tau} + B \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} t = 0 & \Rightarrow & s = A + B = S_0 \\ t \rightarrow \infty & \Rightarrow & s \rightarrow B = S_{+\infty} \end{cases}$$

D'où :

$$s = (S_0 - S_{+\infty}) e^{-t/\tau} + S_{+\infty} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_0 : \text{Valeur initiale du signal (} t = 0 \text{)} \\ S_{+\infty} : \text{Valeur finale du signal (} t \rightarrow \infty \text{)} \\ \tau = RC : \text{Constante de temps en secondes} \end{cases}$$

- **Intervalle de temps** $t_2 - t_1$ mis pour passer d'une valeur S_1 à une valeur S_2 .

$$t_2 - t_1 = \tau \ln \frac{S_{+\infty} - S_1}{S_{+\infty} - S_2}$$

- **Diagramme temporel** (Fig. 29.17). Pour $S_0 < S_{+\infty}$ le signal $s(t)$ est croissant, tandis que pour $S_0 > S_{+\infty}$ le signal $s(t)$ est décroissant.

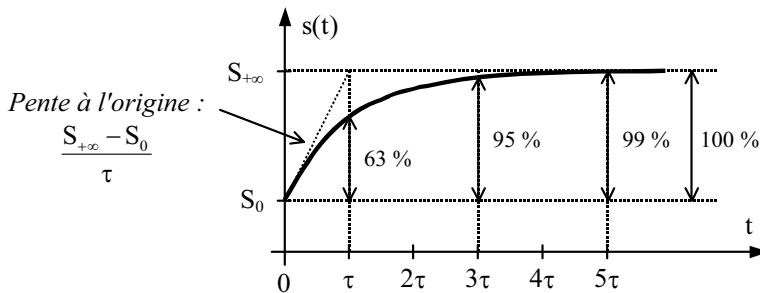


Fig. 29.17 Diagramme temporel pour $0 < S_0 < S_{+\infty}$

- **Détermination des valeurs initiales et finales.** On utilise les propriétés physiques de continuité et de stabilité de la tension aux bornes d'un condensateur (voir Chapitre 12 : Condensateurs pour les définitions, et Chapitre 9 : Étude temporelle d'un système linéaire pour l'utilisation).

Continuité : $\forall t, u_C(t^-) = u_C(t^+)$

Stabilité : $u_C = \text{constante} \Leftrightarrow i_C = 0$

29.4.2 Condensateur C excité directement par un échelon de courant

- **Schéma équivalent rencontré** (Fig. 29.18)

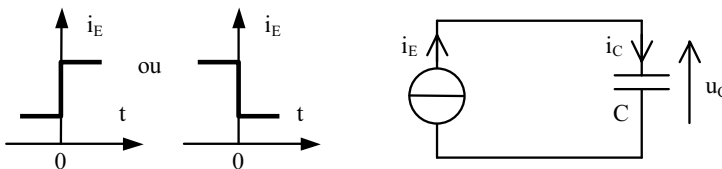


Fig. 29.18 Schéma équivalent rencontré – Commande en courant

- **Équation.** La tension u_C admet l'expression générale suivante (charge à courant constant). Son diagramme temporel est une droite.

$$u_C = \frac{I_{0^+}}{C} t + U_{C0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_{C0} : \text{Valeur initiale de la tension } u_C \\ I_{0^+} : \text{Valeur du courant pour } t = 0^+ \end{cases}$$

- **Intervalle de temps** $t_2 - t_1$ mis pour passer d'une valeur U_{C1} à une valeur U_{C2}

$$t_2 - t_1 = \frac{C(U_{C2} - U_{C1})}{I_{0^+}}$$

Chapitre 30

Conversions numérique analogique et analogique numérique

Un *C.N.A.* (Convertisseur Numérique Analogique) réalise la conversion numérique analogique, et un *C.A.N.* (Convertisseur Analogique Numérique) réalise la conversion analogique numérique. On considère ici uniquement le cas des conversions linéaires.

30.1 DÉFINITIONS

- **Résolution analogique ou quantum « q ».** C'est la plus petite variation du signal analogique qu'un C.A.N. linéaire peut détecter ou qu'un C.N.A. linéaire peut produire. À ce quantum « q » correspond le LSB (Least Significant Bit) de la grandeur numérique. Le quantum « q » s'appelle aussi LSB équivalent du signal analogique (LSB size).

- **Plage pleine échelle PPE (ou FSR pour Full Scale Range).** Soit N_{Val} le nombre de valeurs différentes représentables par un codage donné. On a :

$$\text{PPE} = qN_{\text{Val}}$$

- **Pleines échelles PE (ou FS pour Full Scale) positive et négative.** Soient N_{ValPos} le nombre de valeurs considérées positives et N_{ValNeg} le nombre de valeurs considérées négatives représentables par un codage donné. On a :

$$\text{PE}^+ = qN_{\text{ValPos}} \quad \text{et} \quad \text{PE}^- = -qN_{\text{ValNeg}}$$

Attention ! On trouve parfois d’autres définitions de la pleine échelle.

- **Résolution numérique** \mathfrak{R} . Elle s’exprime en % ou ppm (parties par million).

$$\mathfrak{R} = \frac{q}{\text{PPE}} = \frac{1}{N_{\text{Val}}}$$

- **Dynamique** D. Elle s’exprime en décibels (dB).

$$D = 20 \log N_{\text{Val}}$$

30.2 C.N.A.

- **Fonction, symbole et transmittance** (Fig. 30.1). Un C.N.A. (Convertisseur Numérique Analogique), ou D.A.C. (Digital to Analog Converter) convertit un signal d’entrée numérique $A = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)$ codé sur n bits en un signal de sortie analogique s.

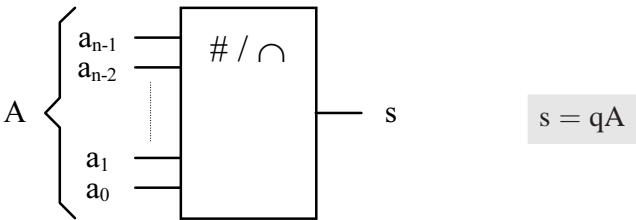


Fig. 30.1 Symbole et transmittance idéale d’un C.N.A.

Question : Exprimer la transmittance d’un C.N.A. unipolaire codé en binaire naturel sur 3 bits (pour les codes voir § 30.4). Dresser la table de conversion.

Réponse :

$$s = \frac{\text{PPE}}{8} A_2 = \frac{\text{PPE}}{8} (4a_2 + 2a_1 + a_0) = \text{PPE} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right)$$

A_{10}	0	1	2	3	4	5	6	7
A_2	000	001	010	011	100	101	110	111
$\frac{s}{\text{PPE}}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$

Question : Exprimer la transmittance d’un C.N.A. bipolaire codé en complément à deux sur 3 bits, puis en binaire décalé sur 3 bits (pour les codes voir § 30.4). Dresser les tables de conversion.

Réponse :

$$s = \frac{\text{PPE}}{8} A_{C2} = \frac{\text{PPE}}{8} (-4a_2 + 2a_1 + a_0) = \text{PPE} \left(\frac{-a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right)$$
$$s = \frac{\text{PPE}}{8} A_{BD} = \frac{\text{PPE}}{8} (-4\overline{a_2} + 2a_1 + a_0) = \text{PPE} \left(\frac{-\overline{a_2}}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right)$$

A ₁₀	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3
A _{C2}	100	101	110	111	000	001	010	011
A _{BD}	000	001	010	011	100	101	110	111
$\frac{s}{\text{PPE}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

- **Caractéristique de transfert idéale.** A chaque valeur numérique de l’entrée A correspond une, et une seule, valeur analogique de la sortie s.

Exemple 30.2.1

Caractéristique idéale d’un C.N.A. bipolaire 3 bits (Fig. 30.2).

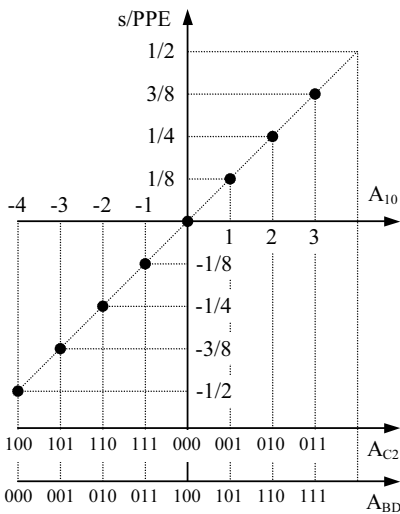


Fig. 30.2 Caractéristique idéale d’un C.N.A. bipolaire 3 bits

30.3 C.A.N.

• **Fonction, symbole et transmittance** (Fig. 30.3). Un C.A.N. (Convertisseur Analogique Numérique), ou A.D.C. (Analog to Digital Converter) convertit un signal d'entrée analogique e en un signal de sortie numérique $A = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)$ codé sur n bits.

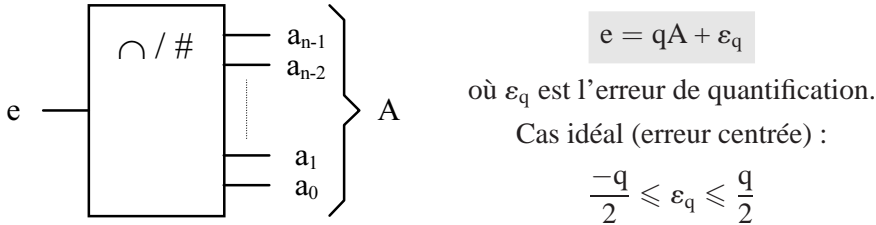


Fig. 30.3 Symbole et transmittance idéale d'un C.A.N.

Question : Exprimer la transmittance d'un C.A.N. unipolaire codé en binaire naturel sur 3 bits (pour les codes voir § 30.4).

Réponse :

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{\text{PPE}}{8} A_2 + \varepsilon_q = \frac{\text{PPE}}{8} (4a_2 + 2a_1 + a_0) + \varepsilon_q \\
 &= \text{PPE} \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right) + \varepsilon_q
 \end{aligned}$$

Question : Exprimer la transmittance d'un C.A.N. bipolaire codé en complément à deux sur 3 bits, puis en binaire décalé sur 3 bits (pour les codes voir § 30.4).

Réponse :

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{\text{PPE}}{8} A_{C2} + \varepsilon_q = \text{PPE} \left(\frac{-a_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right) + \varepsilon_q \\
 e &= \frac{\text{PPE}}{8} A_{BD} + \varepsilon_q = \text{PPE} \left(\frac{-\bar{a}_2}{2} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_0}{8} \right) + \varepsilon_q
 \end{aligned}$$

• **Caractéristique de transfert idéale.** L'entrée analogique e est généralement continue, tandis que la sortie numérique A ne peut prendre qu'une valeur parmi les N_{Val} possibles. On dit que le signal de sortie est *quantifié*.

Exemple 30.3.2
Caractéristique idéale d’un C.A.N. bipolaire 3 bits (Fig. 30.4). L’erreur de quantification est centrée ; elle varie entre $-q/2$ et $+q/2$.

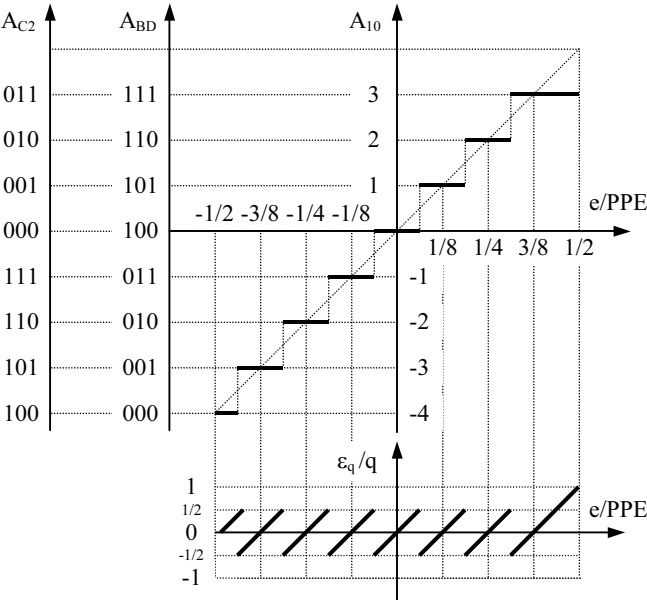


Fig. 30.4 Caractéristique idéale d’un C.A.N. bipolaire 3 bits

• *Comparaison de trois principes de C.A.N.* (Fig. 30.5)

Principe du C.A.N.	Caractéristiques
« flash »	très rapide et peu précis
à approximations successives	rapide et précis (bon compromis)
à rampes	très précis et lent

Fig. 30.5 Comparaison de trois principes de C.A.N.

30.4 CODES UTILISÉS DANS LES C.N.A. ET C.A.N.

30.4.1 Principaux codes pour convertisseurs unipolaires

• *Binaire naturel*

– Représentation d’un entier naturel en binaire naturel sur n bits :

$$A_2 = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i2^i \quad \text{avec} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

- Représentation fractionnaire du signal analogique qA_2 équivalent à A_2 :

$$\begin{aligned} qA_2 &= q \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = \text{PPE} \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^{i-n} \\ &= \text{PPE} \left(\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n} \right) \end{aligned}$$

$$q A_{2 \text{ Min}} = 0$$

$$q A_{2 \text{ Max}} = q (2^n - 1) = \text{PPE} - q$$

$$\text{Au LSB } a_0 \text{ correspond le quantum : } q = \text{PPE}/2^n$$

Au MSB a_{n-1} correspond la moitié de la PPE.

- Dynamique d'un code binaire. Le tableau (Fig. 30.6) montre le nombre de valeurs représentables par un code binaire, la résolution et la dynamique correspondantes, en fonction du nombre de bits n . La dynamique est donnée par :

$$D = 20 \log 2^n \approx 6,02 n$$

n bits	N _{Val}	\mathfrak{R}	D (dB)
0	1	1	0
1	2	0,5	6
2	4	0,25	12
3	8	0,125	18,1
4	16	0,0625	24,1
8	256	0,00390625	48,2
16	65536	0,0000152587890625	96,3
n	2^n	2^{-n}	$\approx 6,02 n$

Fig. 30.6 Dynamique d'un code binaire

• **D.C.B. (Décimal Codé Binaire) ou B.C.D. (Binary Coded Decimal)**

- Représentation d'un entier naturel en D.C.B. sur m digits :

$$A_{\text{DCB}} = (a_{m-1,3} a_{m-1,2} a_{m-1,1} a_{m-1,0} \cdots a_{0,3} a_{0,2} a_{0,1} a_{0,0})_{\text{DCB}}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i,3} a_{i,2} a_{i,1} a_{i,0})_2 10^i$$

$$\text{tel que } 0 \leq (a_{i,3} a_{i,2} a_{i,1} a_{i,0})_2 \leq 9 \quad \text{avec } a_i \in \{0, 1\}$$

- Représentation fractionnaire du signal analogique qA_{DCB} équivalent à A_{DCB} : Pour simplifier, on pose $d_i = (a_{i,3}a_{i,2}a_{i,1}a_{i,0})_2$ et on se limite au cas de digits complets.

$$\begin{aligned} qA_{\text{DCB}} &= q \sum_{i=0}^{m-1} d_i 10^i = \text{PPE} \sum_{i=0}^{m-1} d_i 10^{i-m} \\ &= \text{PPE} \left(\frac{d_{m-1}}{10} + \frac{d_{m-2}}{100} + \cdots + \frac{d_1}{10^{m-1}} + \frac{d_0}{10^m} \right) \end{aligned}$$

$q A_{\text{DCB Min}} = 0$
 $q A_{\text{DCB Max}} = q (10^m - 1) = \text{PPE} - q$
Au LSD d_0 correspond le quantum : $q = \text{PPE}/10^m$
Au MSD d_{m-1} correspond le dixième de la PPE.

Exemple 30.4.3

Codes pour convertisseurs unipolaires 8 bits (Fig. 30.7)

Fraction de PPE	Code binaire naturel (8 bits)			Code D.C.B. (2 digits)		
	$qA = \frac{A}{256} \text{PPE}$	Déc. A_{10}	Bin. nat. A_2	$qA = \frac{A}{100} \text{PPE}$	Déc. A_{10}	D.C.B. A_{DCB}
$\text{PPE} - q =$	0,9961 PPE	255	1111 1111	0,99 PPE	99	1001 1001
$3/4 \text{ PPE} =$	0,7500 PPE	192	1100 0000	0,75 PPE	75	0111 0101
$1/2 \text{ PPE} =$	0,5000 PPE	128	1000 0000	0,50 PPE	50	0101 0000
$1/4 \text{ PPE} =$	0,2500 PPE	64	0100 0000	0,25 PPE	25	0010 0101
$q =$	0,0039 PPE	1	0000 0001	0,01 PPE	1	0000 0001
$0 =$	0,0000 PPE	0	0000 0000	0,00 PPE	0	0000 0000

Fig. 30.7 Codes pour convertisseurs unipolaires 8 bits

Remarques :

- La valeur maximale de A correspond à la pleine échelle moins un quantum.
- En D.C.B., un digit complet nécessite 4 bits et permet de représenter les chiffres de 0 à 9 ou, en représentation fractionnaire les valeurs de 0 à 9/10. De même, un digit incomplet utilisant un seul bit permet de représenter les chiffres 0 et 1 ou, en représentation fractionnaire les valeurs 0 et 1/2. Et un digit incomplet utilisant deux bits permet de représenter les chiffres de 0 à 3 ou, en représentation fractionnaire les valeurs de 0 à 3/4. Par exemple, pour un convertisseur deux digits, on a 8 bits et $N_{\text{Val}} = 100$. Si on ajoute un bit aux deux digits, le convertisseur est dit 2 ½ digits, on a 9 bits et $N_{\text{Val}} = 200$. Enfin si on ajoute deux bits aux deux digits, le convertisseur est dit 2 ¾ digits, on a 10 bits et $N_{\text{Val}} = 400$.

30.4.2 Principaux codes pour convertisseurs bipolaires

• Binaire biaisé

- Représentation d'un entier relatif en binaire biaisé avec un biais R sur n bits :

$$A_{BBR} = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)_{BBR} = -R + A_2 \quad \text{tel que} \quad R \geq 0$$

$$\text{avec} \quad A_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \quad \text{et} \quad a_i \in \{0, 1\}$$

- Avantage : Permet d'adapter exactement l'étendue du signal analogique à la plage pleine échelle du convertisseur. En général il est nécessaire d'intercaler un étage de calibration (voir Chapitre 26 : Conditionnement des signaux).
- Inconvénient : Nécessite d'effectuer un calcul arithmétique pour corriger le biais introduit.

Question : Soit le principe d'adaptation de la tension u_E à la PPE d'un C.A.N. unipolaire binaire naturel sur 8 bits (Fig. 30.8). Calculer le biais R.

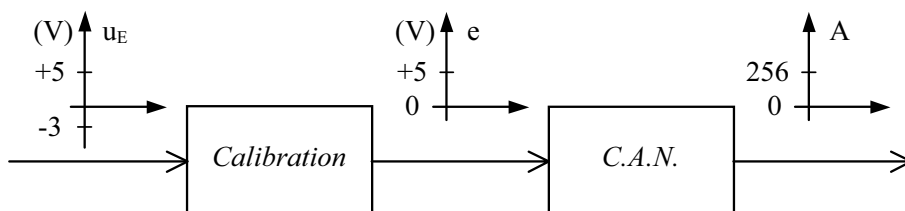


Fig. 30.8 Principe d'adaptation à la PPE

Réponse : A $u_E = +5$ V, correspond $e = +5$ V et $A = 256_{10}$ ($A = 100000000_2$); et à $u_E = -3$ V, correspond $e = 0$ V et $A = 0_{10}$ ($A = 00000000_2$). Les transmittances du circuit de calibration et du C.A.N s'écrivent :

$$e = \frac{5}{8} (u_E + 3) \quad \text{et} \quad e = \frac{5}{256} A + \varepsilon_q \Rightarrow \frac{5}{8} (u_E + 3) = \frac{5}{256} A + \varepsilon_q$$

En supposant l'erreur de quantification négligeable, on peut écrire :

$$A = \frac{256}{5} e = \frac{256}{8} (u_E + 3) = 32 (u_E + 3) = 32u_E + 96$$

Le biais introduit est $R = 96_{10}$ ($R = 01100000_2$), et le calcul à effectuer pour obtenir le nombre correspondant à la tension u_E est : $-96 + A$.

- **Binaire décalé.** C'est un cas particulier du binaire biaisé avec un biais de 2^{n-1} .

- Représentation d'un entier relatif en binaire décalé sur n bits :

$$A_{BD} = (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)_{BD} = -\overline{a_{n-1}}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i2^i \quad \text{avec } a_i \in \{0, 1\}$$

- Représentation fractionnaire du signal analogique qA_{BD} équivalent à A_{BD} :

$$\begin{aligned} qA_{BD} &= q \left(-2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i2^i \right) = \text{PPE} \left(\frac{-\overline{a_{n-1}}}{2} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i2^{i-n} \right) \\ &= \text{PPE} \left(-\frac{\overline{a_{n-1}}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n} \right) \end{aligned}$$

• **Complément à deux**

- Représentation d'un entier relatif en complément à deux sur n bits :

$$\begin{aligned} A_{C2} &= (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)_{C2} = -a_{n-1}2^n + A_2 \\ \text{avec } A_2 &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i2^i \quad \text{et } a_i \in \{0, 1\} \\ \Rightarrow A_{C2} &= (a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1a_0)_{C2} = -a_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i2^i \end{aligned}$$

- Représentation fractionnaire du signal analogique qA_{C2} équivalent à A_{C2} :

$$\begin{aligned} qA_{C2} &= q \left(-a_{n-1}2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i2^i \right) = \text{PPE} \left(\frac{-a_{n-1}}{2} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i2^{i-n} \right) \\ &= \text{PPE} \left(-\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \frac{a_{n-3}}{8} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} + \frac{a_0}{2^n} \right) \end{aligned}$$

$$q A_{C2}^-_{\text{Max}} = -q2^{n-1} = -\text{PPE}/2$$

$$q A_{C2}^+_{\text{Max}} = q(2^{n-1} - 1) = \text{PPE}/2 - q$$

Au LSB a_0 correspond le quantum : $q = \text{PPE}/2^n$

Remarque : On passe facilement du binaire décalé au complément à deux, et réciproquement, en complémentant le bit de rang le plus élevé.

- **D.C.B. + signe.** C'est le code D.C.B. (Décimal Codé Binaire) auquel on adjoint un bit de signe pour représenter, selon sa valeur, les entiers positifs ou les entiers négatifs. Le zéro à deux représentations : un zéro positif, et un zéro négatif.

Exemples 30.4.4

Codes pour convertisseurs bipolaires 8 bits (Fig. 30.9)

Fraction de PPE	$qA = \frac{A}{256} \text{ PPE}$	Décimal A_{10}	Binaire décalé A_{BD}	Complément à 2 A_{C2}
$+1/2 \text{ PPE} - q =$	$+0,4961 \text{ PPE}$	+127	1111 1111	0111 1111
$=+3/8 \text{ PPE} =$	$+0,3750 \text{ PPE}$	+96	1110 0000	0110 0000
$+1/4 \text{ PPE} =$	$+0,2500 \text{ PPE}$	+64	1100 0000	0100 0000
$+1/8 \text{ PPE} =$	$+0,1250 \text{ PPE}$	+32	1010 0000	0010 0000
$+q =$	$+0,0039 \text{ PPE}$	+1	1000 0001	0000 0001
$0 =$	$+0,0000 \text{ PPE}$	0	1000 0000	0000 0000
$-q =$	$-0,0039 \text{ PPE}$	-1	0111 1111	1111 1111
$-1/8 \text{ PPE} =$	$-0,1250 \text{ PPE}$	-32	0110 0000	1110 0000
$-1/4 \text{ PPE} =$	$-0,2500 \text{ PPE}$	-64	0100 0000	1100 0000
$-3/8 \text{ PPE} =$	$-0,3750 \text{ PPE}$	-96	0010 0000	1010 0000
$-1/2 \text{ PPE} + q =$	$-0,4961 \text{ PPE}$	-127	0000 0001	1000 0001
$-1/2 \text{ PPE} =$	$-0,5000 \text{ PPE}$	-128	0000 0000	1000 0000

Fig. 30.9 Codes pour convertisseurs bipolaires 8 bits

Remarque : La valeur maximale positive de A correspond à la pleine échelle positive moins un quantum. Et la valeur maximale négative de A correspond à la pleine échelle négative.

30.5 SPÉCIFICATIONS DES C.N.A. ET C.A.N.

Les performances voulues dépendent de leurs domaines d'application (instrumentation scientifique ou médicale, audio et vidéo grand public ou professionnel, télécommunication, etc.).

30.5.1 Caractéristiques statiques

- **Résolution numérique.** La résolution (voir § 30.1) est une caractéristique théorique qui ne renseigne pas sur la précision du convertisseur.
- **Précision**
 - La *précision absolue* (Absolute Accuracy) prend en compte toutes les erreurs (quantification, décalage, gain, linéarité, référence, bruit, etc.) et leurs dérivées dans les pires conditions.
 - La *précision relative* (Relative Accuracy) prend en compte toutes les erreurs, sauf celles de décalage et de gain.

• **Erreur de décalage (Offset).** L'erreur de décalage, exprimée en % de PPE ou en fraction de LSB, est la différence entre la caractéristique de transfert idéale (théorique) et la caractéristique de transfert réelle :

- obtenue pour un C.N.A. à $A = 0$ (Fig. 30.10),
- obtenue pour un C.A.N. quand A passe de 0 à 1 LSB (Fig. 30.11).

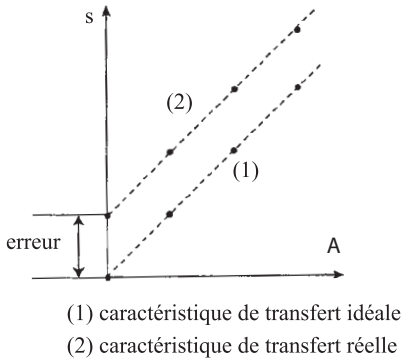


Fig. 30.10 Erreur de décalage d'un C.N.A.

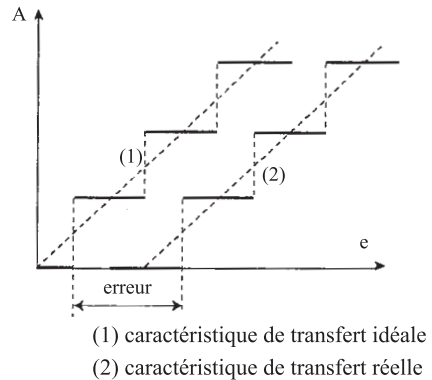


Fig. 30.11 Erreur de décalage d'un C.A.N.

• **Erreur de gain (Gain Error).** L'erreur de gain, ou l'erreur d'échelle (Scale Error), exprimée en % de PPE ou en fraction de LSB, est la différence entre la caractéristique de transfert idéale et la caractéristique de transfert réelle après correction de l'erreur de décalage :

- obtenue pour un C.N.A. à $A = A_{\text{Max}}$ (Fig. 30.12),
- obtenue pour un C.A.N. quand A passe de $A_{\text{Max}} - 1$ à A_{Max} (Fig. 30.13).

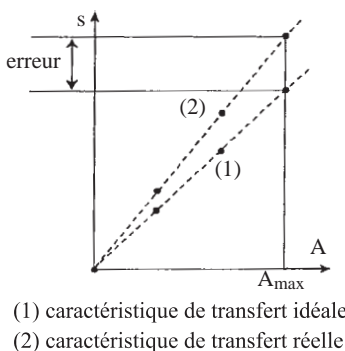


Fig. 30.12 Erreur de gain d'un C.N.A.

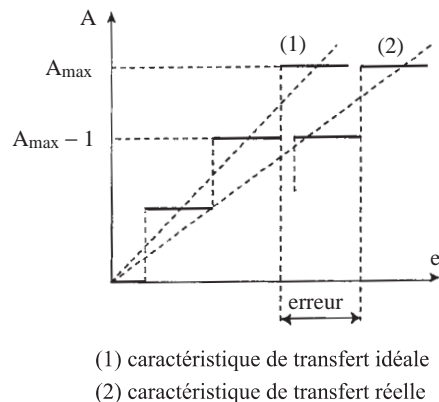


Fig. 30.13 Erreur de gain d'un C.A.N.

• **Erreurs de linéarité.** L'erreur de linéarité (*Linearity Error*), exprimée en % de PPE ou en fraction de LSB, est l'écart maximal entre la courbe réelle et la droite idéale de la caractéristique de transfert après annulation des erreurs de décalage et de gain. (Fig. 30.14 et Fig. 30.15)

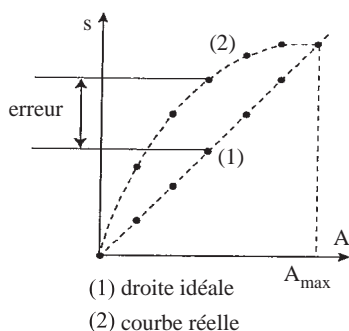


Fig. 30.14 Erreur de linéarité d'un C.N.A.

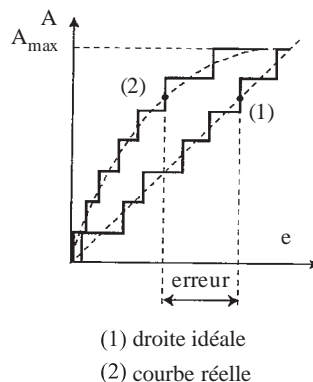
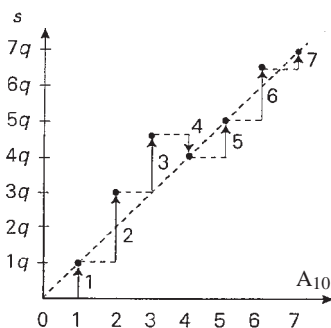


Fig. 30.15 Erreur de linéarité d'un C.A.N.

Le saut entre deux codes consécutifs est de 1 LSB. Le saut correspondant entre les deux valeurs analogiques successives est donc idéalement d'un quantum. L'écart entre le saut réel et le quantum est appelé l'*erreur de linéarité différentielle* (*Differential Linearity Error*). Le fabricant donne l'erreur de linéarité différentielle maximale, exprimée en % de PPE ou en fraction de LSB (Fig. 30.16).



Saut	Hauteur du saut en quanta	Erreur linéaire différentielle en LSB
1	$1q$	0
2	$2q$	1 LSB
3	$1,5q$	0,5 LSB
4	$-0,5q$	-1,5 LSB
5	$1q$	0
6	$1,5q$	0,5 LSB
7	$0,5q$	-0,5 LSB

Fig. 30.16 Erreur de linéarité différentielle d'un C.N.A.

30.5.2 Caractéristiques dynamiques

• **Temps de conversion (Conversion Time), temps d'établissement (Settling Time).**

Le *temps de conversion* est le temps nécessaire pour que le convertisseur effectue une conversion avec une précision donnée. Les fabricants indiquent aussi la *fréquence de conversion* (*Conversion Rate*) qui est le nombre maximum de conversions possibles par seconde. Pour les C.N.A., le temps de conversion est plus souvent appelé *temps d'établissement*.

• **Incertitude au point d'ouverture (Aperture Jitter Uncertainty).** L'incertitude au point d'ouverture est l'incertitude sur l'instant d'échantillonnage qui dépend de la stabilité de l'horloge interne au convertisseur (phénomène considéré comme aléatoire). L'incertitude consécutive sur la mesure du signal d'entrée dépend de la pente de celui-ci à cet instant là.

• **Temps d'ouverture (Aperture Time) d'un C.A.N.** Le temps d'ouverture dépend de la résolution souhaitée. Ce temps étant généralement court, il faut ajouter très souvent un échantillonneur bloqueur devant le C.A.N. Le temps d'ouverture Δt est donné par la relation suivante où Δe est la variation du signal d'entrée et de/dt la pente du signal d'entrée.

$$\Delta t = \frac{\Delta e}{de/dt}$$

- *Temps d'ouverture maximal pour une précision (théorique) meilleure que 1 LSB.* Il faut que la variation du signal d'entrée Δe pendant le temps d'ouverture Δt soit inférieure à 1 quantum, dans le pire cas où la pente du signal d'entrée est maximale. D'où :

$$\Delta t < \Delta t_{\text{Max (1 LSB)}} = \frac{q}{(de/dt)_{\text{Max}}} = \frac{1}{(de/dt)_{\text{Max}}} \frac{\text{PPE}}{N_{\text{Val}}}$$

Pour un code binaire sur n bits, on obtient :

$$\Delta t < \Delta t_{\text{Max (1 LSB)}} = \frac{1}{(de/dt)_{\text{Max}}} \frac{\text{PPE}}{2^n}$$

- *Temps d'ouverture maximal pour une précision (théorique) meilleure que 1 LSB et pour un signal sinusoïdal.* Le temps d'ouverture maximal est généralement donné pour un signal d'entrée sinusoïdal pleine échelle. Cela permet d'apprécier le temps d'ouverture nécessaire en fonction des composantes fréquentielles du signal d'entrée.

L'expression du signal d'entrée pleine échelle est :

$$e = \frac{\text{PPE}}{2} \sin(\omega t)$$

D'où :

$$\Delta t < \Delta t_{\text{Max (1 LSB)}} = \frac{1}{\pi f N_{\text{Val}}}$$

où f est la fréquence du signal d'entrée.

Pour un code binaire sur n bits, le temps d'ouverture maximal en fonction de la fréquence (Fig. 30.17) est donné par :

$$\Delta t < \Delta t_{\text{Max (1 LSB)}} = \frac{1}{\pi f 2^n}$$

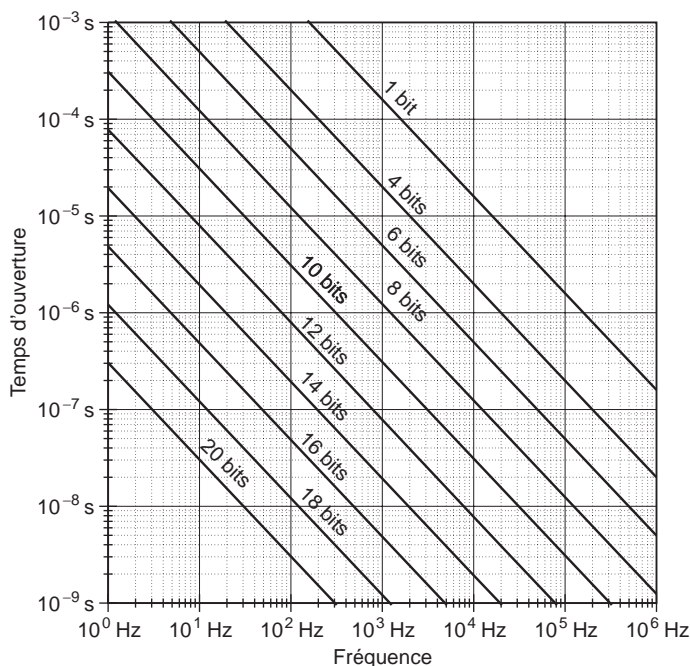


Fig. 30.17 Temps d'ouverture maximal en fonction de f (code binaire)

Méthode

La figure ci-dessus (Fig. 30.17) donne le temps d'ouverture maximal en fonction de la fréquence pour un code binaire. Par exemple, pour un signal sinusoïdal de fréquence 1 kHz, le temps d'ouverture d'un C.A.N. 10 bits devra être inférieur à 310 ns pour obtenir une erreur inférieure à 1 LSB. Pour obtenir une erreur inférieure à 2 LSB, le temps d'ouverture devra être inférieur à 620 ns (2 fois plus) ; et pour obtenir une erreur inférieure à $\frac{1}{2}$ LSB, le temps d'ouverture devra être inférieur à 155 ns (2 fois moins). C'est pourquoi, la plupart des C.A.N. intègrent un échantillonneur bloqueur en entrée.

- **Bruit de quantification (Quantization Noise).** L'erreur de quantification ε_q dégrade le signal utile en générant un bruit dit de quantification. La valeur efficace $\varepsilon_{q\text{ Eff}}$ se comporte comme une source de bruit.

– Puissance du bruit de quantification :

$$P_B = \frac{q^2}{12}$$

– Valeur efficace du bruit de quantification :

$$\varepsilon_{q\text{ Eff}} = \sqrt{P_B} = \frac{q}{\sqrt{12}}$$

- *Rapport signal à bruit S/B (Signal to Noise Ratio S/N)*. Le rapport signal à bruit maximal, pour un signal d'entrée sinusoïdal d'amplitude maximale ($PPE/2$), est :

$$(S/B)_{\text{Max}} = \frac{P_{\text{Signal}}}{P_B} = 1,5 \frac{PPE^2}{q^2} = 1,5 N_{\text{Val}}^2$$

Soit en décibels :

$$(S/B)_{\text{Max (dB)}} = 10 \log (S/B)_{\text{Max}} = 20 \log N_{\text{Val}} + 1,76$$

Pour un code binaire sur n bits, on obtient :

$$(S/B)_{\text{Max (dB)}} \approx 6,02 n + 1,76$$

En ajoutant 1 bit, on améliore le rapport signal à bruit de 6 dB.

● ***Bande passante à pleine amplitude (FPBW : Full-Power Bandwidth)***. Un convertisseur se comporte comme un filtre passe-bas. On peut alors déterminer la fréquence du signal d'entrée pour laquelle l'amplitude de la composante fondamentale reconstruite après codage est atténuée de 3 dB. L'amplitude du signal d'entrée est égale à $PPE/2$.

PARTIE 4

Électronique de puissance

Chapitre 31

Redressement non commandé

Le redressement permet d'obtenir un courant unidirectionnel à partir d'une source alternative, principalement monophasée ou triphasée. Les redresseurs sont du type simple alternance ou double alternance. En général, le lissage du courant par inductance est utilisé pour les « fortes » puissances, et le lissage de la tension par condensateur pour les « faibles » puissances. Les montages redresseurs sont parfois classés en trois types : à commutation parallèle repérés par la lettre P, à commutation parallèle double repérés par les lettres PD, à commutation série repérés par la lettre S. L'indication du type est suivie du nombre de phases.

Exemple 31.0.1

Le redresseur à point milieu en monophasé est repéré P2, le redresseur triphasé double voies est repéré PD3, etc.

- Les valeurs moyenne et efficace, le taux d'ondulation et le facteur de forme sont définis au Chapitre 7 : Régime variable – Valeurs moyenne et efficace.
- Seul le régime permanent (périodique) est décrit dans ce chapitre.
- Pour simplifier, on considère les composants parfaits, et en particulier les diodes (voir Chapitre 16 : Diodes).

31.1 REDRESSEMENT MONOPHASÉ SIMPLE ALTERNANCE

31.1.1 Charge résistive (Fig. 31.1 et Fig. 31.2)

La diode est bloquée lorsque i_S est négatif, et conductrice lorsque i_S est positif : le courant i_S est redressé. Pour une tension d'entrée $u_E = U_{E\text{Max}} \sin(\omega t)$, la tension aux bornes de R est $u_S = U_{S\text{Max}} \sin(\omega t)$ pour $0 + nT \leq t \leq T/2 + nT$, et $u_S = 0$ pour $T/2 + nT \leq t \leq T + nT$, avec $u_S = Ri_S$, $U_{S\text{Max}} = U_{E\text{Max}}$ (diode parfaite) et $\omega T = 2\pi$. La période de u_S est égale à la période de u_E .

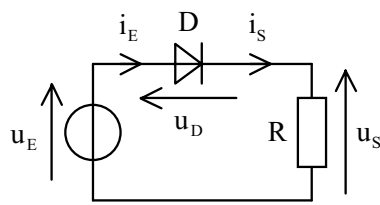


Fig. 31.1 Redressement monophasé simple alternance

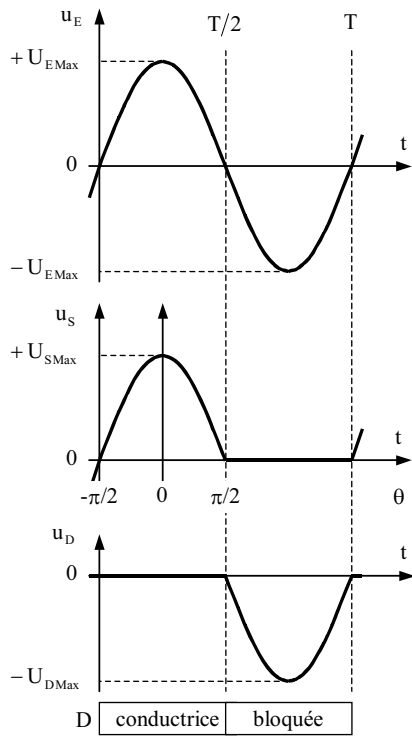


Fig. 31.2 Simple alternance - Charge résistive

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension u_S . En déduire la valeur du facteur de forme.

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta = \frac{U_{S \text{ Max}}}{2\pi} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\text{D'où : } U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi}$$

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_{S \text{ Max}}^2 \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta$$

$$\Rightarrow U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{4\pi} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$\text{D'où : } U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{2}$$

$$\text{Facteur de forme : } F = \frac{U_{S \text{ Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \Rightarrow \beta = \sqrt{F^2 - 1} \approx 121 \%$$

31.1.2 Lissage de la tension de sortie (Fig. 31.3 et Fig. 31.4)

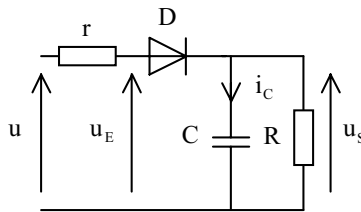


Fig. 31.3 Simple alternance - Lissage de la tension u_S

Compte tenu de la forte tolérance sur les composants, on effectue un calcul approché du condensateur de lissage, valable pour une ondulation crête à crête $\Delta U_S = (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}})$ inférieure à 20 % de $U_{S \text{ Max}}$. L'influence de la résistance « r » est ici négligée. Lorsque la diode est bloquée la tension u_S décroît selon la loi : $u_S = U_{S \text{ Max}} e^{-t/\tau}$ où $\tau = RC$ (voir Fig. 31.4). En effectuant le développement de l'exponentielle au 1^{er} ordre, on obtient : $u_S = U_{S \text{ Max}} (1 - t/\tau)$. En considérant de plus que le temps de décharge Δt est approximativement égal à T , on a :

$$\frac{T}{\tau} \approx \frac{U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}}{U_{S \text{ Max}}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S \text{ Max}}} \Rightarrow C \approx \frac{U_{S \text{ Max}}}{\Delta U_S R f}$$

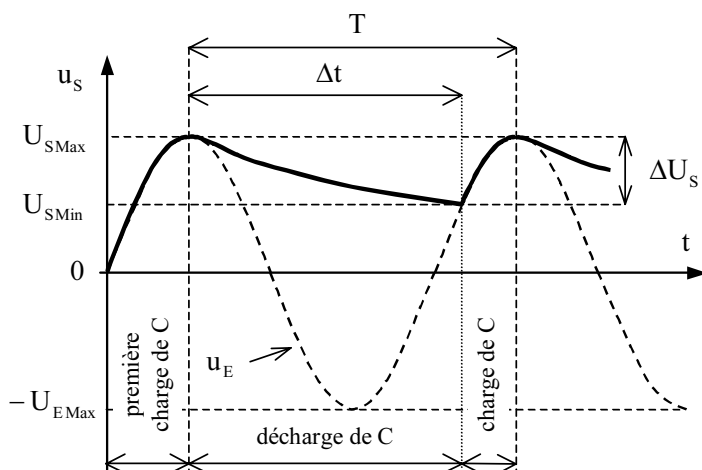


Fig. 31.4 Simple alternance - Tension u_s lissée (la résistance r est négligée)

où C est la capacité de lissage en farads (F), R la résistance de charge en ohms (Ω) et $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz).

Cette approximation revient à considérer que la tension u_s est une succession de rampes décroissantes (Fig. 31.5).

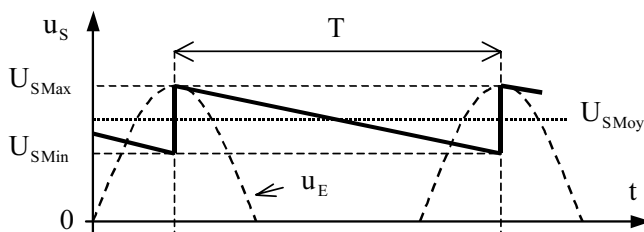


Fig. 31.5 Simple alternance - Allure simplifiée de u_s

Remarques :

- Le courant peut être très important à la première charge du condensateur. En conséquence, la diode ainsi que le condensateur doivent supporter cette pointe de courant, ou protégés par la mise en série d'une résistance. La résistance « r » représente la somme des résistances séries du circuit (source, diode, résistance série ajoutée, etc.).
- La diode conduit uniquement lorsque la tension u_E est supérieure à la tension u_s . En conséquence, le courant dans le transformateur n'est pas sinusoïdal, ce qui complique son choix.

Question : Dans l'hypothèse simplificatrice précédente (voir Fig. 31.5), exprimer les valeurs moyennes et efficace de la tension u_S . En déduire le taux d'ondulation.

Réponse :

$$\left. \begin{aligned} U_{S \text{ Moy}} &= (U_{S \text{ Max}} + U_{S \text{ Min}}) / 2 \\ U_{S \text{ Min}} &= U_{S \text{ Max}} (1 - T/\tau) \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Max}} \left(1 - \frac{1}{2RCf} \right)$$

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{T} \int_0^T (1 - t/\tau)^2 dt \Rightarrow U_{S \text{ Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \left(1 - \frac{T}{\tau} + \frac{T^2}{3\tau^2} \right)$$

Or $U_{S \text{ Eff}}^2 = U_{S \text{ Moy}}^2 + U_{S \text{ Alt Eff}}^2$ (voir Chapitre 7 : Régime variable – Valeurs moyenne et efficace) $\Rightarrow U_{S \text{ Alt Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \frac{T^2}{12\tau^2}$

$$\text{D'où le taux d'ondulation : } \beta = \frac{U_{S \text{ Alt Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(2RCf - 1)}$$

31.1.3 Lissage du courant de sortie (Fig. 31.6 et Fig. 31.7)

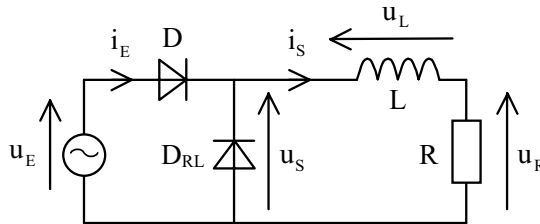


Fig. 31.6 Simple alternance - Lissage du courant i_S

Pour que le courant i_S puisse être ininterrompu, il faut placer une diode de roue libre D_{RL} en parallèle sur la charge (voir Fig. 31.6). Celle-ci permet le prolongement du courant i_S (absence de discontinuité de courant dans une inductance) lorsque la tension u_E devient négative et, en conséquence, permet le blocage de la diode de redressement D . Pendant la conduction de D_{RL} , l'inductance fournit à la résistance de l'énergie précédemment emmagasinée sous forme électromagnétique.

Pour $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{2}$, on montre que : $\beta = \frac{I_{S \text{ Alt Eff}}}{|I_{S \text{ Moy}}|} \approx \frac{T}{5,5 \tau}$ D'où : $L \approx \frac{R}{5,5 \beta f}$

où L est l'inductance de lissage en henrys (H), R la résistance de charge en ohms (Ω), $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz) et β le taux d'ondulation du courant i_S .

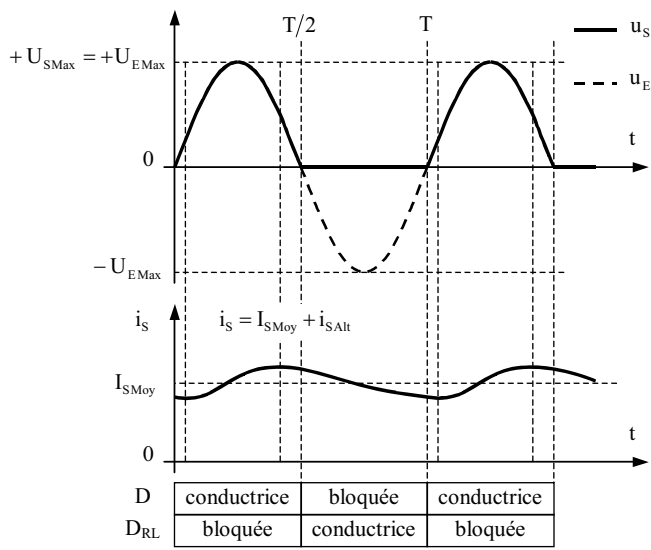


Fig. 31.7 Simple alternance - Courant i_S lissé - Conduction ininterrompue

Remarque : La formule donnant L est valable pour $\beta < 40 \%$ environ. Pour une valeur supérieure de β , cette formule donne une valeur de L surestimée.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S . En déduire la valeur moyenne du courant i_S .

Réponse : L'allure de u_S est identique à celle obtenue pour le redressement monophasé simple alternance sur charge résistive (voir § 31.1.1). D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi}$$

Loi des mailles : $u_S = u_L + u_R \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = U_{L \text{ Moy}} + U_{R \text{ Moy}}$

D'où : $I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}}}{R} = \frac{U_{R \text{ Moy}}}{R} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi R}$ car $U_{L \text{ Moy}} = 0$

31.2 REDRESSEMENT MONOPHASÉ DOUBLE ALTERNANCE

31.2.1 Charge résistive

a) Montage à point milieu (Fig. 31.8 et Fig. 31.9)

Le point milieu du secondaire du transformateur permet de disposer de deux tensions en opposition de phase. Pour une tension d'entrée $u_{E1} = U_{E \text{ Max}} \sin(\omega t) = -u_{E2}$, la tension aux bornes de R est $u_S = U_{S \text{ Max}} |\sin(\omega t)|$ avec $u_S = Ri_S$, $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (diodes parfaites) et $\omega T = 2\pi$. La période de u_S est égale à la moitié de la période de u_E .

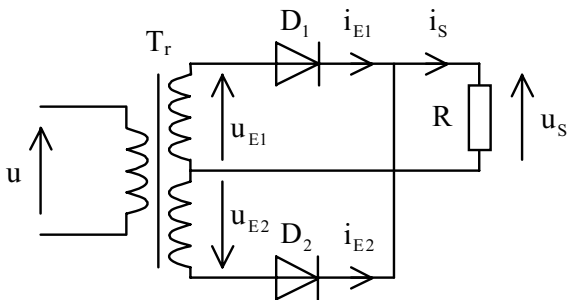


Fig. 31.8 Redressement monophasé double alternance à point milieu

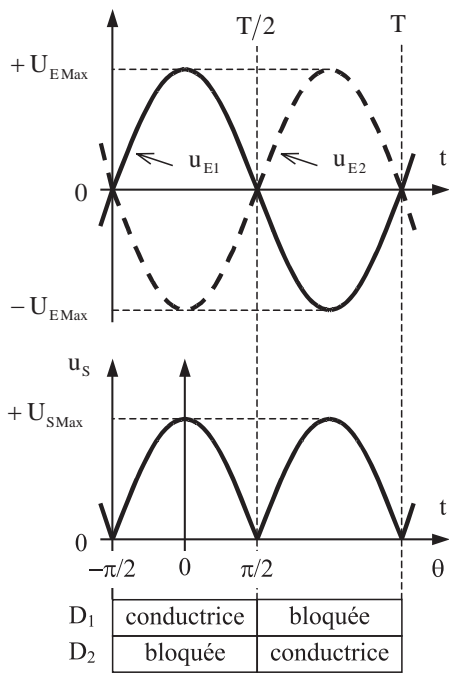


Fig. 31.9 Double alternance à point milieu - Charge résistive

b) Montage en pont de « Graëtz » (Fig. 31.10 et Fig. 31.11)

Les quatre diodes doivent avoir les mêmes caractéristiques. Pour une tension d'entrée $u_E = U_{E\text{Max}} \sin(\omega t)$, la tension aux bornes de R est $u_S = U_{S\text{Max}} |\sin(\omega t)|$ avec $u_S = Ri_S$, $U_{S\text{Max}} = U_{E\text{Max}}$ (diodes parfaites) et $\omega T = 2\pi$. La période de u_S est égale à la moitié de la période de u_E .

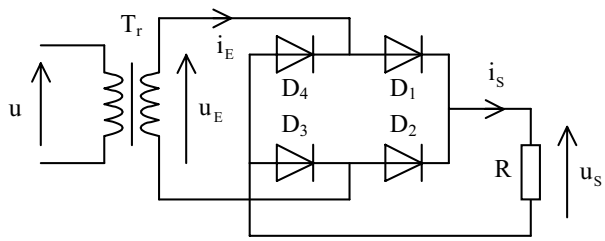


Fig. 31.10 Redressement monophasé double alternance en pont

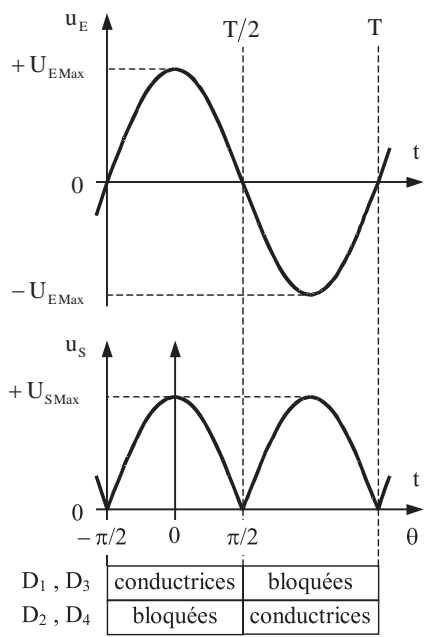


Fig. 31.11 Double alternance en pont - Charge résistive

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension u_S . En déduire la valeur du facteur de forme.

Réponse : Similairement à la réponse du § 31.1.1 (redressement monophasé simple alternance sur charge résistive), on obtient :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{2U_{S \text{ Max}}}{\pi}$$

$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}}$$

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \Rightarrow \beta \approx 48,3 \%$$

31.2.2 Lissage de la tension de sortie (Fig. 31.12)

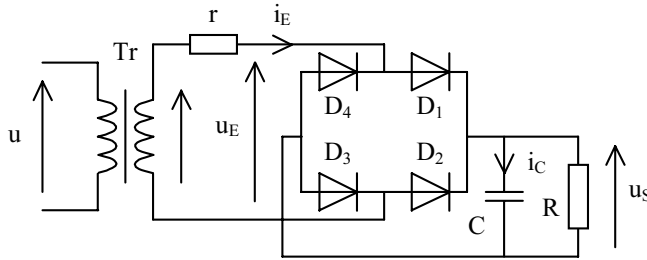


Fig. 31.12 Double alternance - Lissage de la tension u_S

Similairement au § 31.1.2 (lissage de la tension en redressement monophasé simple alternance), et en considérant que le temps de décharge du condensateur est approximativement égal à $T/2$, on a :

$$\frac{T}{2\tau} \approx \frac{U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}}{U_{S \text{ Max}}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S \text{ Max}}} \Rightarrow C \approx \frac{U_{S \text{ Max}}}{2 \Delta U_S R f}$$

où C est la capacité de lissage en farads (F), R la résistance de charge en ohms (Ω) et $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz).

Cette approximation revient à considérer que la tension u_S est une succession de rampes décroissantes (Fig. 31.13).

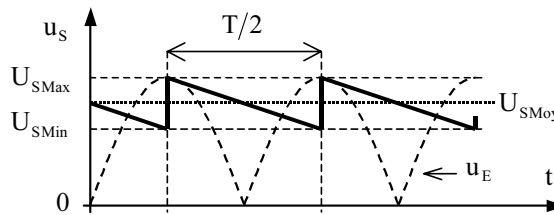


Fig. 31.13 Double alternance - Allure simplifiée de u_S

Question : Dans l'hypothèse simplificatrice précédente (voir Fig. 31.13), exprimer les valeurs moyennes et efficace de la tension u_S . En déduire le taux d'ondulation.

Réponse : Similairement à la réponse du § 31.1.2 (lissage de la tension en redressement monophasé simple alternance), on obtient :

$$U_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Max}} \left(1 - \frac{1}{4RCf} \right) \quad U_{S \text{ Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \left(1 - \frac{T}{2\tau} + \frac{T^2}{12\tau^2} \right)$$

$$U_{S \text{ Alt Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \frac{T^2}{48\tau^2} \quad \beta = \frac{U_{S \text{ Alt Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{1}{\sqrt{3} (4RCf - 1)}$$

31.2.3 Lissage du courant de sortie (Fig. 31.14 et Fig. 31.15)

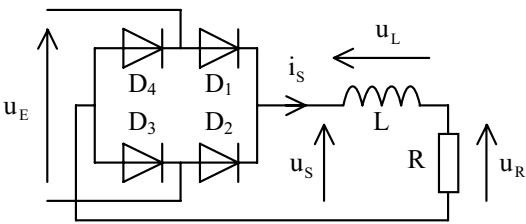


Fig. 31.14 Double alternance - Lissage du courant i_s

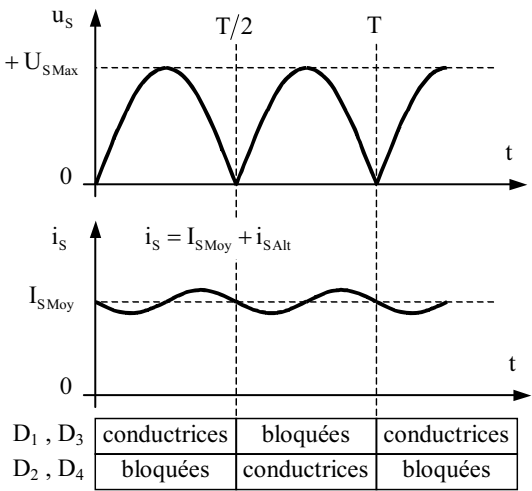


Fig. 31.15 Double alternance - Courant i_s lissé

Pour $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{2}$, on montre que : $\beta = \frac{I_{S \text{ Alt Eff}}}{|I_{S \text{ Moy}}|} \approx \frac{T}{26 \tau}$ D'où : $L \approx \frac{R}{26 \beta f}$

où L est l'inductance de lissage en henrys (H), R la résistance de charge en ohms (Ω), $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz) et β le taux d'ondulation du courant i_s .

Remarques :

- La formule donnant L est valable pour $\beta < 8 \%$ environ. Pour une valeur supérieure de β , cette formule donne une valeur de L surestimée.
- La composante alternative i_{sAlt} de i_s n'est pas rigoureusement sinusoïdale. Son fondamental est déphasé d'un angle φ tel que : $\text{tg} \varphi = 2L\omega/R$.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S . En déduire la valeur moyenne du courant i_S .

Réponse : L'allure de u_S est identique à celle obtenue pour le redressement monophasé double alternance sur charge résistive (voir § 31.2.1b). D'où :

$$U_{S\ Moy} = \frac{2U_{S\ Max}}{\pi}$$

Loi des mailles : $u_S = u_L + u_R \Rightarrow U_{S\ Moy} = U_{L\ Moy} + U_{R\ Moy}$

D'où :
$$I_{S\ Moy} = \frac{U_{S\ Moy}}{R} = \frac{U_{R\ Moy}}{R} = \frac{2U_{S\ Max}}{\pi R} \text{ car } U_{L\ Moy} = 0$$

31.3 REDRESSEMENT TRIPHASÉ SIMPLE ALTERNANCE

31.3.1 Charge résistive (Fig. 31.16 et Fig. 31.17)

Le montage redresse les courants entre les phases et le neutre. Pour les tensions d'entrées simples v_{1N} , v_{2N} et v_{3N} (voir Chapitre 6 : Régime sinusoïdal permanent triphasé), la tension v_S aux bornes de R est donnée par :

Angle de conduction : θ modulo 2π (rad)	Diode conductrice	Tension v_S
$-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$	D_1	$v_S = v_{1N} = V_{Max} \cos \theta$
$\pi/3 \leq \theta \leq \pi$	D_2	$v_S = v_{2N} = V_{Max} \cos(\theta - 2\pi/3)$
$\pi \leq \theta \leq 5\pi/3$	D_3	$v_S = v_{3N} = V_{Max} \cos(\theta - 4\pi/3)$

Avec $v_S = Ri_S$, $V_{S\ Max} = V_{Max}$ (diodes parfaites), $\theta = \omega t - \pi/2$, et $\omega T = 2\pi$. La période de v_S est égale au tiers de la période de v_{1N} .

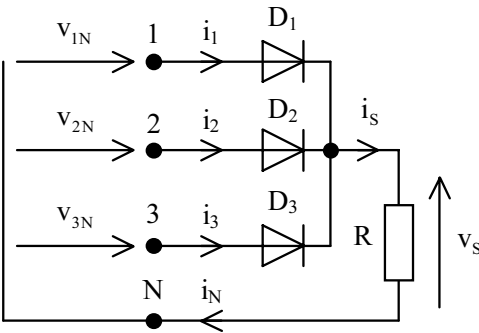


Fig. 31.16 Redressement triphasé simple alternance

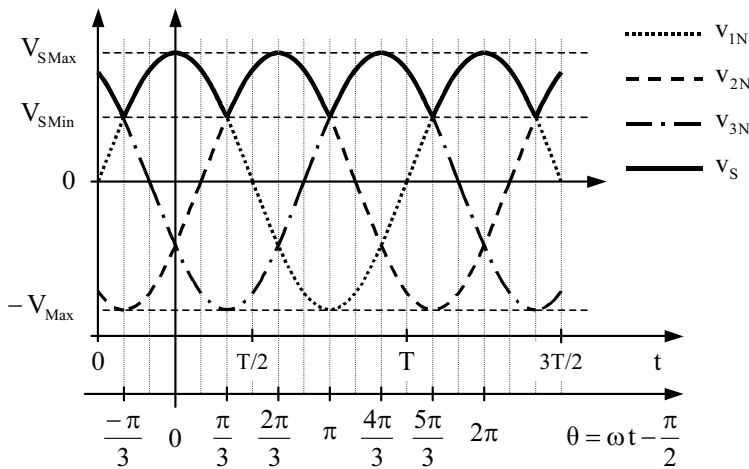


Fig. 31.17 Triphasé simple alternance - Charge résistive

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension v_s . En déduire la valeur du facteur de forme.

Réponse :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} V_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta \quad \text{D'où :} \quad V_{S \text{ Moy}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} V_{S \text{ Max}}$$

$$V_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} V_{S \text{ Max}}^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{D'où :} \quad V_{S \text{ Eff}} = V_{S \text{ Max}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$$

Soient : $V_{S \text{ Moy}} \approx 0,83 V_{S \text{ Max}}$ et $V_{S \text{ Eff}} \approx 0,84 V_{S \text{ Max}}$

$$F = \frac{V_{S \text{ Eff}}}{|V_{S \text{ Moy}}|} = \sqrt{\frac{2\pi^2}{27} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}} \approx 1,017 \Rightarrow \beta = \sqrt{F^2 - 1} \approx 18,3 \%$$

31.3.2 Lissage de la tension de sortie

Le lissage de la tension v_s s'effectue en plaçant un condensateur en parallèle sur la charge (résistance R , Fig. 31.16). Similairement au § 31.1.2 (lissage de la tension en redressement monophasé simple alternance), et en considérant que le temps de décharge du condensateur est approximativement égal à $T/3$, on a :

$$\frac{T}{3\tau} \approx \frac{V_{S \text{ Max}} - V_{S \text{ Min}}}{V_{S \text{ Max}}} = \frac{\Delta V_S}{V_{S \text{ Max}}} \Rightarrow C \approx \frac{V_{S \text{ Max}}}{3\Delta V_S R f}$$

où C est la capacité de lissage en farads (F), R la résistance de charge en ohms (Ω) et $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz).

$$V_{S \text{ Moy}} = V_{S \text{ Max}} \left(1 - \frac{1}{6RCf} \right) \quad V_{S \text{ Eff}}^2 = V_{S \text{ Max}}^2 \left(1 - \frac{T}{3\tau} + \frac{T^2}{27\tau^2} \right)$$

$$V_{S \text{ Alt Eff}}^2 = V_{S \text{ Max}}^2 \frac{T^2}{108\tau^2} \quad \beta = \frac{V_{S \text{ Alt Eff}}}{|V_{S \text{ Moy}}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(6RCf - 1)}$$

31.3.3 Lissage du courant de sortie

Le lissage du courant i_S s'effectue en plaçant une bobine en série avec la charge (résistance R, Fig. 31.16).

Pour $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{5}$, on montre que : $\beta = \frac{I_{S \text{ Alt Eff}}}{|I_{S \text{ Moy}}|} \approx \frac{T}{105 \tau}$ D'où : $L \approx \frac{R}{105 \beta f}$

où L est l'inductance de lissage en henrys (H), R la résistance de charge en ohms (Ω), $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz) et β le taux d'ondulation du courant i_S .

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{3\sqrt{3} V_{S \text{ Max}}}{2\pi R}$$

Remarque : La formule donnant L est valable pour $\beta < 5 \%$ environ. Pour une valeur supérieure de β , cette formule donne une valeur de L surestimée.

31.4 REDRESSEMENT TRIPHASÉ DOUBLE ALTERNANCE EN PONT

31.4.1 Charge résistive (Fig. 31.18 et Fig. 31.19)

Le montage redresse les courants entre les phases. Pour les tensions d'entrées composées u_{12} , u_{23} et u_{31} (voir Chapitre 6 : Régime sinusoïdal permanent triphasé), la tension u_S aux bornes de R est donnée par :

Angle de conduction : θ modulo 2π (rad)	Diodes conductrices	Tension u_S
$-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$	D _{1a} et D _{2b}	$u_S = u_{12} = U_{\text{Max}} \cos \theta$
$\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$	D _{1a} et D _{3b}	$u_S = u_{12} + u_{23} = -u_{31}$
$\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/6$	D _{2a} et D _{3b}	$u_S = u_{23} = U_{\text{Max}} \cos (\theta - 2\pi/3)$
$5\pi/6 \leq \theta \leq 7\pi/6$	D _{2a} et D _{1b}	$u_S = u_{23} + u_{31} = -u_{12}$
$7\pi/6 \leq \theta \leq 3\pi/2$	D _{3a} et D _{1b}	$u_S = u_{31} = U_{\text{Max}} \cos (\theta - 4\pi/3)$
$3\pi/2 \leq \theta \leq 11\pi/6$	D _{3a} et D _{2b}	$u_S = u_{31} + u_{12} = -u_{23}$

Avec $u_s = Ri_s$, $U_{s\text{ Max}} = U_{\text{Max}}$ (diodes parfaites), $\theta = \omega t - \pi/3$, $\omega T = 2\pi$, et $U_{\text{Max}} = \sqrt{3} V_{\text{Max}}$ où U_{Max} est l'amplitude d'une tension composée et V_{Max} celle d'une tension simple. La période de u_s est égale au sixième de la période de u_{12} .

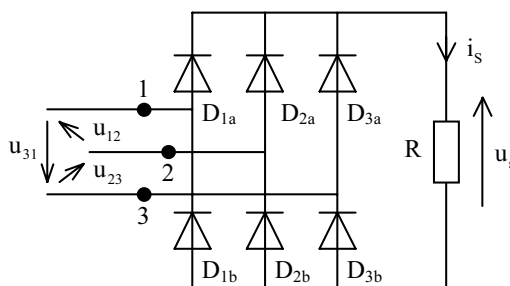


Fig. 31.18 Redressement triphasé double alternance en pont

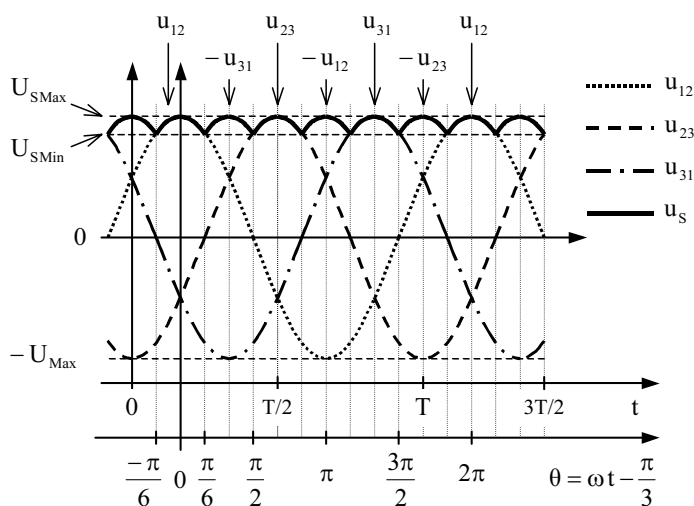


Fig. 31.19 Triphasé double alternance en pont - Charge résistive

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension u_s . En déduire la valeur du facteur de forme.

Réponse :

$$U_{s\text{ Moy}} = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} U_{s\text{ Max}} \cos \theta \, d\theta \quad \text{D'où :} \quad U_{s\text{ Moy}} = \frac{3U_{s\text{ Max}}}{\pi}$$

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} U_{S \text{ Max}}^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad \text{D'où : } U_{S \text{ Eff}} = U_{S \text{ Max}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}}$$

Soient : $U_{S \text{ Moy}} \approx 0,95 U_{S \text{ Max}}$ et $U_{S \text{ Eff}} \approx 0,95 U_{S \text{ Max}}$

$$F = \frac{U_{S \text{ Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \sqrt{\frac{\pi^2}{18} + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}} \approx 1,0009 \Rightarrow \beta = \sqrt{F^2 - 1} \approx 4,2 \%$$

31.4.2 Lissage de la tension de sortie

Le lissage de la tension u_s s'effectue en plaçant un condensateur en parallèle sur la charge (résistance R , Fig. 31.18). Similairement au § 31.1.2 (lissage de la tension en redressement monophasé simple alternance), et en considérant que le temps de décharge du condensateur est approximativement égal à $T/6$, on a :

$$\frac{T}{6\tau} \approx \frac{U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}}{U_{S \text{ Max}}} = \frac{\Delta U_S}{U_{S \text{ Max}}} \Rightarrow C \approx \frac{U_{S \text{ Max}}}{6\Delta U_S R f}$$

où C est la capacité de lissage en farads (F), R la résistance de charge en ohms (Ω) et $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz).

$$U_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Max}} \left(1 - \frac{1}{12RCf}\right) \quad U_{S \text{ Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \left(1 - \frac{T}{6\tau} + \frac{T^2}{108\tau^2}\right)$$

$$U_{S \text{ Alt Eff}}^2 = U_{S \text{ Max}}^2 \frac{T^2}{432\tau^2} \quad \beta = \frac{U_{S \text{ Alt Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{1}{\sqrt{3}(12RCf - 1)}$$

31.4.3 Lissage du courant de sortie

Le lissage du courant i_s s'effectue en plaçant une bobine en série avec la charge (résistance R , Fig. 31.18).

Pour $\tau = \frac{L}{R} > \frac{T}{10}$, on montre que : $\beta = \frac{I_{S \text{ Alt Eff}}}{|I_{S \text{ Moy}}|} \approx \frac{T}{925 \tau}$ D'où : $L \approx \frac{R}{925 \beta f}$

où L est l'inductance de lissage en henrys (H), R la résistance de charge en ohms (Ω), $f = 1/T$ la fréquence du signal d'entrée en hertz (Hz) et β le taux d'ondulation du courant i_s .

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{3U_{S \text{ Max}}}{\pi R}$$

Remarque : La formule donnant L est valable pour $\beta < 1 \%$ environ. Pour une valeur supérieure de β , cette formule donne une valeur de L surestimée.

31.5 PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DES MONTAGES (FIG. 31.20)

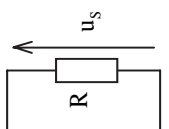
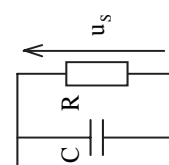
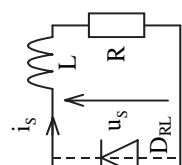
Charge ↓	Type de redressement →	Monophasé simple alternance		Monophasé double alternance		Triphasé simple alternance	Triphasé double alternance en pont
		Point milieu	Pont	Point milieu	Pont		
	Nombre de diodes →	2 diodes		4 diodes		3 diodes	6 diodes
	$f_{\text{sortie}}/f_{\text{entre}} \rightarrow$	1		2		3	6
	U_{SMax} (diodes parfaites)	$= U_{\text{EMax}}$		$= U_{\text{EMax}}$		$V_{\text{SMax}} = V_{\text{Max}}$ (tension simple)	$U_{\text{SMax}} = U_{\text{Max}}$ (tension composée)
	U_{SMoy}	$= U_{\text{SMax}}/\pi$		$= 2U_{\text{SMax}}/\pi$		$V_{\text{SMoy}} \approx 0,83 V_{\text{SMax}}$	$U_{\text{SMoy}} \approx 0,95 U_{\text{SMax}}$
	U_{SEff}	$= U_{\text{SMax}}/2$		$= U_{\text{SMax}}/\sqrt{2}$		$V_{\text{SEff}} \approx 0,84 V_{\text{SMax}}$	$U_{\text{SEff}} \approx 0,95 U_{\text{SMax}}$
	Inverse/diode	$= U_{\text{EMax}}$		$= U_{\text{EMax}}$		$= \sqrt{3} V_{\text{Max}}$	$= U_{\text{Max}}$
	$I_{\text{Moy}}/\text{diode}$	$= U_{\text{SMoy}}/R$		$= U_{\text{SMoy}}/2R$		$= V_{\text{SMoy}}/3R$	$= U_{\text{SMoy}}/3R$
	F (facteur de forme)	$= \pi/2 \approx 1,57$		$= \pi/2\sqrt{2} \approx 1,11$		$\approx 1,017$	$\approx 1,0009$
	β (taux d'ondulation)	$\approx 121 \%$		$\approx 48 \%$		$\approx 18 \%$	$\approx 4 \%$
	U_{SMoy}	$\approx U_{\text{SMax}} \left(1 - \frac{1}{2RCf}\right)$		$\approx U_{\text{SMax}} \left(1 - \frac{1}{4RCf}\right)$		$V_{\text{SMoy}} \approx V_{\text{SMax}} \left(1 - \frac{1}{6RCf}\right)$	$\approx U_{\text{SMax}} \left(1 - \frac{1}{12RCf}\right)$
	Inverse/diode	$= 2U_{\text{EMax}}$		$= 2U_{\text{EMax}}$		$= 2V_{\text{Max}}$	$= 2U_{\text{Max}}$
	$I_{\text{Moy}}/\text{diode}$	$= U_{\text{SMoy}}/R$		$= U_{\text{SMoy}}/2R$		$= V_{\text{SMoy}}/3R$	$= U_{\text{SMoy}}/3R$
	β (taux d'ondulation)	$\approx \frac{1}{\sqrt{3} (2RCf - 1)}$		$\approx \frac{1}{\sqrt{3} (4RCf - 1)}$		$\approx \frac{1}{\sqrt{3} (6RCf - 1)}$	$\approx \frac{1}{\sqrt{3} (12RCf - 1)}$
	I_{SMoy}	$= U_{\text{SMax}}/\pi R$		$= 2U_{\text{SMax}}/\pi R$		$\approx 0,83 V_{\text{SMax}}/R$	$\approx 0,95 U_{\text{SMax}}/R$
	Inverse/diode	$= U_{\text{EMax}}$		$= U_{\text{EMax}}$		$= \sqrt{3} V_{\text{Max}}$	$= U_{\text{Max}}$
	$I_{\text{Moy}}/\text{diode}$	$< I_{\text{SMoy}}$		$= I_{\text{SMoy}}/2$		$= I_{\text{SMoy}}/3$	$= I_{\text{SMoy}}/3$
	β (taux d'ondulation)	$\approx R/(5,5Lf)$ pour $\beta < 40 \%$ environ		$\approx R/(26Lf)$ pour $\beta < 8 \%$ environ		$\approx R/(105Lf)$ pour $\beta < 5 \%$ environ	$\approx R/(925Lf)$ pour $\beta < 1 \%$ environ
	Remarques	avec D_{RL}		avec ou sans D_{RL}		avec ou sans D_{RL}	avec ou sans D_{RL}

Fig. 31.20 Principales caractéristiques des montages

Remarque : Pour une approche des facteurs de puissance, voir Chapitre 32 : Redressement commandé.

Chapitre 32

Redressement commandé

Le redresseur commandé permet d'obtenir, à partir d'une source alternative, un courant unidirectionnel aux valeurs moyenne et efficace réglables. Deux régimes de fonctionnement peuvent se présenter : la *conduction ininterrompue* ou la *conduction interrompue* du courant dans la charge. Dans certaines conditions, un redresseur commandé peut envoyer de l'énergie d'une source continue à la source alternative : on parle alors d'onduleur assisté ou non autonome. Le redressement commandé est utilisé pour la variation de vitesse des moteurs à courant continu.

- Les valeurs moyenne et efficace, le taux d'ondulation et le facteur de forme sont définis au Chapitre 7 : Régime variable – Valeurs moyenne et efficace.
- Seul le régime permanent (périodique) est décrit dans ce chapitre.
- Pour simplifier, on considère les composants parfaits, et en particulier les thyristors (voir Chapitre 19 : Thyristors) et les diodes (voir Chapitre 16 : Diodes).
- On note α l'angle d'amorçage de référence d'un thyristor.

32.1 REDRESSEMENT MONOPHASÉ SIMPLE ALTERNANCE

Le montage (Fig. 32.1) fonctionne en redresseur de courant. La tension d'entrée s'écrit :

$$u_E = U_{E\text{ Max}} \sin \theta \text{ avec } \theta = \omega t \text{ et } \omega T = 2\pi.$$

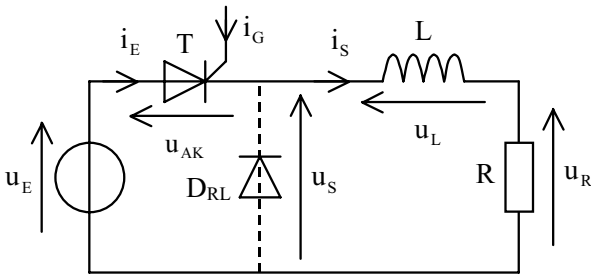


Fig. 32.1 Redressement simple alternance avec ou sans diode de roue libre

32.1.1 Redresseur sans diode de roue libre

a) Charge résistive (Fig. 32.1 avec $L = 0$, sans D_{RL} , et Fig. 32.2)

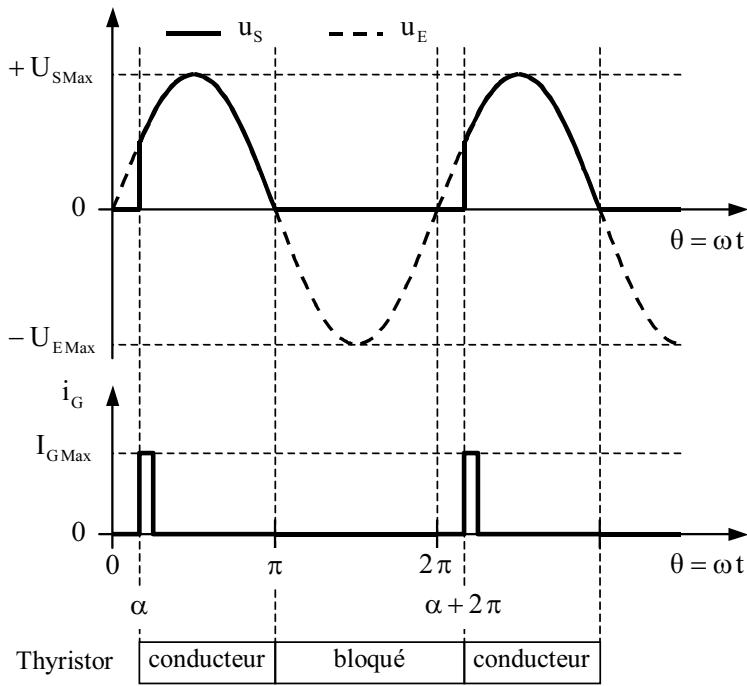


Fig. 32.2 Simple alternance – Charge résistive

L'impulsion de commande est appliquée sur la gâchette du thyristor T. La portion d'arche de sinusoïde variant avec l'angle d'amorçage α du thyristor, il en résulte un courant dans la charge de valeurs moyenne et efficace réglables. Le thyristor conduit de α à π . La tension aux bornes de R est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin \theta$ pour $\alpha \pm 2k\pi \leq \theta \leq \pi \pm 2k\pi$, et $u_S = 0$ ailleurs, avec $u_S = Ri_S$ et $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (thyristor parfait). La période de u_S est égale à la période de u_E . La diode de roue libre D_{RL} n'a aucun effet pour une charge purement résistive.

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension u_S . En déduire l'expression du facteur de forme.

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{2\pi} (1 + \cos \alpha)$$

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}}^2 \sin^2 \theta \, d\theta \quad \text{D'où :}$$

$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{2} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

$$F = \frac{U_{S \text{ Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{\pi}{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

b) Charge inductive (Fig. 32.1 sans D_{RL} , et Fig. 32.3)

La présence de l'inductance a pour effet de retarder le courant i_S par rapport à la tension u_S . Or le thyristor reste conducteur tant que le courant le traversant est positif. C'est pourquoi la tension u_S devient négative de $\pi \pm 2k\pi$ à $\psi \pm 2k\pi$. Ensuite, lorsque le courant dans le thyristor s'annule, celui-ci se bloque et la tension de sortie s'annule à son tour.

Remarques :

- Entre $\pi \pm 2k\pi$ et $\psi \pm 2k\pi$, la puissance $p_S = u_S i_S$ est négative. De l'énergie, précédemment emmagasinée dans l'inductance, est renvoyée à la source (u_E).
- La conduction du courant dans la charge est interrompue ; plus la durée de conduction augmente et plus le courant moyen diminue. Ces inconvénients font que ce montage n'est pas utilisé.

- Plus précisément, le thyristor se bloque lorsque le courant le traversant devient inférieur à son intensité de maintien notée I_H (voir Chapitre 19 : Thyristors).

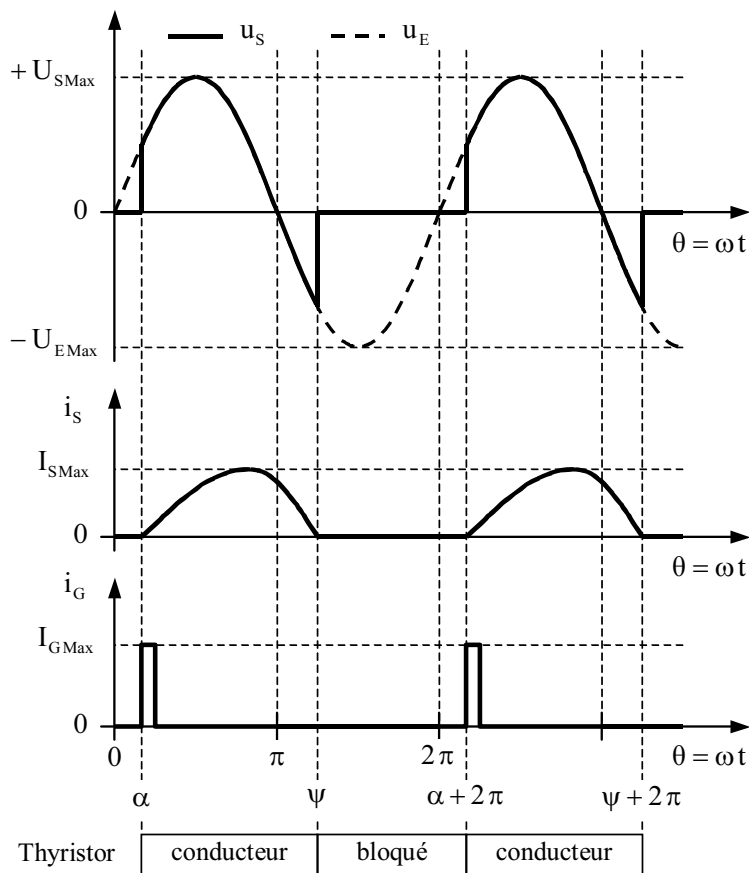


Fig. 32.3 Simple alternance – Charge inductive
Conduction interrompue du courant dans la charge

32.1.2 Redresseur avec diode de roue libre

On place une diode de roue libre D_{RL} en parallèle sur la charge pour que le courant i_s puisse être ininterrompu (Fig. 32.1 et Fig. 32.4). Cette diode prolonge le courant i_s (absence de discontinuité de courant dans une inductance) lorsque la tension u_E devient négative et, conséquemment, permet le blocage du thyristor. Pendant la conduction de D_{RL} , l'inductance fournit à la résistance de l'énergie précédemment emmagasinée sous forme électromagnétique. Aucune énergie n'est renvoyée à la source u_E . La conduction du courant dans la charge est ininterrompue.

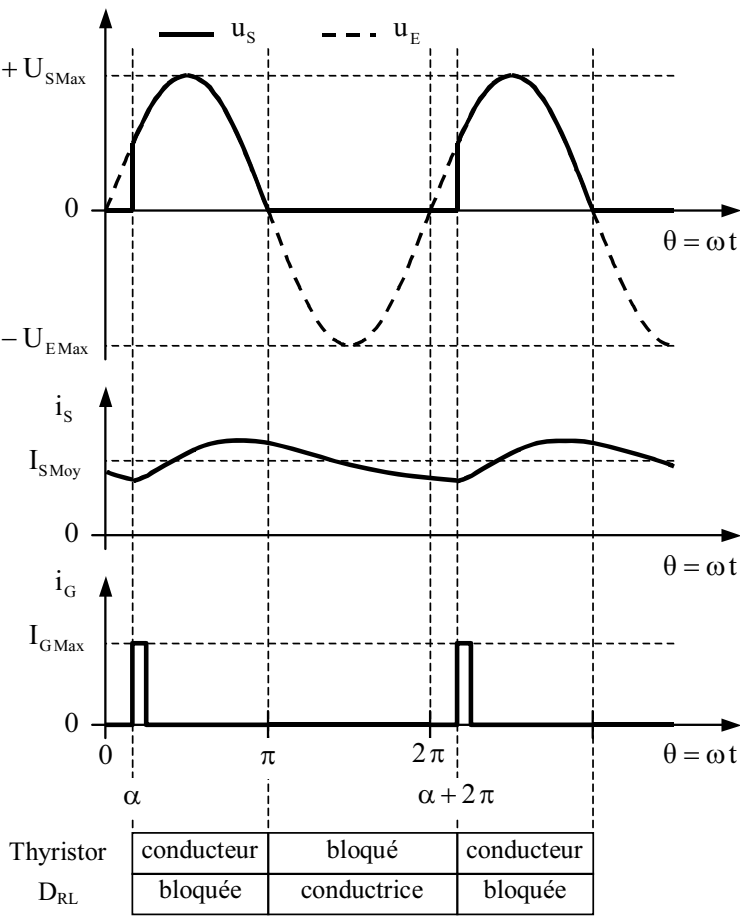


Fig. 32.4 Simple alternance – Charge inductive et diode de roue libre
Conduction ininterrompue du courant dans la charge

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_s . En déduire la valeur moyenne du courant i_s . En déduire la valeur efficace du courant i_s pour une constante de temps $\tau = L/R$ très grande devant la période T de i_s .

Réponse : L'allure de u_s est identique à celle obtenue pour le redressement monophasé simple alternance sur charge résistive (voir § 32.1.1a)). D'où :

$$U_{S Moy} = \frac{U_{S Max}}{2\pi} (1 + \cos \alpha)$$

Loi des mailles :

$$u_s = u_L + u_R \Rightarrow U_{S Moy} = U_{L Moy} + U_{R Moy}$$

D'où :

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}}}{R} = \frac{U_{R \text{ Moy}}}{R} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{2\pi R} (1 + \cos \alpha) \quad \text{car} \quad U_{L \text{ Moy}} = 0$$

Si $\tau = L/R \gg T$ alors le courant est quasiment continu et $I_{S \text{ Eff}} \approx I_{S \text{ Moy}}$

32.2 REDRESSEMENT MONOPHASÉ DOUBLE ALTERNANCE

Il existe trois types de redresseurs monophasés double alternance : le pont de Graëtz tout thyristors, dit symétrique ; le pont de Graëtz mixte composé de deux thyristors et de deux diodes ; le montage à point milieu (non décrit ici) composé de deux thyristors et nécessitant un transformateur à point milieu.

32.2.1 Pont tout thyristors sans diode de roue libre

Le montage (Fig. 32.5) sans diode de roue libre fonctionne en redresseur de courant, ou en onduleur assisté sous certaines conditions. La tension d'entrée s'écrit :

$$u_E = U_{E \text{ Max}} \sin \theta \quad \text{avec} \quad \theta = \omega t \quad \text{et} \quad \omega T = 2\pi.$$

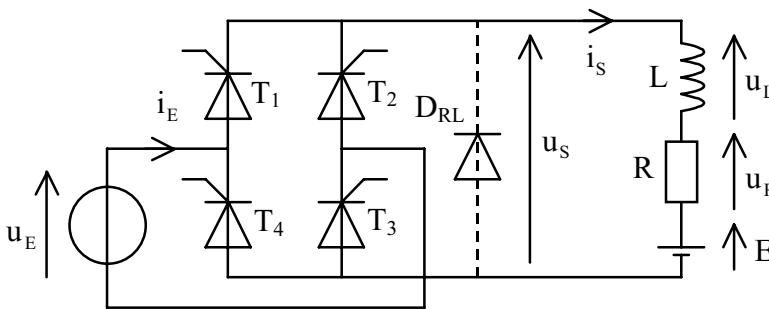


Fig. 32.5 Redressement monophasé double alternance
Pont tout thyristors avec ou sans diode de roue libre

a) Charge résistive (Fig. 32.5 avec $L = 0$, $E = 0$, sans D_{RL} , et Fig. 32.6)

Le dispositif fonctionne en redresseur de courant. Le pont conduit de α à π . La tension aux bornes de R est $u_S = |U_{S \text{ Max}} \sin \theta|$ pour $\alpha \pm k\pi \leq \theta \leq \pi \pm k\pi$, et $u_S = 0$ ailleurs, avec $u_S = Ri_S$ et $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (thyristor parfait). La période de u_S est égale à la moitié de la période de u_E .

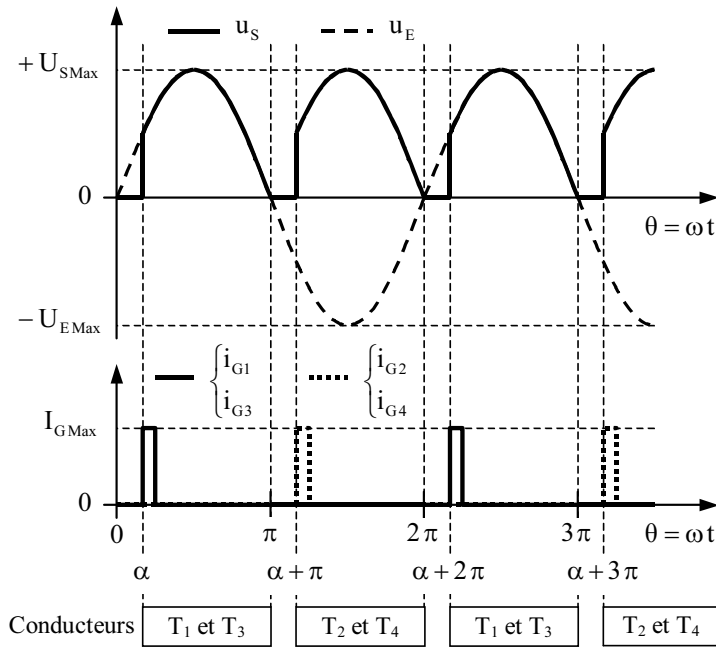


Fig. 32.6 Double alternance – Pont tout thyristors – Charge résistive (tension u_S identique pour charge « RLE » avec D_{RL} , voir § 32.2.2)

Question : Exprimer les valeurs moyenne et efficace de la tension u_S . En déduire l'expression du facteur de forme.

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} (1 + \cos \alpha)$$

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}}^2 \sin^2 \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

$$F = \frac{U_{S \text{ Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{\pi}{\sqrt{2} (1 + \cos \alpha)} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

b) Charge résistive avec fém (Fig. 32.5 avec $L = 0$, sans D_{RL} , Fig. 32.7)

On suppose $E > 0$. La tension aux bornes de la charge est $u_s = |U_{S \text{ Max}} \sin \theta|$ pour $\alpha \pm k\pi \leq \theta \leq \psi \pm k\pi$, et $u_s = E$ ailleurs, avec $u_s = E + R i_s$ et $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (thyristor parfait).

D'où : $i_s = \frac{|U_{S \text{ Max}} \sin \theta| - E}{R}$ pour $\alpha \pm k\pi \leq \theta \leq \psi \pm k\pi$, et $i_s = 0$ ailleurs

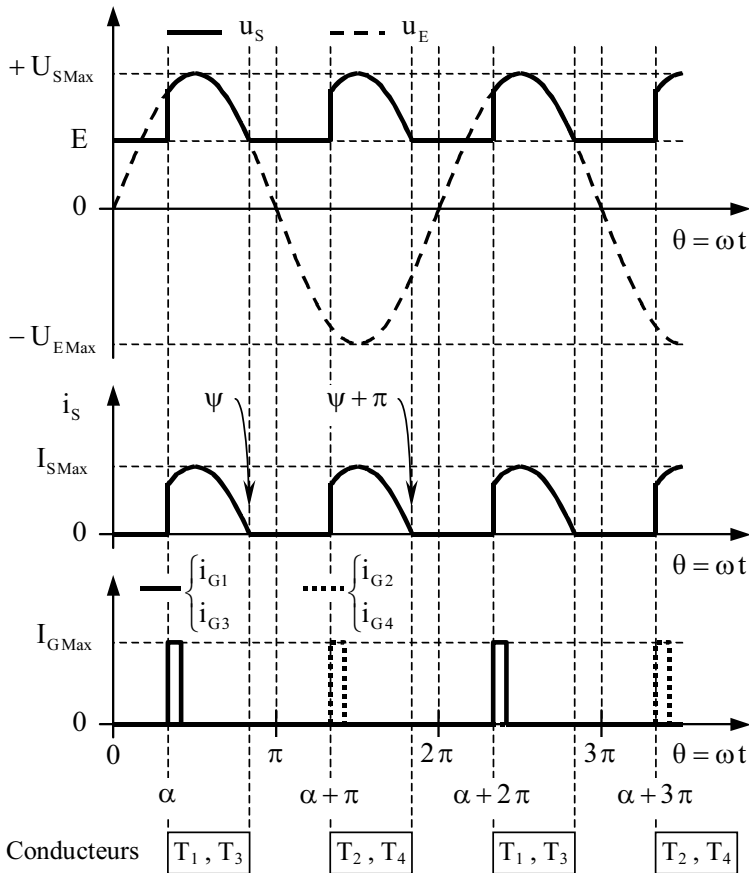


Fig. 32.7 Pont tout thyristors – Charge résistive avec fém $E > 0$

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_s pour $E > 0$. En déduire la valeur moyenne du courant i_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\psi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\alpha+\pi} E \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} (\cos \alpha - \cos \psi) + \frac{E}{\pi} (\alpha + \pi - \psi)$$

$$u_S = E + Ri_S$$

D'où :

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R}$$

Remarque : La conduction du courant i_S est interrompue (pour $E > 0$). Le courant i_S ne pouvant être que positif, on déduit de $i_S = (u_S - E)/R = 0$:

– l'angle d'extinction des thyristors $\psi = \pi - \arcsin (E/U_{E \text{ Max}})$

– l'angle d'amorçage limite $\alpha_{\text{Lim}} = \arcsin (E/U_{E \text{ Max}})$

Pour $E < 0$, la conduction peut être interrompue ou ininterrompue.

c) Charge inductive avec fém (Fig. 32.5 sans D_{RL})

La présence de l'inductance a pour effet de retarder le courant i_S par rapport à la tension u_S . Or un thyristor reste conducteur tant que le courant le traversant est positif. C'est pourquoi la tension u_S devient temporairement négative pour $\theta > \pi \pm k\pi$ (voir Fig. 32.8 et Fig. 32.9). Ensuite, deux cas sont possibles :

- Soit le courant dans T_1 et T_3 (ou T_2 et T_4) ne s'annule pas et ceux-ci restent conducteurs : la conduction du courant dans la charge est ininterrompue.
- Soit le courant dans T_1 et T_3 (ou T_2 et T_4) s'annule et ceux-ci se bloquent : la conduction du courant dans la charge est interrompue.

On montre que la conduction du courant dans la charge est ininterrompue pour $\sin(\varphi - \alpha) \geq K$, et interrompue autrement, avec :

$$K = \frac{E \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{U_{S \text{ Max}}} \frac{1 - e^{-\pi/\tan \varphi}}{1 + e^{-\pi/\tan \varphi}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = L\omega/R \quad (0 < \varphi < \pi/2)$$

Remarque : Le courant i_S ne peut être que positif ou nul (sens de conduction des thyristors). Si la fém E est positive (récepteur), le convertisseur fonctionne en redresseur commandé. Si la fém E est négative (générateur), le convertisseur fonctionne, soit en redresseur commandé, soit en onduleur assisté.

► Conduction ininterrompue du courant dans la charge (Fig. 32.8)

Remarque : En conduction ininterrompue, pour $\alpha \leq \theta \leq \alpha + \pi$, on a :

$$i_S = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\theta - \varphi) - \frac{E}{R} + \frac{2U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\varphi - \alpha) \frac{e^{-(\theta - \alpha)/\tan \varphi}}{1 - e^{-\pi/\tan \varphi}}$$

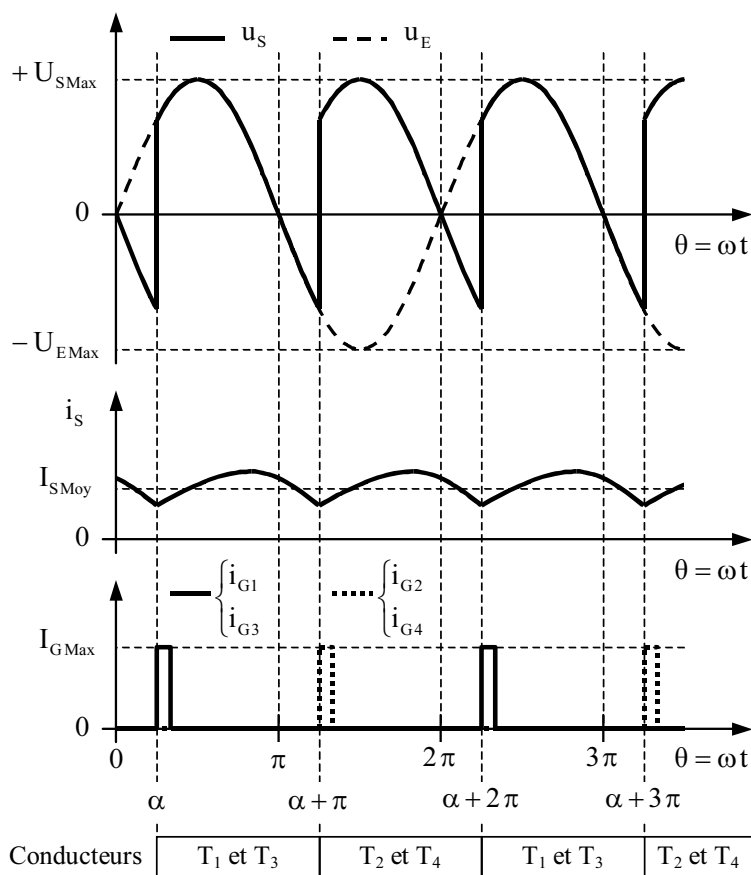


Fig. 32.8 Pont tout thyristors – Charge inductive avec fém
Conduction ininterrompue – Redresseur commandé

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_s . En déduire la valeur moyenne du courant i_s . En déduire la valeur efficace du courant i_s pour une constante de temps $\tau = L/R$ très grande devant la période T de i_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{2U_{S \text{ Max}}}{\pi} \cos \alpha$$

Loi des mailles :

$$u_s = u_L + u_R + E \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = U_{L \text{ Moy}} + U_{R \text{ Moy}} + E$$

D'où :

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} = \frac{2U_{S \text{ Max}} \cos \alpha}{\pi R} - \frac{E}{R} \quad \text{car} \quad U_{L \text{ Moy}} = 0$$

Si $\tau = L/R \gg T$ alors le courant est quasiment continu et $I_{S \text{ Eff}} \approx I_{S \text{ Moy}}$

► Conduction interrompue du courant dans la charge (Fig. 32.9)

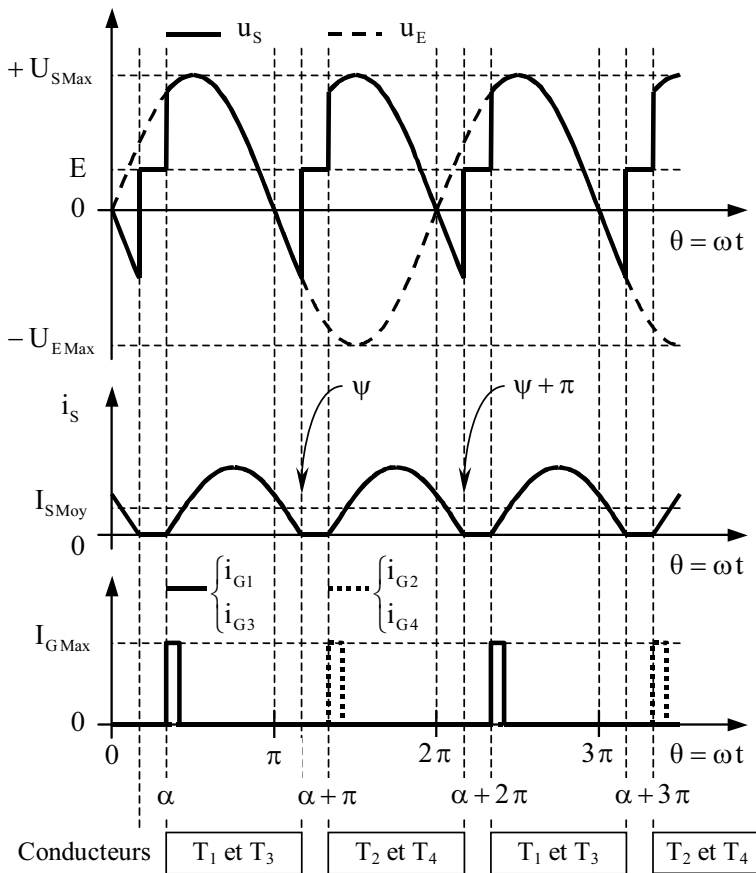


Fig. 32.9 Pont tout thyristors – Charge inductive avec fém
Conduction interrompue – Redresseur commandé

Remarque : En conduction interrompue, pour $\alpha \leq \theta \leq \psi$, on a :

$$i_s = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\theta - \varphi) - \frac{E}{R} + \left(\frac{-U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \sin(\alpha - \varphi) + \frac{E}{R} \right) e^{-(\theta - \alpha)/\tan \varphi}$$

L'angle ψ d'extinction du courant dans la charge est donné par $i_s(\psi) = 0$.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S . En déduire la valeur moyenne du courant i_S .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\psi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\alpha+\pi} E \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} (\cos \alpha - \cos \psi) + \frac{E}{\pi} (\alpha + \pi - \psi)$$

Loi des mailles :

$$u_S = u_L + u_R + E \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = U_{L \text{ Moy}} + U_{R \text{ Moy}} + E$$

D'où :

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} \quad \text{car} \quad U_{L \text{ Moy}} = 0$$

► Puissance transmise en conduction ininterrompue – Conséquence

La puissance moyenne (ou active) transmise à la charge est :

$$P_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} u_S i_S \, d\theta$$

Pour une conduction ininterrompue du courant dans la charge, et en supposant le courant $i_S = I_{S0}$ constant (ce qui suppose $L/R \gg T$), la puissance transmise à la charge s'écrit :

$$P_{S \text{ Moy}} = \frac{I_{S0}}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta$$

D'où :

$$P_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Moy}} I_{S0} = \frac{2U_{S \text{ Max}} I_{S0}}{\pi} \cos \alpha$$

On a deux cas :

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	La charge reçoit $P_{S \text{ Moy}}$ de la source alternative ($P_{S \text{ Moy}} > 0$). Fonctionnement en redresseur commandé (voir Fig. 32.8 et Fig. 32.9).
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	La charge fournit $-P_{S \text{ Moy}}$ à la source alternative ($P_{S \text{ Moy}} < 0$). Fonctionnement en onduleur assisté (voir Fig. 32.10) si $E < 0$.

Remarque : Si $E \geq 0$ et $\pi/2 < \alpha < \pi$, le convertisseur fonctionne en redresseur commandé (pas de générateur dans la charge) ; i_S est interrompu.

► Fonctionnement en onduleur assisté ou non autonome (Fig. 32.10)

Le convertisseur (voir Fig. 32.5) fonctionne en onduleur assisté (sous entendu assisté par la source alternative) à condition que :

- 1) $\pi/2 < \alpha < \pi$ (voir p. 455) en conduction ininterrompue.
- 2) La charge comporte un générateur. En conséquence, compte tenu des sens indiqués (voir Fig. 32.5), la fém E doit être négative.
- 3) Aucune diode de roue libre n'est connectée sur la charge.
- 4) Une source alternative u_E est présente pour fournir la puissance réactive à l'inductance et assurer la commutation des thyristors.

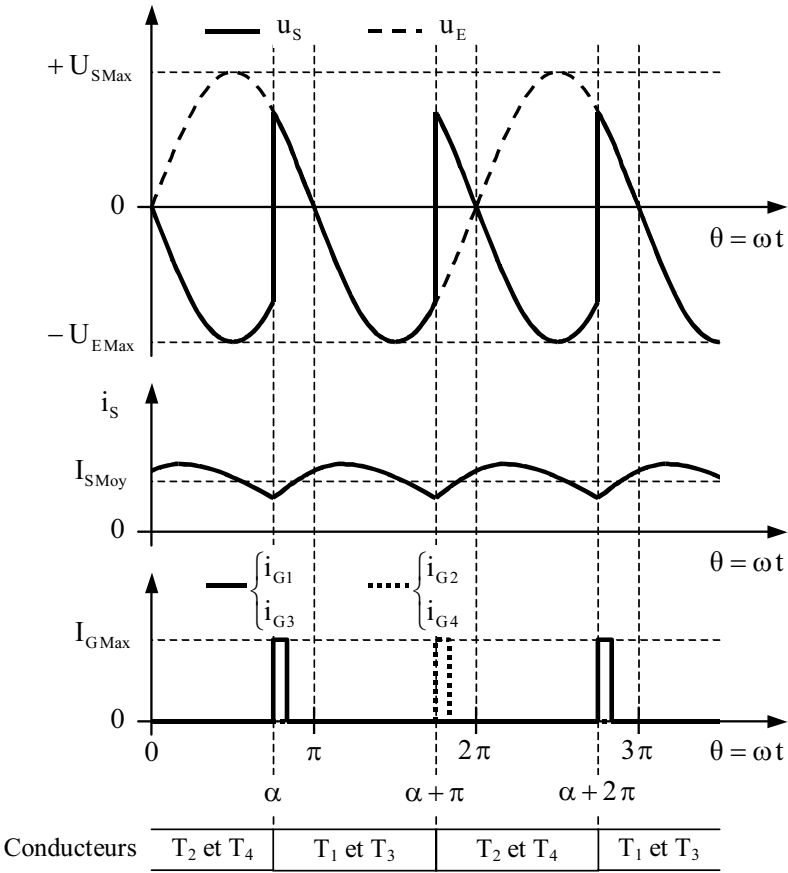


Fig. 32.10 Pont tout thyristors – Charge inductive avec fém $E < 0$
Conduction ininterrompue du courant dans la charge – Onduleur assisté

Remarque : Le courant dans la charge peut aussi être interrompu en onduleur assisté. Dans ce cas, la limite entre fonctionnement en redresseur et fonctionnement en onduleur est supérieure à $\pi/2$.

• **Précautions relatives au fonctionnement en onduleur assisté.** Un thyristor ne se bloque qu'en présence d'une tension entre anode et cathode u_{AK} négative pendant une durée supérieure à son temps de blocage (« turn-off »), et il ne peut être amorcé qu'en présence d'une tension u_{AK} positive. En conséquence (voir Fig. 32.10), il faut limiter l'angle d'amorçage à une valeur maximale α_{Max} inférieure à π ; $\gamma = \pi - \alpha_{Max}$ est appelé « angle de garde » (environ 15°).

• **Application au freinage d'un moteur à courant continu avec récupération.** Un seul pont (redresseur / onduleur assisté) ne peut inverser que le sens de la tension u_S , et, en conséquence, ne permet pas un fonctionnement du moteur en générateur. Si le passage du fonctionnement moteur au fonctionnement générateur n'a pas besoin d'être rapide, alors un seul pont est utilisé et le changement de fonctionnement est effectué par inversion du courant inducteur. Dans le cas contraire, deux ponts « tête-bêche » sont nécessaires ; ils permettent une réversibilité complète : les deux sens de rotation en fonctionnements moteur et générateur.

32.2.2 Pont tout thyristors avec diode de roue libre

Le montage (Fig. 32.5) avec diode de roue libre fonctionne en redresseur commandé, mais pas en onduleur assisté. Avec la diode de roue libre D_{RL} , dès que la tension u_S aux bornes de la charge tend à devenir négative, la diode D_{RL} entre en conduction, ce qui bloque le thyristor alors conducteur. La tension u_S est semblable à celle obtenue avec le pont tout thyristors sans D_{RL} sur charge résistive (voir Fig. 32.6). La conduction peut être ininterrompue ou interrompue. On obtient :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} (1 + \cos \alpha) \quad I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R}$$

32.2.3 Ponts mixtes

Le fonctionnement du montage (Fig. 32.11), appelé pont mixte asymétrique, est identique à celui du pont tout thyristors avec diode de roue libre (voir § 32.2.2).

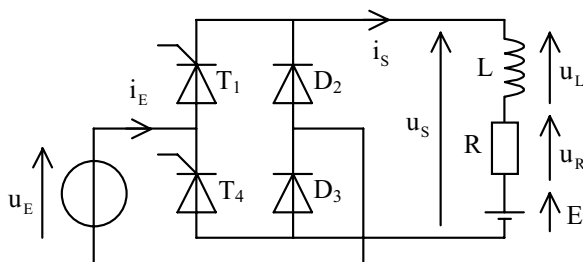


Fig. 32.11 Redressement monophasé double alternance
Pont mixte – Charge inductive avec fém

Remarque : Un autre pont mixte existe, appelé pont mixte symétrique. Il est obtenu en remplaçant les thyristors T_3 et T_4 dans le pont tout thyristors (voir Fig. 32.5) par les diodes D_3 et D_4 . L'expression de la valeur moyenne de la tension u_s est identique pour les ponts mixtes symétrique et asymétrique. En cas d'arrêt de la commande des thyristors, le pont mixte symétrique risque de passer en redresseur simple alternance. Pour éviter ce dysfonctionnement, on ajoute une diode de roue libre, ou on utilise un pont mixte asymétrique.

32.3 REDRESSEMENT TRIPHASÉ SIMPLE ALTERNANCE

Le montage (Fig. 32.12) redresse les courants entre les phases et le neutre. Les tensions d'entrées simples v_{1N} , v_{2N} et v_{3N} (voir Chapitre 6 : Régime sinusoïdal permanent triphasé) s'écrivent :

$$v_{1N} = V_{\text{Max}} \cos \theta \quad v_{2N} = V_{\text{Max}} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad v_{3N} = V_{\text{Max}} \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right)$$

avec

$$\theta = \omega t - \pi/2 \quad \text{et} \quad \omega T = 2\pi.$$

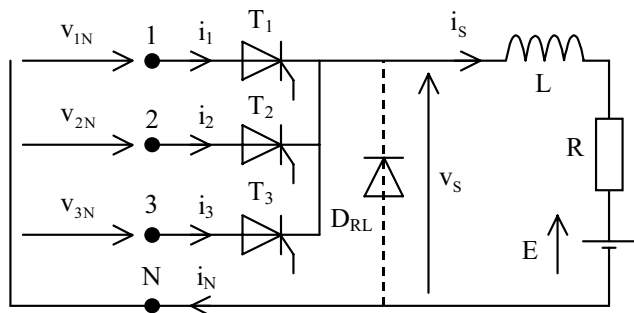


Fig. 32.12 Redressement triphasé simple alternance avec ou sans diode de roue libre

32.3.1 Redresseur sans diode de roue libre

a) Charge résistive (Fig. 32.12 avec $L = 0$, $E = 0$, sans D_{RL})

En comptant l'angle d'amorçage α à partir de la valeur de ωt pour laquelle une diode entrerait en conduction dans le montage redresseur triphasé simple alternance non commandé (voir Chapitre 31 : Redressement non commandé), soit $\omega t = \pi/6$ ou encore $\theta = -\pi/3$, on a :

$0 < \alpha \leq \pi/6$	Conduction ininterrompue de i_s (voir Fig. 32.13)
$\pi/6 \leq \alpha < 5\pi/6$	Conduction interrompue de i_s (voir Fig. 32.14)

La tension v_S aux bornes de la charge est la plus grande des tensions simples lorsque le thyristor correspondant conduit, avec $v_S = R i_S$ et $V_{S \text{ Max}} = V_{\text{Max}}$ (thyristors parfaits). La période de v_S est égale au tiers de celle de v_{1N} . La diode de roue libre D_{RL} n'a aucun effet pour une charge purement résistive.

► Premier cas : $0 < \alpha \leq \pi/6$ (Fig. 32.13)

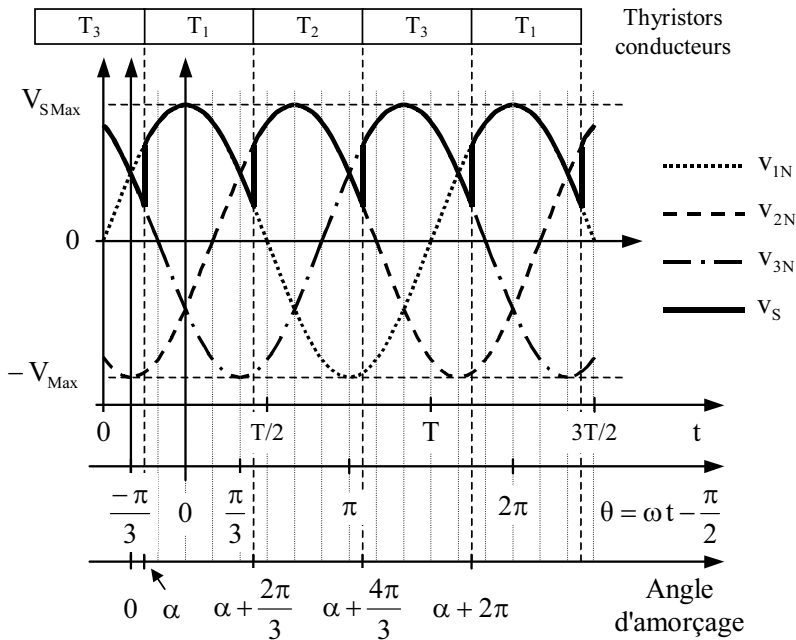


Fig. 32.13 Triphasé simple alternance – Charge résistive; $0 < \alpha \leq \pi/6$
(Tension u_S identique pour charge « RLE » avec D_{RL} , voir § 32.3.2)

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension v_S pour une conduction ininterrompue du courant i_S .

Réponse :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3 + \alpha}^{\pi/3 + \alpha} V_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta$$

D'où :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} V_{S \text{ Max}} \cos \alpha$$

► Deuxième cas : $\pi/6 \leq \alpha < 5\pi/6$ (Fig. 32.14)

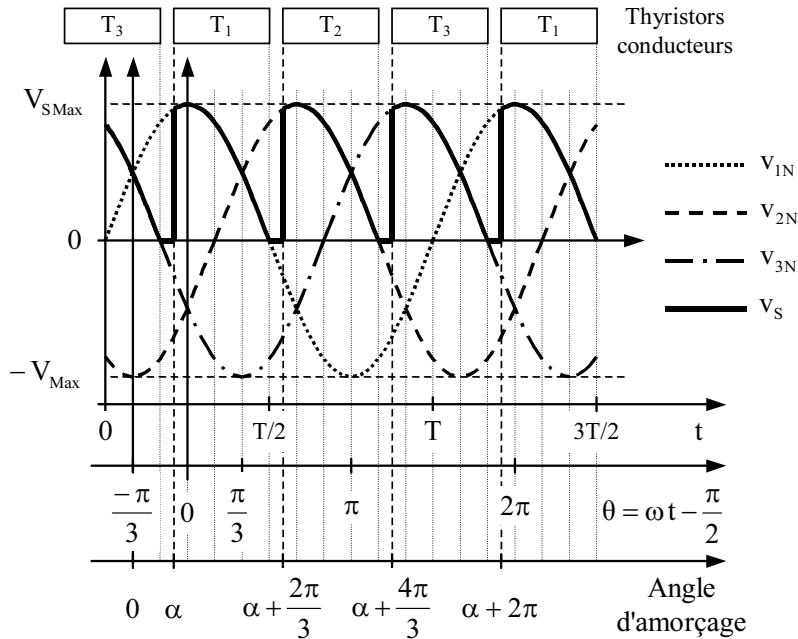


Fig. 32.14 Triphasé simple alternance – Charge résistive ; $\pi/6 \leq \alpha < 5\pi/6$
(Tension u_s identique pour charge « RLE » avec D_{RL} , voir § 32.3.2)

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension v_s pour une conduction interrompue du courant i_s .

Réponse :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{2\pi} \int_{-\pi/3 + \alpha}^{\pi/2} V_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta$$

D'où :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3V_{S \text{ Max}}}{2\pi} \left(1 + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \right)$$

► Cas particulier : conduction d'une alternance sur deux

En triphasé, les alternances se chevauchent. Cela entraîne, pour $-\pi/6 < \alpha < 0$, la conduction d'une alternance sur deux, ce qui n'est généralement pas recherché. En effet, avec $-\pi/6 < \alpha < 0$, si T_1 est amorcé, T_2 ne peut pas être amorcé car $u_{AK(T2)} = u_2 - u_1 < 0$; par contre T_3 peut être amorcé; etc. Cela conduit au cycle de thyristors conducteurs : $T_1 \rightarrow T_3 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots$. On retrouve ce problème avec une charge inductive.

b) Charge inductive avec fém (Fig. 32.12 sans D_{RL})

Sans diode de roue libre D_{RL} , le courant dans la charge peut être ininterrompue ou interrompue, le convertisseur peut fonctionner en redresseur ou en onduleur assisté, comme pour le redressement commandé monophasé double alternance (voir § 32.2). Pour simplifier, on considère ici uniquement le cas du courant i_s ininterrompu. On a :

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	Fonctionnement en redresseur commandé (voir Fig. 32.15).
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	Fonctionnement en onduleur assisté (voir Fig. 32.16), si $E < 0$.

Pour une conduction ininterrompue du courant i_s (fonctionnement en redresseur ou onduleur assisté), on obtient :

$$V_{S \text{ Moy}} = \frac{3\sqrt{3} V_{S \text{ Max}}}{2\pi} \cos \alpha$$

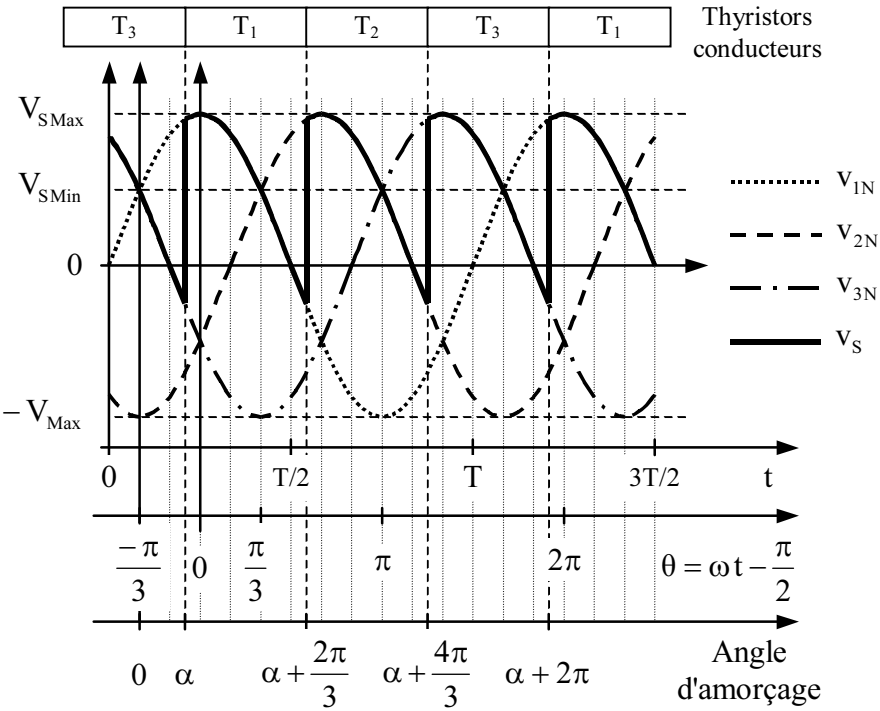


Fig. 32.15 Triphasé simple alternance – Charge inductive avec fém
Conduction ininterrompue – Redresseur commandé

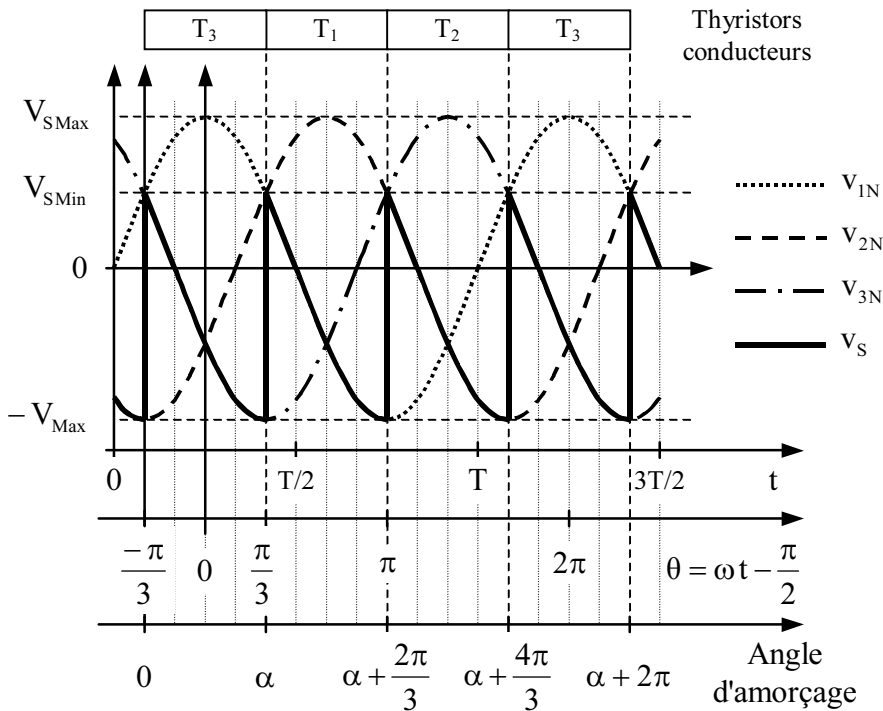


Fig. 32.16 Triphasé simple alternance – Charge inductive avec fém $E < 0$
Conduction ininterrompue – Onduleur assisté

Remarques :

- Pour $\alpha > \pi$, les thyristors ne pourraient s'amorcer car les tensions entre anodes et cathodes u_{AK} seraient négatives. Pour un amorçage sûr, on limite l'angle d'amorçage à une valeur maximale $\alpha_{\text{Max}} = \pi - \gamma$ où γ est l'angle de garde.
- Si $E \geq 0$ et $\pi/2 < \alpha < 5\pi/6$, le convertisseur fonctionne en redresseur commandé (pas de générateur dans la charge) ; i_s est interrompu.

32.3.2 Redresseur avec diode de roue libre

Le montage (Fig. 32.12) avec diode de roue libre fonctionne en redresseur commandé, mais pas en onduleur assisté. Avec la diode de roue libre D_{RL} , dès que la tension v_s aux bornes de la charge tend à devenir négative, la diode D_{RL} entre en conduction, ce qui bloque le thyristor alors conducteur. La tension v_s est semblable à celle obtenue sans D_{RL} sur charge résistive (voir Fig. 32.13 pour $0 < \alpha \leq \pi/6$, et Fig. 32.14 pour $\pi/6 \leq \alpha < 5\pi/6$) ; les formules donnant $V_{S \text{ Moy}}$ sur charge résistive restent valables. Le courant dans la charge peut être ininterrompu ou interrompu selon E .

32.4 REDRESSEMENT TRIPHASÉ DOUBLE ALTERNANCE

32.4.1 Pont tout thyristors sans diode de roue libre

Le montage (Fig. 32.17) sans diode de roue libre fonctionne en redresseur de courant entre phases, ou en onduleur assisté sous certaines conditions. Les tensions d’entrées composées u_{12} , u_{23} et u_{31} s’écrivent :

$$u_{12} = U_{\text{Max}} \cos \theta \quad u_{23} = U_{\text{Max}} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \quad u_{31} = U_{\text{Max}} \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right)$$

avec $\theta = \omega t - \pi/3$ et $\omega T = 2\pi$ (voir Chapitre 6 : Régime sinusoïdal permanent triphasé).

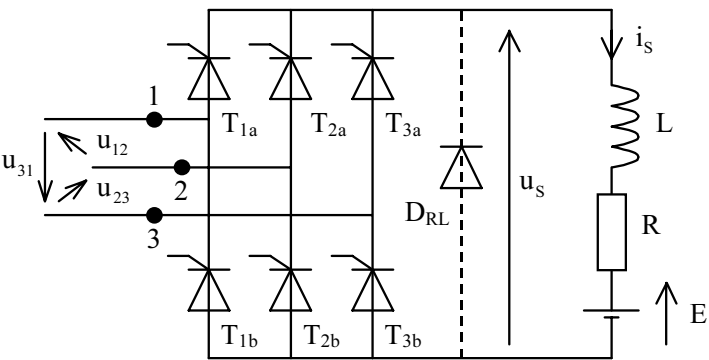


Fig. 32.17 Redressement triphasé double alternance
Pont tout thyristors avec ou sans diode de roue libre

a) Charge résistive (Fig. 32.17 avec $L = 0$, $E = 0$, sans D_{RL})

En comptant l’angle d’amorçage α à partir de la valeur de ωt pour laquelle une diode entrerait en conduction dans le montage redresseur triphasé double alternance non commandé (voir Chapitre 31 : Redressement non commandé), soit $\omega t = \pi/6$ ou encore $\theta = -\pi/6$, on a :

$0 < \alpha \leq \pi/3$	Conduction ininterrompue de i_S (voir Fig. 32.18)
$\pi/3 \leq \alpha < 2\pi/3$	Conduction interrompue de i_S (voir Fig. 32.19)

La tension u_S aux bornes de la charge est la plus grande des tensions composées lorsque les thyristors correspondants conduisent, avec $u_S = Ri_S$ et $U_{S \text{ Max}} = U_{\text{Max}}$ (thyristors parfaits). La période de u_S est égale au sixième de celle de u_{12} . La diode de roue libre D_{RL} n’a aucun effet pour une charge purement résistive.

► Premier cas : $0 < \alpha \leq \pi/3$ (Fig. 32.18)

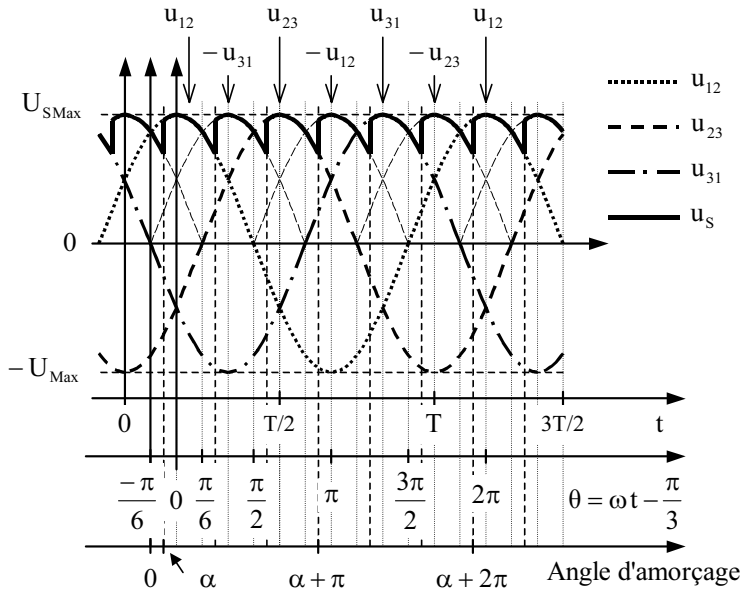


Fig. 32.18 Triphasé double alternance – Charge résistive; $0 < \alpha \leq \pi/3$
(Tension u_s identique pour charge « RLE » avec D_{RL} , voir § 32.4.2)

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_s pour une conduction ininterrompue du courant i_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/6 + \alpha}^{\pi/6 + \alpha} U_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3 U_{S \text{ Max}}}{\pi} \cos \alpha$$

► Deuxième cas : $\pi/3 \leq \alpha < 2\pi/3$ (Fig. 32.19)

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_s pour une conduction interrompue du courant i_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/6 + \alpha}^{\pi/2} U_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3 U_{S \text{ Max}}}{\pi} \left(1 + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

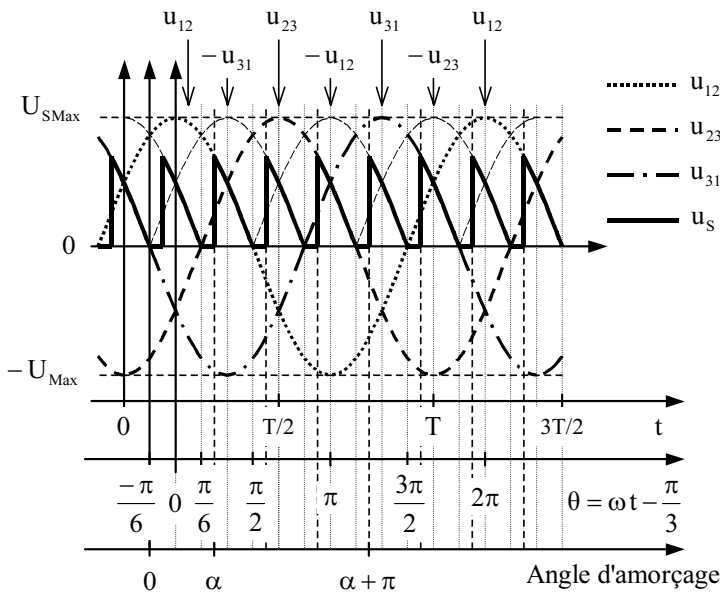


Fig. 32.19 Triphasé double alternance – Charge résistive ; $\pi/3 \leq \alpha < 2\pi/3$
(Tension u_s identique pour charge « RLE » avec D_{RL} , voir § 32.4.2)

► Cas particulier : conduction d’une alternance sur deux

En triphasé, les alternances se chevauchent. Cela entraîne, pour $-\pi/3 < \alpha < 0$, la conduction d’une alternance sur deux, ce qui n’est généralement pas recherché. Cela conduit à un des deux cycles de thyristors conducteurs suivants : $T_{1a}, T_{2b} \rightarrow T_{2a}, T_{3b} \rightarrow T_{3a}, T_{1b} \rightarrow T_{1a}, T_{2b} \rightarrow \text{etc.}$; ou $T_{1a}, T_{3b} \rightarrow T_{2a}, T_{1b} \rightarrow T_{3a}, T_{2b} \rightarrow T_{1a}, T_{3b} \rightarrow \text{etc.}$ On retrouve ce problème avec une charge inductive.

b) Charge inductive avec fém (Fig. 32.17 sans D_{RL})

Pour simplifier, on considère ici uniquement le cas du courant i_s ininterrompu. Sans diode de roue libre D_{RL} , on a :

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	Fonctionnement en redresseur commandé (voir Fig. 32.20).
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	Fonctionnement en onduleur assisté (voir Fig. 32.21), si $E < 0$.

Remarque : Pour $\alpha > \pi$, les thyristors ne pourraient s'amorcer car les tensions entre anodes et cathodes u_{AK} seraient négatives. Pour un amorçage sûr, on limite l'angle d'amorçage à une valeur maximale $\alpha_{Max} = \pi - \gamma$ où γ est l'angle de garde.

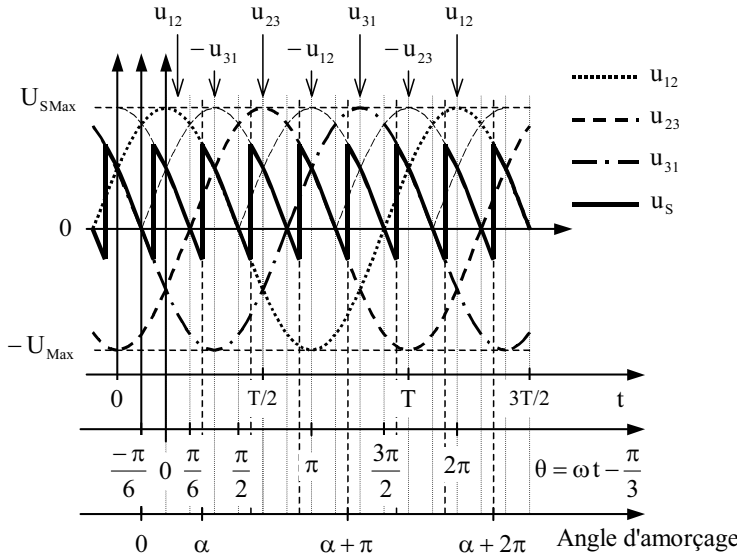


Fig. 32.20 Triphasé double alternance – Charge inductive avec fém
Conduction ininterrompue – Redresseur commandé

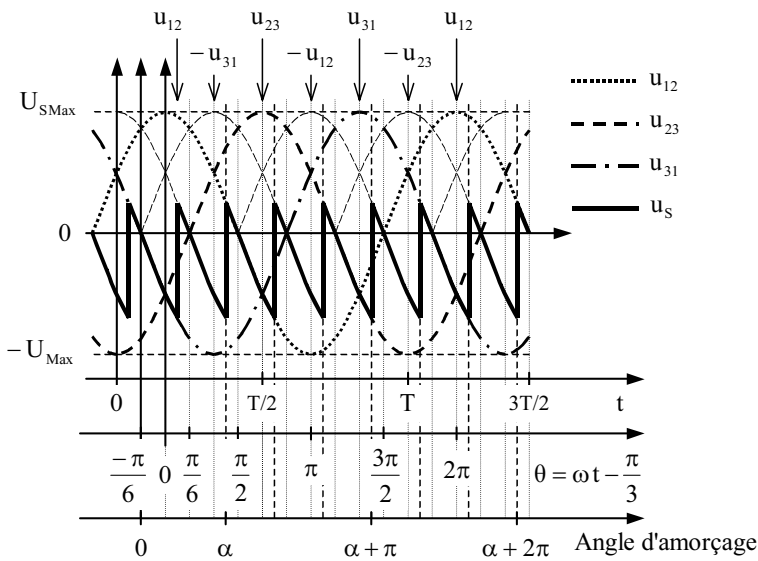


Fig. 32.21 Triphasé double alternance – Charge inductive avec fém $E < 0$
Conduction ininterrompue – Onduleur assisté

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S pour une conduction ininterrompue du courant i_S (fonctionnement en redresseur ou onduleur assisté).

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3}{\pi} \int_{-\pi/6 + \alpha}^{\pi/6 + \alpha} U_{S \text{ Max}} \cos \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3 U_{S \text{ Max}}}{\pi} \cos \alpha$$

32.4.2 Pont tout thyristors avec diode de roue libre

Le montage (Fig. 32.17) avec diode de roue libre fonctionne en redresseur commandé, mais pas en onduleur assisté. Avec la diode de roue libre D_{RL} , dès que la tension u_S aux bornes de la charge tend à devenir négative, la diode D_{RL} entre en conduction, ce qui bloque le thyristor alors conducteur. La tension u_S est semblable à celle obtenue sans D_{RL} sur charge résistive (voir Fig. 32.18 pour $0 < \alpha \leq \pi/3$, et Fig. 32.19 pour $\pi/3 \leq \alpha < 2\pi/3$); les formules donnant $U_{S \text{ Moy}}$ sur charge résistive restent valables. Le courant dans la charge peut être ininterrompu ou interrompu selon E .

32.4.3 Pont mixte

Il est obtenu en remplaçant les thyristors T_{1b} , T_{2b} et T_{3b} dans le pont tout thyristors (voir Fig. 32.17) par les diodes D_{1b} , D_{2b} et D_{3b} . On distingue deux cas selon la valeur de α (Fig. 32.22 et Fig. 32.23).

a) Premier cas : $0 < \alpha \leq \pi/3$ (Fig. 32.22)

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3U_{S \text{ Max}}}{2\pi} \left(\int_{-\pi/6 + \alpha}^{\pi/6} \cos \theta \, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2 + \alpha} \cos (\theta - \pi/3) \, d\theta \right)$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3 U_{S \text{ Max}}}{2\pi} (1 + \cos \alpha)$$

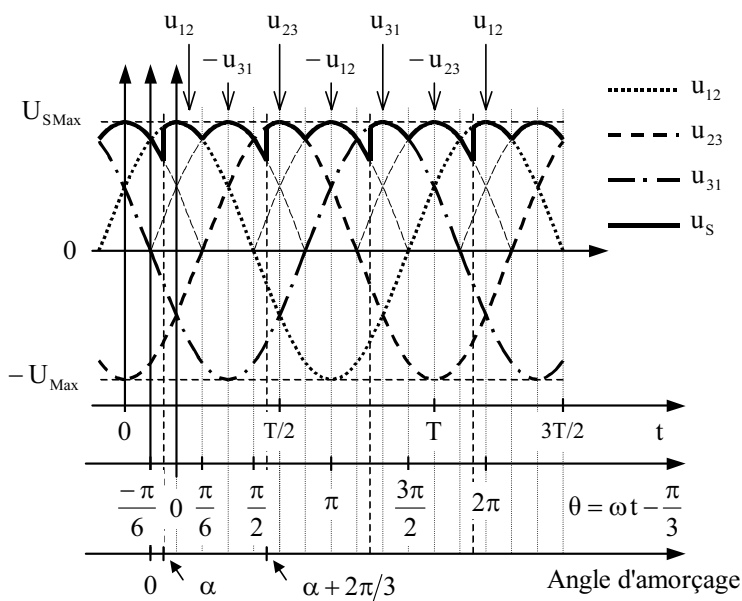


Fig. 32.22 Triphasé double alternance en pont mixte ; $0 < \alpha \leq \pi/3$

b) Deuxième cas : $\pi/3 \leq \alpha < \pi$ (Fig. 32.23)

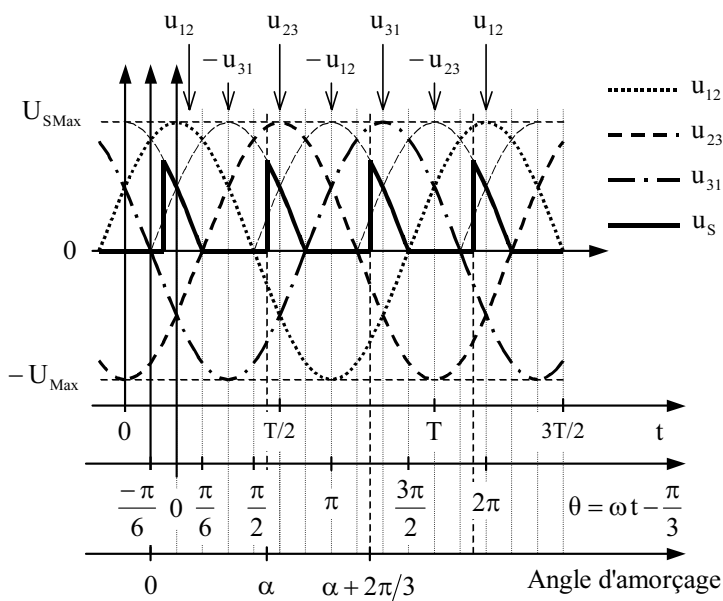


Fig. 32.23 Triphasé double alternance en pont mixte ; $\pi/3 \leq \alpha < \pi$

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension u_S .

Réponse :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3U_{S \text{ Max}}}{2\pi} \int_{-\pi/6 + \alpha}^{5\pi/6} \cos(\theta - \pi/3) d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{3 U_{S \text{ Max}}}{2\pi} (1 + \cos \alpha)$$

32.5 FACTEUR DE PUISSANCE D'UN REDRESSEUR

Le facteur de puissance en entrée du redresseur $f_{P E}$ est le rapport de la puissance active (ou moyenne) d'entrée P_E sur la puissance apparente d'entrée S_E .

Question : Exprimer le facteur de puissance en entrée du pont tout thyristors de redressement monophasé double alternance sur charge résistive (voir § 32.2.1a).

Réponse : D'une part, $P_E = P_S$ (pas de perte) et $u_S = Ri_S$. D'où :

$$P_E = P_S = \frac{U_{S \text{ Eff}}^2}{R} = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{2R} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi} \right) \quad (\text{voir § 32.2.1a})$$

D'autre part, $i_E = i_S = u_S/R$ pour $0 \leq \theta \leq \pi$ et $i_E = -i_S = -u_S/R$ pour $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. En conséquence, $I_{E \text{ Eff}} = I_{S \text{ Eff}} = U_{S \text{ Eff}}/R$. D'où :

$$S_E = U_{E \text{ Eff}} I_{E \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \frac{U_{S \text{ Eff}}}{R} \quad \text{car} \quad U_{E \text{ Max}} = U_{S \text{ Max}}$$

Soit :

$$S_E = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{2R} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

Finalement :

$$f_{P E} = \frac{P_E}{S_E} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

Si $\alpha = 0$ (redressement non commandé) alors $f_{P E} = 1$

Question : Exprimer le facteur de puissance en entrée du pont tout thyristors de redressement monophasé double alternance sur charge inductive en supposant le courant de sortie continu $i_S = I_S$ (voir § 32.2.1 p. 452).

Monophasé simple alternance		
avec D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{1 + \cos \alpha}{\pi \sqrt{1 - \alpha/\pi}}$	$\frac{T_S}{T_E} = 1$
Monophasé double alternance		
Pont tout thyristors sans D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \ \cos \alpha $	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{2}$
Pont tout thyristors avec D_{RL} , ou pont mixte	$f_{P\ E} = \frac{\sqrt{2} \ (1 + \cos \alpha)}{\pi \sqrt{1 - \alpha/\pi}}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{2}$
Triphasé simple alternance		
sans D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{3}{\pi \sqrt{2}} \ \cos \alpha $	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
avec D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{3}{\pi \sqrt{2}} \ \cos \alpha \ \text{si} \ \alpha \leq \frac{\pi}{6}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
	$f_{P\ E} = \frac{1 + \cos \left(\alpha + \pi/6 \right)}{\pi \sqrt{5/6 - \alpha/\pi}} \ \text{si} \ \alpha \geq \frac{\pi}{6}$	
Triphasé double alternance		
Pont tout thyristors sans D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{3}{\pi} \ \cos \alpha $	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{6}$
Pont tout thyristors avec D_{RL}	$f_{P\ E} = \frac{3}{\pi} \ \cos \alpha \ \text{si} \ \alpha \leq \frac{\pi}{3}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{6}$
	$f_{P\ E} = \frac{\sqrt{3} \ (1 + \cos \left(\alpha + \pi/3 \right))}{\pi \sqrt{2/3 - \alpha/\pi}} \ \text{si} \ \alpha \geq \frac{\pi}{3}$	
Pont mixte	$f_{P\ E} = \frac{3 \ (1 + \cos \alpha)}{2\pi} \ \text{si} \ \alpha \leq \frac{\pi}{3}$	$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{3}$
	$f_{P\ E} = \frac{\sqrt{3} \ (1 + \cos \alpha)}{\pi \ \sqrt{2} \ \sqrt{1 - \alpha/\pi}} \ \text{si} \ \alpha \geq \frac{\pi}{3}$	

Fig. 32.24 Facteur de puissance à I_S continu
Période tension de sortie sur période tension d'entrée (T_S/T_E)

Réponse : D'une part, $P_E = P_S$ (pas de perte) et $I_S = \text{Cste}$. D'où :

$$P_E = P_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = \frac{2U_{S \text{ Max}} I_S}{\pi} \cos \alpha \quad (\text{voir § 32.2.1 p. 452})$$

D'autre part, $i_E = I_S$ pour $\alpha \leq \theta \leq \alpha + \pi$ et $i_E = -I_S$ pour $\alpha + \pi \leq \theta \leq \alpha + 2\pi$.
En conséquence, $I_{E \text{ Eff}} = I_S$. D'où :

$$S_E = U_{E \text{ Eff}} I_{E \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} I_S \quad \text{car} \quad U_{E \text{ Max}} = U_{S \text{ Max}}$$

Finalement :

$$f_{PE} = \frac{P_E}{S_E} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} |\cos \alpha|$$

Si $\alpha = 0$ (redressement non commandé) alors $f_{PE} = 2\sqrt{2}/\pi \approx 0,900$

Le tableau (Fig. 32.24) résume les facteurs de puissance en entrée des redresseurs commandés pour un courant de sortie continu ($i_s = I_s$). Les facteurs de puissance pour les redresseurs non commandés s'obtiennent en faisant $\alpha = 0$. On rappelle que la puissance apparente en triphasé est $S = 3V_{\text{Eff}}I_{\text{Eff}} = \sqrt{3}U_{\text{Eff}}I_{\text{Eff}}$.

32.6 CRITÈRES DE CHOIX

- Réversibilité : Les ponts tout thyristors sans diode de roue libre sont réversibles. Les ponts tout thyristors avec diode de roue libre et les ponts mixtes ne sont pas réversibles.
- Facteur de puissance : À situation comparable (réseau monophasé ou triphasé, redressement double alternance, puissance de sortie et courant de sortie continu donnés), les ponts mixtes ont un facteur de puissance plus élevé que les ponts tout thyristors.
- Période tension de sortie sur période tension d'entrée (T_s/T_E) : Plus ce rapport est élevé, et plus l'éventuelle inductance de lissage sera grande.
- Nombre de thyristors : Le nombre de circuits de commande augmente avec le nombre de thyristors du montage.
- Chute de tension : La chute de tension est proportionnelle au nombre de redresseurs (thyristors et diodes) en série et diminue le rendement. C'est l'unique raison qui peut faire préférer des montages où un seul redresseur est en série (simple alternance, ou double alternance avec transformateur à point milieu) lorsque la tension de sortie moyenne est petite.

En général, le choix est fonction de l'alimentation.

- Réseau monophasé : Si le convertisseur doit être réversible, alors on utilise le pont tout thyristors sans diode de roue libre, sinon on utilise le pont mixte.
- Réseau triphasé : On utilise surtout le pont tout thyristors sans diode de roue libre pour les faibles et moyennes puissances, que le convertisseur doive être ou pas réversible. On utilise le pont mixte que pour les très faibles puissances à cause des harmoniques générés. Pour les fortes puissances, on utilise d'autres montages.

Chapitre 33

Hacheurs

Un hacheur permet de régler le transfert d'énergie d'une source continue vers la charge avec un rendement élevé. Selon la structure, il peut être abaisseur ou élévateur de tension et, dans certaines conditions, renvoyer de l'énergie à l'alimentation. Il est utilisé dans les alimentations et pour le pilotage des moteurs.

– Seul le régime permanent (périodique) est décrit dans ce chapitre.

– Pour simplifier, on considère les composants parfaits ; et en particulier l'interrupteur électronique unidirectionnel en courant commandable à l'ouverture et à la fermeture. Celui-ci peut être réalisé avec un transistor bipolaire, un MOSFET, un thyristor, un GTO, etc. (symbole générique Fig. 33.1).

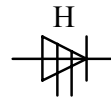


Fig. 33.1 Interrupteur électronique unidirectionnel

33.1 HACHEUR SÉRIE OU DÉVOLTEUR

33.1.1 Principe (Fig. 33.2)

Un hacheur série permet de régler le transfert d'énergie d'une source de tension continue (ou alimentation capacitive) vers une source de courant continu (ou charge inductive) en liaison directe (forward), c'est-à-dire sans élément intermédiaire d'accumulation.

L'interrupteur électronique H, placé en série avec la source de tension, est périodiquement fermé pendant une durée αT et ouvert pendant $(1 - \alpha)T$, où T est la période.

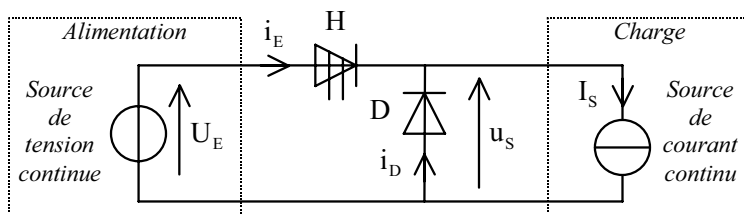


Fig. 33.2 Principe du hacheur série

- De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé, la diode D est bloquée et se comporte comme un interrupteur ouvert. La source de tension fournit de l'énergie à la source de courant. On a :

$$u_s = U_E \quad i_E = I_S \quad i_D = 0$$

- De $t = \alpha T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert, la diode D est passante et se comporte comme un interrupteur fermé. On a :

$$u_s = 0 \quad i_E = 0 \quad i_D = I_S$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E$$

$$I_{E \text{ Moy}} = \alpha I_S$$

$$P_{E \text{ Moy}} = U_E I_{E \text{ Moy}} = \alpha U_E I_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = P_{S \text{ Moy}}$$

La tension moyenne de sortie est inférieure à la tension continue d'entrée : le hacheur série est abaisseur de tension, d'où le nom de *hacheur dévolteur*. Par contre, le courant continu de sortie est supérieur au courant moyen d'entrée.

33.1.2 Hacheur série avec lissage du courant (Fig. 33.3)

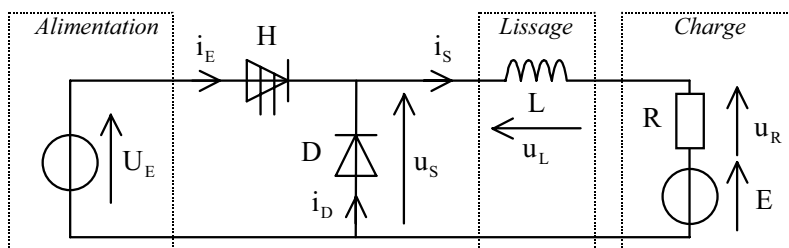


Fig. 33.3 Hacheur série avec lissage du courant

En pratique, on ajoute une inductance de lissage du courant, lorsque la charge ne se comporte pas comme une source de courant continu. La tension continue U_E de l'alimentation et la tension continue E de la charge (fcém d'un moteur par exemple) sont telles que : $0 \leq E < U_E$.

a) Conduction ininterrompue du courant i_S

• **Fonctionnement (Fig. 33.4)**

- De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée. L'alimentation fournit de l'énergie à la charge et à l'inductance. On a :

$$u_S = U_E = L \frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad i_E = i_S \quad \text{et} \quad i_D = 0$$

D'où :

$$i_S = I_{S \text{ Min}} e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

- De $t = \alpha T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. L'inductance délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$u_S = 0 = L \frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad i_E = 0 \quad \text{et} \quad i_D = i_S$$

D'où :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R} \left(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

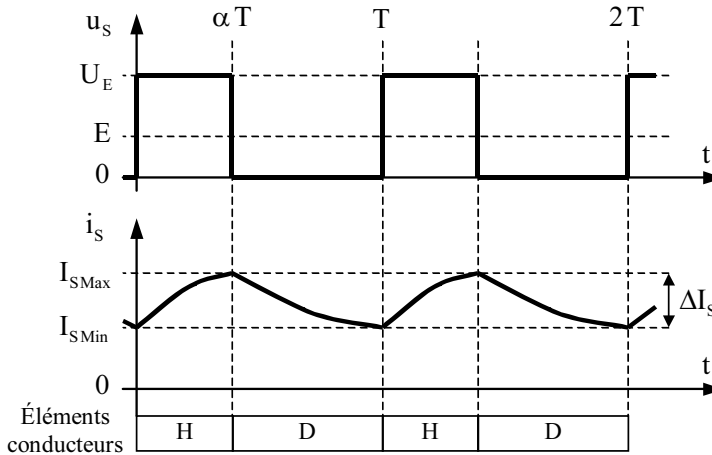


Fig. 33.4 Hacheur série – Conduction ininterrompue

• **Valeurs moyennes** (voir Fig. 33.3 et Fig. 33.4)

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} U_E dt \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E$$

$$\left. \begin{array}{l} u_S = u_L + Ri_S + E \\ u_{L \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - E}{R}$$

Question : En supposant le courant i_S constant et égal à $I_{S \text{ Moy}}$, exprimer le courant moyen en entrée $I_{E \text{ Moy}}$ et le courant moyen dans la diode $I_{D \text{ Moy}}$.

Réponse : Si $i_S = \text{Cste} = I_{S \text{ Moy}}$ alors

$$I_{E \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i_E dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i_S dt = \alpha I_{S \text{ Moy}}$$

$$I_{D \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i_D dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i_S dt = (1 - \alpha) I_{S \text{ Moy}}$$

Remarque : L'interrupteur électronique et la diode étant supposés sans perte, on a $P_{S \text{ Moy}} = P_{E \text{ Moy}}$ avec $P_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Moy}} I_{S \text{ Moy}}$ (cette relation est vraie parce que le courant i_S est supposé constant et égal à $I_{S \text{ Moy}}$) et $P_{E \text{ Moy}} = U_E I_{E \text{ Moy}}$. D'où :

$$P_{S \text{ Moy}} = P_{E \text{ Moy}} = \frac{\alpha U_E (\alpha U_E - E)}{R} \quad \text{si } i_S = \text{Cste} = I_{S \text{ Moy}}$$

• **Valeurs maximale et minimale du courant – Ondulation crête à crête.** Sachant que $i_S(\alpha T) = I_{S \text{ Max}}$ et $i_S(T) = I_{S \text{ Min}}$, on trouve :

$$I_{S \text{ Max}} = \frac{U_E}{R} \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad I_{S \text{ Min}} = \frac{U_E}{R} \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(1-\alpha)T/\tau} - \frac{E}{R}$$

D'où :

$$\Delta I_S = I_{S \text{ Max}} - I_{S \text{ Min}} = \frac{U_E}{R} \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \left(1 - e^{-(1-\alpha)T/\tau} \right)$$

Question : En supposant $\tau \gg T$, exprimer l'ondulation crête à crête de courant ΔI_S . Calculer α pour que ΔI_S soit maximal. En déduire $(\Delta I_S)_{\text{Max}}$.

Réponse : Puisque $\tau \gg T$, on effectue un développement limité au 1^{er} ordre des exponentielles. D'où :

$$\Delta I_S = I_{S \text{ Max}} - I_{S \text{ Min}} \approx \frac{U_E}{R} \frac{\alpha (1 - \alpha) T}{\tau} \quad \text{avec } \tau = \frac{L}{R}$$

En résolvant $d(\Delta I_S)/d\alpha = 0$, on trouve que ΔI_S est maximal pour $\alpha = 0,5$.

Par suite :

$$(\Delta I_S)_{\text{Max}} \approx \frac{U_E}{R} \frac{T}{4\tau} = \frac{U_E T}{4L}.$$

Ce qui permet de dimensionner l'inductance L (voir aussi la remarque du § b) ci-après).

b) Conduction interrompue du courant i_S

• **Fonctionnement (Fig. 33.5)**

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée.

On a :

$$u_S = U_E = L \frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad i_E = i_S \quad \text{et} \quad i_D = 0$$

D'où :

$$i_S = \frac{U_E - E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (\text{car } I_{S \text{ Min}} = 0)$$

– De $t = \alpha T$ à $t = \gamma T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante.

On a :

$$u_S = 0 = L \frac{di_S}{dt} + Ri_S + E \quad i_E = 0 \quad \text{et} \quad i_D = i_S$$

D'où :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R} \left(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

– De $t = \gamma T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D bloquée.

On a :

$$u_S = E \quad \text{et} \quad i_E = i_D = i_S = 0$$

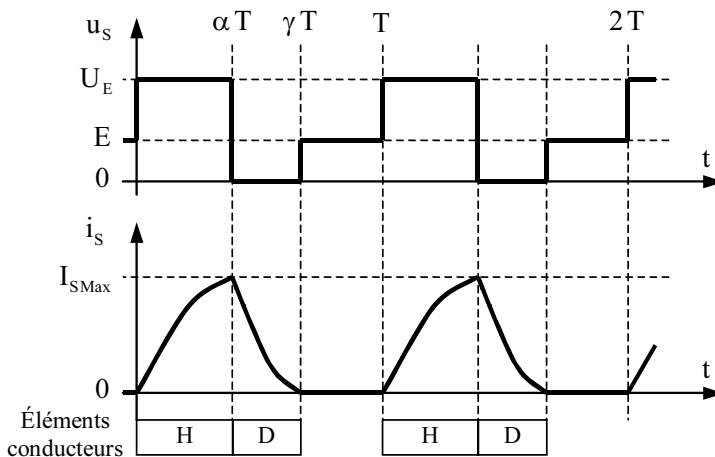


Fig. 33.5 Hacheur série – Conduction interrompue

• **Valeurs moyennes** (voir Fig. 33.3 et Fig. 33.5)

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\alpha T} U_E dt + \int_{\gamma T}^T E dt \right) \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E + (1 - \gamma) E$$

$$\left. \begin{array}{l} u_S = u_L + Ri_S + E \\ U_{L \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - \gamma E}{R}$$

• **Valeur maximale du courant.** A partir de l'expression de i_S valable pour $t = 0$ à $t = \alpha T$, et sachant que $i_S(\alpha T) = I_{S \text{ Max}}$, on trouve :

$$I_{S \text{ Max}} = \frac{U_E - E}{R} \left(1 - e^{-\alpha T / \tau} \right)$$

Question : Déterminer l'instant γT d'annulation du courant i_S .

Réponse : À partir de l'expression de i_S valable pour $t = \alpha T$ à $t = \gamma T$, et sachant que $i_S(\gamma T) = 0$, on trouve :

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \ln \left(1 + \frac{U_E}{E} \left(e^{\alpha T / \tau} - 1 \right) \right)$$

Remarque : La conduction interrompue du courant dans la charge n'est généralement pas souhaitée. L'expression de γ permet de dimensionner l'inductance de lissage, sachant que $\gamma = 1$ délimite les conductions interrompue et ininterrompue.

33.2 HACHEUR PARALLÈLE OU SURVOLTEUR

33.2.1 Principe (Fig. 33.6)

Un hacheur parallèle permet de régler le transfert d'énergie d'une source de courant continu (ou alimentation inductive) vers une source de tension continue (ou charge capacitive) en liaison directe (forward), c'est-à-dire sans élément intermédiaire d'accumulation.

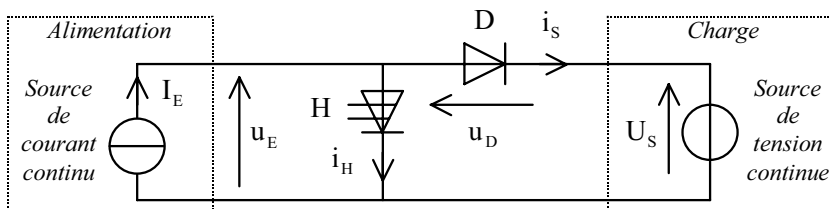


Fig. 33.6 Principe du hacheur parallèle

L'interrupteur électronique H, placé en parallèle sur la source de courant, est périodiquement ouvert pendant une durée βT et fermé pendant αT ($\alpha = 1 - \beta$), où T est la période.

- De $t = 0$ à $t = \beta T$, l'interrupteur électronique H est ouvert, la diode D est passante et se comporte comme un interrupteur fermé. La source de courant fournit de l'énergie à la source de tension. On a :

$$i_S = I_E \quad u_E = U_S \quad i_H = 0$$

- De $t = \beta T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est fermé, la diode D est bloquée et se comporte comme un interrupteur ouvert. On a :

$$i_S = 0 \quad u_E = 0 \quad i_H = I_E$$

D'où :

$$I_{S \text{ Moy}} = \beta I_E = (1 - \alpha) I_E$$

$$U_{E \text{ Moy}} = \beta U_S = (1 - \alpha) U_S$$

$$P_{E \text{ Moy}} = U_{E \text{ Moy}} I_E = \beta U_S I_E = U_S I_{S \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}}$$

La tension continue de sortie est supérieure à la tension moyenne d'entrée : le hacheur parallèle est élévateur de tension, d'où le nom de *hacheur survolteur*. Par contre, le courant moyen de sortie est inférieur au courant continu d'entrée.

33.2.2 Hacheur parallèle avec lissage de la tension (Fig. 33.7)

En pratique, on ajoute une capacité de lissage de la tension, lorsque la charge ne se comporte pas comme une source de tension continue. Le courant continu I_E de l'alimentation et le courant continu I de la charge sont tels que : $0 \leq I < I_E$.

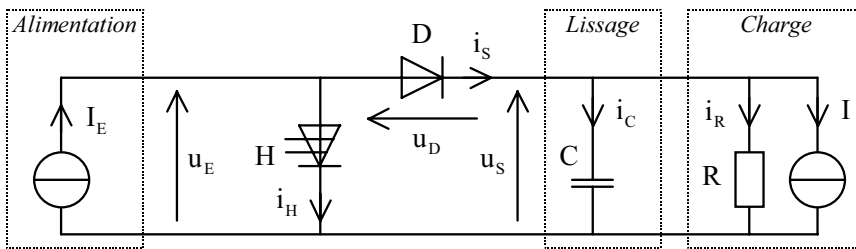


Fig. 33.7 Hacheur parallèle avec lissage de la tension

a) *Ininterruption de la tension u_S*

• *Fonctionnement (Fig. 33.8)*

- De $t = 0$ à $t = \beta T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. L'alimentation fournit de l'énergie à la charge et au condensateur. On a :

$$i_S = I_E = C \frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I \quad u_E = u_S \quad \text{et} \quad i_H = 0$$

D'où :

$$u_S = U_{S \text{ Min}} e^{-t/\tau} + R(I_E - I) \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

– De $t = \beta T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée. Le condensateur délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$i_S = 0 = C \frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I \quad u_E = 0 \quad \text{et} \quad i_H = I_E$$

D'où :

$$u_S = U_{S \text{ Max}} e^{-(t-\beta T)/\tau} + RI \left(-1 + e^{-(t-\beta T)/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

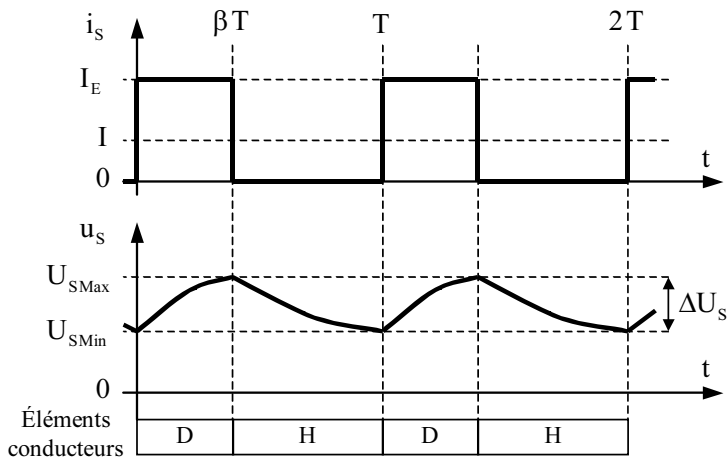


Fig. 33.8 Hacheur parallèle – Interruption de la tension u_S

• **Valeurs moyennes** (voir Fig. 33.7 et Fig. 33.8)

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^{\beta T} I_E dt \Rightarrow I_{S \text{ Moy}} = \beta I_E$$

$$\left. \begin{array}{l} u_S = R(i_S - i_C - I) \\ I_{C \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = R(I_{S \text{ Moy}} - I) = R(\beta I_E - I)$$

D'où, en remplaçant β par $1 - \alpha$:

$$I_{S \text{ Moy}} = (1 - \alpha) I_E \quad \text{et} \quad U_{S \text{ Moy}} = R((1 - \alpha) I_E - I)$$

Question : En supposant la tension u_S constante et égale à $U_{S \text{ Moy}}$, exprimer la tension moyenne en entrée $U_{E \text{ Moy}}$ et la tension moyenne aux bornes de la diode $U_{D \text{ Moy}}$.

Réponse : Si $u_S = \text{Cste} = U_{S \text{ Moy}}$ alors

$$U_{E \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^{\beta T} u_E dt = \frac{1}{T} \int_0^{\beta T} u_S dt = \beta U_{S \text{ Moy}} = (1 - \alpha) U_{S \text{ Moy}}$$

$$U_{D \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_{\beta T}^T u_D dt = \frac{1}{T} \int_{\beta T}^T -u_S dt = -(1 - \beta) U_{S \text{ Moy}} = -\alpha U_{S \text{ Moy}}$$

Remarque : L'interrupteur électronique et la diode étant supposés sans perte, on a $P_{S \text{ Moy}} = P_{E \text{ Moy}}$ avec $P_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Moy}} I_{S \text{ Moy}}$ (cette relation est vraie parce que la tension u_S est supposée constante et égale à $U_{S \text{ Moy}}$) et $P_{E \text{ Moy}} = U_{E \text{ Moy}} I_E$. D'où :

$$P_{S \text{ Moy}} = P_{E \text{ Moy}} = R\beta I_E (\beta I_E - I) \quad \text{si} \quad u_S = U_{S \text{ Moy}} = \text{Cste}$$

• **Valeurs maximale et minimale de la tension – Ondulation crête à crête.** Sachant que $u_S(\beta T) = U_{S \text{ Max}}$ et $u_S(T) = U_{S \text{ Min}}$, on trouve :

$$U_{S \text{ Max}} = R I_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - R I \quad \text{et} \quad U_{S \text{ Min}} = R I_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} e^{-(1-\beta)T/\tau} - R I$$

D'où :

$$\Delta U_S = U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}} = R I_E \frac{1 - e^{-\beta T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \left(1 - e^{-(1-\beta)T/\tau} \right)$$

Question : En supposant $\tau \gg T$, exprimer l'ondulation crête à crête de tension ΔU_S . Calculer β pour que ΔU_S soit maximal. En déduire $(\Delta U_S)_{\text{Max}}$.

Réponse : Puisque $\tau \gg T$, on effectue un développement limité au 1^{er} ordre des exponentielles. D'où :

$$\Delta U_S = U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}} \approx R I_E \frac{\beta (1 - \beta) T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

En résolvant $d(\Delta U_S)/d\beta = 0$, on trouve que ΔU_S est maximal pour $\beta = 0,5$.

Par suite :

$$(\Delta U_S)_{\text{Max}} \approx R I_E \frac{T}{4\tau} = \frac{I_E T}{4C}$$

Ce qui permet de dimensionner le condensateur C (voir aussi la remarque du § b) ci-après).

b) Interruption de la tension u_S • **Fonctionnement (Fig. 33.9)**

– De $t = 0$ à $t = \beta T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante.

On a :

$$i_S = I_E = C \frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I \quad u_E = u_S \quad \text{et} \quad i_H = 0$$

D'où :

$$u_S = R(I_E - I) \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC \quad (\text{car } U_{S \text{ Min}} = 0)$$

– De $t = \beta T$ à $t = \gamma T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée.

On a :

$$i_S = 0 = C \frac{du_S}{dt} + \frac{u_S}{R} + I \quad u_E = 0 \quad \text{et} \quad i_H = I_E$$

D'où :

$$u_S = U_{S \text{ Max}} e^{-(t-\beta T)/\tau} + RI \left(-1 + e^{-(t-\beta T)/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

– De $t = \gamma T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D passante.

On a :

$$u_S = 0 \quad u_E = 0 \quad i_S = I \quad \text{et} \quad i_H = I_E - I$$

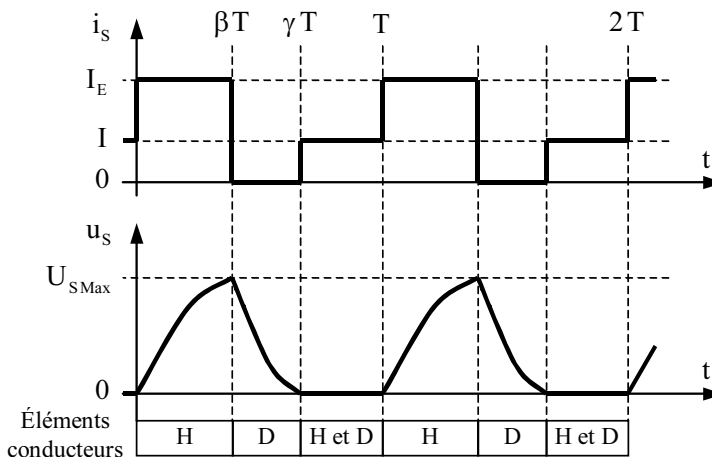


Fig. 33.9 Hacheur parallèle – Interruption de la tension u_S

• **Valeurs moyennes** (voir Fig. 33.7 et Fig. 33.9)

$$I_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\beta T} I_E dt + \int_{\gamma T}^T I dt \right) \Rightarrow I_{S \text{ Moy}} = \beta I_E + (1 - \gamma) I$$

$$u_S = R \left. \begin{array}{l} (i_S - i_C - I) \\ I_{C \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = R (I_{S \text{ Moy}} - I) = R (\beta I_E - \gamma I)$$

• **Valeur maximale de la tension.** À partir de l'expression de u_S valable pour $t = 0$ à $t = \beta T$, et sachant que $u_S(\beta T) = U_{S \text{ Max}}$, on trouve :

$$U_{S \text{ Max}} = R (I_E - I) \left(1 - e^{-\beta T / \tau} \right)$$

Question : Déterminer l'instant γT d'annulation de la tension u_S .

Réponse : À partir de l'expression de u_S valable pour $t = \beta T$ à $t = \gamma T$, et sachant que $u_S(\gamma T) = 0$, on trouve :

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \ln \left(1 + \frac{I_E}{I} \left(e^{\beta T / \tau} - 1 \right) \right)$$

Remarque : L'expression de γ permet de dimensionner le condensateur de lissage, sachant que $\gamma = 1$ délimite l'interruption de l'interruption de la tension.

c) Réalisation de l'alimentation en courant (Fig. 33.10)

En pratique, l'alimentation en courant est réalisée par la mise en série d'une bobine d'inductance L avec la source de tension continue U_0 . La résistance r représente la résistance série de la bobine.

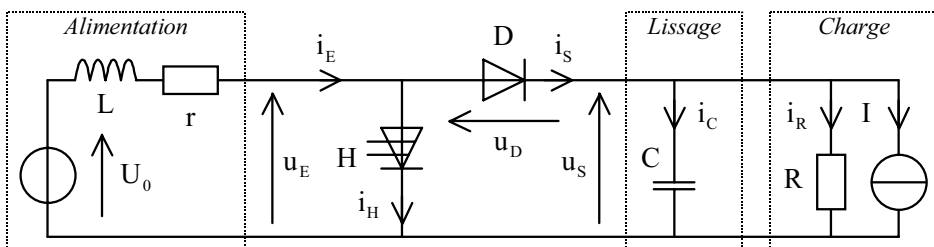


Fig. 33.10 Hacheur parallèle – Alimentation en courant

► Fonctionnement

On suppose l'inductance L suffisamment grande afin de pouvoir considérer le courant i_E constant ($i_E = \text{Cste} = I_E$). On a alors (voir § a) :

$$I_{S \text{ Moy}} = (1 - \alpha) I_E \quad \text{et} \quad U_{S \text{ Moy}} = R ((1 - \alpha) I_E - I) \quad \text{avec} \quad \beta = 1 - \alpha$$

De plus, on suppose la capacité C suffisamment grande afin de pouvoir considérer la tension u_S constante ($u_S = Cste = U_{S \text{ Moy}}$). On peut alors écrire en valeurs moyennes :

$$U_0 = rI_E + U_{D \text{ Moy}} + U_{S \text{ Moy}} \quad \text{avec} \quad U_{D \text{ Moy}} = -\alpha U_{S \text{ Moy}}$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{(1 - \alpha) U_0 - rI}{(1 - \alpha)^2 + r/R}$$

Remarque :

– La tension $U_{S \text{ Moy}}$ possède un maximum. Avec $I = 0$ pour simplifier, on a :

$$U_{S \text{ Moy}} = U_{S \text{ Moy Max}} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{R}{r}} \quad \text{pour} \quad \alpha = 1 - \sqrt{\frac{r}{R}}$$

– Si $r = 0$, on retrouve le résultat déjà établi (voir § a), à savoir :

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_0}{1 - \alpha} \quad \text{avec} \quad U_{E \text{ Moy}} = U_0$$

► Dimensionnement de l'inductance

On suppose la capacité C suffisamment grande afin de pouvoir considérer la tension u_S constante ($u_S = Cste = U_{S \text{ Moy}}$), et $r = 0$ pour simplifier.

– De $t = 0$ à $t = \beta T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante.

On a :

$$U_0 = L \frac{di_E}{dt} + U_{S \text{ Moy}} \quad i_S = i_E \quad u_E = u_S \quad \text{et} \quad i_H = 0$$

D'où :

$$i_E = \frac{U_0 - U_{S \text{ Moy}}}{L} t + I_{E \text{ Max}} \Rightarrow I_{E \text{ Min}} = \frac{U_0 - U_{S \text{ Moy}}}{L} \beta T + I_{E \text{ Max}}$$

– De $t = \beta T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée.

On a :

$$U_0 = L \frac{di_E}{dt} \quad i_S = 0 \quad u_E = 0 \quad \text{et} \quad i_H = i_E$$

D'où :

$$i_E = \frac{U_0}{L} (t - \beta T) + I_{E \text{ Min}} \Rightarrow I_{E \text{ Max}} = \frac{U_0}{L} (1 - \beta) T + I_{E \text{ Min}}$$

Finalement, on obtient la relation suivante qui permet de dimensionner L :

$$\Delta I_E = I_{E \text{ Max}} - I_{E \text{ Min}} = \frac{U_E}{L} (1 - \beta) T = \frac{U_E}{L} \alpha T$$

33.3 HACHEUR À ACCUMULATION INDUCTIVE (FIG. 33.11)

Ce hacheur permet de régler le transfert d'énergie d'une source de tension continue (ou alimentation capacitive) vers une autre source de tension (ou charge capacitive), *via* une inductance d'accumulation. Pour simplifier, on considère la tension $u_s = E$ constante.

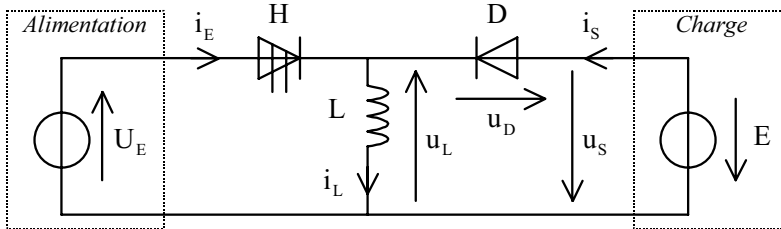


Fig. 33.11 Hacheur à accumulation inductive

• Fonctionnement (Fig. 33.12)

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée. L'alimentation fournit de l'énergie à l'inductance.

On a :

$$u_L = U_E = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_E = i_L \quad \text{et} \quad i_s = 0$$

D'où :

$$i_L = \frac{U_E}{L} t + I_{L \text{ Min}} \Rightarrow I_{L \text{ Max}} = \frac{U_E}{L} \alpha T + I_{L \text{ Min}}$$

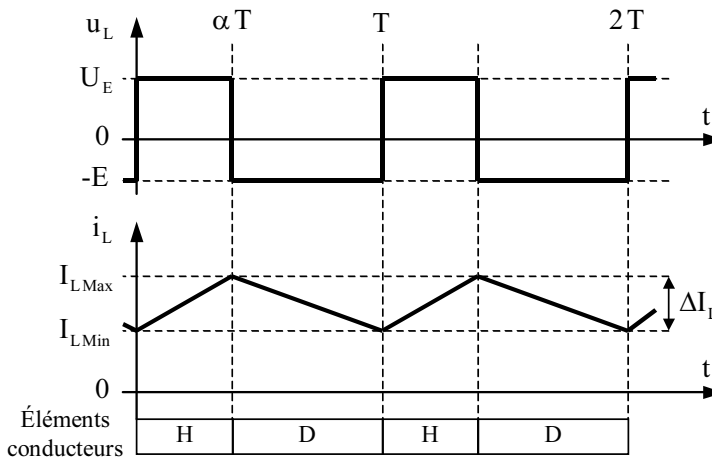


Fig. 33.12 Hacheur à accumulation

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. L'inductance délivre à la charge l'énergie précédemment emmagasinée.

On a :

$$u_L = -E = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_E = 0 \quad \text{et} \quad i_S = i_L$$

D'où :

$$i_L = \frac{-E}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ Max}} \Rightarrow I_{L \text{ Min}} = \frac{-E}{L} (1 - \alpha) T + I_{L \text{ Max}}$$

• **Valeur moyenne**

$$\left. \begin{array}{l} U_{L \text{ Moy}} = \alpha U_E - (1 - \alpha) E \\ U_{L \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E = \frac{\alpha U_E}{1 - \alpha}$$

Si $\alpha < 0,5$ le hacheur abaisse la tension, et si $\alpha > 0,5$ le hacheur élève la tension.

• **Ondulation crête à crête du courant.** Elle permet de dimensionner L.

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{U_E}{L} \alpha T = \frac{E}{L} (1 - \alpha) T$$

33.4 HACHEUR DEUX QUADRANTS OU EN DEMI-PONT

33.4.1 Principe (Fig. 33.13)

Un hacheur deux quadrants associe un hacheur série et un hacheur parallèle. Il est réversible en courant mais pas en tension ; l'énergie est transférée de la source de tension continue vers la source de courant continu si $I_S > 0$, et réciproquement si $I_S < 0$. L'alimentation ($U_E > 0$) doit être réversible en courant.

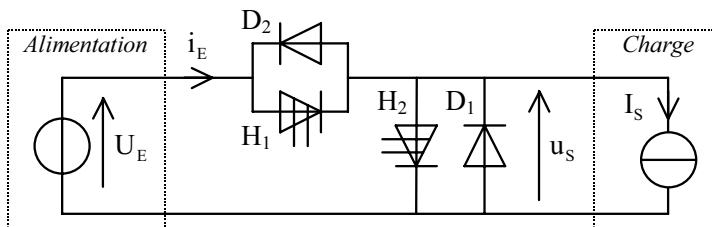


Fig. 33.13 Principe du hacheur deux quadrants

On effectue une *commande complémentaire* des interrupteurs électroniques de telle manière que l'on ait :

- H_1 fermé ou D_2 passante, et H_2 ouvert et D_1 bloquée, pendant αT , puis
- H_1 ouvert et D_2 bloquée, et H_2 fermé ou D_1 passante, pendant $(1 - \alpha) T$.

On obtient alors le schéma équivalent suivant (Fig. 33.14).

- De $t = 0$ à $t = \alpha T$, K_1 est fermé et K_2 ouvert. On a : $u_s = U_E$ et $i_E = I_S$

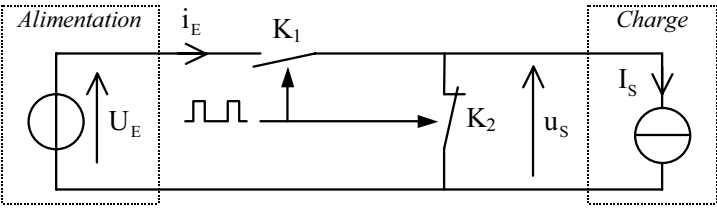


Fig. 33.14 Schéma équivalent au principe du hacheur deux quadrants

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, K_1 est ouvert et K_2 fermé. On a : $u_s = 0$ et $i_E = 0$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E$$

$$I_{E \text{ Moy}} = \alpha I_S$$

$$P_{E \text{ Moy}} = U_E I_{E \text{ Moy}} = \alpha U_E I_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = P_{S \text{ Moy}}$$

Deux quadrants ($U_E > 0$)	$I_S > 0$	$I_S < 0$
$0 < \alpha < 1 \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} > 0$	① $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} > 0$	② $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} < 0$

Si $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} > 0$ alors la source de tension fournit de l'énergie à la source de courant, et réciproquement si $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} < 0$.

Remarques :

- On pourrait envisager des commandes séparées du hacheur série et du hacheur parallèle, mais seule la commande complémentaire décrite ici assure la continuité du réglage de $U_{S \text{ Moy}}$ quels que soient le sens et la valeur de I_S .
- On obtient les mêmes formules que pour le hacheur série (voir principe § 33.1.1), mais le courant I_S peut être positif ou négatif avec le hacheur deux quadrants, alors qu'il ne peut être que positif avec le hacheur série.

33.4.2 Hacheur deux quadrants avec lissage du courant (Fig. 33.15)

En pratique, on ajoute une inductance de lissage du courant, lorsque la charge ne se comporte pas comme une source de courant continu. Ce hacheur permet par exemple de commander une machine à courant continu ; cette machine fonctionne en moteur si $P_{S \text{ Moy}} > 0$ et en génératrice si $P_{S \text{ Moy}} < 0$ (freinage par récupération). Les sources de tensions continues sont telles que $U_E > 0$ et $E \geq 0$.

On obtient les mêmes formules que pour le hacheur série, mais, avec le hacheur deux quadrants, le courant dans la charge i_s peut être positif ou négatif et il est toujours ininterrompu (sauf pour le cas limite $E = 0$ et $L/R \ll T$).

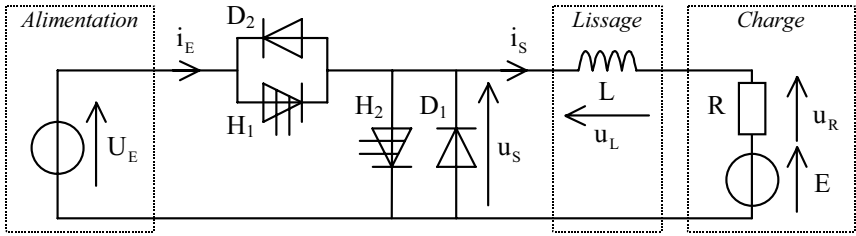


Fig. 33.15 Hacheur deux quadrants avec lissage du courant

• **Fonctionnement** (voir hacheur série § 33.1.2a).

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, K_1 est fermé et K_2 ouvert. On a :

$$i_s = I_{S \text{ Min}} e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, K_1 est ouvert et K_2 fermé. On a :

$$i_s = I_{S \text{ Max}} e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{E}{R} \left(-1 + e^{-(t-\alpha T)/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

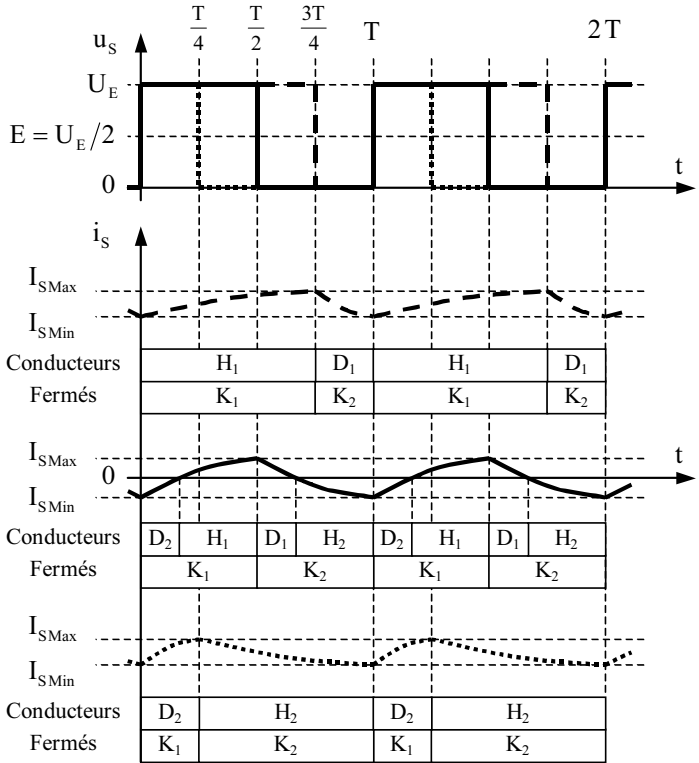


Fig. 33.16 Hacheur deux quadrants

Trois cas typiques existent selon les valeurs de α , de U_E et de E (Fig. 33.16) : Le courant dans la charge i_S peut être seulement positif (fonctionnement en hacheur série), ou seulement négatif (fonctionnement en hacheur parallèle), ou alternativement positif et négatif (fonctionnement en hacheur série et parallèle).

- **Valeurs moyennes** (voir hacheur série § 33.1.2a).

$$U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E \quad I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} = \frac{\alpha U_E - E}{R}$$

- **Valeurs maximale et minimale du courant – Ondulation crête à crête – Dimensionnement de l'inductance L** (voir hacheur série § 33.1.2a).

33.5 HACHEUR QUATRE QUADRANTS OU EN PONT

33.5.1 Principe (Fig. 33.17)

Un hacheur quatre quadrants associe deux hacheurs demi-pont. Il est réversible en courant et en tension ; l'énergie est transférée de la source de tension continue vers la source de courant continu si $P_{S \text{ Moy}} > 0$, et réciproquement si $P_{S \text{ Moy}} < 0$. L'alimentation ($U_E > 0$) doit être réversible en courant.

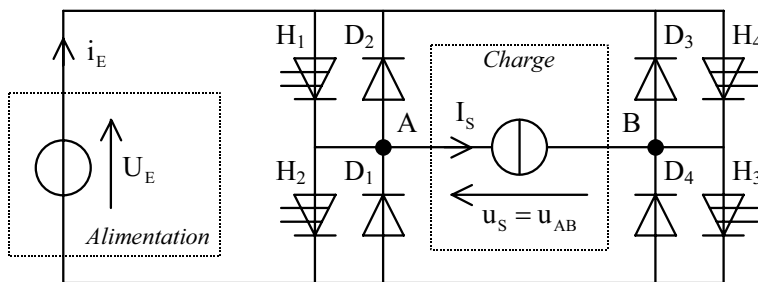


Fig. 33.17 Principe du hacheur quatre quadrants

On effectue une *commande complémentaire* des interrupteurs électroniques de telle manière que l'on ait :

- H_1 fermé ou D_2 passante, H_3 fermé ou D_4 passante, H_2 ouvert et D_1 bloquée, et H_4 ouvert et D_3 bloquée, pendant αT , puis
- H_1 ouvert et D_2 bloquée, H_3 ouvert et D_4 bloquée, H_2 fermé ou D_1 passante, et H_4 fermé ou D_3 passante, pendant $(1 - \alpha) T$.

On obtient alors le schéma équivalent suivant (Fig. 33.18).

- De $t = 0$ à $t = \alpha T$, K_1 et K_3 sont fermés, K_2 et K_4 ouverts. On a :

$$u_S = U_E \quad \text{et} \quad i_E = I_S$$

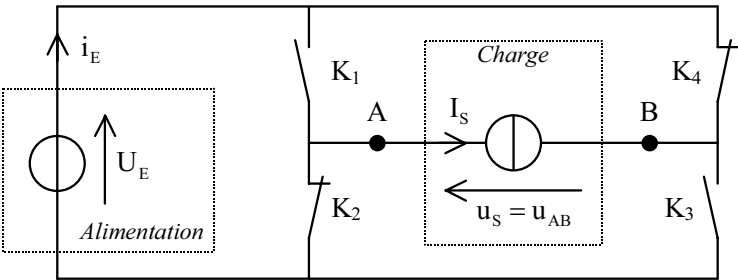


Fig. 33.18 Schéma équivalent au principe du hacheur quatre quadrants

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, K_1 et K_3 sont ouverts, K_2 et K_4 fermés. On a :

$$u_S = -U_E \quad \text{et} \quad i_E = -I_S$$

D'où :

$$U_{S \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) U_E$$

$$I_{E \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) I_S$$

$$P_{E \text{ Moy}} = U_E I_{E \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) U_E I_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = P_{S \text{ Moy}}$$

Quatre quadrants ($U_E > 0$)	$I_S > 0$	$I_S < 0$
$0,5 < \alpha < 1 \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} > 0$	① $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} > 0$	② $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} < 0$
$0 < \alpha < 0,5 \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} < 0$	③ $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} < 0$	④ $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} > 0$

Si $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} > 0$ alors la source de tension fournit de l'énergie à la source de courant, et réciproquement si $P_{E \text{ Moy}} = P_{S \text{ Moy}} < 0$.

Remarque : D'autres commandes sont possibles, mais seule la commande complémentaire décrite ici assure la continuité du réglage de $U_{S \text{ Moy}}$, y compris au passage à zéro, quels que soient le sens et la valeur de I_S . Si K_3 est toujours fermé et K_4 toujours ouvert, on retrouve le hacheur deux quadrants précédent (voir § 33.4.1).

33.5.2 Hacheur quatre quadrants avec lissage du courant

En pratique, on ajoute une inductance de lissage du courant, lorsque la charge ne se comporte pas comme une source de courant continu (Fig. 33.19). Ce hacheur permet par exemple de commander une machine à courant continu dans les deux sens de rotation continûment ($U_{S \text{ Moy}}$ peut être positif, nul, ou négatif) ; cette machine fonctionne en moteur si $P_{S \text{ Moy}} > 0$ et en génératrice si $P_{S \text{ Moy}} < 0$ (freinage par récupération).

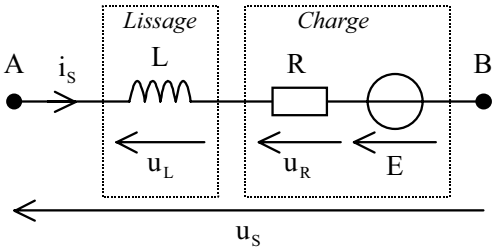


Fig. 33.19 Lissage du courant et charge

• **Fonctionnement**

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, K_1 et K_3 sont fermés, K_2 et K_4 ouverts. On a :

$$u_s = U_E = L \frac{di_s}{dt} + Ri_s + E \quad \text{et} \quad i_E = i_s$$

D'où :

$$i_s = I_{S \text{ Min}} e^{-t/\tau} + \frac{U_E - E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, K_1 et K_3 sont ouverts, K_2 et K_4 fermés. On a :

$$u_s = -U_E = L \frac{di_s}{dt} + Ri_s + E \quad \text{et} \quad i_E = -i_s$$

D'où :

$$i_s = I_{S \text{ Max}} e^{-(t-\alpha T)/\tau} + \frac{-U_E - E}{R} \left(1 - e^{-(t-\alpha T)/\tau} \right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

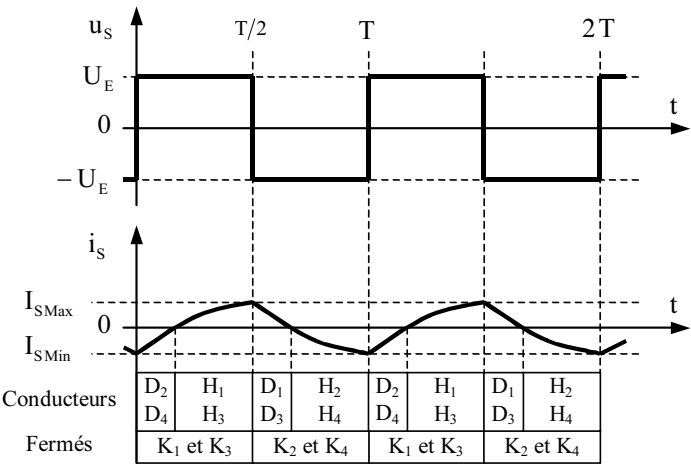


Fig. 33.20 Hacheur quatre quadrants ($\alpha = 0,5$ et $E = 0$)

Trois cas typiques existent selon les valeurs de α , de U_E et de E . Le courant dans la charge i_s peut être seulement positif, ou seulement négatif, ou alternativement positif et négatif (Fig. 33.20 où $\alpha = 0,5$ et $E = 0$).

- **Valeurs moyennes** (voir Fig. 33.19 et Fig. 33.20)

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u_S dt \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) U_E$$

$$\left. \begin{array}{l} u_S = u_L + Ri_S + E \\ U_{L \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{S \text{ Moy}} - E}{R} = \frac{(2\alpha - 1) U_E - E}{R}$$

- **Valeurs maximale et minimale du courant – Ondulation crête à crête.** Sachant que $i_S(\alpha T) = I_{S \text{ Max}}$ et $i_S(T) = I_{S \text{ Min}}$, on trouve :

$$I_{S \text{ Max}} = \frac{U_E}{R} \frac{1 - 2e^{-\alpha T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R}$$

$$I_{S \text{ Min}} = \frac{-U_E}{R} \frac{1 - 2e^{-(1-\alpha)T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} - \frac{E}{R}$$

D'où :

$$\Delta I_S = I_{S \text{ Max}} - I_{S \text{ Min}} = \frac{2U_E}{R} \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau} - e^{-(1-\alpha)T/\tau} + e^{-T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}}$$

Pour $\tau \gg T$, on effectue un développement limité au 2^{ième} ordre des exponentielles.
D'où :

$$\Delta I_S = I_{S \text{ Max}} - I_{S \text{ Min}} \approx \frac{4U_E}{R} \frac{\alpha(1-\alpha)T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

ΔI_S est maximal pour $\alpha = 0,5$ et vaut :

$$(\Delta I_S)_{\text{Max}} \approx \frac{U_E}{R} \frac{T}{\tau} = \frac{U_E T}{L}$$

Chapitre 34

Alimentations à découpage

Les alimentations à découpage, ou convertisseurs tension continue / tension continue, sont utilisées chaque fois que l'on recherche un rendement élevé, un encombrement réduit ou un faible poids. Par contre, elles sont plus bruyantes que les alimentations linéaires, l'ondulation en sortie est plus grande et le temps de réponse plus long. Une alimentation à découpage permet d'obtenir une tension de sortie plus petite, plus grande, et/ou de signe opposé à la tension d'entrée.

- Seul le régime permanent (périodique) est décrit dans ce chapitre.
- Pour simplifier, on considère les composants parfaits. On représente un interrupteur électronique par le symbole donné Chapitre 33 : Hacheurs.

34.1 CONVERTISSEURS SANS ISOLATION GALVANIQUE

34.1.1 Convertisseur abaisseur de tension (Fig. 34.1)

La structure du convertisseur abaisseur de tension (*step-down*, *buck converter*) est celle d'un hacheur série avec lissage du courant et de la tension par un circuit LC. Le convertisseur est à transfert direct (*forward*) d'énergie : l'énergie est transmise de l'alimentation à la charge sans élément intermédiaire d'accumulation. La tension d'alimentation U_E est continue, et on suppose le courant dans la charge I_S continu en régime permanent établi.

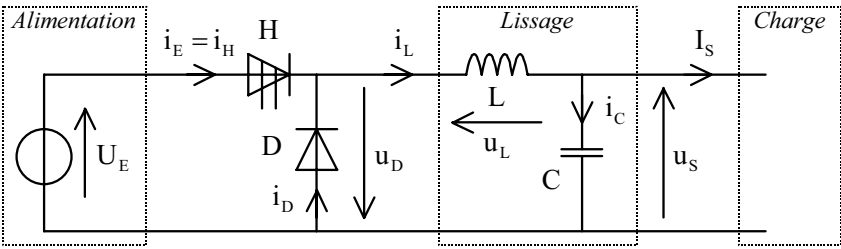


Fig. 34.1 Convertisseur abaisseur de tension

a) Conduction ininterrompue du courant i_L

• **Fonctionnement (Fig. 34.2).** On considère ici que la tension u_s est continue et égale à $U_{S Moy}$ et, en conséquence, que l'énergie stockée dans le condensateur ne varie pas, ce qui suppose une valeur suffisante de C.

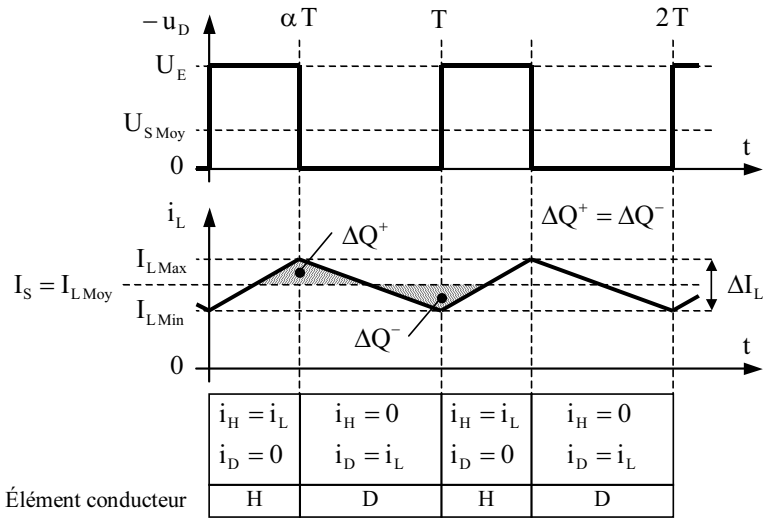


Fig. 34.2 Abaisseur de tension – Conduction ininterrompue

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée. L'alimentation fournit de l'énergie à la charge et à l'inductance. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_E - U_{S Moy} \quad \text{et} \quad -u_D = U_E$$

D'où :

$$i_L = \frac{U_E - U_{S Moy}}{L} t + I_{L Min}$$

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. L'inductance délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -U_{S \text{ Moy}} \quad \text{et} \quad -u_D = 0$$

D'où :

$$i_L = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ Max}}$$

• **Valeurs moyennes**

$$\left. \begin{array}{l} -u_D = u_L + u_S \\ U_{L \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \alpha U_E$$

$$\left. \begin{array}{l} i_L = i_C + I_S \\ I_{C \text{ Moy}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow I_S = I_{L \text{ Moy}} = \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} = \frac{I_E \text{ Moy}}{\alpha}$$

• **Ondulation crête à crête – Choix de l'inductance.** Sachant que $i_L(\alpha T) = I_{L \text{ Max}}$ et $i_L(T) = I_{L \text{ Min}}$, on trouve :

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{U_E - U_{S \text{ Moy}}}{L} \alpha T = \frac{U_{S \text{ Moy}}}{L} (1 - \alpha) T$$

Soit :

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{\alpha (1 - \alpha) T U_E}{L} \Rightarrow L = \frac{\alpha (1 - \alpha) T U_E}{\Delta I_L}$$

Question : Calculer α pour que ΔI_L soit maximal. En déduire $(\Delta I_L)_{\text{Max}}$.

Réponse : En résolvant $d(\Delta I_L)/d\alpha = 0$, on trouve que ΔI_L est maximal pour $\alpha = 0,5$. Par suite : $(\Delta I_L)_{\text{Max}} = \frac{U_E T}{4L}$

• **Choix du condensateur.** On considère ici que la tension u_S varie peu autour de $U_{S \text{ Moy}}$. La charge stockée dans C augmente lorsque $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_L > I_S$). Or $i_L > I_S$ pour $\alpha T/2 < t < (1 + \alpha) T/2$. L'augmentation de charge est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} dq &= C \int_{U_{S \text{ Min}}}^{U_{S \text{ Max}}} du_S = \int_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} i_C dt \\ &= \int_{\alpha T/2}^{(1+\alpha)T/2} (i_L - I_S) dt = \Delta Q^+ = \frac{1}{2} \frac{\Delta I_L}{2} \frac{T}{2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta Q^+ = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = \frac{T \Delta I_L}{8} \Rightarrow C = \frac{T \Delta I_L}{8 \Delta U_S}$$

b) Conduction interrompue du courant i_L

• **Fonctionnement (Fig. 34.3).** On considère ici que la tension u_S est continue et égale à $U_{S \text{ Moy}}$.

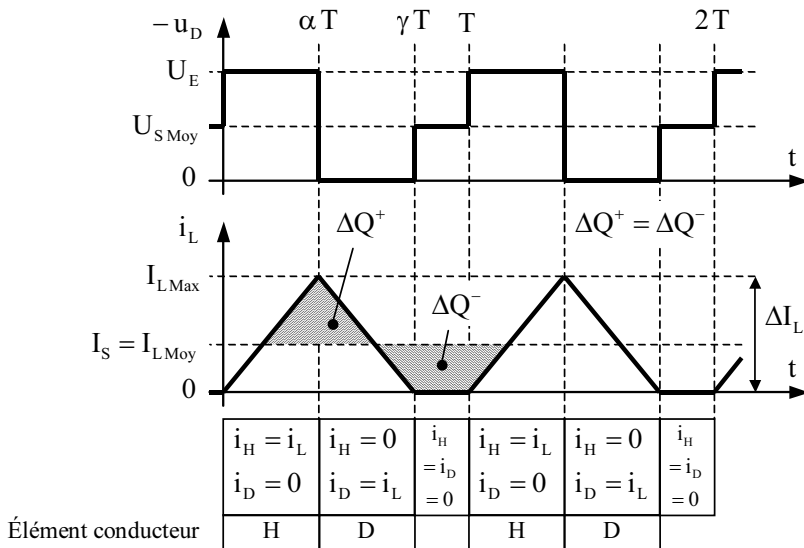


Fig. 34.3 Abaisseur de tension – Conduction interrompue

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée.
On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_E - U_{S \text{ Moy}} \quad \text{et} \quad -u_D = U_E$$

D'où :

$$i_L = \frac{U_E - U_{S \text{ Moy}}}{L} t \quad \text{car} \quad I_{L \text{ Min}} = 0$$

– De $t = \alpha T$ à $t = \gamma T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante.
On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -U_{S \text{ Moy}} \quad \text{et} \quad -u_D = 0$$

D'où :

$$i_L = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ Max}}$$

– De $t = \gamma T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D bloquée (absence d'énergie dans l'inductance). On a :

$$i_L = 0 \quad \text{et} \quad -u_D = U_{S \text{ Moy}}$$

Question : Exprimer l'instant d'extinction du courant i_L . En déduire la limite de α pour que la conduction soit interrompue.

Réponse :

$$\left. \begin{aligned} i_L(\gamma T) &= \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{L} (\gamma - \alpha) T + I_{L \text{ Max}} = 0 \\ I_{L \text{ Max}} &= \frac{\alpha (U_E - U_{S \text{ Moy}}) T}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha U_E}{U_{S \text{ Moy}}}$$

La conduction est interrompue si

$$\gamma \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \frac{U_{S \text{ Moy}}}{U_E}$$

• **Valeurs moyennes**

$$\left. \begin{aligned} -u_D &= u_L + u_S \\ U_{L \text{ Moy}} &= 0 \\ -U_{D \text{ Moy}} &= \alpha U_E + (1 - \gamma) U_{S \text{ Moy}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \frac{\alpha}{\gamma} U_E$$

$$\left. \begin{aligned} i_L &= i_C + I_S \\ I_{C \text{ Moy}} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_S = I_{L \text{ Moy}} = \frac{\gamma I_{L \text{ Max}}}{2} = \frac{\gamma I_{E \text{ Moy}}}{\alpha}$$

Ou encore (après calculs) :

$$I_{L \text{ Max}} = \frac{\alpha (U_E - U_{S \text{ Moy}}) T}{L} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2LI_S + \alpha^2 U_E T}$$

• **Ondulation crête à crête.** Sachant que $i_L(\alpha T) = I_{L \text{ Max}}$ et $i_L(\gamma T) = 0$, on trouve :

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} = \frac{U_E - U_{S \text{ Moy}}}{L} \alpha T = \frac{\alpha (\gamma - \alpha) T U_E}{\gamma L}$$

La limite entre la conduction ininterrompue et la conduction interrompue correspond à $\gamma = 1$. D'où :

$$\Delta I_{L(\gamma=1)} = I_{L \text{ Max}(\gamma=1)} = 2I_S \Rightarrow L_{(\gamma=1)} = \frac{\alpha (1 - \alpha) T U_E}{2I_S}$$

Question : Pour la limite entre conduction ininterrompue et conduction interrompue, calculer α pour que $L_{(\gamma=1)}$ soit maximal. En déduire $L_{(\gamma=1) \text{ Max}}$.

Réponse : En résolvant $dL_{(\gamma=1)}/d\alpha = 0$, on trouve que $L_{(\gamma=1)}$ est maximal pour $\alpha = 0,5$. Par suite : $L_{(\gamma=1) \text{ Max}} = \frac{T U_E}{8 I_S}$

• Puissance moyenne – Choix de l'inductance

$$\left. \begin{aligned} P_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = U_E I_{E \text{ Moy}} = \frac{\alpha I_{L \text{ Max}} U_E}{2} \\ I_{L \text{ Max}} = \frac{\alpha (U_E - U_{S \text{ Moy}}) T}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P_S = P_E &= \frac{\alpha^2 U_E (U_E - U_{S \text{ Moy}}) T}{2L} \\ L &= \frac{\alpha^2 U_E (U_E - U_{S \text{ Moy}}) T}{2P_E} \end{aligned}$$

34.1.2 Convertisseur élévateur de tension (Fig. 34.4)

La structure du convertisseur élévateur de tension (*step-up*, *boost converter*) est celle d'un hacheur parallèle avec lissage de la tension de sortie par un condensateur. Le convertisseur est à transfert direct d'énergie. La tension d'alimentation U_0 est continue, et on suppose le courant dans la charge I_S continu en régime permanent établi. On ne considère ici que le cas de la conduction ininterrompue du courant i_L .

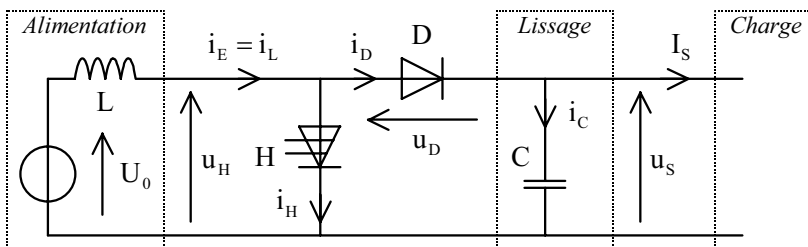


Fig. 34.4 Convertisseur élévateur de tension

• **Fonctionnement (Fig. 34.5).** On considère ici que la tension u_S est continue et égale à $U_{S \text{ Moy}}$.

– De $t = 0$ à $t = \beta T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. On a :

$$U_0 = L \frac{di_L}{dt} + U_{S \text{ Moy}} \quad \text{et} \quad u_H = U_{S \text{ Moy}}$$

D'où :

$$i_L = \frac{U_0 - U_{S \text{ Moy}}}{L} t + I_{L \text{ Max}}$$

– De $t = \beta T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée.
On a :

$$U_0 = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{et} \quad u_H = 0$$

D'où :

$$i_L = \frac{U_0}{L} (t - \beta T) + I_{L \text{ Min}}$$

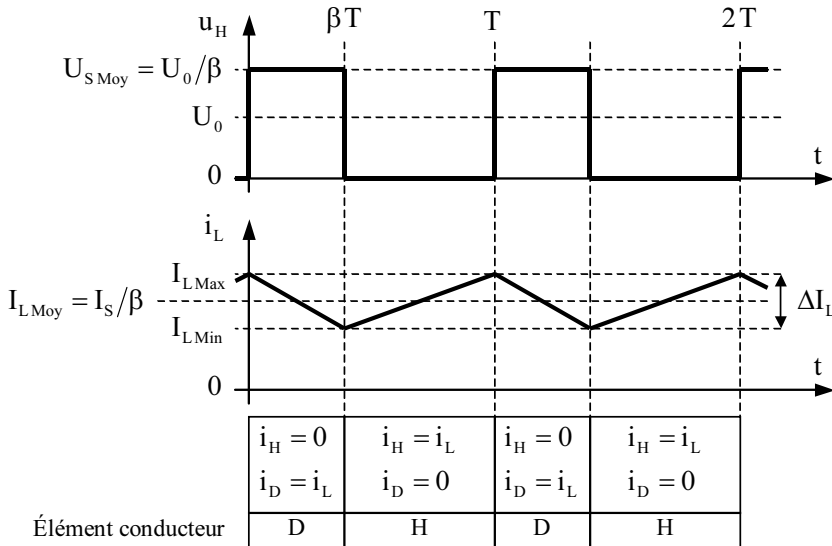


Fig. 34.5 Élévateur de tension – Conduction ininterrompue

• Valeurs moyennes

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = u_L + u_H \\ U_{L \text{ Moy}} = 0 \\ U_{H \text{ Moy}} = \beta U_{S \text{ Moy}} \end{array} \right\} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \frac{U_0}{1 - \alpha} \quad \text{en posant } \beta = 1 - \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} i_D = i_C + I_S \\ I_{C \text{ Moy}} = 0 \\ I_{D \text{ Moy}} = \beta \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_S = (1 - \alpha) \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} = (1 - \alpha) I_{L \text{ Moy}}$$

Remarque : En réalité, la tension $U_{S \text{ Moy}}$ ne peut pas devenir infinie lorsque α tend vers un. Cette expression de $U_{S \text{ Moy}}$ est le résultat d'approximations ; en particulier, la résistance série de l'inductance a été négligée (voir hacheur parallèle, Chapitre 33 : Hacheurs).

• **Ondulation crête à crête – Choix de l'inductance.** Sachant que $i_L(\beta T) = I_{L \text{ Min}}$ et $i_L(T) = I_{L \text{ Max}}$, on trouve :

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{\alpha U_0 T}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\alpha U_0 T}{\Delta I_L}$$

• **Choix du condensateur.** On considère ici que la tension u_S varie peu autour de $U_{S \text{ Moy}}$. La charge stockée dans C augmente lorsque $i_C > 0 \Leftrightarrow i_D > I_S$. Pour qu'elle augmente pendant toute la durée de $t = 0$ à $t = \beta T$, il faut que $I_S \leq I_{L \text{ Min}}$. Si cette condition est remplie, le condensateur se décharge uniquement de $t = \beta T$ à $t = T$. D'où :

$$\Delta Q = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = \alpha I_S T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}$$

Question : Expliciter la condition $I_S \leq I_{L \text{ Min}}$ en fonction de l'ondulation crête à crête relative $\Delta I_L / I_{L \text{ Moy}}$.

Réponse : D'après (Fig. 34.5), on a :

$$I_{L \text{ Min}} = I_{L \text{ Moy}} - \frac{\Delta I_L}{2} \quad \text{et} \quad I_S = \beta I_{L \text{ Moy}}$$

D'où :

$$I_S \leq I_{L \text{ Min}} \Leftrightarrow \beta I_{L \text{ Moy}} < I_{L \text{ Moy}} - \frac{\Delta I_L}{2} \quad \text{Soit :} \quad \frac{\Delta I_L}{I_{L \text{ Moy}}} \leq 2\alpha$$

34.1.3 Convertisseur inverseur de tension (Fig. 34.6)

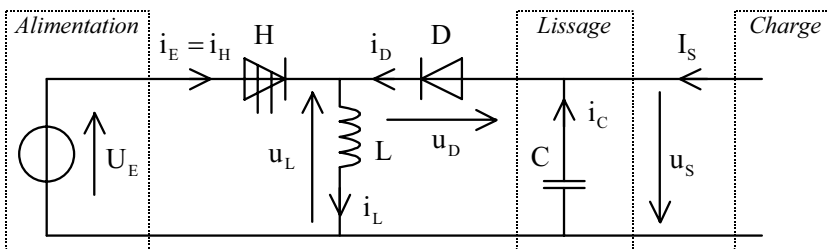


Fig. 34.6 Convertisseur inverseur de tension

La structure du convertisseur inverseur de tension (*invert*, *buck-boost converter*, *fly-back*) est celle d'un hacheur à accumulation inductive d'énergie avec lissage de la

tension par un condensateur. La tension d'alimentation U_E est continue, et on suppose le courant dans la charge I_S continu en régime permanent établi. On ne considère ici que le cas de la conduction ininterrompue du courant i_L .

• **Fonctionnement (Fig. 34.7).** On considère ici que la tension u_S est continue et égale à $U_{S Moy}$.

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé et la diode D bloquée. L'alimentation fournit de l'énergie à l'inductance. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_E \quad \text{D'où : } i_L = \frac{U_E}{L} t + I_{L Min}$$

– De $t = \alpha T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et la diode D passante. L'inductance délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -U_{S Moy} \quad \text{D'où : } i_L = \frac{-U_{S Moy}}{L} (t - \alpha T) + I_{L Max}$$

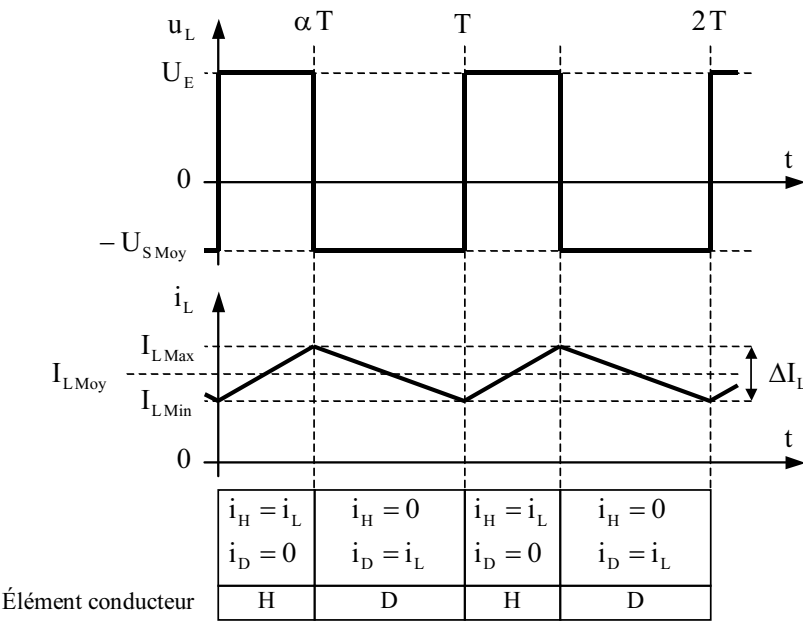


Fig. 34.7 Inverseur de tension – Conduction ininterrompue

• **Valeurs moyennes**

$$U_{L Moy} = \alpha U_E - (1 - \alpha) U_{S Moy} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{S Moy} = \frac{\alpha U_E}{1 - \alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} i_D &= i_C + I_S \\ I_{C \text{ Moy}} &= 0 \\ I_{D \text{ Moy}} &= (1 - \alpha) \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_S = (1 - \alpha) I_{L \text{ Moy}}$$

$$I_{E \text{ Moy}} = \alpha \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} = \alpha I_{L \text{ Moy}} \Rightarrow I_S = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I_{E \text{ Moy}}$$

- **Ondulation crête à crête – Choix de l'inductance.** Sachant que $i_L(\alpha T) = I_{L \text{ Max}}$ et $i_L(T) = I_{L \text{ Min}}$, on trouve :

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{U_E}{L} \alpha T = \frac{U_{S \text{ Moy}}}{L} (1 - \alpha) T \Rightarrow L = \frac{\alpha U_E T}{\Delta I_L}$$

- **Choix du condensateur.** On considère ici que la tension u_S varie peu autour de $U_{S \text{ Moy}}$. La charge stockée dans C augmente lorsque $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_D > I_S$). Pour qu'elle augmente pendant toute la durée de $t = \alpha T$ à $t = T$, il faut que $I_S \leq I_{L \text{ Min}}$. Si cette condition est remplie, le condensateur se décharge uniquement de $t = 0$ à $t = \alpha T$. D'où :

$$\Delta Q = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = \alpha I_S T \Rightarrow C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}$$

Remarque : Similairement à la question du § 34.1.2, la condition $I_S \leq I_{L \text{ Min}}$ s'exprime en fonction de l'ondulation crête à crête relative $\Delta I_L / I_{L \text{ Moy}}$. Soit :

$$\frac{\Delta I_L}{I_{L \text{ Moy}}} \leq 2\alpha$$

34.2 CONVERTISSEURS AVEC ISOLATION GALVANIQUE

L'isolation galvanique de la charge par rapport à l'alimentation s'obtient grâce à un transformateur qui, en plus, va permettre de fabriquer de multiples tensions, et aussi servir d'élément d'accumulation inductive d'énergie pour le flyback.

34.2.1 Convertisseur flyback isolé (Fig. 34.8)

C'est un convertisseur à accumulation inductive d'énergie (ou à récupération d'énergie). Le transfert d'énergie de l'alimentation à la charge s'effectue par un stockage intermédiaire sous forme inductive dans le transformateur. La tension d'alimentation U_E est continue, et on suppose le courant dans la charge I_S continu en régime permanent établi.

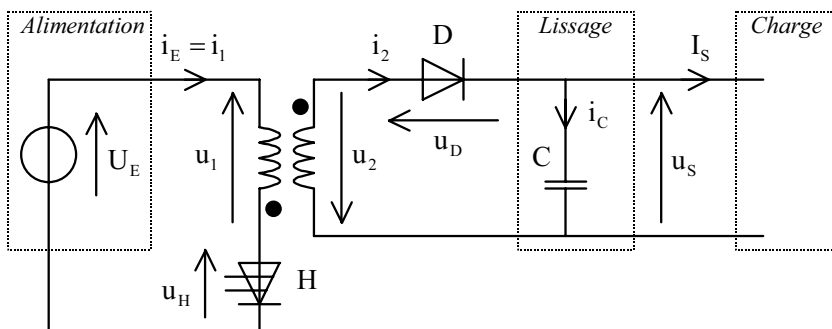


Fig. 34.8 Convertisseur isolé flyback

a) Schéma équivalent du transformateur (Fig. 34.9)

On suppose le transformateur, linéaire, sans fuite ni perte (voir T.S.F.P. Chapitre 15 : Transformateurs). On a :

$$\Re \varphi = n_1 i_1 + n_2 i_2 = n_1 i_{10} \quad (\text{Loi d'Hopkinson})$$

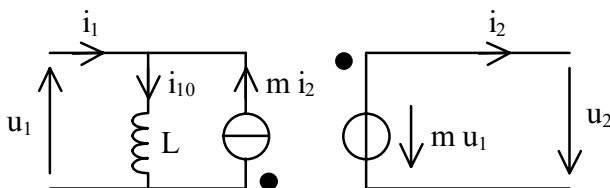
D'où :

$$i_1 + m i_2 = i_{10} \quad \text{avec} \quad m = n_2 / n_1$$

$$n_1 \varphi = L i_{10} \quad (\text{flux total au primaire})$$

$$u_1 = n_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad u_2 = n_2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{Loi de Lenz - Faraday})$$

\Re est la réluctance du circuit magnétique (voir Chapitre 4 : Électromagnétisme – Ferromagnétisme), φ le flux magnétisant à travers une section du circuit magnétique (c'est donc le flux par spire), n_1 (resp. n_2) le nombre de spires au primaire (resp. secondaire), i_{10} le courant magnétisant, et $L = n_1^2 / \Re$ l'inductance propre du primaire.

Fig. 34.9 Schéma équivalent du T.S.F.P. ($m > 0$)

b) Démagnétisation incomplète

Dire que la démagnétisation du transformateur est incomplète, c'est dire que le flux φ est ininterrompu ou que le courant magnétisant i_{10} est ininterrompu. Le courant i_2 ne s'annule pas durant la phase de démagnétisation.

● **Fonctionnement (Fig. 34.10).** On considère ici que la tension u_s est continue et égale à $U_{S Moy}$.

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$: l'interrupteur électronique H est fermé $\Rightarrow u_1 = U_E \Rightarrow u_2 = mU_E > 0 \Rightarrow$ la diode D est bloquée $\Rightarrow i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_{10}$. L'alimentation fournit de l'énergie à l'inductance L du transformateur. On a :

$$u_1 = L \frac{di_{10}}{dt} = U_E$$

D'où :

$$i_{10} = \frac{U_E}{L} t + I_{10 Min}$$

– De $t = \alpha T$ à $t = T$: l'interrupteur électronique H est ouvert $\Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow i_{10} = mi_2 > 0 \Rightarrow$ la diode D est passante $\Rightarrow u_2 = -U_{S Moy} \Rightarrow u_1 = -U_{S Moy}/m$. L'inductance délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$u_1 = L \frac{di_{10}}{dt} = \frac{-U_{S Moy}}{m}$$

D'où :

$$i_{10} = \frac{-U_{S Moy}}{mL} (t - \alpha T) + I_{10 Max}$$

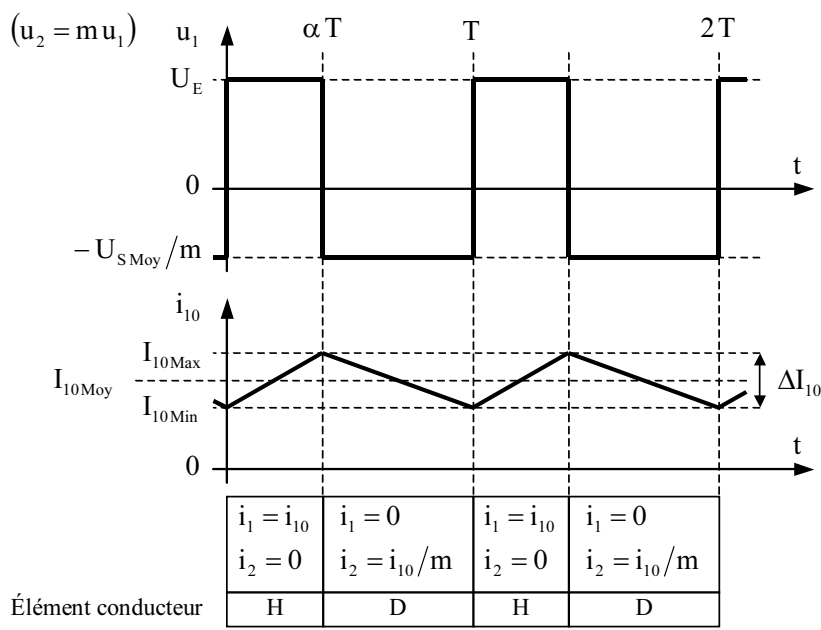


Fig. 34.10 Flyback – Démagnétisation incomplète

Question : Exprimer la tension u_H . En déduire sa valeur maximale.

Réponse :

$$u_H = U_E - u_1 \Rightarrow U_{H \text{ Max}} = U_E + \frac{U_{S \text{ Moy}}}{m}$$

• **Valeurs moyennes**

$$U_{1 \text{ Moy}} = \alpha U_E - (1 - \alpha) \frac{U_{S \text{ Moy}}}{m} = 0 \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \frac{m\alpha U_E}{1 - \alpha}$$

$$\left. \begin{array}{l} i_2 = i_C + I_S \\ I_{C \text{ Moy}} = 0 \\ I_{2 \text{ Moy}} = \frac{1 - \alpha}{m} \frac{I_{10 \text{ Max}} + I_{10 \text{ Min}}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_S = \frac{1 - \alpha}{m} I_{10 \text{ Moy}}$$

$$I_{E \text{ Moy}} = \alpha \frac{I_{10 \text{ Max}} + I_{10 \text{ Min}}}{2} = \alpha I_{10 \text{ Moy}} \Rightarrow I_S = \frac{1 - \alpha}{m\alpha} I_{E \text{ Moy}}$$

Remarque : Le fonctionnement en démagnétisation incomplète du transformateur est à tension moyenne de sortie constante pour un rapport cyclique donné.

• **Ondulation crête à crête – Choix de l'inductance du transformateur.** Sachant que $i_{10}(\alpha T) = I_{10 \text{ Max}}$ et $i_{10}(T) = I_{10 \text{ Min}}$, on trouve :

$$\Delta I_{10} = I_{10 \text{ Max}} - I_{10 \text{ Min}} = \frac{\alpha U_E T}{L} \Rightarrow L = \frac{\alpha U_E T}{\Delta I_{10}}$$

• **Puissance moyenne**

$$\left. \begin{array}{l} P_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = U_E I_{E \text{ Moy}} = \frac{\alpha (I_{1 \text{ Max}} + I_{1 \text{ Min}}) U_E}{2} \\ I_{1 \text{ Max}} - I_{1 \text{ Min}} = I_{10 \text{ Max}} - I_{10 \text{ Min}} = \frac{\alpha U_E T}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$P_S = P_E = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2L} + \alpha U_E I_{1 \text{ Min}} \quad (\text{où } I_{1 \text{ Min}} \text{ dépend de la charge})$$

• **Choix du condensateur.** On considère ici que la tension u_S varie peu autour de $U_{S \text{ Moy}}$. La charge stockée dans C augmente lorsque $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_2 > I_S$). Pour qu'elle augmente pendant toute la durée de $t = \alpha T$ à $t = T$, il faut que $I_S \leq I_{2 \text{ Min}} = I_{10 \text{ Min}}/m$. Si cette condition est remplie, le condensateur se décharge

uniquement de $t = 0$ à $t = \alpha T$. D'où :

$$\Delta Q = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = \alpha I_S T \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\alpha I_S T}{\Delta U_S}$$

Question : Expliciter la condition $I_S \leq I_{2 \text{ Min}} = I_{10 \text{ Min}}/m$ en fonction de l'ondulation crête à crête relative $\Delta I_{10}/I_{10 \text{ Moy}}$.

Réponse : D'après (Fig. 34.10), on a :

$$I_{10 \text{ Min}} = I_{10 \text{ Moy}} - \frac{\Delta I_{10}}{2} \quad \text{et} \quad I_S = (1 - \alpha) I_{10 \text{ Moy}}/m$$

D'où :

$$I_S \leq I_{2 \text{ Min}} \Leftrightarrow (1 - \alpha) I_{10 \text{ Moy}} \leq I_{10 \text{ Moy}} - \frac{\Delta I_{10}}{2} \quad \text{Soit :} \quad \frac{\Delta I_{10}}{I_{10 \text{ Moy}}} \leq 2\alpha$$

c) Démagnétisation complète

Dire que la démagnétisation du transformateur est complète, c'est dire que le flux ϕ est interrompu ou que le courant magnétisant i_{10} est interrompu. Le courant i_2 s'annule durant la phase de démagnétisation.

• **Fonctionnement (Fig. 34.11).** On considère ici que la tension u_S est continue et égale à $U_{S \text{ Moy}}$.

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$: H est fermé $\Rightarrow u_1 = U_E \Rightarrow u_2 = mU_E > 0 \Rightarrow D$ est bloquée $\Rightarrow i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_{10}$. On a :

$$u_1 = L \frac{di_{10}}{dt} = U_E$$

D'où :

$$i_{10} = \frac{U_E}{L} t \quad \text{car} \quad I_{10 \text{ Min}} = 0$$

– De $t = \alpha T$ à $t = \gamma T$: H est ouvert $\Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow i_{10} = mi_2 > 0 \Rightarrow D$ est passante $\Rightarrow u_2 = -U_{S \text{ Moy}} \Rightarrow u_1 = -U_{S \text{ Moy}}/m$. On a :

$$u_1 = L \frac{di_{10}}{dt} = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{m}$$

D'où :

$$i_{10} = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{mL} (t - \alpha T) + I_{10 \text{ Max}}$$

– De $t = \gamma T$ à $t = T$: H est ouvert $\Rightarrow i_1 = 0$, et $i_{10} = mi_2 = 0 \Rightarrow D$ est bloquée $\Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$.

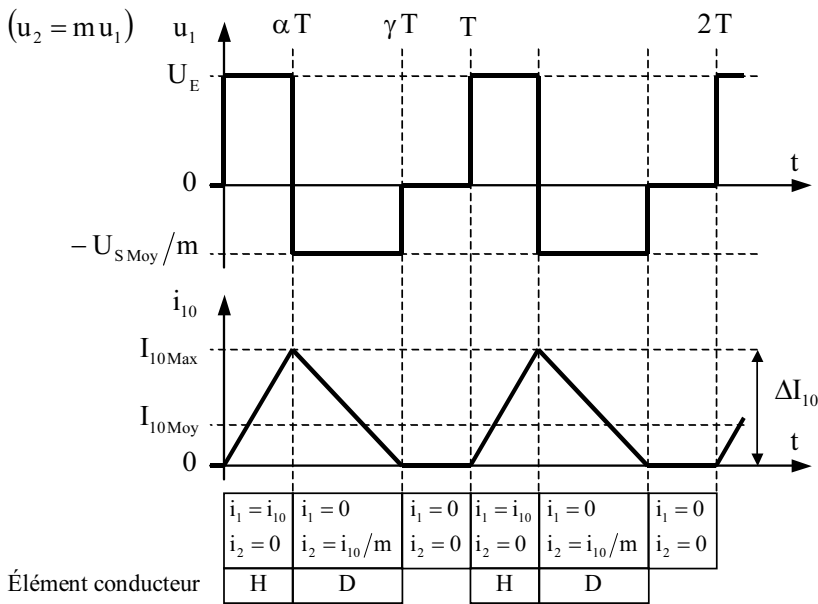


Fig. 34.11 Flyback – Démagnétisation complète

Question : Exprimer l'instant d'extinction du courant magnétisant. En déduire la limite de α pour que la démagnétisation soit complète.

Réponse :

$$\left. \begin{aligned} i_{10}(\gamma T) &= \frac{-U_{S Moy}}{mL} (\gamma - \alpha) T + I_{10 Max} = 0 \\ I_{10 Max} &= \frac{\alpha U_E T}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = \alpha \left(1 + \frac{m U_E}{U_{S Moy}} \right)$$

$$\text{La démagnétisation est complète si } \gamma \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \frac{U_{S Moy}}{U_{S Moy} + m U_E}$$

• Valeurs moyennes

$$U_{1 Moy} = \alpha U_E - (\gamma - \alpha) \frac{U_{S Moy}}{m} = 0 \Rightarrow U_{S Moy} = \frac{m \alpha U_E}{\gamma - \alpha}$$

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= i_C + I_S \\ I_{C Moy} &= 0 \\ I_{2 Moy} &= \frac{\gamma - \alpha}{m} \frac{I_{10 Max}}{2} = \frac{\gamma - \alpha}{m \gamma} I_{10 Moy} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_S = \frac{\gamma - \alpha}{m \gamma} I_{10 Moy}$$

$$I_{E \text{ Moy}} = \frac{\alpha I_{10 \text{ Max}}}{2} = \frac{\alpha I_{10 \text{ Moy}}}{\gamma} \Rightarrow I_S = \frac{\gamma - \alpha}{m\alpha} I_{E \text{ Moy}}$$

Ou encore (après calculs) :

$$I_{10 \text{ Max}} = \frac{\alpha U_E T}{L} \Rightarrow U_{S \text{ Moy}} = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2LI_S}$$

• **Ondulation crête à crête.** Sachant que $i_{10}(\alpha T) = I_{10 \text{ Max}}$ et $i_{10}(\gamma T) = 0$, on trouve :

$$\Delta I_{10} = I_{10 \text{ Max}} = \frac{\alpha U_E T}{L}$$

La limite entre la démagnétisation complète et la démagnétisation incomplète correspond à $\gamma = 1$. D'où :

$$\Delta I_{10}(\gamma=1) = I_{10 \text{ Max}}(\gamma=1) = \frac{2mI_S}{1-\alpha} \Rightarrow L(\gamma=1) = \frac{\alpha(1-\alpha) T U_E}{2mI_S}$$

• **Puissance moyenne – Choix de l'inductance**

$$P_S = U_{S \text{ Moy}} I_S = U_E I_{E \text{ Moy}} \Rightarrow P_S = P_E = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2L} \Rightarrow L = \frac{\alpha^2 U_E^2 T}{2P_E}$$

Remarque : Le fonctionnement en démagnétisation complète du transformateur est à puissance moyenne de sortie constante pour un rapport cyclique donné.

• **Choix du condensateur.** On considère ici que la tension u_S varie peu autour de $U_{S \text{ Moy}}$. La charge stockée dans C augmente lorsque $i_C > 0$ ($\Leftrightarrow i_2 > I_S$), soit entre $t = \alpha T$ et $t = T$, $I_S \leq i_2(\sigma T)$ où σT est la durée pour laquelle $I_S = i_2(\sigma T)$. Sachant que le condensateur se décharge aussi de $t = 0$ à $t = \alpha T$, on a :

$$\Delta Q = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = (\alpha + 1 - \sigma) I_S T \Rightarrow$$

$$C = \frac{(\alpha + 1 - \sigma) I_S T}{\Delta U_S}$$

Question : Exprimer la durée σT .

Réponse :

$$I_S = i_2(\sigma T) \Leftrightarrow mI_S = i_{10}(\sigma T) = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{mL} (\sigma - \alpha) T + I_{10 \text{ Max}}$$

$$\text{avec } I_S = I_{2 \text{ Moy}} = \frac{\gamma - \alpha}{m} \frac{I_{10 \text{ Max}}}{2} \quad I_{10 \text{ Max}} = \frac{\alpha U_E T}{L} \quad U_{S \text{ Moy}} = \frac{m \alpha U_E}{\gamma - \alpha}$$

D'où :

$$\sigma = \gamma - \frac{(\gamma - \alpha)^2}{2}$$

34.2.2 Convertisseur forward isolé (Fig. 34.12)

C'est un convertisseur à transfert direct d'énergie de l'alimentation à la charge. La tension d'alimentation U_A est continue, et on suppose le courant dans la charge I_S continu en régime permanent établi.

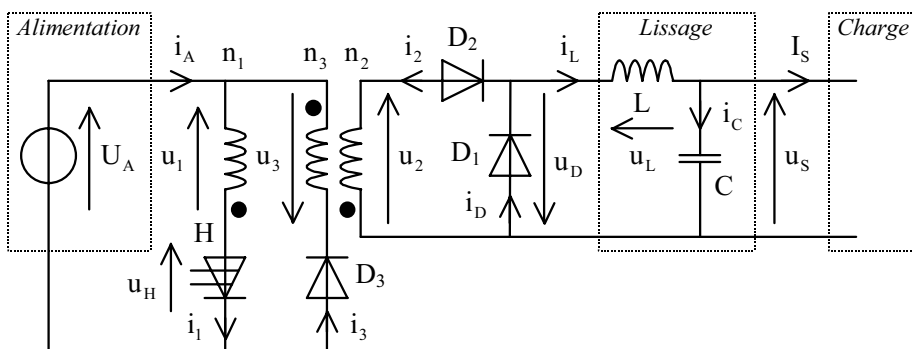


Fig. 34.12 Convertisseur isolé forward

a) Schéma équivalent du transformateur (Fig. 34.13)

On suppose le transformateur, linéaire, sans fuite ni perte (voir T.S.F.P. Chapitre 15 : Transformateurs). On a :

$$\Re \phi = n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = n_1 i_{10} \quad (\text{Loi d'Hopkinson})$$

D'où :

$$i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3 = i_{10} \quad \text{avec } m_2 = n_2/n_1 \quad \text{et} \quad m_3 = n_3/n_1$$

$$n_1 \phi = L_1 i_{10} \quad (\text{flux total au primaire})$$

$$u_1 = n_1 \frac{d\phi}{dt} \quad u_2 = n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad u_3 = n_3 \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{Loi de Lenz-Faraday})$$

\Re est la réluctance du circuit magnétique (voir Chapitre 4 : Électromagnétisme – Ferromagnétisme), ϕ le flux magnétisant à travers une section du circuit magnétique (c'est donc le flux par spire), n_1 (resp. n_2 et n_3) le nombre de spires au primaire (resp. secondaire et tertiaire), i_{10} le courant magnétisant, et $L_1 = n_1^2 / \Re$ l'inductance propre du primaire.

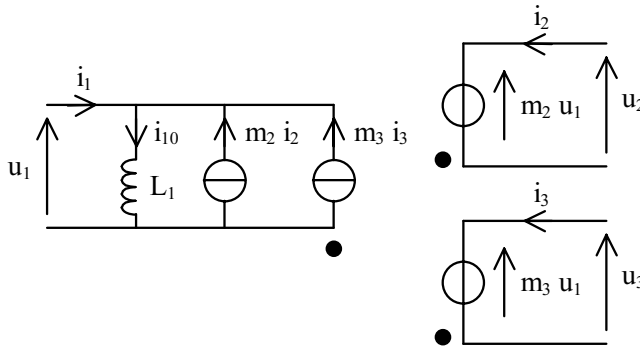


Fig. 34.13 Schéma équivalent du T.S.F.P. ($m_2 > 0$ et $m_3 > 0$)

b) Fonctionnement (Fig. 34.14)

On considère ici que la tension u_s est continue et égale à $U_{S \text{ Moy}}$, et on suppose que le courant i_L est ininterrompu.

– De $t = 0$ à $t = \alpha T$, l'interrupteur électronique H est fermé $\Rightarrow u_1 = U_A \Rightarrow$

① $u_2 = m_2 u_1 = m_2 U_A > 0 \Rightarrow$ la diode D_2 est passante et la diode D_1 est bloquée. L'alimentation fournit de l'énergie à la charge et à l'inductance L. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = m_2 U_A - U_{S \text{ Moy}}$$

D'où :

$$i_L = \frac{m_2 U_A - U_{S \text{ Moy}}}{L} t + I_{L \text{ Min}}$$

② $u_3 = m_3 u_1 = m_3 U_A > 0 \Rightarrow$ la diode D_3 est bloquée $\Rightarrow i_3 = 0$

③ $u_1 = L_1 \frac{di_{10}}{dt} = U_A$ D'où :

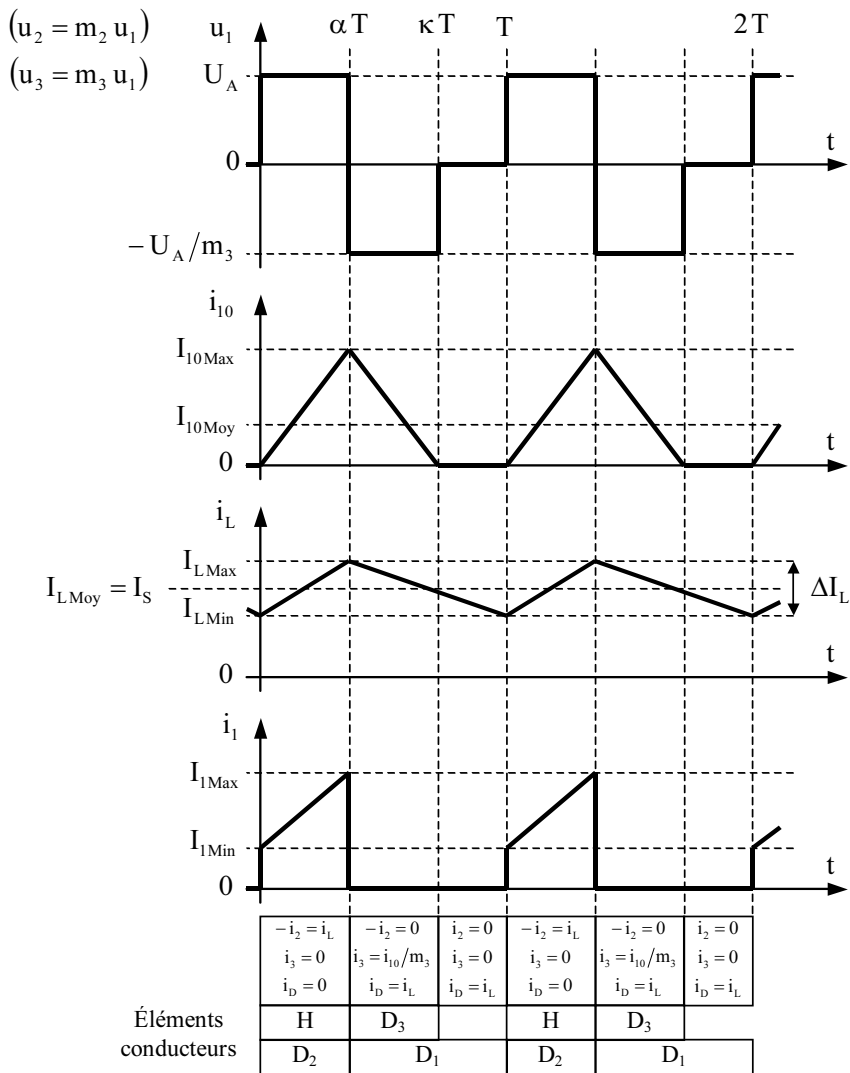
$$i_{10} = \frac{U_A}{L_1} t + I_{10 \text{ Min}} \quad \text{avec} \quad I_{10 \text{ Min}} = 0 \Rightarrow I_{10 \text{ Max}} = \frac{\alpha T U_A}{L_1}$$

Or $i_{10} = i_1 + m_2 i_2 + m_3 i_3$ avec $-i_2 = i_L$ et $i_3 = 0$

D'où :

$$i_1 = i_{10} + m_2 i_L = \frac{U_A}{L_1} t + m_2 \left(\frac{m_2 U_A - U_{S \text{ Moy}}}{L} t + I_{L \text{ Min}} \right)$$

– De $t = \alpha T$ à $t = \kappa T$, l'interrupteur électronique H est ouvert $\Rightarrow i_1 = 0 \Rightarrow i_{10} = m_2 i_2 + m_3 i_3$ qui est positif (pas de discontinuité du courant i_{10}) et ne peut que décroître (pas de source pour le faire croître) $\Rightarrow u_1 \leq 0 \Rightarrow$

Fig. 34.14 Forward – Courant i_L ininterrompu

① $u_2 = m_2 u_1 < 0 \Rightarrow$ la diode D_2 est bloquée et la diode D_1 est passante $\Rightarrow i_2 = 0$. L'inductance L délivre à la charge de l'énergie précédemment emmagasinée. On a :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -U_{S \text{ Moy}}$$

D'où :

$$i_L = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ Max}}$$

② $u_3 = m_3 u_1 < 0 \Rightarrow$ la diode D_3 est passante $\Rightarrow u_3 = -U_A$

$$\textcircled{3} \quad u_1 = L_1 \frac{di_{10}}{dt} = \frac{u_3}{m_3} = \frac{-U_A}{m_3} \quad \text{D'où : } i_{10} = \frac{-U_A}{m_3 L_1} (t - \alpha T) + I_{10 \text{ Max}} \quad \text{avec } i_{10} = m_3 i_3$$

– De $t = \kappa T$ à $t = T$, l'interrupteur électronique H est ouvert et $i_{10} = 0$ car le transformateur est complètement démagnétisé $\Rightarrow u_1 = u_2 = u_3 = 0$, et le courant i_L continue à décroître :

$$i_L = \frac{-U_{S \text{ Moy}}}{L} (t - \alpha T) + I_{L \text{ Max}}$$

Remarque : L'enroulement tertiaire assure la démagnétisation du transformateur qui doit être complète pour éviter la saturation du circuit magnétique, et obtenir ainsi un bon fonctionnement. Autrement dit, le courant magnétisant i_{10} doit s'annuler. Cela impose une contrainte sur la valeur maximale de α :

$$i_{10}(T) = \frac{-U_A}{m_3 L_1} (1 - \alpha_{\text{Max}}) T + \frac{\alpha_{\text{Max}} T U_A}{L_1} = 0$$

$$\text{D'où : } \alpha_{\text{Max}} = \frac{1}{1 + m_3} \quad (\text{Cas fréquent : } m_3 = 1 \Rightarrow \alpha_{\text{Max}} = 0,5)$$

c) Schéma équivalent côté secondaire (Fig. 34.15)

Ce schéma équivalent est identique au convertisseur abaisseur de tension non isolé (voir § 34.1.1), dont on déduit les principales relations (courant i_L ininterrompu).

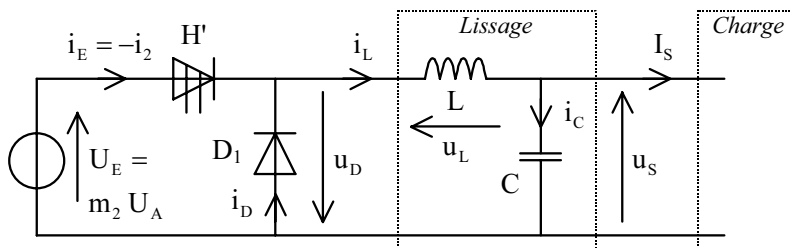


Fig. 34.15 Schéma équivalent côté secondaire

$$U_{S \text{ Moy}} = \alpha m_2 U_A$$

$$I_S = I_{L \text{ Moy}} = \frac{I_{L \text{ Max}} + I_{L \text{ Min}}}{2} = \frac{I_{E \text{ Moy}}}{\alpha}$$

$$\Delta I_L = I_{L \text{ Max}} - I_{L \text{ Min}} = \frac{\alpha (1 - \alpha) T m_2 U_A}{L}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\alpha (1 - \alpha) T m_2 U_A}{\Delta I_L}$$

$$\Delta Q^+ = C \Delta U_S = C (U_{S \text{ Max}} - U_{S \text{ Min}}) = \frac{T \Delta I_L}{8}$$

$$\Rightarrow C = \frac{T \Delta I_L}{8 \Delta U_S}$$

$$I_{L \text{ Moy}} = \frac{\alpha^2 U_A T}{2 L_1} + m_2 \alpha I_S$$

Chapitre 35

Relais statiques – Gradateurs

35.1 RELAIS STATIQUES

Un relais statique (SSR : *Solid state relay*) permet d'ouvrir ou de fermer un circuit électrique de manière comparable à un relais électromécanique (EMR : *Electro-mechanical relay*).

35.1.1 Constitution – Interrupteur électronique AC

Un relais statique est typiquement constitué (Fig. 35.1) d'un circuit de commande, d'une isolation galvanique (phototriac, phototransistor, etc.), et d'un interrupteur électronique bidirectionnel (thyristors tête-bêche, TRIAC) pour une utilisation en courant alternatif (AC), ou unidirectionnel (BJT, MOSFET) pour une utilisation en courant continu (DC). Dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'aux relais statiques du type AC, pour simplifier, on considère les composants parfaits, et en particulier les thyristors et TRIAC (voir Chapitre 19 : Thyristors).

Un interrupteur électronique AC (Fig. 35.2) est réalisé par deux thyristors montés tête-bêche ou bien par un TRIAC. L'application d'un courant de gâchette peut permettre de rendre conducteur un thyristor ou un TRIAC, tandis que l'annulation du courant d'anode permet un blocage naturel. La tension d'alimentation est de la forme $u_E = U_{E \text{ Max}} \sin(\omega t)$.

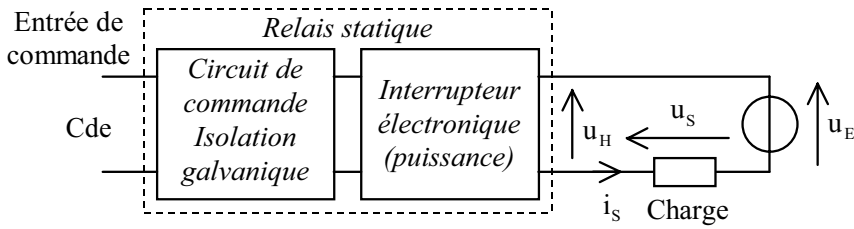


Fig. 35.1 Constitution typique d'un relais statique

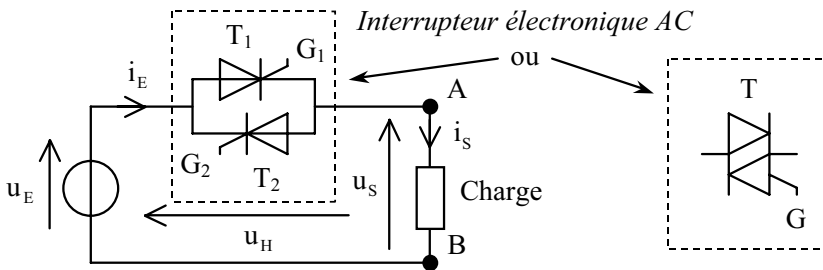


Fig. 35.2 Interrupteur électronique AC

35.1.2 Fonctionnement

Il existe deux modes de fonctionnement pour des relais statiques AC :

- la *commutation asynchrone* ou *instantanée* pour laquelle la fermeture de l'interrupteur électronique s'effectue « instantanément »,
- la *commutation synchrone* ou *au zéro de tension* pour laquelle la fermeture de l'interrupteur électronique s'effectue au passage à zéro de la tension.

Dans les deux cas, l'ouverture de l'interrupteur électronique s'effectue à la première annulation du courant d'anode qui suit la suppression du signal de commande Cde.

a) *Charge résistive* (Fig. 35.3 et Fig. 35.4)

$$u_S = r i_S$$

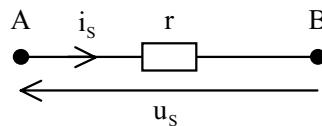


Fig. 35.3 Charge résistive

- **Régime permanent à l'état « Off ».** L'interrupteur électronique étant ouvert, le courant dans la charge est $i_S = 0$ (interrupteur électronique parfait), d'où $u_S = 0$.
- **Régime permanent à l'état « On ».** L'interrupteur électronique étant fermé, la tension aux bornes de la charge est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (interrupteur électronique parfait). Le courant i_S et la tension u_S sont en phase.

• **Fermeture instantanée** (voir Fig. 35.4). La fermeture s'effectue à $\theta = \alpha$ entraînant une variation di_S/dt très importante. Cette variation est limitée en pratique par l'inductance de la ligne d'alimentation généralement suffisante pour éviter la destruction de l'interrupteur électronique. Mais une forte variation de courant génère des parasites secteur importants.

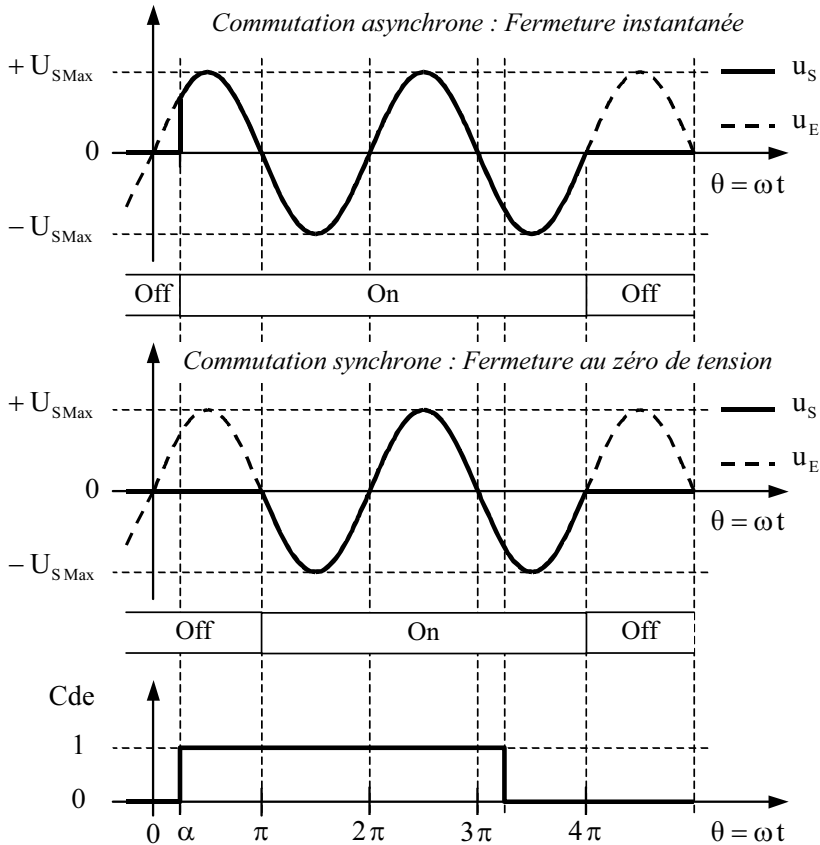


Fig. 35.4 Commutation asynchrone / synchrone – Charge résistive

• **Fermeture au zéro de tension** (voir Fig. 35.4). La fermeture s'effectue à $\theta = k\pi$ sans problème car :

$$i_S = \frac{U_{S \text{ Max}}}{r} \sin(\omega t) \Rightarrow \left| \frac{di_S}{dt} \right|_{\text{à } \omega t = k\pi} = \left| \frac{di_S}{dt} \right|_{\text{Max}} = \frac{\omega U_{S \text{ Max}}}{r}$$

• **Ouverture au zéro de courant** (voir Fig. 35.4). L'ouverture s'effectue à $\theta = k\pi$ sans problème car $u_S = 0$ pour $i_S = 0$.

• **Cas d'une lampe à incandescence.** La résistance du filament de tungstène d'une lampe est de 10 à 20 fois plus faible à froid qu'en régime établi. Compte tenu de

l'inertie thermique de la lampe considérée, le courant nominal peut éventuellement n'être atteint qu'après quelques périodes. Le courant à l'allumage peut donc atteindre $I_{S \text{ Max}} \approx 20\sqrt{2}I_{\text{Eff}}$ où I_{Eff} est le courant efficace de la lampe en régime établi. La variation di_S/dt augmente également.

• **Conclusion.** Sur charge résistive, la fermeture au zéro de tension (commutation synchrone) s'impose généralement, ce qui évite une variation di_S/dt importante. Le rayonnement électromagnétique est ainsi limité à la fermeture et à l'ouverture. La durée de vie d'une lampe à incandescence est augmentée par la fermeture au zéro de tension (et donc de courant) en limitant les surintensités à l'allumage.

b) *Charge inductive (Fig. 35.5)*

$$u_S = L \frac{di_S}{dt} + r i_S$$

(L est supposée constante)

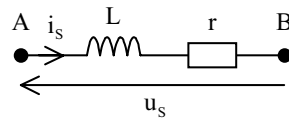


Fig. 35.5 Charge inductive

• **Régime permanent à l'état « Off ».** L'interrupteur électronique étant ouvert, le courant dans la charge est $i_S = 0$ (interrupteur électronique parfait).

• **Régime permanent à l'état « On ».** L'interrupteur électronique étant fermé, la tension aux bornes de la charge est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (interrupteur électronique parfait). La tension u_S est en avance de phase par rapport au courant i_S . On a :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad I_{S \text{ Max}} = U_{S \text{ Max}}/Z \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arg}Z$$

$$Z = r + jL\omega \quad Z = |Z| = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} = r\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{r}{Z} \quad \sin \varphi = \frac{L\omega}{Z} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{r} = \tau\omega \quad \tau = \frac{L}{r} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

• **Fermeture instantanée.** La fermeture s'effectue à $\theta = \alpha$. D'où :

$$\tau \frac{di_S(t)}{dt} + i_S(t) = \frac{U_{S \text{ Max}}}{r} \sin(\omega t) u(t - \alpha/\omega) \quad \text{où} \quad u(t) \text{ est l'échelon unité}$$

$$\Leftrightarrow \tau\omega \frac{di_S(\theta)}{d\theta} + i_S(\theta) = \frac{U_{S \text{ Max}}}{r} \sin \theta u(\theta - \alpha) \quad \text{avec} \quad \theta = \omega t$$

Compte tenu de la condition initiale $i_S(\alpha^+) = 0$ car le courant dans une inductance est continu, cette équation différentielle a pour solution :

$$i_S(\theta) = I_{S \text{ Max}} \left(\sin(\varphi - \alpha) e^{\frac{-(\theta - \alpha)}{\tan \varphi}} + \sin(\theta - \varphi) \right) u(\theta - \alpha)$$

Exemple d'allure de $i_S(\theta)$ pour $\alpha = 0$ avec $\varphi \approx 85^\circ$ (Fig. 35.6).

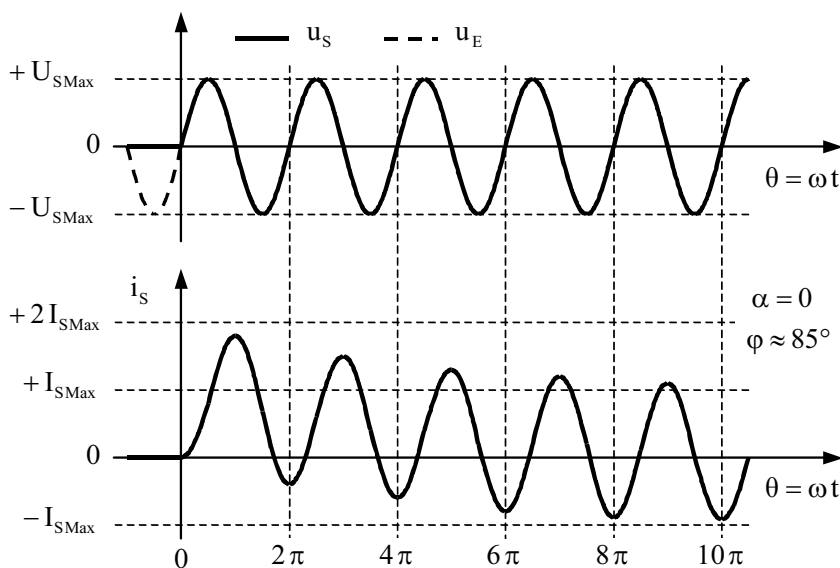


Fig. 35.6 Fermeture au zéro de tension – Charge inductive

Remarques :

- L'expression précédente de $i_S(\theta)$ est la somme de la réponse libre (à gauche du signe +) et de la réponse forcée (à droite du signe +).
- Après extinction du régime transitoire (l'exponentielle tend vers 0), on retrouve bien le régime permanent à l'état « On » donné précédemment.
- Si $\alpha = \varphi$, la réponse libre est nulle, et le régime permanent est instantanément obtenu.
- Dans le cas théorique limite où $r = 0$ ($\Rightarrow \varphi = \pi/2$), $i_S(\theta)$ s'écrit :

$$i_S(\theta) = I_{S \text{ Max}} \left(\sin(\pi/2 - \alpha) + \sin(\theta - \pi/2) \right) u(\theta - \alpha)$$

C'est le régime permanent (pas de transitoire), somme d'un courant continu (réponse libre) et d'une sinusoïde (réponse forcée). On a deux cas extrêmes :

- 1) La composante continue est maximale pour $\alpha = 0$ et la sinusoïde est maximale pour $\theta = (2k + 1)\pi$. Ainsi, $i_S(\theta)$ atteint $+2I_{S \text{ Max}}$.
- 2) La composante continue est minimale pour $\alpha = \pi$ et la sinusoïde est minimale pour $\theta = 2k\pi$. Ainsi, $i_S(\theta)$ atteint $-2I_{S \text{ Max}}$.

En pratique, la réponse de $i_S(\theta)$ est proche de ce cas théorique limite pour les premières périodes de la sinusoïde lorsque $\tau \gg 2\pi/\omega$.

- Pour qu'un thyristor ou un TRIAC reste amorcé, il faut que son courant d'anode devienne supérieur à son courant d'accrochage, noté I_L , avant la disparition du courant de gâchette. D'où la condition : $i_S(\theta) > I_L$, qui détermine l'angle θ à partir duquel le courant de gâchette peut être supprimé pour un α donné, ou l'angle d'amorçage maximal α_{Max} pour $\theta = \pi$ (première alternance).

• **Fermeture au zéro de tension.** Tout ce qui a été dit pour la fermeture instantanée reste valable dans le cas particulier où $\alpha = 0$. En particulier, la fermeture au zéro de tension correspond au cas défavorable où $i_S(\theta)$ peut atteindre $\pm 2I_{S \text{ Max}}$.

• **Ouverture au zéro de courant.** En régime permanent à l'état « On », la tension u_S est en avance de phase par rapport au courant i_S . L'ouverture s'effectuant naturellement au passage à zéro du courant d'anode, la tension u_S alors égale à u_E s'annule, et la tension d'alimentation u_E est très rapidement appliquée aux bornes de l'interrupteur électronique. N'étant limitée que par les capacités parasites, la vitesse de variation de la tension u_H aux bornes de l'interrupteur électronique peut dépasser le du/dt du thyristor ou du TRIAC (du/dt en commutation), ce qui risque de le réamorcer. On remédie à ce problème en connectant un réseau RC dit « Snubber » (Fig. 35.7) aux bornes de l'interrupteur électronique.

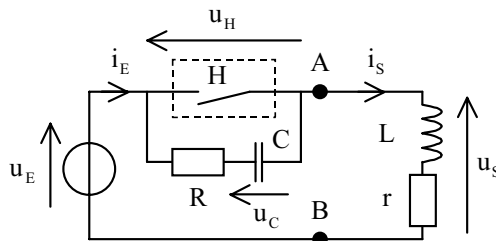


Fig. 35.7 Circuit électrique équivalent avec réseau RC

- En régime permanent à l'état « On » (H est fermé), la tension u_S est en avance de phase par rapport au courant i_S , et le condensateur est déchargé. Ce qui s'écrit, en effectuant le changement de variable $\omega t' = \omega t - \varphi$:

$$u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t' + \varphi) \quad \text{et} \quad i_S = I_{S \text{ Max}} \sin(\omega t') \quad \text{avec} \quad I_{S \text{ Max}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{Z}$$

- A $t' = 0$ le courant s'annule et l'interrupteur H s'ouvre. La tension aux bornes du condensateur est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_C}{dt'^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt'} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 U_{E \text{ Max}} \sin(\omega t' + \varphi)$$

$$\text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{pulsation propre}) \quad m = \frac{R+r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{amortissement})$$

En considérant $\omega \ll \omega_0$ on obtient l'équation différentielle ci-dessous valable uniquement pour le début de la réponse temporelle de u_C (réponse à un échelon de tension égal à $U_{E \text{ Max}} \sin \varphi$).

$$\frac{d^2 u_C}{dt'^2} + 2m\omega_0 \frac{du_C}{dt'} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 U_{E \text{ Max}} \sin \varphi$$

Pour un amortissement inférieur à l'unité, et compte tenu des conditions initiales $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur) et $C \frac{du_C(0^+)}{dt'} = i_S(0^+) = i_S(0^-) = 0$ (ouverture de H au zéro de courant et continuité de courant dans une inductance), cette dernière équation différentielle a pour solution :

$$u_C = U_{E \text{ Max}} \sin \varphi \left(1 - \frac{e^{-m\omega_0 t'}}{\sqrt{1-m^2}} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t' + \arctan \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \right) \right)$$

Pour un amortissement tendant vers zéro, cette expression devient :

$$u_C \approx U_{E \text{ Max}} \sin \varphi (1 - \cos(\omega_0 t'))$$

On en déduit la valeur maximale et la vitesse de variation maximale de u_C :

$$U_{C \text{ Max}} \approx 2U_{E \text{ Max}} \sin \varphi \quad \left. \frac{du_C}{dt'} \right|_{\text{Max}} \approx \omega_0 U_{E \text{ Max}} \sin \varphi$$

La vitesse de variation maximale de u_C doit être inférieure au $(du/dt)_C$ en commutation (H étant en phase de blocage), ce qui établit la condition sur la capacité C (voir Chapitre 19 : Thyristors) :

$$C > \frac{(U_{E \text{ Max}} \sin \varphi)^2}{L ((du/dt)_C)^2}$$

• **Conclusion.** Sur charge inductive, fermeture instantanée et fermeture au zéro de tension sont toutes deux possibles. Le courant i_S peut atteindre $\pm 2I_{S \text{ Max}}$. L'emploi d'un réseau RC est indispensable. Dans le cas des relais synchrones, le courant de gâchette n'est généralement appliqué que dans une fenêtre temporelle à partir du zéro de tension, ce qui rend l'amorçage des thyristors ou TRIAC délicat pour des faibles courants avec un $\cos \varphi$ petit (inférieur à 0,7). Une résistance de shunt, placée en parallèle sur la charge, permet de résoudre ce dernier problème en permettant l'établissement rapide d'un courant minimum.

c) Charge inductive saturable (Fig. 35.8)

Un matériau ferromagnétique permet d'obtenir une grande inductance mais engendre des non-linéarités : le flux dans le circuit magnétique n'est pas une fonction linéaire du courant (μ et donc L ne sont pas constantes), il suit le même cycle d'hystérésis

que l'intensité B de l'induction magnétique en fonction de l'intensité H de l'excitation magnétique (voir Chapitre 4 : Électromagnétisme – Ferromagnétisme, et Chapitre 13 : Bobines non-couplées).

$$u_S = N \frac{d\phi}{dt} + r i_S \quad \text{avec}$$

$$N\phi = Li_S \quad \text{et} \quad L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

où ϕ désigne le flux par spire
et N le nombre de spires.

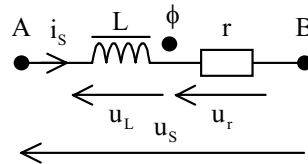


Fig. 35.8 Charge inductive saturable

• **Analyse simplifiée.** On considère que le circuit magnétique possède une caractéristique $\phi = f(i_S)$ linéaire par morceaux fixant deux régimes de fonctionnement (Fig. 35.9).

– (1) Régime de flux variable :

$$L = N\Phi_{\text{Sat}}/I_{\text{Sat}} = \text{constante}.$$

On retrouve les résultats de l'analyse précédente (voir § b).

– (2) Régime de flux constant :

$$\phi = \Phi_{\text{Sat}}.$$

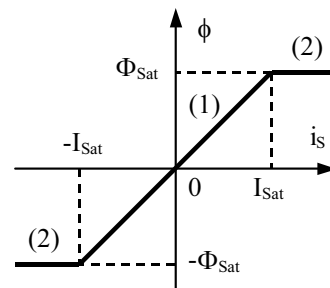


Fig. 35.9 $\phi = f(i_S)$

Le courant i_S n'est plus limité que par la résistance r , $u_L = N d\phi/dt = 0$. Le courant de saturation étant généralement proche du courant maximal $I_{S \text{ Max}}$ en régime établi, la saturation est facilement atteinte pendant le régime transitoire lorsque le courant i_S dépasse $I_{S \text{ Max}}$ (en valeur absolue). Le pire cas correspond à la fermeture au zéro de tension de l'interrupteur électronique. Pour qu'il n'y ait pas de surintensité due au régime transitoire (car le champ rémanent négligé ici peut aussi conduire à une saturation à la mise sous tension), il faudrait fermer l'interrupteur électronique à $\alpha = \varphi$ (voir fermeture instantanée au § b), ce qui n'est pas facile à réaliser en général.

• **Cas du transformateur.** À vide, c'est une inductance saturable. Mais en charge, le courant secondaire ramené au primaire est prépondérant sur le courant magnétisant en régime établi. Dans le cas d'une charge résistive ou capacitive au secondaire, la fermeture doit alors s'effectuer au zéro de tension.

• **Conclusion.** Il faut limiter la surintensité par une résistance série de faible valeur ne perturbant pas le fonctionnement, et choisir un interrupteur électronique surdimensionné qui supporte la surintensité due au régime transitoire.

d) Moteur asynchrone

C'est une charge inductive et résistive régit par ses propres lois, fonction de la charge mécanique (voir Chapitre 41 : Moteurs asynchrones triphasés). Le courant au démarrage peut être 6 à 8 fois plus élevé que le courant nominal en régime établi pour un moteur triphasé et même 10 fois pour un moteur monophasé. L'interrupteur électronique sera choisi en conséquence. Le facteur de puissance ($\cos \varphi$) d'un moteur asynchrone dépend de la charge mécanique. Ce facteur pouvant être inférieur à 0,5 à vide, la fermeture instantanée est souvent préférée.

e) Charge capacitive (Fig. 35.10)

$$u_S = rC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$i_S = C \frac{du_C}{dt}$$

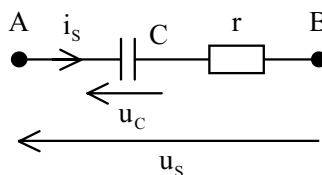


Fig. 35.10 Charge capacitive

- **Régime permanent à l'état « Off ».** L'interrupteur électronique étant ouvert, le courant dans la charge est $i_S = 0$ (interrupteur électronique parfait).
- **Régime permanent à l'état « On ».** L'interrupteur électronique étant fermé, la tension aux bornes de la charge est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ (interrupteur électronique parfait). Le courant i_S est en avance de phase par rapport à la tension u_S ($\varphi < 0$). On a :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{avec} \quad I_{S \text{ Max}} = U_{S \text{ Max}}/Z \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arg} \underline{Z}$$

$$\underline{Z} = r - \frac{j}{C\omega} \quad Z = |\underline{Z}| = \sqrt{r^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}} = r\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$$

$$\cos \varphi = \frac{r}{Z} \quad \sin \varphi = \frac{-1}{ZC\omega} \quad \tan \varphi = \frac{-1}{rC\omega} = \frac{-1}{\tau\omega} \quad \tau = rC \quad \left(\frac{-\pi}{2} < \varphi < 0 \right)$$

- **Fermeture instantanée dans le cas théorique limite où $r = 0$.** La fermeture s'effectue à $\theta = \omega t = \alpha$. La tension aux bornes de la charge est :

$$u_S(\theta) = U_{S \text{ Max}} \sin \theta \quad \text{lorsque l'interrupteur électronique est fermé, et}$$

$$u_S(\theta) = U_C(\alpha^-) \quad \text{juste avant la fermeture.}$$

Or :

$$i_S(\theta) = C\omega \frac{du_C(\theta)}{d\theta}$$

D'où, au sens des distributions (voir Chapitre 10 : Étude symbolique – Transformée de Laplace) :

$$i_S(\theta) = C\omega \left(U_{S \text{ Max}} \cos(\theta) u(\theta - \alpha) + [U_C(\alpha^+) - U_C(\alpha^-)] \delta(\theta - \alpha) \right)$$

où $u(\theta)$ est l'échelon unité et $\delta(\theta)$ l'impulsion de Dirac, et avec

$$U_C(\alpha^+) = u_S(\alpha^+) = U_{S \text{ Max}} \sin \alpha$$

Remarques :

- Le courant n'est pas limité à $\theta = \alpha$ (présence de l'impulsion de Dirac) sauf dans le cas particulier où $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$. Ce cas particulier est obtenu pour $\alpha = 0$, qui est la fermeture au zéro de tension, si le condensateur C est initialement déchargé $U_C(\alpha^-) = 0$.
- Même dans le cas particulier où $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$, le courant subit une discontinuité qui est maximale pour la fermeture au zéro de tension ($\alpha = 0$) :

$$i_S(0^+) - i_S(0^-) = I_{S \text{ Max}} - 0 = C\omega U_{S \text{ Max}}$$

- En conséquence, la fermeture avec une capacité « pure » n'est jamais admissible sans protection.

• **Fermeture instantanée avec $r \neq 0$.** La fermeture s'effectue à $\theta = \omega t = \alpha$. La tension aux bornes de la charge est :

$u_S(\theta) = U_{S \text{ Max}} \sin \theta$ lorsque l'interrupteur électronique est fermé, et

$u_S(\theta) = U_C(\alpha^-)$ juste avant la fermeture car $i_S = 0$.

La tension aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$\tau \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t) \quad \text{pour } \omega t \geq \alpha \quad \text{et avec } \tau = rC$$

$$\Leftrightarrow \tau \omega \frac{du_C(\theta)}{d\theta} + u_C(\theta) = U_{S \text{ Max}} \sin \theta \quad \text{pour } \theta = \omega t \geq \alpha$$

Compte tenu de la condition initiale $U_C(\alpha^+) = U_C(\alpha^-)$ car la tension aux bornes d'un condensateur est continue, cette équation différentielle a pour solution :

$$u_C(\theta) = [U_C(\alpha) - M \sin(\alpha - \psi)] e^{\frac{-(\theta - \alpha)}{\omega\tau}} + M \sin(\theta - \psi) \quad \text{pour } \theta \geq \alpha$$

avec

$$M = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = U_{S \text{ Max}} \cos \psi \tan \psi = \omega\tau = rC\omega \quad (0 < \psi < \frac{\pi}{2})$$

Et :

$$u_C(\theta) = U_C(\alpha^-) \quad \text{pour } \theta \leq \alpha$$

Or :

$$i_S(\theta) = C\omega \frac{du_C(\theta)}{d\theta}$$

D'où :

$$i_S(\theta) = \left(\frac{-1}{r} [U_C(\alpha) - M \sin(\alpha - \psi)] e^{\frac{-(\theta - \alpha)}{\omega\tau}} + \omega CM \cos(\theta - \psi) \right) u(\theta - \alpha)$$

Puisque $-\varphi = \pi/2 - \psi$, i_S étant en avance de $\pi/2$ sur u_C , i_S s'écrit finalement :

$$i_S(\theta) = \left(\frac{U_{S \text{ Max}} \sin(\varphi) \cos(\alpha - \varphi) - U_C(\alpha)}{r} e^{\frac{\theta - \alpha}{(\tan \varphi)^{-1}}} + I_{S \text{ Max}} \sin(\theta - \varphi) \right) u(\theta - \alpha)$$

Remarques :

- Si $U_{S \text{ Max}} \sin(\varphi) \cos(\alpha - \varphi) = U_C(\alpha)$, la réponse libre est nulle, et le régime permanent est instantanément obtenu.
- Pour le circuit considéré, la tension aux bornes du condensateur est comprise entre $-U_{S \text{ Max}}$ et $U_{S \text{ Max}}$ (voir ouverture au zéro de courant ci-dessous). D'où :

$$-U_{S \text{ Max}} < U_C(\alpha) < U_{S \text{ Max}}$$

- Juste après la fermeture de l'interrupteur électronique ($\theta = \alpha^+$), on a :

$$i_S(\alpha^+) = \frac{U_{S \text{ Max}} \sin \varphi - U_C(\alpha)}{r}$$

D'où :

$$i_S(\alpha^+)_{\text{Pire Cas}} = \frac{\pm 2U_{S \text{ Max}}}{r}$$

- La variation di_S/dt est limitée en pratique par l'inductance de la ligne d'alimentation souvent suffisante pour éviter la destruction de l'interrupteur électronique. Mais une forte variation de courant génère des parasites secteurs importants. L'ajout d'une inductance L en série permet de limiter di_S/dt :

$$\left. \frac{di_S}{dt} \right|_{\text{Pire Cas}} = \frac{\pm 2U_{S \text{ Max}}}{L} \quad (\text{pour } -U_{S \text{ Max}} < U_C(\alpha) < U_{S \text{ Max}})$$

● **Ouverture au zéro de courant (voir Fig. 35.2 et Fig. 35.10).** On suppose le régime permanent sinusoïdal établi. Le courant i_S est en avance de $\pi/2$ sur la tension u_C . L'ouverture au zéro de courant correspond donc au maximum de tension aux bornes du condensateur : $|u_C|_{\text{Max}} \leq U_{S \text{ Max}}$. En conséquence, l'interrupteur électronique ouvert doit périodiquement supporter la tension $U_{S \text{ Max}} + |u_C|_{\text{Max}} \leq 2U_{S \text{ Max}}$ jusqu'à l'éventuelle décharge du condensateur (résistance de fuite).

f) Réseau triphasé

- Une charge triphasée avec neutre nécessite un interrupteur électronique par phase. Pour chacune des phases, les règles d'utilisation sont identiques à celles vues précédemment.
- Deux interrupteurs électroniques au lieu de trois peuvent suffire dans le cas d'une charge triphasée sans neutre en régime équilibré (montage étoile ou triangle). Dans ce cas, il faut tenir compte des tensions qui peuvent être ramenées aux bornes des interrupteurs électroniques conséquemment à un court-circuit ou à un déséquilibre du réseau.

35.2 GRADATEURS

Un gradateur permet de régler la tension alternative aux bornes de la charge. Un gradateur est constitué d'un interrupteur électronique AC (voir Fig. 35.2) et de sa commande. Il existe principalement deux stratégies de commandes :

- La commande de découpage des phases ; la tension aux bornes de la charge est composée de portions d'alternances. On règle l'angle de conduction pour toutes les alternances, positives et négatives.
- La commande de trains d'ondes pleines ; la tension aux bornes de la charge est composée d'ondes pleines qui se répètent périodiquement. On règle le nombre de périodes du train d'ondes, pour une période de répétition du train d'ondes donnée.

35.2.1 Commande de découpage des phases

a) Charge résistive (voir Fig. 35.3 et Fig. 35.11)

Lorsque l'interrupteur électronique supposé parfait est fermé, la tension aux bornes de la charge est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$ et $u_S = r i_S$. Lorsqu'il est ouvert, le courant dans la charge est nul : $i_S = 0 \Rightarrow u_S = r i_S = 0$. À chaque alternance, l'interrupteur électronique est fermé à un instant fixé par l'angle d'amorçage α (angle de conduction = $\pi - \alpha$) et ouvert lorsque le courant i_S s'annule.

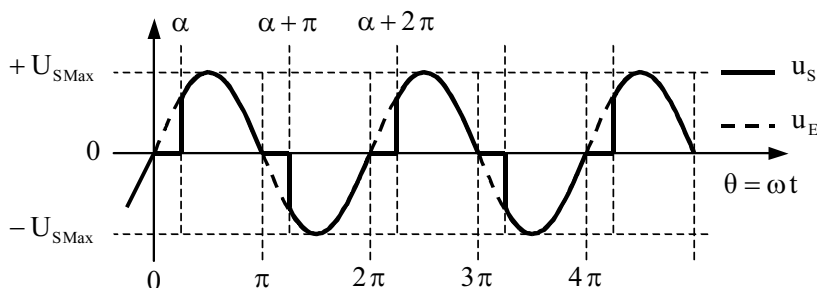


Fig. 35.11 Commande de découpage des phases – Charge résistive

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension u_S .

Réponse :

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}}^2 \sin^2 \theta \, d\theta \quad \text{D'où :} \quad U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{2\pi}}$$

b) Charge inductive (voir Fig. 35.5)

L'interrupteur électronique est fermé à $\theta = \omega t = \alpha$. D'où l'équation différentielle :

$$\frac{L\omega}{r} \frac{di_S(\theta)}{d\theta} + i_S(\theta) = \frac{U_{S \text{ Max}}}{r} \sin \theta \quad (\theta = \omega t \geq \alpha)$$

Compte tenu de la condition initiale $i_S(\alpha^+) = 0$ car le courant dans une inductance est continu, cette équation différentielle a pour solution :

$$i_S(\theta) = \underbrace{I_{S \text{ Max}} \sin(\varphi - \alpha) e^{\frac{-(\theta - \alpha)}{\tan \varphi}}}_{\text{Réponse libre : } i_{SL}} + \underbrace{I_{S \text{ Max}} \sin(\theta - \varphi)}_{\text{Réponse forcée : } i_{SF}} \quad (\theta \geq \alpha)$$

avec $I_{S \text{ Max}} = U_{S \text{ Max}}/Z$ $Z = |\underline{Z}| = r\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}$ ($\underline{Z} = r + jL\omega$)

$$\varphi = \text{Arg} \underline{Z} \quad \tan \varphi = \frac{L\omega}{r} = \tau\omega \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$$

Le courant $i_S(\theta)$ s'annule à nouveau en $\theta = \beta$ tel que :

$$\sin(\beta - \varphi) = \sin(\alpha - \varphi) e^{\frac{-(\beta - \alpha)}{\tan \varphi}}$$

• **Fonctionnement en gradateur (Fig. 35.12) :** $0 < \varphi < \alpha < \pi$

$$\Rightarrow \varphi < \beta < \pi + \varphi < \pi + \alpha$$

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension u_S .

Réponse :

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} U_{S \text{ Max}}^2 \sin^2 \theta \, d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\beta - \alpha}{\pi} - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2\pi}}$$

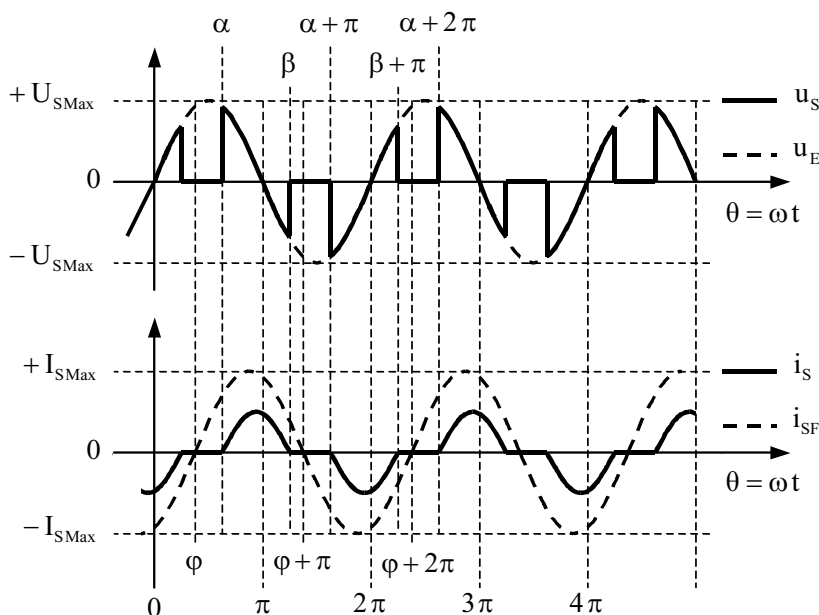


Fig. 35.12 Commande de découpage des phases – Charge inductive
Fonctionnement en gradateur ($0 < \varphi < \alpha < \pi$)

Remarque : Lorsque α varie de φ à π , β varie de $\varphi + \pi$ à π , et $U_{S\text{ Eff}}$ varie de $U_{S\text{ Max}}/\sqrt{2}$ à 0. Le montage fonctionne en gradateur. De plus, la tension moyenne $U_{S\text{ Moy}}$ est nulle.

- **Limite du fonctionnement en gradateur :** $0 < \varphi = \alpha < \pi \Rightarrow \beta = \pi + \varphi$. Le régime sinusoïdal permanent est immédiatement obtenu (pas de régime transitoire). L'interrupteur est en permanence fermé.

$$i_s(\theta) = i_{SF}(\theta) = I_{S\text{ Max}} \sin(\theta - \varphi)$$

- **Fonctionnement en interrupteur fermé ou dysfonctionnement en redresseur :**

$$0 < \alpha < \varphi < \pi/2 \Rightarrow \pi + \alpha < \pi + \varphi < \beta < 2\pi + \varphi.$$

Le courant s'annule (en β), ce qui provoque l'ouverture de l'interrupteur électronique pour l'alternance positive, après le début de la commande de fermeture pour l'alternance négative (en $\alpha + \pi$). On a alors deux possibilités :

- La commande de gâchette dure insuffisamment pour entraîner la fermeture de l'interrupteur électronique pour l'alternance négative. Le courant i_s est alors composé des seules alternances positives (si la première commande de fermeture avait débuté en $\alpha + \pi$, i_s serait alors composé des seules alternances négatives) ; le montage

fonctionne en redresseur simple alternance de courant. Ce dysfonctionnement peut être grave de conséquences.

- La commande de gâchette dure suffisamment pour entraîner la fermeture de l'interrupteur électronique pour l'alternance négative. Le courant i_S est alors ininterrompu ; l'interrupteur est en permanence fermé. Après disparition du régime transitoire, on retrouve le courant i_S obtenu pour la limite de fonctionnement en gradateur :

$$i_S(\theta) = i_{SF}(\theta) = I_{S \text{ Max}} \sin(\theta - \varphi)$$

Avec une commande correcte des gâchettes pour les alternances positives et négatives, la continuité de la commande de découpage des phases est assurée, même si le déphasage φ varie au cours du fonctionnement.

c) Variateur de vitesse d'un moteur universel

Un moteur universel est un moteur à courant continu à excitation série (voir Chapitre 43 : Machines à courant continu) mais prévu pour un fonctionnement en courant alternatif. Sa vitesse dépend de la valeur moyenne de la valeur absolue de la tension alternative présente aux bornes du moteur, la charge étant supposée constante.

Question : Exprimer la valeur moyenne de la tension $|u_S|$.

Réponse :

$$|u_S|_{\text{Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{S \text{ Max}} \sin \theta \, d\theta$$

D'où :

$$|u_S|_{\text{Moy}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} (1 + \cos \alpha)$$

35.2.2 Commande de trains d'ondes pleines (Fig. 35.13)

C'est un relais statique AC à commutation synchrone commandé périodiquement de la manière suivante : l'interrupteur électronique est fermé pendant une durée nT où n est le nombre entier d'ondes pleines consécutives et T la période de la sinusoïde, puis il est ouvert pendant une durée $T_0 - nT$ où T_0 est la période de répétition du train d'ondes. Lorsque l'interrupteur électronique supposé parfait est fermé, la tension aux bornes de la charge est $u_S = U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{S \text{ Max}} = U_{E \text{ Max}}$. Lorsqu'il est ouvert, le courant dans la charge est nul : $i_S = 0$. En commutation synchrone, l'interrupteur électronique est fermé au zéro de la tension u_S et ouvert lorsque le courant i_S s'annule ; cela évite une variation di_S/dt importante dans le cas notamment d'une charge résistive (voir § 35.1.2).

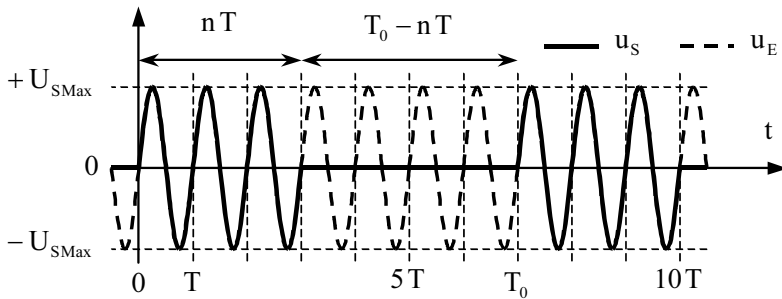


Fig. 35.13 Commande de trains d'ondes pleines

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension u_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{T_0} \int_0^{nT} \sin^2(\omega t) dt$$

D'où :

$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{nT}{T_0}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{N}}$$

en posant $T_0 = NT$

Exemple de la Fig. 35.13 :

$$n = 3 \quad \text{et} \quad N = 7 \quad \Rightarrow \quad U_{S \text{ Eff}} \approx 0,65 U_{S \text{ Max}}/\sqrt{2}$$

Remarque : Lorsque n varie de 0 à N , $U_{S \text{ Eff}}$ varie de 0 à $U_{S \text{ Max}}/\sqrt{2}$. Le montage fonctionne en gradateur. De plus, la tension moyenne $U_{S \text{ Moy}}$ est nulle.

35.2.3 Gradateurs triphasés

Ils sont constitués de trois gradateurs monophasés, un par phase. Les commandes de ces trois gradateurs sont décalées les unes par rapport aux autres d'un tiers de période, ce qui correspond à un déphasage de $2\pi/3$.

Chapitre 36

Onduleurs autonomes

Un onduleur autonome est un convertisseur statique continu-alternatif ; il permet d'alimenter une charge en alternatif à partir d'une source continue. Dans certaines conditions, un redresseur commandé peut envoyer de l'énergie d'une source continue à une source alternative : c'est le fonctionnement dit en onduleur non autonome ou assisté (voir Chapitre 32 : Redressement commandé).

36.1 PRINCIPE DE BASE EN MONOPHASÉ

Le principe de base consiste à connecter, alternativement dans un sens puis dans l'autre, une source continue (de tension ou de courant) à une charge de manière à lui imposer une alimentation (en tension ou courant) alternative. Les structures possibles sont : un pont d'interrupteurs électroniques (Fig. 36.1 et Fig. 36.2), un demi-pont d'interrupteurs électroniques (Fig. 36.3) nécessitant deux sources d'alimentation, ou une structure utilisant un transformateur à point milieu (Fig. 36.4) équivalente à deux charges.

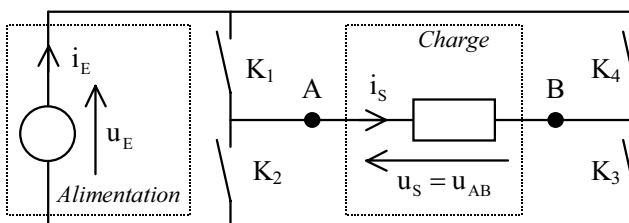


Fig. 36.1 Principe d'un onduleur autonome en pont

Onduleur	Interrupteurs électroniques	Source continue d'alimentation	Charge alimentée en alternatif
de tension	bidirectionnels	Source de tension ou à capacité en parallèle.	La tension est imposée, le courant dépend de la charge.
de courant	unidirectionnels	Source de courant ou à inductance en série.	Le courant est imposé, la tension dépend de la charge.

Fig. 36.2 Onduleurs de tension et de courant

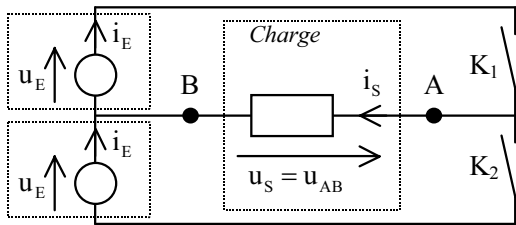


Fig. 36.3 Principe d'un onduleur autonome en demi-pont

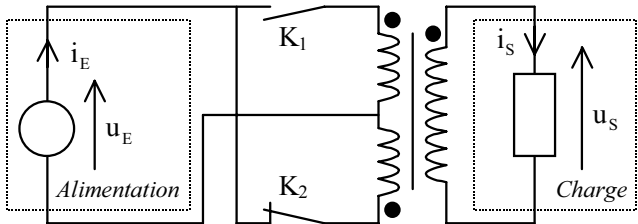


Fig. 36.4 Principe d'un onduleur autonome avec transformateur à point milieu

36.2 PRINCIPE D'UN ONDULEUR DE TENSION EN PONT

Un onduleur monophasé de tension en pont (Fig. 36.5) nécessite des interrupteurs électroniques bidirectionnels (diode en anti-parallèle sur interrupteur unidirectionnel) car le courant i_s est décalé par rapport à la tension u_s . On utilise le symbole d'un interrupteur unidirectionnel en courant commandable à l'ouverture et à la fermeture (voir Chapitre 33 : Hacheurs).

En considérant les développements en série de Fourier de la tension u_s et du courant i_s , on s'aperçoit que les fondamentaux contribuent essentiellement au transfert de la puissance active, tandis que les harmoniques de rang ≥ 2 contribuent surtout au transfert de la puissance réactive. Afin d'améliorer le rendement, on cherche à diminuer l'influence des harmoniques de rang ≥ 2 . Cette diminution s'obtient en

améliorant la commande de l'onduleur, ce qui permet de contrôler la forme de la tension u_S , et en lissant par une inductance le courant i_S .

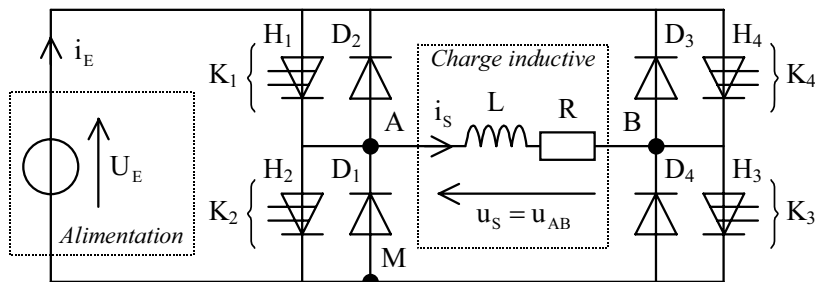


Fig. 36.5 Principe d'un onduleur de tension en pont

36.2.1 Commande symétrique ou pleine onde – Charge inductive

• Fonctionnement (Fig. 36.5 et Fig. 36.6)

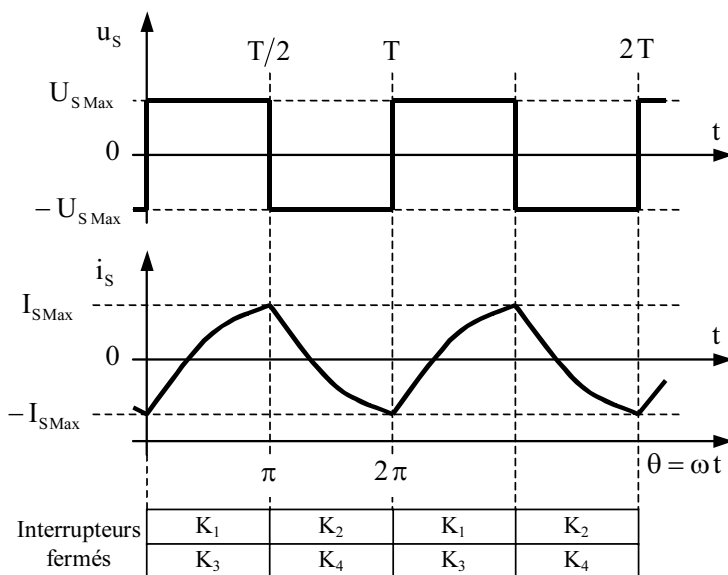


Fig. 36.6 Commande symétrique – Charge inductive

– De $t = 0$ à $t = T/2$, K_1 et K_3 sont fermés, K_2 et K_4 ouverts. On a :

$$i_S = -I_{S \text{ Max}} e^{-t/\tau} + \frac{U_{S \text{ Max}}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

– De $t = T/2$ à $t = T$, K_1 et K_3 sont ouverts, K_2 et K_4 fermés. On a :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} e^{-(t-T/2)/\tau} - \frac{U_{S \text{ Max}}}{R} \left(1 - e^{-(t-T/2)/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

– Sachant que $i_S(T/2) = I_{S \text{ Max}}$ ou que $i_S(T) = -I_{S \text{ Max}}$, on obtient :

$$i_S = I_{S \text{ Max}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{R} \frac{1 - e^{-T/2\tau}}{1 + e^{-T/2\tau}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{R} \operatorname{th} \left(\frac{T}{4\tau} \right)$$

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension u_S et la puissance active (ou moyenne) P fournie à la charge.

Réponse :

$$u_S = \pm U_{S \text{ Max}} \quad \text{D'où :} \quad U_{S \text{ Eff}} = U_{S \text{ Max}}$$

$$P = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_{S \text{ Max}} i_S dt \quad \text{D'où :} \quad P = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{R} \left(1 - \frac{4\tau}{T} \operatorname{th} \frac{T}{4\tau} \right)$$

• **Spectre.** La tension u_S est impaire. Son développement en série de sinus est (voir Chapitre 8 : Régime périodique – Séries de Fourier) :

$$u_S = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin [(2p+1)\omega t]$$

Soient $U_{S1 \text{ Max}} = 4U_{S \text{ Max}}/\pi$ l'amplitude du fondamental et $U_{Sn \text{ Max}}$ l'amplitude de l'harmonique n , ($n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$). Les harmoniques pairs étant nuls, on a :

$n =$	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{U_{Sn \text{ Max}}}{U_{S1 \text{ Max}}} =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{15}$

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S \text{ Max}}$. Bien sûr, on a $U_{S1 \text{ Eff}} < U_{S \text{ Max}}$ car

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = U_{S1 \text{ Eff}}^2 + U_{S3 \text{ Eff}}^2 + \dots + U_{S2p+1 \text{ Eff}}^2 + \dots = U_{S \text{ Max}}^2$$

$$U_{S1 \text{ Eff}} = \frac{U_{S1 \text{ Max}}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi\sqrt{2}} \approx 0,9U_{S \text{ Max}}$$

Question : Déterminer la série de Fourier de i_S (charge inductive). En déduire la valeur efficace de son fondamental.

Réponse : En régime sinusoïdal, le courant i_S et la tension u_S sont liés par :

$$\frac{\underline{I}_S}{\underline{U}_S} = \frac{1}{R + jL\omega'} = \frac{1}{R} \frac{e^{-j\varphi}}{\sqrt{1 + (\tau\omega')^2}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctan(\tau\omega')$$

D'où, par application du principe de linéarité :

$$u_S = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi R} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1) \sqrt{1 + [(2p+1)\tau\omega]^2}} \sin[(2p+1)\omega t - \varphi_{2p+1}]$$

avec

$$\varphi_{2p+1} = \arctan[(2p+1)\tau\omega]$$

Et finalement :

$$I_{S1 \text{ Eff}} = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi R \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} = \frac{U_{S1 \text{ Eff}}}{R \sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

Remarque : La puissance active peut se calculer à partir de la relation (voir Chapitre 8 : Régime périodique – Séries de Fourier) :

$$P = U_{S0} I_{S0} + \sum_{n=1}^{+\infty} U_{Sn \text{ Eff}} I_{Sn \text{ Eff}} \cos \varphi_n$$

D'où :

$$P = \frac{U_{S1 \text{ Eff}}^2}{R} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos \varphi_{2p+1}}{(2p+1)^2 \sqrt{1 + [(2p+1)\tau\omega]^2}}$$

avec

$$\tan \varphi_{2p+1} = (2p+1)\tau\omega$$

Soit encore :

$$P = \frac{U_{S1 \text{ Eff}}^2}{R} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2 \left(1 + [(2p+1)\tau\omega]^2\right)}$$

Les harmoniques ≥ 2 participent peu au transfert de la puissance active car les phases φ_{2p+1} tendent rapidement vers $\pi/2$. *A contrario*, ils contribuent au transfert de la puissance réactive.

36.2.2 Commande décalée – Charge inductive

- **Fonctionnement** (Fig. 36.5 et Fig. 36.7). La commande de K_3 et K_4 est décalée de 2α ($0 \leq 2\alpha \leq \pi$) par rapport à la commande de K_1 et K_2 .

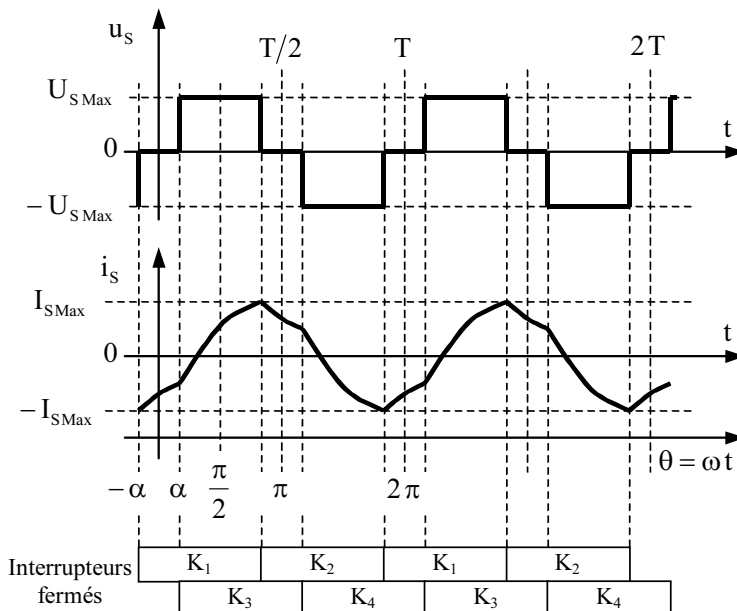


Fig. 36.7 Commande décalée – Charge inductive

Question : Exprimer la valeur efficace de la tension u_s .

Réponse :

$$U_{S \text{ Eff}}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} U_{S \text{ Max}}^2 d\theta$$

D'où :

$$U_{S \text{ Eff}} = U_{S \text{ Max}} \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi}}$$

Le décalage 2α permet de régler la tension efficace.

- **Spectre.** La tension u_s est impaire. Son développement en série de sinus est :

$$u_s = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \cos[(2p+1)\alpha] \sin[(2p+1)\omega t]$$

Soient $U_{S\ 1\ Max}$ l'amplitude du fondamental et $U_{S\ n\ Max}$ l'amplitude de l'harmonique n , ($n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$). On peut supprimer l'harmonique 3 ($p = 1$) et ses multiples en choisissant $\alpha = \pi/6$; les harmoniques pairs étant nuls, on a alors :

$n =$	3	5	7	9	11	13	15
$\frac{U_{S\ n\ Max}}{U_{S\ 1\ Max}} =$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{13}$	0

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S\ Max}$ ou α .

$$U_{S\ 1\ Eff} = \frac{4U_{S\ Max}}{\pi\sqrt{2}} \cos \alpha \qquad (0 \leq \alpha \leq \pi/2)$$

$$\alpha = \pi/6 \quad \Rightarrow \quad U_{S\ 1\ Eff} = \frac{\sqrt{6}U_{S\ Max}}{\pi}$$

36.2.3 Tension en escalier

• **Fonctionnement (Fig. 36.8).** Une tension en escalier de m marches s'obtient en faisant la somme (généralement avec des transformateurs) de m tensions à commandes décalées de hauteur $U_{S\ Max}/m$ (voir § 36.2.2). Les décalages $2\alpha_i$ sont compris entre 0 et π .

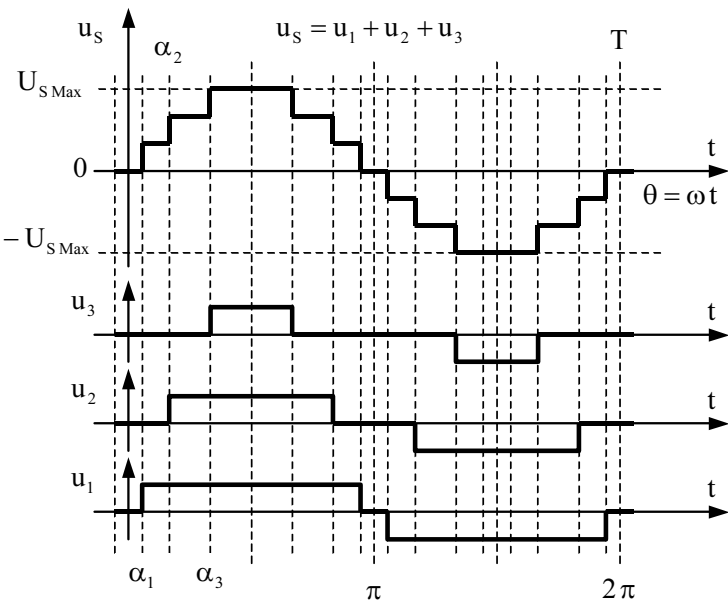


Fig. 36.8 Tension en escalier à 3 marches

• **Spectre.** La tension u_S est la somme des m tensions u_i . Soit :

$$u_S = \sum_{i=1}^m u_i$$

avec

$$u_i = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{m\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \cos [(2p+1) \alpha_i] \sin [(2p+1) \omega t]$$

Soient $U_{S \text{ 1 Max}}$ l'amplitude du fondamental et $U_{S \text{ n Max}}$ l'amplitude de l'harmonique n , ($n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$). Pour supprimer les harmoniques 3 à $2k + 1$, ($p = 1$ à $p = k$), les harmoniques pairs étant nuls, il faut résoudre numériquement le système suivant qui donne les m angles α_i .

$$\begin{cases} U_{S \text{ 3 Max}} = 0 \\ \dots \\ U_{S \text{ (2k+1) Max}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^m \cos (3\alpha_i) = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m \cos [(2k+1) \alpha_i] = 0 \end{cases}$$

On trouve :

m =	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$
4	0,9°	24,9°	35,1°	60,9°
3	11,7°	27°	56,1°	
2	12°	48°		
1	30°			

D'où :

n =	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{S \text{ n Max}}}{U_{S \text{ 1 Max}}} =$	0	0	0	0	7 %	5 %	0	m = 4
	0	0	0	7 %	2 %	3 %	2 %	m = 3
	0	0	9 %	0	9 %	5 %	0	m = 2
	0	20 %	14 %	0	9 %	8 %	0	m = 1

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S \text{ Max}}$.

$$U_{S \text{ 1 Eff}} = \frac{U_{S \text{ 1 Max}}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{m\pi\sqrt{2}} \sum_{i=1}^m \cos \alpha_i \quad (0 \leq \alpha_i \leq \pi/2)$$

36.2.4 Commande M.L.I.

a) M.L.I. pré-calculée ou M.L.I. à neutralisation d'harmoniques

La M.L.I. (modulation de largeur d'impulsions, ou P.W.M. pour pulse width modulation) permet de supprimer des harmoniques en commutant les interrupteurs électroniques à des instants pré-calculés. Elle est particulièrement adaptée à l'obtention d'une sinusoïde avec peu de commutations par période.

► M.L.I. – Onde 2 niveaux

● **Fonctionnement (Fig. 36.5 et Fig. 36.9).** Les interrupteurs électroniques sont tous simultanément commandés ; on a soit K_1 - K_3 fermés et K_2 - K_4 ouverts, soit K_1 - K_3 ouverts et K_2 - K_4 fermés. La tension u_S est impaire et symétrique par rapport à la droite verticale passant par $\pi/2$. Dans le cas général, on a un nombre m d'angle α_i , avec $0 \leq \alpha_i \leq \pi/2$.

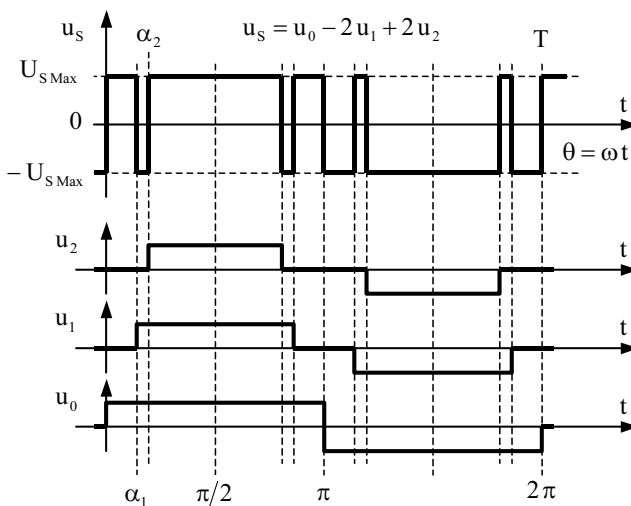


Fig. 36.9 M.L.I. pré-calculée – Onde 2 niveaux
Exemple avec deux angles α_1 et α_2

● **Spectre.** La tension u_S est impaire et possède une symétrie de « glissement ». La tension u_S peut aussi être vue comme la somme pondérée de $m + 1$ tensions u_i :

$$u_S = u_0 + 2 \sum_{i=1}^m (-1)^i u_i \quad (\text{exemple voir Fig. 36.9 où } u_S = u_0 - 2u_1 + 2u_2)$$

On en déduit le développement en série de sinus de u_S :

$$u_S = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^m (-1)^i \cos [(2p+1) \alpha_i] \right) \frac{\sin [(2p+1) \omega t]}{2p+1}$$

Soient $U_{S1 \text{ Max}}$ l'amplitude du fondamental et $U_{Sn \text{ Max}}$ l'amplitude de l'harmonique n , ($n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$). Pour supprimer les harmoniques 3 à $2k + 1$, ($p = 1$ à $p = k$), les harmoniques pairs étant nuls, il faut résoudre numériquement le système suivant qui donne les m angles α_i .

$$\begin{cases} U_{S3 \text{ Max}} = 0 \\ \dots \\ U_{S(2k+1) \text{ Max}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \sum_{i=1}^m (-1)^i \cos [3\alpha_i] = 0 \\ \dots \\ 1 + 2 \sum_{i=1}^m (-1)^i \cos [(2k+1) \alpha_i] = 0 \end{cases}$$

On trouve :

m =	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$	$\alpha_5 =$
5	10,7°	26,3°	32,3°	52,4°	54,5°
4	15,5°	24,3°	46,1°	49,4°	
3	14°	37,2°	42,6°		
2	23,6°	33,3°			

D'où :

n =	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{Sn \text{ Max}}}{U_{S1 \text{ Max}}} =$	0	0	0	0	0	29 %	56 %	m = 5
	0	0	0	0	29 %	55 %	36 %	m = 4
	0	0	0	29 %	52 %	36 %	4 %	m = 3
	0	0	30 %	49 %	36 %	3 %	2 %	m = 2

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S \text{ Max}}$.

$$U_{S1 \text{ Eff}} = \frac{U_{S1 \text{ Max}}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi\sqrt{2}} \left| 1 + 2 \sum_{i=1}^m (-1)^i \cos \alpha_i \right| \quad (0 \leq \alpha_i \leq \pi/2)$$

► M.L.I. – Onde 3 niveaux

● **Fonctionnement (Fig. 36.5 et Fig. 36.10).** Pendant la première demi-période, K_3 est fermé et K_4 ouvert, tandis que l'on a soit K_1 fermé et K_2 ouvert, soit K_1 ouvert et K_2 fermé ; Pendant la deuxième demi-période, K_2 est fermé et K_1 ouvert, tandis que l'on a soit K_4 fermé et K_3 ouvert, soit K_4 ouvert et K_3 fermé. La tension u_s est impaire et symétrique par rapport à la droite verticale passant par $\pi/2$. Dans le cas général, on a un nombre m impair d'angle α_i , avec $0 \leq \alpha_i \leq \pi/2$.

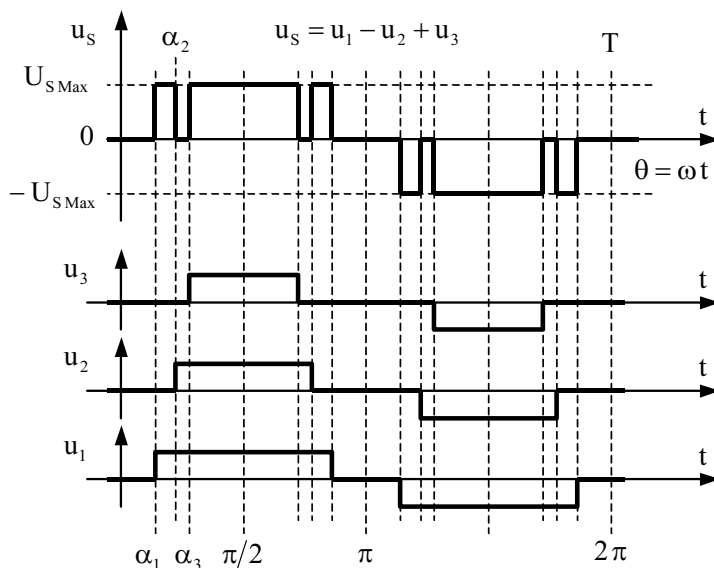


Fig. 36.10 M.L.I. pré-calculée – Onde 3 niveaux
Exemple avec trois angles α_1 , α_2 et α_3

• **Spectre.** La tension u_s est impaire et possède une symétrie de « glissement ». La tension u_s peut aussi être vue comme la somme pondérée de m tensions u_i , m étant impair :

$$u_s = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} u_i \quad (\text{exemple voir Fig. 36.10 où } u_s = u_1 - u_2 + u_3)$$

On en déduit le développement en série de sinus de u_s :

$$u_s = \frac{4U_{S \text{ Max}}}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cos [(2p+1) \alpha_i] \right) \frac{\sin [(2p+1) \omega t]}{2p+1}$$

Soient $U_{S \text{ 1 Max}}$ l'amplitude du fondamental et $U_{S \text{ n Max}}$ l'amplitude de l'harmonique n , ($n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$). Pour supprimer les harmoniques 3 à $2k + 1$, ($p = 1$ à $p = k$), les harmoniques pairs étant nuls, il faut résoudre numériquement le système suivant qui donne les m angles α_i .

$$\begin{cases} U_{S \text{ 3 Max}} = 0 \\ \dots \\ U_{S \text{ (2k+1) Max}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cos [3\alpha_i] = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cos [(2k+1) \alpha_i] = 0 \end{cases}$$

On trouve :

m =	$\alpha_1 =$	$\alpha_2 =$	$\alpha_3 =$	$\alpha_4 =$	$\alpha_5 =$
5	18,2°	26,6°	36,9°	52,9°	56,7°
3	22,7°	37,8°	46,8°		

D'où :

n =	3	5	7	9	11	13	15	
$\frac{U_{S\ n\ Max}}{U_{S\ 1\ Max}} =$	0	0	0	0	0	18 %	22 %	m = 5
	0	0	0	19 %	20 %	7 %	23 %	m = 3

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S\ Max}$.

$$U_{S\ 1\ Eff} = \frac{U_{S\ 1\ Max}}{\sqrt{2}} = \frac{4U_{S\ Max}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} \cos \alpha_i \quad (0 \leq \alpha_i \leq \pi/2)$$

b) *M.L.I. par découpage à fréquence élevée ou M.L.I. sinus-triangle*

► M.L.I. – Onde 2 niveaux

Le principe (Fig. 36.11) consiste à comparer la tension d'entrée modulante u_{Mod} (représentative de la forme d'onde désirée) à une tension triangulaire u_{Tri} de fréquence porteuse f_0 élevée par rapport à la fréquence f de u_{Mod} . La tension de sortie u_{Cde} , modulée en largeur d'impulsions, sert à commander l'onduleur en pont. Ce principe est aussi utilisé pour l'amplification ; on parle alors d'amplificateur « classe D ».

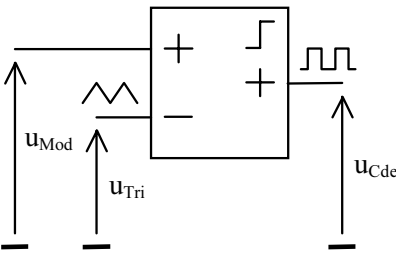


Fig. 36.11 Principe du découpage à fréquence élevée

● **Fonctionnement (Fig. 36.5 et Fig. 36.12).** Les interrupteurs électroniques sont tous simultanément commandés ; on a K_1 - K_3 fermés et K_2 - K_4 ouverts pendant αT_0 , puis K_1 - K_3 ouverts et K_2 - K_4 fermés pendant $(1 - \alpha) T_0$ avec $T_0 = 1/f_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, $T = 1/f$ et $\omega = 2\pi f$.

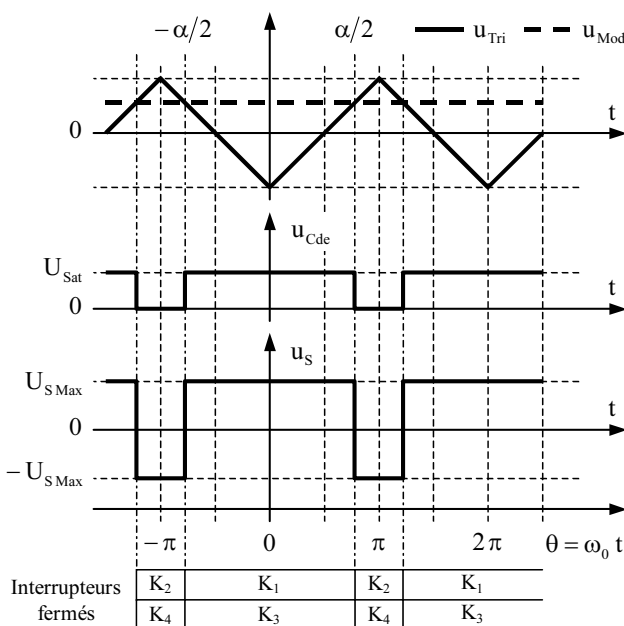


Fig. 36.12 MLI par découpage – Onde 2 niveaux

Sur une période T_0 , la « valeur moyenne instantanée » de u_S s'écrit :

$$u_{S \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) U_{S \text{ Max}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

On choisit la variation suivante du rapport cyclique :

$$\alpha = \frac{1}{2} [1 + k \sin(\omega t)] \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq 1$$

La « valeur moyenne instantanée » de u_S est alors sinusoïdale :

$$u_{S \text{ Moy}} = k U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$$

Et si $\omega \ll \omega_0$ alors le fondamental u_{S1} de la tension u_S est identique à $u_{S \text{ Moy}}$.

• **Spectre.** La tension u_S est paire. Son développement en série de cosinus est :

$$u_S = U_{S \text{ Max}} \left(k \sin(\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} \sin\left[\frac{n\pi}{2}(1 + k \sin(\omega t))\right] \cos(n\omega_0 t) \right)$$

Le spectre d'amplitude présente une raie à ω (fondamental) et des raies à ω_0 , $\omega_0 \pm 2\omega, \dots$, $2\omega_0 \pm \omega$, $2\omega_0 \pm 3\omega, \dots$, $3\omega_0 \pm 2\omega, \dots$, etc. Les amplitudes des différentes raies dépendent de k .

Remarque : La M.L.I. à fréquence élevée permet d’élaborer n’importe quelle forme d’onde (ici une sinusoïde), et de repousser les harmoniques autour de la fréquence porteuse et de ses multiples ce qui en facilite le filtrage.

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S \text{ Max}}$ ou k .

$$U_{S \text{ 1 Eff}} = \frac{k U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}}$$

► M.L.I. – Onde 3 niveaux

• **Fonctionnement (Fig. 36.5 et Fig. 36.13).** À l’aide de deux commandes on élabore une onde à trois niveaux. Les tensions de commandes $u_{Cde \text{ 1}}$ et $u_{Cde \text{ 2}}$ sont obtenues en comparant la tension de modulation u_{Mod} , et son opposée $-u_{Mod}$ (déphasage de π pour une sinusoïde), à la tension triangulaire u_{Tri} .

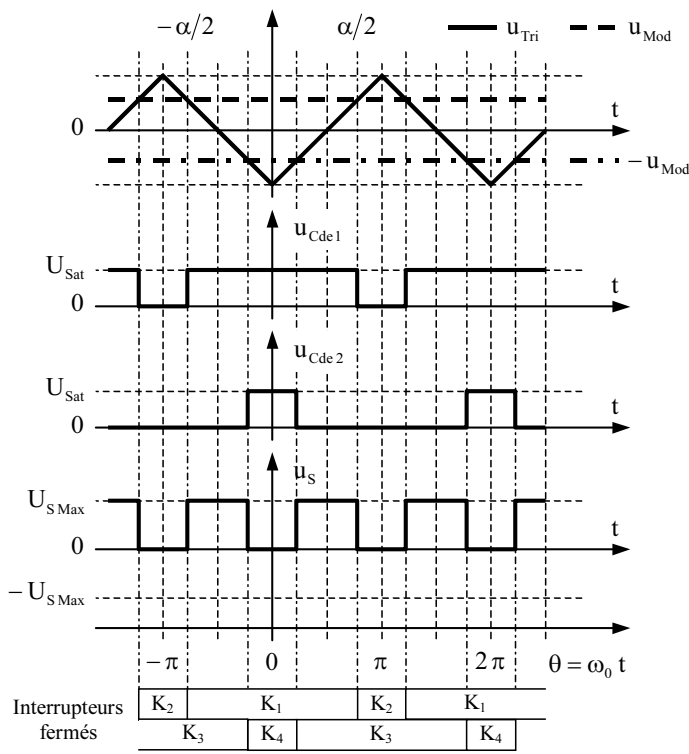


Fig. 36.13 M.L.I. par découpage – Onde 3 niveaux

Comme pour la M.L.I. – Onde 2 niveaux, on a (voir p. 539) :

$$u_{S \text{ Moy}} = (2\alpha - 1) U_{S \text{ Max}}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} [1 + k \sin(\omega t)] \Rightarrow u_{S \text{ Moy}} = k U_{S \text{ Max}} \sin(\omega t)$$

- **Spectre.** La tension u_S est paire. Son développement en série de cosinus est :

$$u_S = U_{S \text{ Max}} \left(k \sin(\omega t) + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{p\pi} \sin[p\pi(1 + k \sin(\omega t))] \cos(2p\omega_0 t) \right)$$

Le spectre d'amplitude présente une raie à ω (fondamental) et des raies à $2\omega_0 \pm \omega$, $2\omega_0 \pm 3\omega$, ..., $4\omega_0 \pm \omega$, $4\omega_0 \pm 3\omega$, ..., etc. ; mais aucune raie en $(2p + 1)\omega_0 \pm \dots$, ce qui facilite le filtrage. Les amplitudes des différentes raies dépendent de k .

Remarque : La valeur efficace du fondamental se règle par $U_{S \text{ Max}}$ ou k .

$$U_{S1 \text{ Eff}} = \frac{k U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}}$$

36.3 PRINCIPE D'UN ONDULEUR TRIPHASÉ

En associant trois demi-ponts, on obtient le principe élémentaire d'un onduleur triphasé (Fig. 36.14). Chaque interrupteur électronique est fermé pendant une demi-période, les commandes des demi-ponts étant décalées de 120° . Les tensions simples v_{1N} , v_{2N} et v_{3N} ont la même forme que la tension u_S obtenue pour une commande symétrique (voir § 36.2.1), on s'y reportera. Similairement, les tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} ont la même forme que la tension u_S obtenue pour une commande décalée avec un décalage $2\alpha = \pi/3$ (voir § 36.2.2), on s'y reportera aussi ; ce décalage correspond à la suppression de l'harmonique 3 et de ses multiples. Bien évidemment, cette commande peut être améliorée par une M.L.I. de manière semblable à celle vue pour le monophasé.

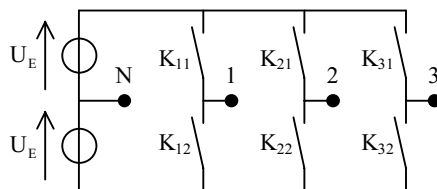


Fig. 36.14 Principe d'un onduleur de tension triphasé

Valeur efficace de la tension u_{12} .

$$U_{12 \text{ Eff}} = 2U_E \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Remarque : La valeur efficace du fondamental de u_{12} se règle par U_E .

$$U_{12(1) \text{ Eff}} = \frac{\sqrt{6}U_E}{\pi}$$

PARTIE 5

Machines électriques

Chapitre 37

Énergétique

(Charges – Comparaison des moteurs)

Principe de conservation : L'énergie peut être transformée, mais elle n'est jamais ni créée, ni détruite. L'énergie totale est toujours conservée.

37.1 BILAN ÉNERGÉTIQUE (FIG. 37.1)

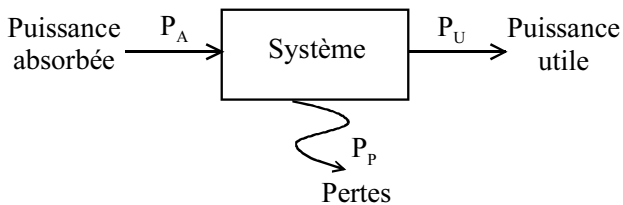


Fig. 37.1 Bilan des puissances d'un système

Énergie	$W_A = W_U + W_P$	Unités : J
Puissance	$P_A = P_U + P_P$	Unités : W
Rendement	$\eta = \frac{P_U}{P_A} < 1$	sans unité

Remarque : W_A , W_U et W_P sont respectivement les énergies absorbée, utilisée et perdue pendant la durée Δt . Les puissances moyennes absorbée, utilisée et perdue sont définies par :

$$P_A = W_A/\Delta t, \quad P_U = W_U/\Delta t \quad \text{et} \quad P_P = W_P/\Delta t$$

Exemple 37.1.1

Un moteur électrique à courant continu (Fig. 37.2) absorbe une puissance électrique P_A dont une partie est convertie en une puissance mécanique utile sur l'arbre P_U , l'autre partie P_P représente les pertes dissipées sous forme de chaleur (pertes fer, Joule et mécaniques).

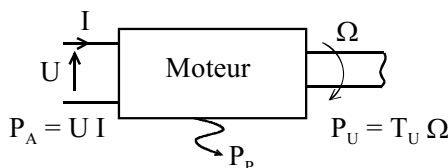


Fig. 37.2 Moteur électrique à courant continu

Question : Établir le bilan des puissances du moteur à courant continu.

Réponse :

$$UI = T_U \Omega + P_P \quad \text{et} \quad \eta = \frac{T_U \Omega}{UI}$$

• Énergie cinétique d'un système

Système en translation	Système en rotation
$E_C = \frac{1}{2}mv^2$	$E_C = \frac{1}{2}J\Omega^2$
Unités : $J = \text{kg}(\text{m s}^{-1})^2$	Unités : $J = (\text{kg m}^2)(\text{rad s}^{-1})^2$

m : masse du système ; J : moment d'inertie du système par rapport à l'axe ;
 v : vitesse de translation du système ; Ω : vitesse de rotation du système.

• Puissance instantanée

$$p = \frac{dW}{dt} \quad \text{Unités :} \quad W = \frac{J}{s}$$

37.2 TRAVAIL D'UNE FORCE – TRAVAIL D'UN COUPLE

37.2.1 Travail d'une force

a) Cas d'une force constante

Une force est constante si elle a même direction, même sens et même module tout au long de sa trajectoire (Fig. 37.3).

Pour déplacer le système de A à B (Fig. 37.3), la force effectue un travail W_{AB} (ou dépense une énergie) tel que :

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F AB \cos \alpha$$

Unités : J = N m

avec $\alpha = (\vec{F}, \vec{AB})$. Le travail est moteur si $W_{AB} > 0$ et résistant si $W_{AB} < 0$.

Remarque : Le travail de la force ne dépend que des points A et B, et non de l'allure du trajet. On dit que la force est *conservative*. La puissance instantanée est alors $p = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos \alpha$ où v est la vitesse de translation.

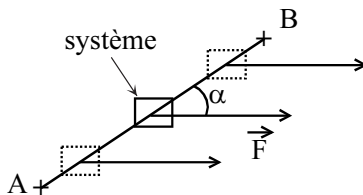


Fig. 37.3 Déplacement rectiligne

b) Cas d'une force non constante (Fig. 37.4)

On considère un intervalle $d\ell$ infiniment petit sur lequel la force est constante. Le travail élémentaire dW de la force est donc $dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = F d\ell \cos \alpha$ et le travail de la force est :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

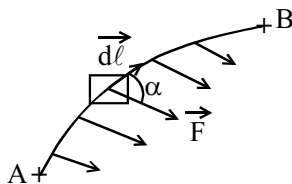


Fig. 37.4 Force non constante

37.2.2 Travail d'un couple de forces

Hypothèses : Les forces et la vitesse de rotation sont constantes.

● **Moment d'une force par rapport à un axe (Δ) fixe orienté** (Fig. 37.5)

C'est le produit vectoriel du rayon vecteur \vec{r} par la force \vec{F} :

$$\vec{T}_{\vec{F}/\Delta} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$\vec{T}_{\vec{F}/\Delta}$ est un vecteur orthogonal au plan de la figure (de même sens que l'axe sur la figure présentée).

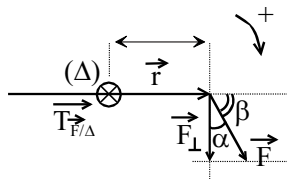


Fig. 37.5 Moment d'une force par rapport à un axe

En module, on a : $T_{\vec{F}/\Delta} = rF \sin \beta$; Or, $\sin \beta = \cos \alpha$, d'où :

$$T_{\vec{F}/\Delta} = rF \cos \alpha = rF_{\perp} \quad \text{Unités : Nm}$$

r s'appelle le bras de levier et F_{\perp} est la composante utile de la force. $T_{\vec{F}/\Delta} > 0$ si la tendance de la rotation est dans le sens positif arbitrairement choisi et qui a servi à l'orientation de l'axe.

Remarque : Le moment d'une force dont la droite d'action passe par l'axe est nul.

- **Travail d'une force de moment constant** (Fig. 37.6)

$$W_{AB} = T_{\vec{F}/\Delta} \theta$$

Unités : J = Nmrad

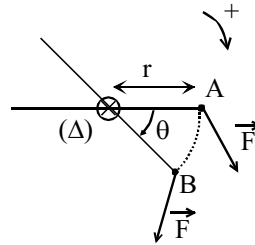


Fig. 37.6 Travail d'une force de moment constant au cours de sa rotation de A vers B

- **Couple de forces de moment constant.** Deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 forment un couple si $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ et si leurs droites d'action ne sont pas confondues (Fig. 37.7).
- **Moment d'un couple** (Fig. 37.7). Les moments des 2 forces s'ajoutent :

$$T_{\Delta} = F_{\perp} d$$

Unités : Nm

$$F_{\perp} = F_{1\perp} = F_{2\perp}$$

(composante utile)

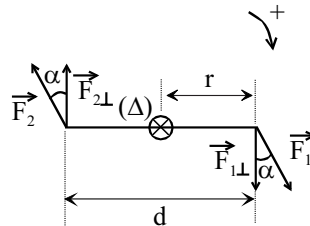


Fig. 37.7 Moment d'un couple

- **Travail d'un couple de moment constant** (Fig. 37.8). Le travail est moteur si $W_{AB} > 0$ et résistant si $W_{AB} < 0$.

$$W_{AB} = T_{\Delta} \theta$$

Unités : J = Nmrad

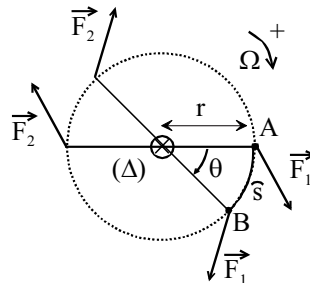


Fig. 37.8 Travail d'un couple au cours de sa rotation de A vers B

• **Puissance d'un couple de moment constant**

$$p = \frac{dW_{AB}}{dt} = T_{\Delta} \frac{d\theta}{dt} = T_{\Delta} \Omega \quad \text{Unités : } W = \text{N m rad s}^{-1}$$

Ω : vitesse angulaire en rad/s

Remarques :

- La longueur de l'arc est : $\widehat{s} = r\theta$
- Relation entre les vitesses linéaire v et angulaire Ω :

$$\frac{d\widehat{s}}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r\Omega \quad \text{Unités : } \text{m/s} = \text{m rad/s}$$

- Conversion rad/s en tr/min : $\Omega = \frac{\pi n}{30}$ où Ω est en rad/s et n en tr/min

37.3 ÉQUATION DE LA DYNAMIQUE

Les forces extérieures ou les couples extérieurs agissant sur le système modifient sa vitesse. La loi régissant cette variation est l'équation de la dynamique.

Cas d'un système en translation	Cas d'un système en rotation
$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{Ext}}$ <p>Unités : kg (m/s) s⁻¹ = N</p>	$J \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum \vec{T}_{\text{Ext}}$ <p>Unités : (kgm²) (rad/s) s⁻¹ = Nm</p>

$d\vec{v}/dt = \vec{a}$: vecteur d'accélération ;

$\sum \vec{F}_{\text{Ext}}$: somme des forces extérieures s'exerçant sur le système ;

$d\vec{\Omega}/dt$: accélération angulaire ;

$\sum \vec{T}_{\text{Ext}}$: somme des moments des couples extérieurs s'exerçant sur le système.

Question : Un moteur entraîne à la vitesse Ω une charge dont le moment du couple résistant est T_R . Ecrire l'équation de la dynamique en négligeant le couple de frottement.

Réponse : $J \frac{d\Omega}{dt} = T_M - T_R$ où T_M est le moment du couple moteur et J le moment d'inertie total ramené sur l'arbre.

37.4 MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE PAR RAPPORT À UN AXE

- **Moment d'inertie d'un point matériel** de masse m par rapport à un axe, r étant la distance de la masse à cet axe :

$$J = mr^2 \quad \text{Unité : } \text{kgm}^2 \quad \text{Généralisation à } n \text{ points matériels : } J = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2$$

- **Moment d'inertie d'un solide** (S) de masse élémentaire dm par rapport à un axe, r étant la distance de la masse élémentaire à cet axe :

$$J = \int_{(S)} r^2 dm \quad \text{Unité : } \text{kgm}^2 \quad \left(\text{Masse du solide : } m = \int_{(S)} dm \quad \text{Unité : } \text{kg} \right)$$

Question : Exprimer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène, de masse m et de rayon r_0 , par rapport à l'axe du cylindre (voir Fig. 37.9).

Réponse : Le volume élémentaire est $dv = 2\pi rh \, dr$ (h : hauteur du cylindre) ; l'élément de masse est $dm = 2\pi\rho rh \, dr$ (ρ : masse volumique) ; et le moment d'inertie de dm est $r^2 dm = 2\pi\rho r^3 h \, dr$. D'où :

$$m = \int_0^{r_0} 2\pi\rho h r \, dr = \pi\rho h r_0^2 \quad \text{et} \quad J = \int_0^{r_0} 2\pi\rho h r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi\rho h r_0^4 \quad \Rightarrow \quad J = \frac{mr_0^2}{2}$$

- **Théorème de Huygens.** Soient un système matériel de masse m , J_Δ son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ , $J_{\Delta G}$ son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son centre d'inertie (dit aussi centre de masse) et parallèle à Δ , et d la distance séparant ces axes. On a alors :

$$J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2$$

Question : Exprimer le moment d'inertie d'un cylindre plein homogène, de masse m et de rayon r_0 , par rapport à une génératrice du cylindre.

$$\text{Réponse : } J_\Delta = J_{\Delta G} + md^2 = \frac{mr_0^2}{2} + mr_0^2 = \frac{3mr_0^2}{2}$$

- **Quelques moments d'inertie utiles (Fig. 37.9).** Les moments d'inertie des solides supposés homogènes sont définis par rapport à l'axe dessiné sur la figure ou l'axe

du moteur. J : moment d’inertie ramené sur l’axe moteur ; $k = \Omega_1/\Omega_2$: rapport de réduction ; Ω : vitesse angulaire ; J_C/k^2 : moment d’inertie de la charge ramené sur l’axe moteur ; J_1 : moment d’inertie du moteur.

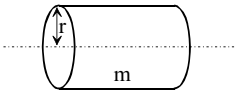
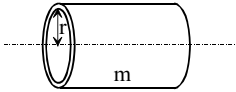
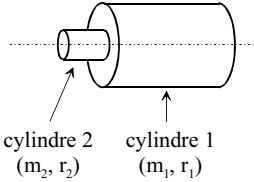
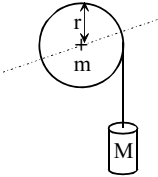
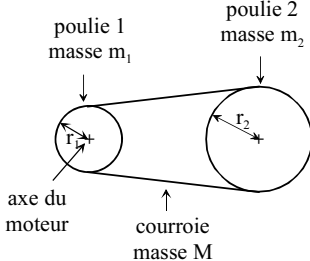
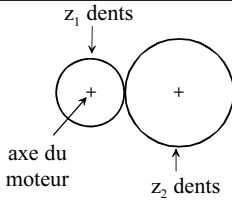
Disque ou cylindre plein $J = \frac{mr^2}{2}$	
Disque ou cylindre creux (épaisseur de l'enveloppe petite devant le rayon) $J = mr^2$	
Cylindres pleins coaxiaux $J = \frac{m_1r_1^2}{2} + \frac{m_2r_2^2}{2}$	
Système masse – poulie $J = \frac{mr^2}{2} + Mr^2$	
Transmission par courroie $J = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} + M\right)r_1^2 + \frac{J_C}{k^2}$ avec $k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$	
Transmission par engrenage $J = J_1 + \frac{J_C}{k^2}$ avec $k = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}$	

Fig. 37.9 Quelques moments d’inertie utiles pour les machines

37.5 CARACTÉRISTIQUES IDÉALES DE CHARGES (FIG. 37.10)

- Caractéristique de levage (grues, convoyeurs, etc.) : $T_R = \text{constante}$ où T_R est le moment du couple opposé par la charge (résistant) sur le moteur qui l’entraîne.
- Caractéristique de ventilation (ventilateurs, pompes centrifuges, etc.) : $T_R = K\Omega^2$ où Ω est la vitesse de rotation et K une constante.
- Caractéristique d’essorage (perçage, fraisage, etc.) : $T_R = K/\Omega$
- Caractéristique de pompage (mixeurs, pompes doseuses, etc.) : $T_R = K\Omega + b$

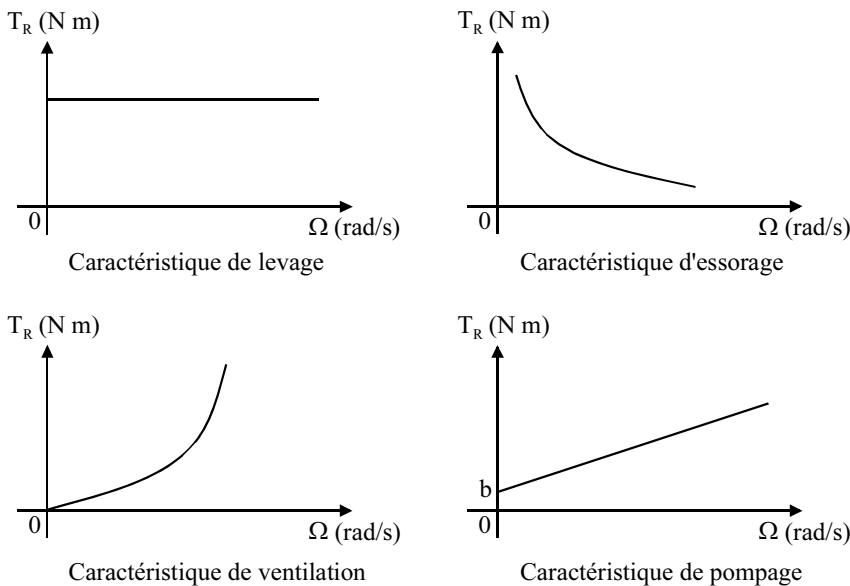


Fig. 37.10 Caractéristiques idéales de charges

Remarque : En régime permanent, on a $d\Omega/dt = 0$, d’où $T_M = T_R$. Le point de fonctionnement du groupe se situe donc à l’intersection des caractéristiques du moteur et de la charge. Selon les caractéristiques, on peut avoir deux points d’intersection, mais un seul correspond à un état stable. Le point de fonctionnement est stable si (exemple Fig. 37.11) :

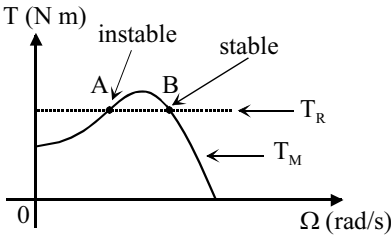


Fig. 37.11 Stabilité du point de fonctionnement

$$\frac{dT_M}{d\Omega} < \frac{dT_R}{d\Omega}$$

(Condition de stabilité)

37.6 COMPARAISON DES MOTEURS

	Avantages	Inconvénients	Applications
Moteur à courant continu	<ul style="list-style-type: none"> • Couple élevé au démarrage • Contrôle du couple et de la vitesse indépendants • Vitesse de rotation stable et précise 	<ul style="list-style-type: none"> • Dissipation d'énergie (au rotor) difficile à évacuer • Collecteur : <ul style="list-style-type: none"> - Coût élevé - Complexité de fabrication - Entretien nécessaire - Durée de vie limitée 	<ul style="list-style-type: none"> • Haute précision (robotique, etc.) • Besoin d'un couple élevé à l'arrêt (engins de levages, etc.) • Véhicules automobiles, traction ferroviaire
Moteur synchrone autopiloté (brushless)	<ul style="list-style-type: none"> • Pas de collecteur • Dissipation d'énergie (au stator) bien évacuée • Rendement très élevé • Faible inertie • Durée de vie élevée • Vitesse élevée (pour les moteurs brushless) 	<ul style="list-style-type: none"> • Fonctionnement en boucle fermée • Commande électronique complexe et coûteuse • Coût élevé 	<ul style="list-style-type: none"> • Fortes puissances avec rotor bobiné (traction ferroviaire, propulsion marine, etc.) • Précision avec rotor à aimant (robotique, entraînement d'axes de machines - outils, appareils médicaux, etc.)
Moteur asynchrone	<ul style="list-style-type: none"> • Robustesse, fiabilité • Pas de collecteur • Peu d'entretien • Durée de vie élevée • Coût faible • Couple non nul au démarrage • Pilotage de la vitesse en boucle ouverte avec un fonctionnement stable 	<ul style="list-style-type: none"> • Inertie élevée • Commande électronique complexe en variation de vitesse • Rendement plus faible qu'un moteur synchrone • Difficulté de fonctionnement à faible vitesse 	<ul style="list-style-type: none"> • Traction ferroviaire (TGV Transmanche) • Pratiquement pour toutes les applications à vitesse constante • Applications à dynamique faible (pompes, enrouleurs, ventilateurs, etc.)

Chapitre 38

Transformateurs en régime sinusoïdal à fréquence constante

Voir aussi Chapitre 15 : Transformateurs.

38.1 UTILISATION – SCHÉMA DE PRINCIPE – FONCTIONNEMENT

- **Rôle principal.** Augmenter la tension (pour diminuer le courant et ainsi les pertes en lignes) pour le transport de l'énergie électrique, puis l'abaisser pour la distribution.
- **Schéma de principe** (Fig. 38.1). Le transformateur est composé de deux bobines couplées par un circuit magnétique feuilleté en fer doux canalisant le flux.
- **Convention et symboles** (Fig. 38.2). L'enroulement primaire est *récepteur*, l'enroulement secondaire est *générateur*.

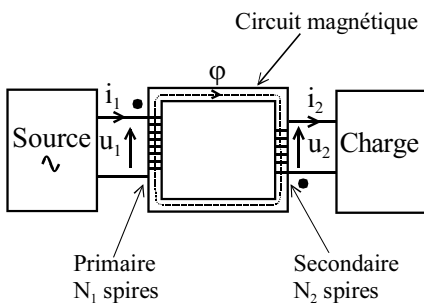


Fig. 38.1 Schéma de principe

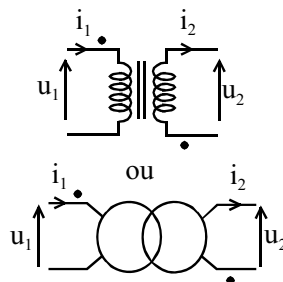


Fig. 38.2 Symboles

• **Fonctionnement.** Lorsqu'un enroulement est alimenté, il crée un flux magnétique variable dont une partie est embrassée par l'autre enroulement. Une tension induite est recueillie à ses bornes.

Remarque : Le transformateur est réversible et peut être utilisé en abaisseur ou en élévateur.

• **Bornes homologues.** Si des courants entrent par les bornes homologues, les flux qu'ils créent s'ajoutent. On repère ces bornes par des points (Fig. 38.1 et Fig. 38.2). Elles indiquent la polarité.

38.2 TRANSFORMATEUR PARFAIT (T.P.)

Un transformateur est parfait s'il n'y a ni perte cuivre, ni perte fer, ni fuite magnétique, et si la perméabilité magnétique du circuit magnétique est infinie.

38.2.1 Régime quelconque

Avec les conventions adoptées (voir Fig. 38.1), φ étant le flux par spire, la loi de Lenz-Faraday (voir Chapitre 4 : Électromagnétisme - Ferromagnétisme) permet d'écrire :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \\ u_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{-u_2}{u_1} \quad \text{m, rapport du nombre de spires, est appelé : rapport de transformation.}$$

La loi d'Hopkinson (voir Chapitre 4 : Électromagnétisme - Ferromagnétisme) permet d'écrire :

$$\mathfrak{R}\varphi = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-i_1}{i_2}$$

Remarque : La réluctance \mathfrak{R} est nulle car la perméabilité magnétique du circuit magnétique est supposée infinie.

38.2.2 Régime sinusoïdal

• **Formule de Boucherot ou équation générale**

$$U_{\text{IEff}} = 4,44 N_1 f S B_{\text{Max}}$$

Avec S : section du circuit magnétique (m^2); B_{Max} : valeur maximale du champ d'induction (T); f : fréquence (Hz).

Remarque : Le flux est forcé par la tension d'alimentation car $\Phi_{\text{Max}} = B_{\text{Max}} S$.

• **Modèle et diagramme de Fresnel du T.P.** (Fig. 38.3, Fig. 38.4)

$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_{2\text{Eff}}}{U_{1\text{Eff}}} = \frac{I_{1\text{Eff}}}{I_{2\text{Eff}}}$$

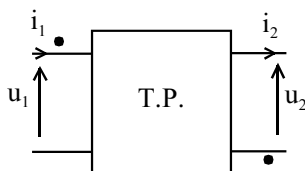


Fig. 38.3 Transformateur parfait

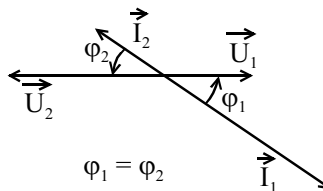


Fig. 38.4 Diagramme de Fresnel

Remarque : Avec les conventions adoptées (voir Fig. 38.1), les grandeurs (tensions et courants) entre le primaire et le secondaire sont en opposition de phase (Fig. 38.4).

- **Puissances.** Pour un T.P., les puissances (actives, réactives et apparentes) au primaire et au secondaire sont égales et le rendement est $\eta = 1$.
- **Impédance ramenée** (Fig. 38.5)

$$Z_p = \frac{Z_2}{m^2} \Rightarrow |Z_p| = \frac{|Z_2|}{m^2}$$

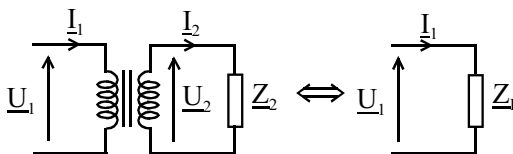


Fig. 38.5 Impédance ramenée au primaire

38.3 TRANSFORMATEUR RÉEL

Un transformateur réel présente des pertes et des fuites.

- Pertes cuivre : $p_J = R_1 I_{1\text{Eff}}^2 + R_2 I_{2\text{Eff}}^2$ (Unités : $W = \Omega A^2$) dans les résistances du primaire et du secondaire.
- Pertes fer : p_F (par hystérésis et par courants de Foucault) qui dépendent de la fréquence et de Φ_{Max} , donc de l'alimentation.
- Fuites de flux du circuit magnétique. De plus, celui-ci n'est pas linéaire (phénomène de saturation).

En conséquence, la tension secondaire en charge $U_{2\text{Eff}}$ est inférieure à la tension secondaire à vide. D'où :

$$m = \frac{U_{20\text{Eff}}}{U_{1\text{Eff}}} = \frac{N_2}{N_1}$$

• **Rendement**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + p_J + p_F} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_1 = U_{1\text{Eff}} I_{1\text{Eff}} \cos \varphi_1 \\ P_2 = U_{2\text{Eff}} I_{2\text{Eff}} \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Avec P_1 : puissance absorbée par le primaire ; P_2 : puissance utile fournie par le secondaire à la charge.

• **Détermination des pertes.** On procède à deux essais :

- À vide ($I_{2\text{Eff}} = 0$), sous tension primaire nominale $U_{1\text{NEff}}$, on mesure $P_{10} \approx p_F$.
- En court-circuit, sous tension primaire $U_{1\text{CCEff}}$ réduite telle que $I_{2\text{CCEff}} = I_{2\text{NEff}}$ (courant nominal), on mesure $P_{1\text{CC}} \approx p_J$. En général, $U_{1\text{CCEff}} \approx 5\%$ de $U_{1\text{NEff}}$.

• **Modèle linéarisé** (Fig. 38.6). R_1 et R_2 : résistances des enroulements ; ℓ_1 et ℓ_2 : inductances de fuite ; R_F et L : bobine à noyau de fer simulant le comportement du primaire à vide ; i_{10} : courant primaire à vide (dit courant magnétisant).

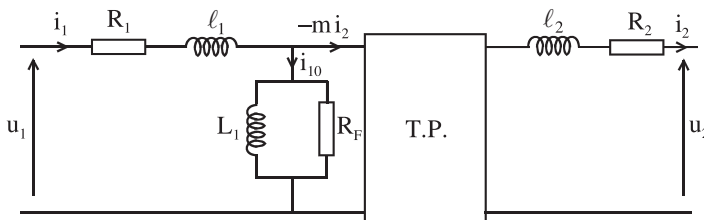


Fig. 38.6 Modèle linéarisé

• **Hypothèse de Kapp.** En fonctionnement nominal, on néglige le courant i_{10} , ce qui revient à supprimer la bobine à noyau de fer (Fig. 38.7).

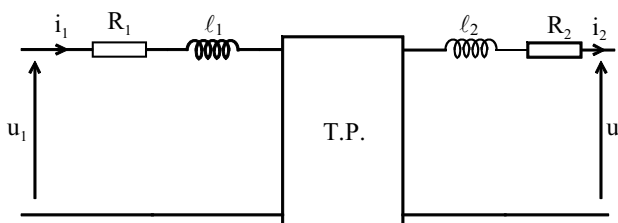


Fig. 38.7 Modèle dans l'hypothèse de Kapp

• **Modèle équivalent de Thévenin ramené au secondaire dans l'hypothèse de Kapp** (Fig. 38.8). R_S et X_S sont respectivement la résistance et la réactance ramenées au secondaire, et \underline{E}_S la tension secondaire à vide.

$$\begin{cases} R_S = R_2 + m^2 R_1 \\ X_S = (\ell_2 + m^2 \ell_1) \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_S^2} = |\underline{Z}_S|$$

$$\underline{E}_S = \underline{U}_{20} = -m \underline{U}_1 \quad \Rightarrow \quad E_{S\text{Eff}} = U_{20\text{Eff}} = m U_{1\text{Eff}}$$

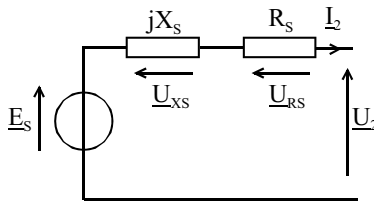


Fig. 38.8 Modèle de Thévenin ramené au secondaire

• **Détermination des éléments du modèle de Thévenin au secondaire**

- L'essai à vide permet de mesurer $E_{S \text{ Eff}} = U_{20 \text{ Eff}}$
- L'essai en court-circuit permet de déterminer :

$$R_S = \frac{P_{1CC}}{I_{2CCEff}^2} \quad \text{et} \quad Z_S = m \frac{U_{1CCEff}}{I_{2CCEff}} \quad \text{et par suite} \quad X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

- Un essai en continu détermine R_1 et R_2 par application de la loi d'Ohm.

• **Prédétermination de la chute de tension en charge, diagramme de Kapp.**

Connaissant les éléments du modèle et la charge à alimenter (I_{2Eff} et φ_2), on peut déterminer U_{2Eff} et calculer la chute de tension en charge $\Delta U_2 = U_{20Eff} - U_{2Eff}$. À partir du schéma équivalent, on obtient $\vec{U}_{20} = \vec{U}_2 + \vec{U}_{RS} + \vec{U}_{XS}$. On construit alors le diagramme de Fresnel (Fig. 38.9). Il suffit ensuite de mesurer graphiquement U_{2Eff} .

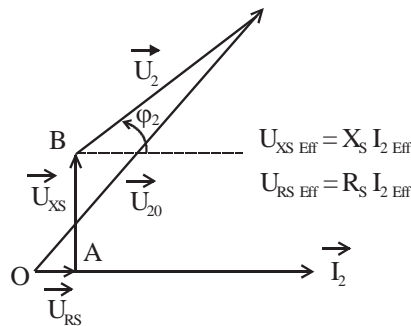


Fig. 38.9 Diagramme de Kapp

Remarque : Le triangle OAB (triangle de Kapp) étant très petit, on peut utiliser la formule approchée : $\Delta U_2 \approx R_S I_{2Eff} \cos \varphi_2 + X_S I_{2Eff} \sin \varphi_2$

- **Plaque signalétique.** Elle indique la puissance apparente nominale, la fréquence de fonctionnement et les tensions des enroulements. La connaissance de la puissance apparente permet de calculer les courants nominaux.

$$S_N = U_{1Eff} I_{1Eff} = U_{20Eff} I_{2Eff} \quad \text{Unités :} \quad \text{VA}$$

38.4 TRANSFORMATEUR TRIPHASÉ

Pour réduire les coûts et pour des raisons d'avantages techniques, le transport de l'énergie se fait en triphasé grâce à des transformateurs triphasés, qui peuvent être considérés comme l'association de trois transformateurs monophasés.

38.4.1 Constitution (Fig. 38.10)

Un tel transformateur, à trois colonnes, est à flux forcé. S’il comprend une ou deux colonnes supplémentaires, il est à flux libre.

38.4.2 Couplage et indices horaires

• **Couplage.** Les connexions des enroulements, primaires et secondaires, sont réalisées suivant la tension dont on dispose à la source et celle que l’on veut obtenir à l’utilisation. Les primaires peuvent être couplés en étoile ou en triangle, les secondaires en étoile, triangle ou zigzag. Ce dernier, dans lequel chaque enroulement secondaire se trouve sur deux colonnes différentes, est utilisé lorsque les charges sont fortement déséquilibrées (récepteurs monophasés différents par exemple). De manière à pouvoir choisir un couplage zigzag, chaque enroulement secondaire est constitué de deux demi-enroulements. Il y a donc au total trois bobinages par colonne, N_1 spires et deux fois $N_2/2$ spires.

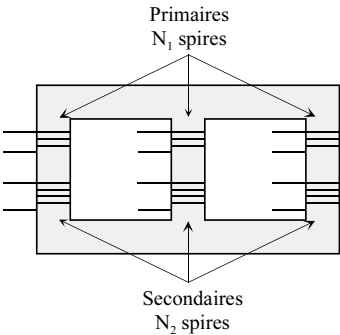


Fig. 38.10 Transformateur à flux forcé

Remarques :

- On attribue des lettres aux couplages (Y = étoile, D = triangle et Z = zigzag).
- Les lettres capitales désignent l’enroulement haute tension.
- On ne couple jamais le primaire en zigzag.
- Le rapport de transformation $m = U_{20\text{Eff}}/U_{1\text{Eff}}$ (rapport des tensions composées secondaires à vide et primaires) dépend du nombre de spires et du type de couplage (Fig. 38.11).

Couplages principaux	Rapport de transformation
Yy	$m = \frac{N_2}{N_1}$
Yd	$m = \frac{N_2}{N_1 \sqrt{3}}$
Dy	$m = \frac{N_2 \sqrt{3}}{N_1}$
Yz	$m = \frac{N_2 \sqrt{3}}{2N_1}$

Fig. 38.11 Rapport de transformation

• **Indices horaires.** Quand plusieurs secondaires de transformateurs sont interconnectés, il ne doit pas y avoir de déphasage entre eux. On doit donc connaître pour chacun d’eux le déphasage entre les tensions primaire et secondaire. Ces déphasages sont indiqués conventionnellement par un indice horaire (Fig. 38.12 et Fig. 38.13).

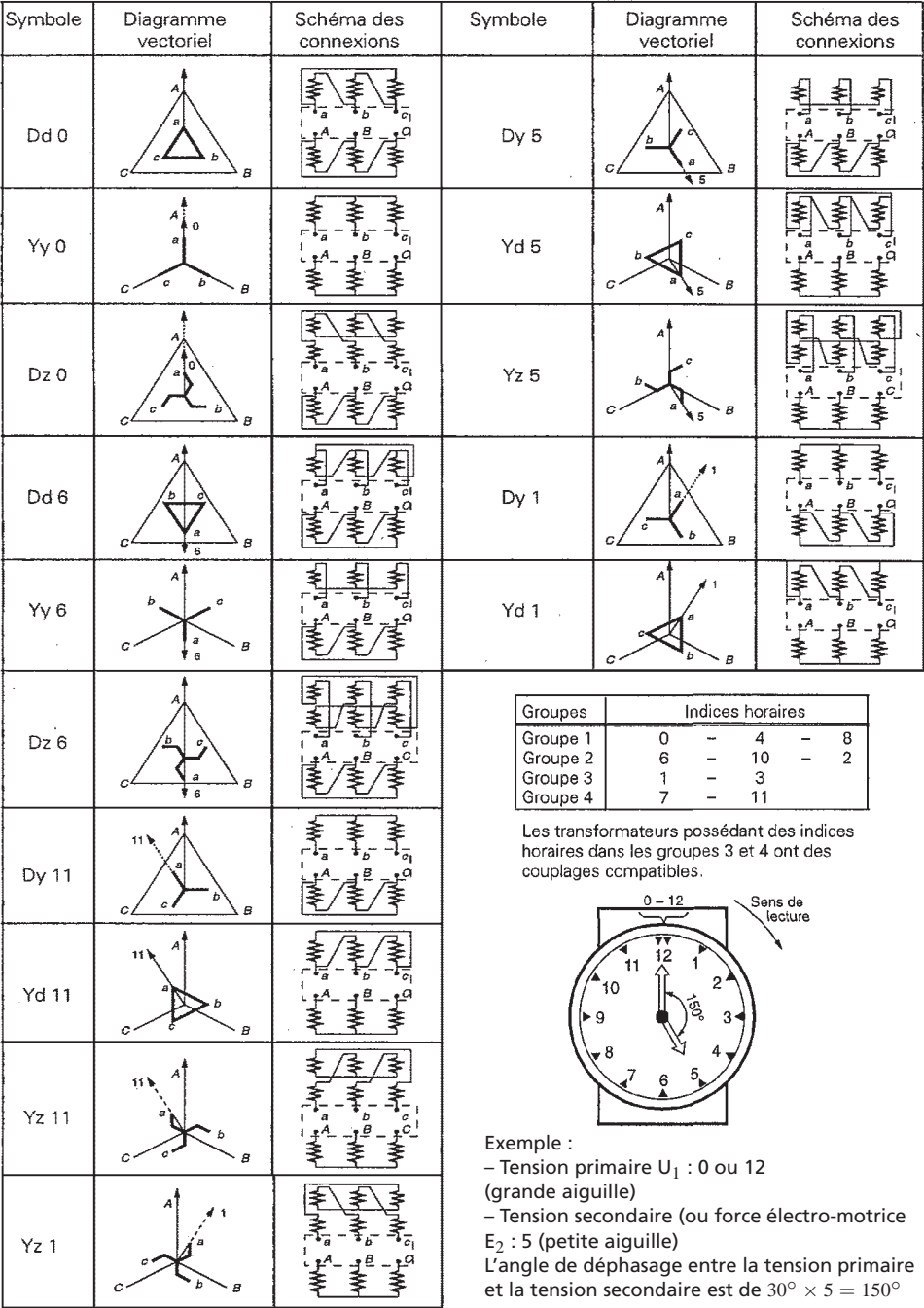


Fig. 38.12 Couplages principaux

Fig. 38.13 Indices horaires

38.4.3 Rendement et modèle

- **Rendement**

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + p_J + p_F} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_1 = \sqrt{3} U_{1\text{Eff}} I_{1\text{Eff}} \cos \varphi_1 \\ P_2 = \sqrt{3} U_{2\text{Eff}} I_{2\text{Eff}} \cos \varphi_2 \end{cases}$$

Avec P_1 : puissance absorbée par le primaire ; P_2 : puissance utile fournie par le secondaire à la charge.

- **Pertes.** Elles se déterminent de la même façon qu'en monophasé.

- **Modèles.** Les modèles du transformateur monophasé (voir Fig. 38.6, Fig. 38.7 et Fig. 38.8) peuvent être conservés, sachant qu'ils ne représentent qu'une seule phase et que le transformateur triphasé en compte trois. Le modèle équivalent se détermine comme si les enroulements primaires et secondaires étaient en étoile, même si leurs couplages réels sont différents (Fig. 38.14).

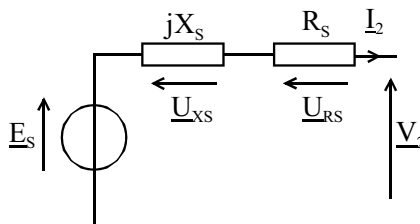


Fig. 38.14 Modèle équivalent ramené au secondaire pour une phase dans l'hypothèse de Kapp

- **Détermination des éléments du modèle**

– L'essai à vide permet de mesurer $E_{\text{SEff}} = V_{20\text{Eff}} = \frac{U_{20\text{Eff}}}{\sqrt{3}}$

– L'essai en court-circuit permet de déterminer :

$$R_S = \frac{P_{1\text{CC}}}{3I_{2\text{CCEff}}^2} \quad \text{et} \quad Z_S = m \frac{U_{1\text{CCeff}}}{\sqrt{3}I_{2\text{CCEff}}} \quad \text{et par suite} \quad X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2}$$

Remarques :

- La tension efficace entre phase et neutre est V_{Eff} (tension simple), et la tension efficace entre deux phases (tension composée) est $U_{\text{Eff}} = \sqrt{3}V_{\text{Eff}}$.
- Le courant efficace dans un fil de ligne est I_{Eff} .

- **Plaque signalétique.** Elle indique la puissance apparente nominale, la fréquence de fonctionnement et les tensions entre phases. La connaissance de la puissance apparente permet de calculer les courants nominaux.

$$S_N = \sqrt{3}U_{1\text{Eff}} I_{1\text{Eff}} = \sqrt{3}U_{20\text{Eff}} I_{2\text{Eff}} \quad \text{Unités :} \quad \text{VA}$$

Chapitre 39

Champs tournants

39.1 ORGANISATION DES MACHINES TOURNANTES ALTERNATIVES

39.1.1 Organisation

Une machine tournante à courant alternatif est constituée de deux armatures magnétiques concentriques pourvues d’encoches, séparées par un entrefer constant ou variable (Fig. 39.1). Stator et rotor reçoivent des enroulements parcourus par des courants continus ou alternatifs selon le type de machine.

Exemple 39.1.1

	Machine asynchrone triphasée	Machine synchrone triphasée
Rotor	Courant alternatif	Courant continu (ou aimant)
Stator	Courant alternatif	Courant alternatif

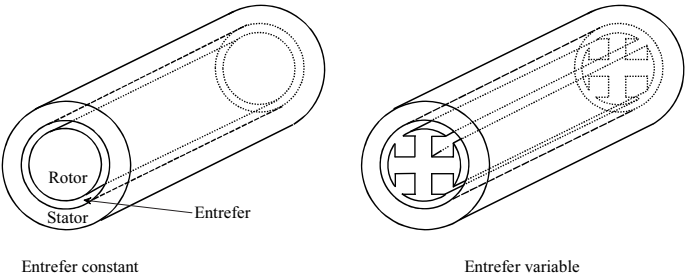


Fig. 39.1 Types d’entrefers

39.1.2 Définitions

On notera N le nombre de conducteurs ou brins actifs distribués dans les encoches (Fig. 39.2). Deux brins actifs forment une spire, et l'ensemble des spires mises en série forme une bobine. Les liaisons hors encoches, non soumises au champ magnétique, s'appellent les têtes de bobines.

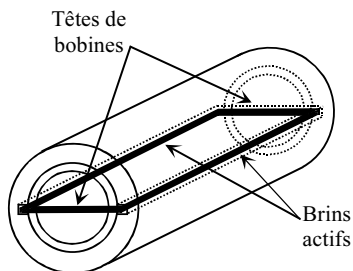


Fig. 39.2 Position d'une bobine dans une encoche

39.2 DISTRIBUTION DU CHAMP MAGNÉTIQUE DANS L'ENTREFER

39.2.1 Machine bipolaire

a) Cas d'un enroulement massé

Soient N brins actifs placés au stator dans deux encoches diamétralement opposées, parcourus par un courant continu I (Fig. 39.3). Soit M un point de l'entrefer, repéré par l'angle α , et (Γ) une ligne de champ passant par ce point (orientée d'après la règle de la main droite par exemple). Il existe toujours un point M' , symétrique de M par rapport à (xx') tel que $|\vec{H}(M)| = |\vec{H}(M')|$, $\vec{H}(M)$ étant dirigé du rotor vers le stator et $\vec{H}(M')$ du stator vers le rotor, cela quelle que soit la position du point M dans l'entrefer. Cela se traduit par la Fig. 39.4, qui représente la répartition du champ magnétique (ou excitation) dans l'entrefer.

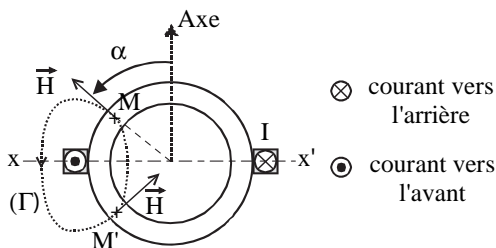


Fig. 39.3 Enroulement massé

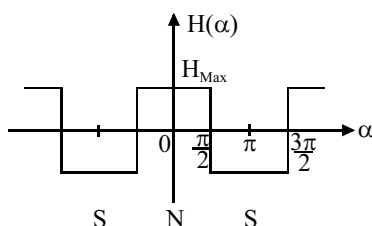


Fig. 39.4 Répartition du champ magnétique

Question : En utilisant le théorème d'Ampère (Voir chapitre 4 : Électromagnétisme - Ferromagnétisme), établir l'expression de H_{Max} .

Réponse : Si ℓ est la longueur de la ligne de champ moyenne, on a : $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = NI/2$. D'autre part, si la saturation est faible, $H_{\text{Fer}} \ll H_{\text{Air}}$ (car $\mu_{\text{Fer}} \gg \mu_{\text{Air}}$). Si e est la largeur de l'entrefer, on a donc :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \approx \int_{\text{Air}} H_{\text{Max}} d\ell = 2eH_{\text{Max}} \quad \text{D'où : } H_{\text{Max}} = \frac{NI}{4e}$$

b) Cas d'un enroulement réparti

Les Fig. 39.5 et Fig. 39.6 montrent la même bobine répartie dans six encoches différentes et l'onde magnétique obtenue, qui se rapproche de la forme sinusoïdale nécessaire. En pratique, on arrive à obtenir une distribution quasi-sinusoïdale.

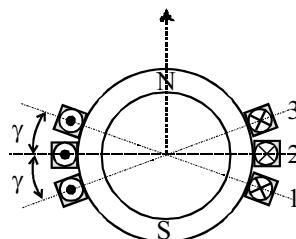


Fig. 39.5 Enroulement réparti

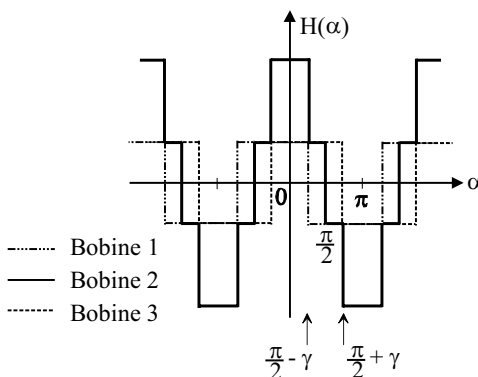


Fig. 39.6 Répartition du champ magnétique

Remarques :

- On obtiendrait le même résultat avec un aimant ou une bobine placés au rotor.
- Dorénavant, on supposera l'excitation sinusoïdale (Fig. 39.7), et on écrira :

$$H(\alpha) = H_{\text{Max}} \cos \alpha$$

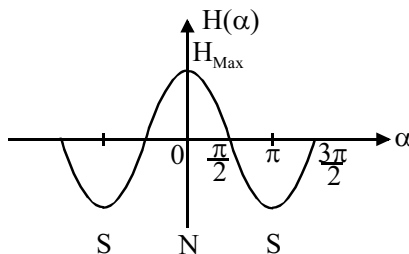


Fig. 39.7 Répartition sinusoïdale

39.2.2 Machine multipolaire

La machine représentée Fig. 39.8, possède quatre encoches comportant deux bobines en série parcourues par un courant continu I . On a ainsi quatre pôles (machine tétrapolaire) soit $p = 2$ où p est le nombre de paires de pôles.

Généralisation. Une machine multipolaire à p paires de pôles, ou $2p$ polaire, crée une excitation $2p$ polaire (Fig. 39.9 et Fig. 39.10) :

de période angulaire $\frac{2\pi}{p}$ et à répartition sinusoïdale $H(\alpha) = H_{\text{Max}} \cos(p\alpha)$

On trouve à chaque instant p pôles nord et p pôles sud répartis dans l'entrefer.

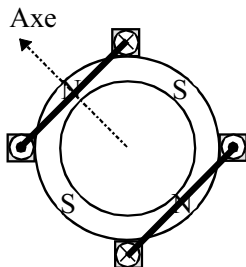


Fig. 39.8 Machine tétrapolaire

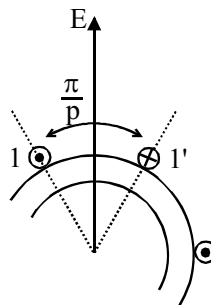


Fig. 39.9 Machine multipolaire

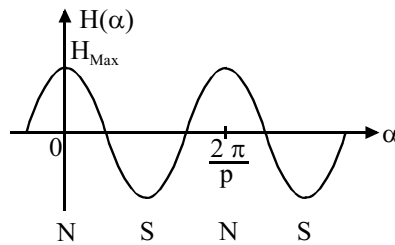


Fig. 39.10 Répartition sinusoïdale multipolaire

39.3 CRÉATION D'UN CHAMP TOURNANT

39.3.1 Intérêt des champs tournants

– Lorsqu'un aimant tourne, le champ magnétique qu'il produit tourne aussi. Si un enroulement subit les variations de flux dues à ce champ tournant, il pourra être le siège de courants induits alternatifs : c'est le principe de l'alternateur, qui convertit l'énergie mécanique en énergie électrique.

– Inversement, si l'on crée un champ tournant sans partie mécanique en rotation (cas des stators des moteurs alternatifs), on peut contraindre une pièce aimantée (principe du moteur synchrone), ou une pièce de métal conducteur non aimantable (principe du moteur asynchrone), à suivre la rotation du champ tournant.

39.3.2 Roue polaire en rotation

Si une roue polaire tourne, son champ tourne avec elle.

• **Équation d'un champ tournant $2p$ polaire.** On considère le rotor multipolaire de la Fig. 39.11. Soient O_S une référence fixe du stator et O_R l'axe d'un pôle nord du rotor lequel tourne à la vitesse constante Ω . Pour un point M de l'entrefer, on a $H(\beta) = H_{\text{Max}} \cos(p\beta)$ et $\alpha = \beta + \theta$ avec $\theta = \Omega t$, d'où :

$$H(M, t) = H_{\text{Max}} \cos(p\alpha - p\Omega t) \quad \text{avec } H \text{ en A/m et } \Omega \text{ en rad/s}$$

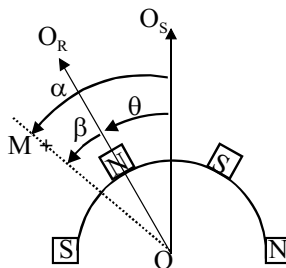


Fig. 39.11 Rotor multipolaire

Si on observe l'excitation en M à deux instants t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$), on constate que celle-ci « glisse » le long de l'entrefer (Fig. 39.12), son amplitude restant constante. Le champ tourne autour de l'axe à la *vitesse de synchronisme* Ω .

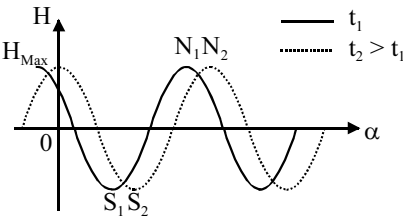


Fig. 39.12 Champ glissant

- **Relation fondamentale.** ω : pulsation (rad/s) ; f : fréquence (Hz) du champ tournant vue par un point M de l'entrefer ; Ω (rad/s) ou n (tr/s) : vitesse de synchronisme du champ tournant ; p : nombre de paires de pôles du champ tournant.

$\omega = p\Omega$

et

$f = pn$

Exemple 39.3.2

Quelques vitesses de synchronisme en fonction du nombre de paires de pôles p pour une fréquence f de 50 Hz.

p	1	2	3	4	5
n (tr/s)	50	25	16,7	12,5	10
n' (tr/min)	3000	1500	1000	750	600

Remarques :

- Une machine dont le rotor tourne à la vitesse de synchronisme est appelée *machine synchrone*. Elle est qualifiée d'*asynchrone* dans le cas contraire.
- Le champ tournant est parfois nommé *couronne polaire fictive* ou *rotor fictif*.
- Notion d'angles électriques : On voit que dans les équations, les angles « réels » α , β , θ sont multipliés par le nombre de paires de pôles p . Ces angles, multiples de p , sont appelés *angles électriques*. Ainsi, une machine multipolaire pourra être remplacée par une machine bipolaire, à condition de remplacer les angles mécaniques α , β , θ par les angles électriques $p\alpha$, $p\beta$, $p\theta$.

39.3.3 Bobinage triphasé multipolaire

Le bobinage triphasé est constitué de trois enroulements monophasés identiques placés au stator, dont les axes E_1 , E_2 et E_3 sont décalés de $2\pi/3p$ (Fig. 39.13), et alimentés par un système triphasé de courants :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t) \\ i_2(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

La Fig. 39.14 montre un bobinage triphasé à quatre pôles ($p = 2$).

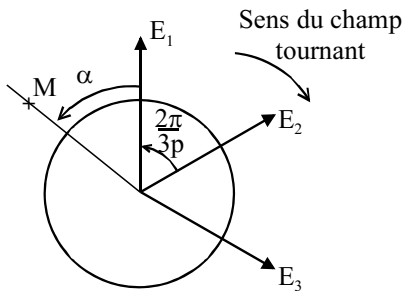


Fig. 39.13 Bobinage triphasé multipolaire

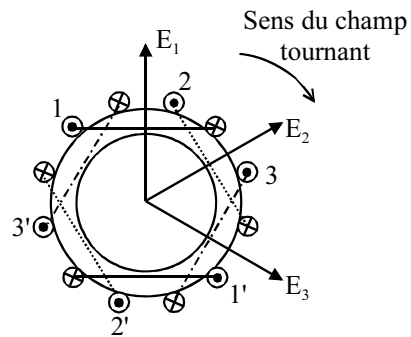


Fig. 39.14 Bobinage triphasé tétrapolaire ($p = 2$)

Chaque enroulement crée une excitation à répartition sinusoïdale, proportionnelle au courant si le fer est peu ou pas saturé ($\mu_{\text{Air}} \ll \mu_{\text{Fer}}$) : $H(\alpha) = k \cos(p\alpha)i(t)$

En un point M de l'entrefer (voir Fig. 39.13), l'excitation résultante est la somme des excitations créées par chaque enroulement. Tout calcul fait, on trouve :

$$H(M, t) = \frac{3}{2} H_{\text{Max}} \cos(p\alpha + \omega t)$$

qui est l'expression d'un champ $2p$ polaire, tournant à la vitesse de synchronisme $\Omega = \omega/p$.

Remarques :

- En permutant deux fils d'alimentations, (par exemple E_2 et E_3), on trouverait : $H(M, t) = \frac{3}{2} H_{\text{Max}} \cos(p\alpha - \omega t)$ c'est à dire un champ tournant en sens inverse.
- Les pôles nord du champ tournant sont dans l'axe d'un enroulement lorsque le courant dans ce dernier est maximal.

• **Généralisation à un bobinage polyphasé : Théorème de Ferraris**

Un bobinage polyphasé (q phases) symétrique et multipolaire (p paires de pôles), alimenté par un système polyphasé équilibré de courants, crée dans l'entrefer un champ multipolaire à répartition sinusoïdale, tournant à la vitesse de synchronisme $\Omega = \omega/p$.

39.4 CAS D'UN ENROUEMENT MONOPHASÉ

On considère une machine multipolaire constituée d'un enroulement alimenté par un courant $i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t)$. En un point M de l'entrefer, l'excitation est égale à $H(M, t) = H_{\text{Max}} \cos(p\alpha) \cos(\omega t)$. Ce n'est pas un champ tournant mais un champ fixe dont l'amplitude varie (Fig. 39.15) : C'est un champ « pulsant ». Celui-ci est équivalent à deux champs tournants de sens opposés. On montre que :

$$H(M, t) = \frac{1}{2} H_{\text{Max}} \cos(p\alpha - \omega t) + \frac{1}{2} H_{\text{Max}} \cos(p\alpha + \omega t)$$

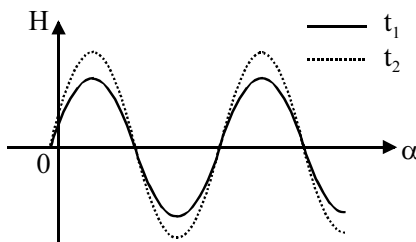


Fig. 39.15 Champ pulsant

• **Théorème de Leblanc.** Un enroulement monophasé multipolaire (p paires de pôles), alimenté par un courant sinusoïdal et créant dans l'entrefer un champ multipolaire à répartition sinusoïdale, génère un champ pulsant équivalent à deux champs multipolaires tournants en sens opposés à la vitesse de synchronisme $\Omega = \omega/p$.

39.5 CAS D'UN ENROUEMENT DIPHASÉ

On peut également créer un champ tournant à l'aide de deux enroulements monophasés identiques décalés de $\pi/2$ et alimentés par des courants également déphasés de $\pi/2$. On a alors :

$$H(M, t) = H_{\text{Max}} \cos(p\alpha + \omega t)$$

On peut provoquer ce déphasage en plaçant un élément réactif, le plus souvent un condensateur, dans un enroulement. On utilise ce principe pour démarrer les moteurs asynchrones « monophasés » par exemple.

Chapitre 40

Machines synchrones triphasées

40.1 CONSTITUTION – PRINCIPE – EXCITATION

- **Constitution** : deux parties séparées par un entrefer.
 - *Rotor* ou roue polaire : C'est la partie tournante. Parfois c'est un aimant permanent pour les petites machines, mais en général c'est un électroaimant sous forme d'un cylindre ferromagnétique massif recevant un bobinage qui, alimenté en courant continu (excitation), génère p paires de pôles sud et nord alternés.
Il existe des rotors à pôles saillants avec un nombre de paires de pôles p élevé, ou à pôles lisses (Fig. 40.1 et Fig. 40.2).
 - *Stator* : C'est la partie fixe, sous forme d'une carcasse ferromagnétique feuilletée comportant un bobinage triphasé qui, parcouru par des courants triphasés équilibrés génère un champ tournant à répartition quasi-sinusoidale de même nombre de pôles qu'au rotor. Les enroulements peuvent être couplés en étoile (cas le plus fréquent) ou en triangle.

Remarque : Généralement, l'inducteur est au rotor et l'induit au stator.

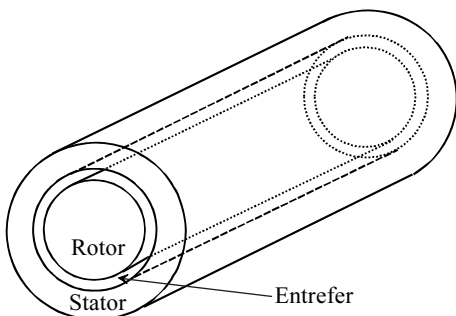


Fig. 40.1 Machine à pôles lisses

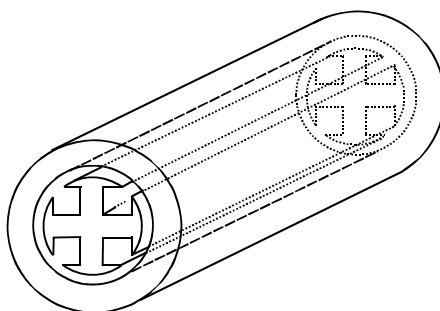


Fig. 40.2 Machine à pôles saillants

- **Principe.** Si on entraîne le rotor à la vitesse constante Ω , les enroulements statoriques, soumis au champ tournant rotorique, créent par induction un système triphasé de pulsation $\omega = p\Omega$ ou $f = pn$ (ω et Ω en rad/s, f la fréquence en Hz et n la vitesse en tr/s), p étant le nombre de paires de pôles du rotor. C'est le fonctionnement en alternateur, utilisé dans la production d'énergie électrique.

- **Réversibilité.** Fonctionnement en moteur. Si on alimente le stator en triphasé et si on lance le rotor, celui-ci poursuit sa rotation à la vitesse de synchronisme $\Omega = \omega/p$ du champ tournant (ce champ résulte des champs tournants rotorique et statorique).

- **Excitation de la machine**

- Ce peut être une source extérieure qui alimente le rotor en courant continu via un système de bagues et de balais.
- Ce peut être la machine elle-même qui fournit sa propre excitation via une génératrice excitatrice ou un alternateur auxiliaire relié sur l'arbre. La machine est alors auto-excitée.

- **Symboles et conventions** (Fig. 40.3)

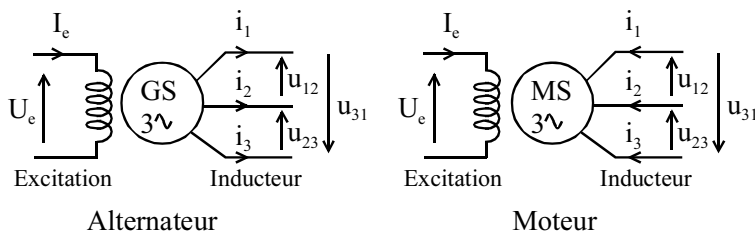


Fig. 40.3 Symboles et conventions

• **Plaque signalétique** (Fig. 40.4)

- La tension la plus faible est la tension nominale d'un enroulement du stator.
- Le courant le plus faible est le courant nominal en ligne dans le cas d'un couplage en étoile. Une plaque à bornes permet de réaliser le couplage.
- Sont aussi indiqués, pour le fonctionnement nominal, la puissance apparente, la fréquence d'utilisation, les grandeurs nominales (tension et courant) de l'excitation et parfois un facteur de puissance.

Δ/Y	230 / 400 V	5,25 / 3 A
2 kVA	$\cos\varphi$ 0,8	50 Hz
Ex: 50 V	2,4 A	

Fig. 40.4 Plaque signalétique

Remarque : Un alternateur, comme un transformateur, n'a pas de facteur de puissance intrinsèque. Idéalement, il devrait être égal à l'unité. En pratique, on tolère un fonctionnement avec un facteur de puissance parfois indiqué sur la plaque.

40.2 ALTERNATEUR TRIPHASÉ

40.2.1 Alternateur à vide

• **Tensions aux bornes des enroulements.** Aux bornes de chaque enroulement, l'alternateur fournit des tensions triphasées équilibrées :

$$\begin{cases} e_1(t) = E_{\text{Eff}}\sqrt{2} \sin(\omega t) \\ e_2(t) = E_{\text{Eff}}\sqrt{2} \sin(\omega t - 2\pi/3) \\ e_3(t) = E_{\text{Eff}}\sqrt{2} \sin(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

• **Fém efficace aux bornes d'un enroulement**

$$E_{\text{Eff}} = KNf\Phi_{\text{Max}}$$

E_{Eff} : valeur efficace de la fém à vide aux bornes de l'enroulement en V ; K : coefficient de Kapp qui dépend de la machine ; N : nombre de conducteurs actifs de l'enroulement ; f : fréquence de la tension induite en Hz ($f = pn$ où n est la vitesse de rotation du rotor en tr/s) ; Φ_{Max} : flux maximal embrassé par une spire (soit deux conducteurs actifs) en Wb.

Remarque : Le flux est à répartition sinusoïdale $\varphi(t) = \Phi_{\text{Max}} \cos(\omega t)$

- **Caractéristique à vide ou interne** (Fig. 40.5). Le point de fonctionnement P se situe dans le coude de saturation. Du fait de l'hystérésis, la courbe ne passe pas par l'origine. Il existe une fém rémanente E_{REff} (ainsi qu'un étroit cycle d'hystérésis, non représenté sur la figure).

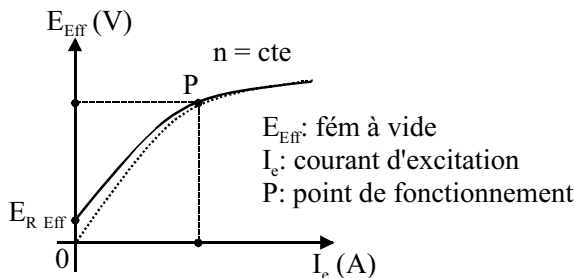


Fig. 40.5 Caractéristique à vide

40.2.2 Alternateur autonome en charge

- **Autonomie.** Un alternateur est autonome s'il alimente seul une charge. C'est par exemple le cas d'un groupe électrogène. En revanche, il ne l'est plus s'il est couplé sur le réseau.
- **Réaction magnétique d'induit.** Lorsque l'alternateur débite, l'induit crée un champ tournant qui modifie le flux utile, donc la fém. C'est la réaction magnétique d'induit. La fém en charge est ainsi différente de la fém à vide, créée par la roue polaire seule.
- **Caractéristique en charge ou externe.** L'alternateur n'étant pas une source parfaite, la réaction magnétique d'induit modifie la fém suivant la charge (Fig. 40.6). I_e devra être modifié pour stabiliser la tension.

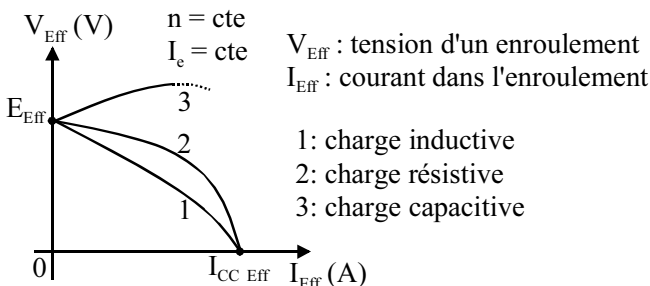


Fig. 40.6 Caractéristique en charge

40.2.3 Modèle équivalent de la machine ramené au stator

- **Modèle de Behn-Eschenburg ou de la réactance synchrone (Fig. 40.7)**

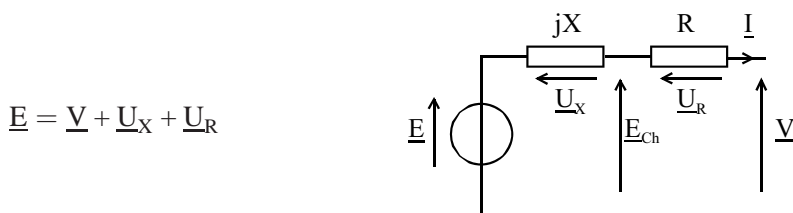


Fig. 40.7 Modèle d'une phase

- **Diagramme de Fresnel (Fig. 40.8).** D'après le modèle (Fig. 40.7), on a :

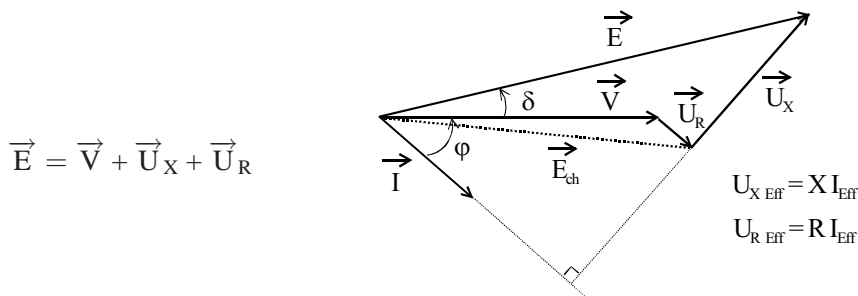


Fig. 40.8 Diagramme de Fresnel

V_{Eff} : tension d'un enroulement (V) ; I_{Eff} : courant dans un enroulement (A) ; E_{Eff} : fém à vide (V) ; $E_{\text{Ch Eff}}$: fém en charge (V) ; X : réactance synchrone (Ω) ; R : résistance d'un enroulement (Ω) ; $X = L\omega$ où L est une inductance qui tient compte de l'ensemble des enroulements et des fuites.

Remarques :

- Très souvent, R peut être supprimée du schéma car $R \ll X$. Dans ce cas, la fém en charge est égale à la tension d'un enroulement.
- L'angle δ est un angle électrique appelé *angle de décalage interne*. Il représente le décalage du rotor entre les fonctionnements à vide et en charge de la machine. En alternateur, le rotor avance d'un angle $\delta = p\theta$, θ étant l'angle mécanique, alors qu'en moteur, il se décale en arrière de δ .

- **Détermination des éléments du modèle.** R se détermine à chaud par une mesure en continu. À partir des caractéristiques à vide et de court-circuit $I_{\text{CC Eff}} = f(I_e)$, (Fig. 40.9), on détermine, pour I_{e1} donné, $E_{1 \text{ Eff}}$ et $I_{\text{CC1 Eff}}$.

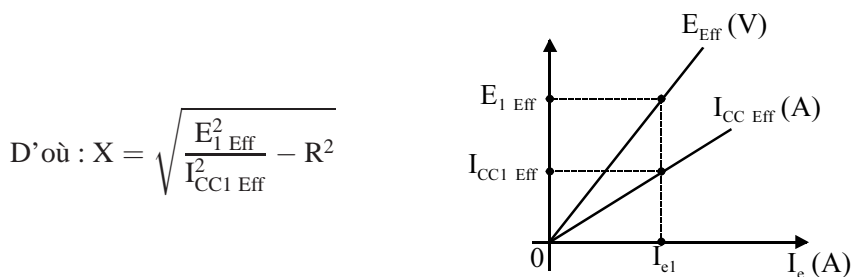


Fig. 40.9 Caractéristiques à vide et de court-circuit

Remarque : Si on ne peut pas mesurer la résistance R de l'enroulement, on peut toujours mesurer la résistance R_1 entre 2 phases. On rappelle qu'avec un couplage étoile, $R_1 = 2R$ alors que $R_1 = 2R/3$ avec un couplage triangle.

• **Validité du modèle.** Le modèle est utilisable dans le cas d'un alternateur à pôles lisses non saturé. Dans ce cas, X est constante. Si l'alternateur est peu saturé, on peut linéariser la caractéristique à vide et confondre P et P' (Fig. 40.10). Si la saturation est plus importante, on peut conserver le modèle, mais X n'est plus constante et doit être déterminée pour chaque point de fonctionnement.

Remarque : Ce modèle n'est pas le seul, ni le plus exact (modèle de Potier, qui tient compte de la saturation, ou modèle de Blondel pour les alternateurs à pôles saillants).

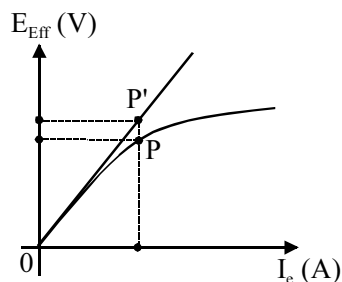


Fig. 40.10 Alternateur peu saturé

40.2.4 Bilan des puissances – Rendement

• **Arbre des puissances (Fig. 40.11)**

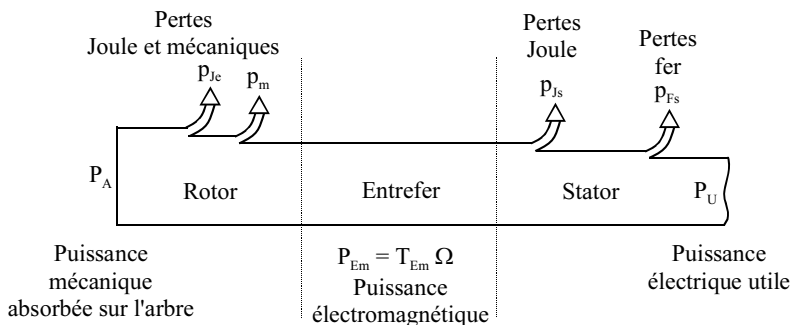


Fig. 40.11 Arbre des puissances

$P_A = T_M \Omega$	Unités : $W = Nm \text{rads}^{-1}$
$p_{Je} = U_e I_e$	Unités : $W = VA$
$p_{Js} = \frac{3}{2} R_1 I_{\text{Eff}}^2$	Unités : $W = \Omega A^2$
$P_U = \sqrt{3} U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos \varphi$	Unités : $W = VA$

U_{Eff} : tension entre phase ; I_{Eff} : courant en ligne ; R_1 : résistance entre deux phases du stator ; U_e : tension d'excitation ; I_e : courant d'excitation ; T_M : couple mécanique de la machine d'entraînement.

Remarques :

- Si r est la résistance du circuit d'excitation et U_e la tension d'excitation, alors :

$$p_{Je} = U_e I_e = r I_e^2 = U_e^2 / r$$

- À tension et fréquence constantes, p_{Fs} et p_m sont constantes.
- La formule $p_{Js} = \frac{3}{2} R_1 I_{\text{Eff}}^2$, R_1 étant la résistante entre deux phases (toujours mesurable), est indépendante du couplage des enroulements du stator.

- **Rendement.** Le rendement est toujours excellent.

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_U}{P_U + (p_m + p_{Je} + p_{Fs} + p_{Js})}$$

Remarque : Si l'alternateur n'est pas auto-excité, $P_A = T_M \Omega + p_{Je}$

• Détermination des pertes

- À vide, avec I_e nominal, on mesure $P_{A0} \approx p_m + p_{Fs}$
- À vide, avec $I_e = 0$, on mesure $P'_{A0} \approx p_m$. On en déduit $p_{Fs} = P_{A0} - P'_{A0}$
- Les résistances peuvent être déterminées par un essai en continu.

40.2.5 Couplage sur le réseau

Le réseau impose sa tension et sa fréquence.

- **Conditions de couplage.** Entre l'alternateur et le réseau, on doit avoir : des tensions identiques, des fréquences identiques et un ordre des phases identique.

- **Échange des puissances.** Pour faciliter la compréhension, on utilise le modèle de Behn-Eschenburg en négligeant la résistance d'induit. On fait apparaître sur le diagramme de Fresnel les puissances active et réactive P et Q (Fig. 40.12).

Les puissances active et réactive s'expriment en fonction de l'angle interne :

$$P = \frac{3V_{\text{Eff}} E_{\text{Eff}}}{X} \sin \delta \quad \text{et} \quad Q = \frac{3V_{\text{Eff}}}{X} (E_{\text{Eff}} \cos \delta - V_{\text{Eff}}) \quad (P \text{ en } W \text{ et } Q \text{ en var})$$

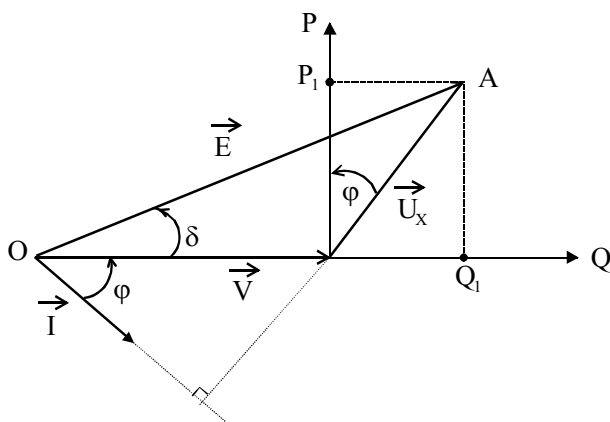


Fig. 40.12 Représentation des puissances

– Fonctionnement à excitation constante (Fig. 40.13)

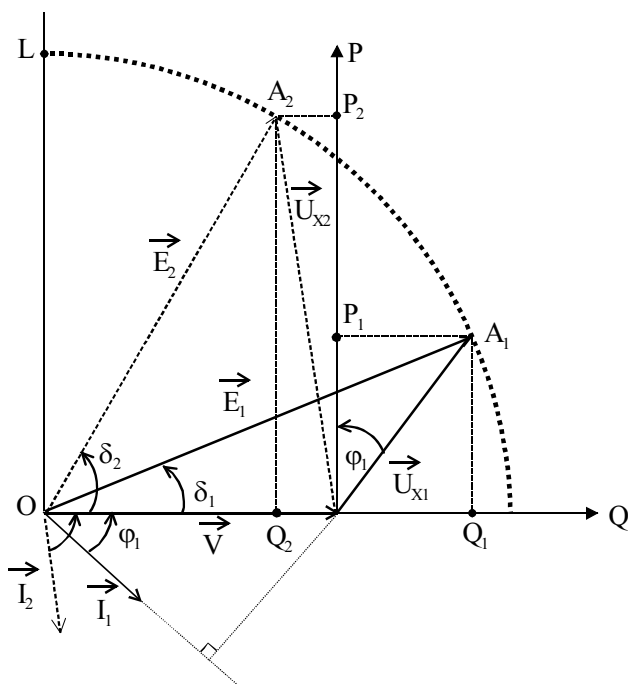


Fig. 40.13 Fonctionnement à excitation constante

La tension V_{Eff} étant constante, si on agit sur P (par action sur la machine d'entraînement), les points de fonctionnement A_i se déplacent sur un cercle de diamètre E_{Eff} et de centre O : on règle P et Q . La Fig. 40.13 montre deux points A_1 et A_2 pour lesquels $Q_1 > 0$ et $Q_2 < 0$.

Remarque : Lorsque $Q < 0$ (absorption de puissance réactive), la machine est dite sous-excité. Elle est sur-excité dans le cas contraire, si elle fournit de la puissance réactive au réseau.

– *Fonctionnement à puissance mécanique constante.* En agissant sur l’excitation r et U_e on ajuste Q (Fig. 40.14), les points de fonctionnement A_i se déplacent sur une droite horizontale. En conclusion, les puissances active et réactive se règlent indépendamment l’une de l’autre.

Remarque : On voit qu’une machine synchrone peut fonctionner avec une puissance réactive nulle, ce qui n’est pas le cas d’une machine asynchrone qui en consomme toujours.

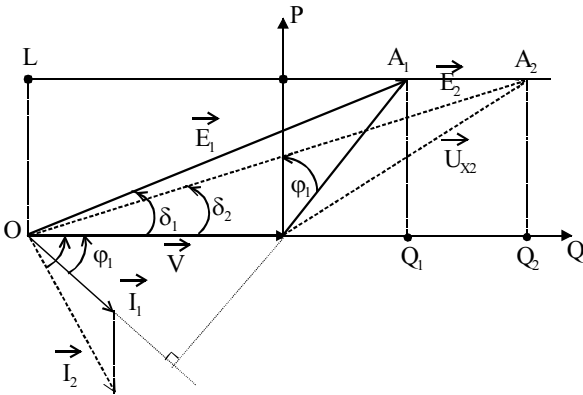


Fig. 40.14 Fonctionnement à puissance constante

• **Couple et stabilité.** Si on suppose la machine sans pertes, le moment du couple (en Nm) opposé par le rotor s’écrit $T_R = P/\Omega$, soit :

$$T_R = \frac{3V_{\text{Eff}} E_{\text{Eff}}}{\Omega X} \sin \delta = K \sin \delta$$

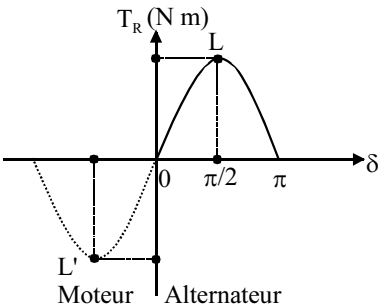


Fig. 40.15 Caractéristique $T_R = f(\delta)$

D'où la représentation graphique $T_R = f(\delta)$ (Fig. 40.15). Seule la partie OL où $0 < \delta < \pi/2$ (en mode alternateur) correspond à un fonctionnement stable. Si on dépasse le point L (limite de stabilité), la machine décroche.

40.3 MOTEUR SYNCHRONES

La machine synchrone est réversible. Les résultats établis pour le fonctionnement en alternateur restent valables. On utilise pour le fléchage la convention récepteur. On change le sens de rotation en permutant deux fils de l'induit.

40.3.1 Modèle simplifié – Bilan des puissances et couple

- **Modèle de Behn-Eschenburg** (Fig. 40.16). Les éléments se déterminent de la même façon que pour le fonctionnement en alternateur.
- **Diagramme de Fresnel** (Fig. 40.17). D'après le modèle, on a : $\vec{V} = \vec{E} + \vec{U}_X$

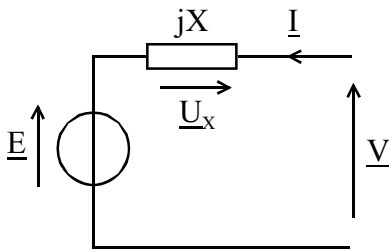


Fig. 40.16 Modèle de Behn-Eschenburg

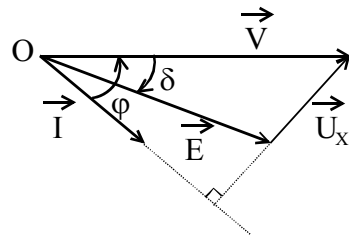


Fig. 40.17 Diagramme de Fresnel

- **Bilan des puissances et couple.** Le bilan des puissances reste le même avec $P_A = \sqrt{3}U_{\text{Eff}} I_{\text{Eff}} \cos \varphi$ (électrique) et $P_U = T_U \Omega$ (mécanique).

$$T_{\text{Em}} = \frac{3V_{\text{Eff}} E_{\text{Eff}}}{\Omega X} \sin \delta \quad \text{et} \quad T_{\text{Em}} = T_U \text{ si on néglige les pertes.}$$

40.3.2 Démarrage – Réglage de la vitesse

Un moteur synchrone ne possède pas de couple au démarrage. Il ne peut être relié au réseau que si la vitesse est voisine du synchronisme. Quelques procédés possibles de démarrage :

- On entraîne la machine avec un moteur auxiliaire, puis on couple sur le réseau.
- On alimente le moteur à fréquence variable avec un variateur électronique en maintenant le rapport V_{Eff}/f constant.
- Le moteur génère sa propre fréquence à partir d'informations sur la position du rotor, il est « autopiloté ».

40.3.3 Moteur synchrone autopiloté

• **Description et fonctionnement.** Le couple électromagnétique est maximal si les champs tournants statorique et rotorique forment un angle de 90° . Un capteur (résolveur) permet de repérer à chaque instant la position du rotor, et un convertisseur électronique de fréquence alimente le stator. Une variation entre les déphasages des champs se répercute sur la fréquence d'alimentation qui agit en conséquence pour rétablir l'équilibre (vitesses du rotor et du champ tournant en synchronisme, décalage de 90°). Le moteur s'autopiloté et ne risque pas de décrocher. Finalement, le variateur de fréquence du moteur synchrone remplit la même fonction que le collecteur d'un moteur à courant continu. Un moteur synchrone autopiloté est donc équivalent à un moteur à courant continu alimenté par un hacheur.

L'étude du moteur autopiloté est complexe. La Fig. 40.18 donne un schéma fonctionnel simplifié de principe, sachant qu'il existe plusieurs types de convertisseurs et de stratégies de commande.

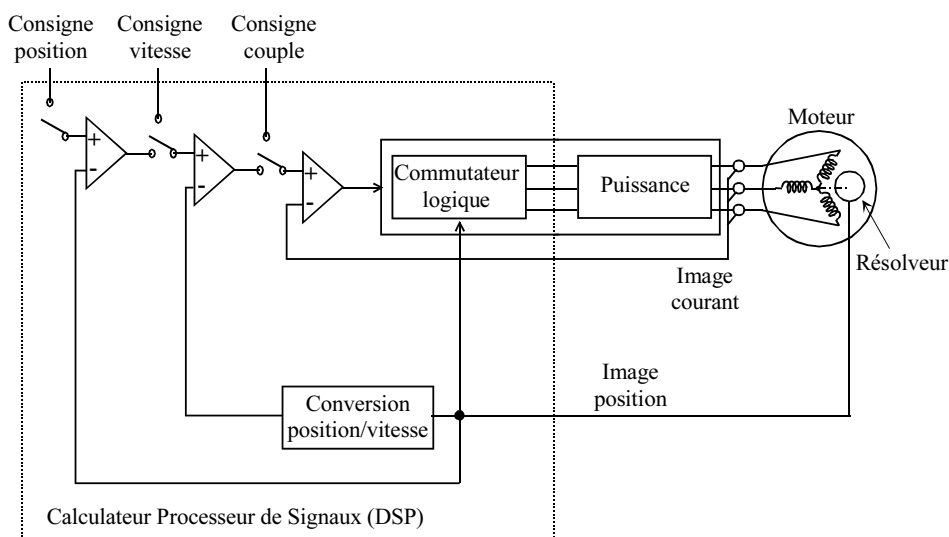


Fig. 40.18 Principe du moteur synchrone autopiloté

40.4 MOTEUR « BRUSHLESS » OU À COMMUTATION ÉLECTRONIQUE

40.4.1 Description

Tout comme le moteur synchrone autopiloté, le moteur « brushless » (« sans balais » en anglais) est un moteur synchrone autopiloté, mais son rotor est un aimant. Des

capteurs sommaires (à effet Hall par exemple), placés au stator, détectent la position du rotor. Les informations recueillies, traitées électroniquement, alimentent le bobinage statorique en courant alternatif (Fig. 40.19)

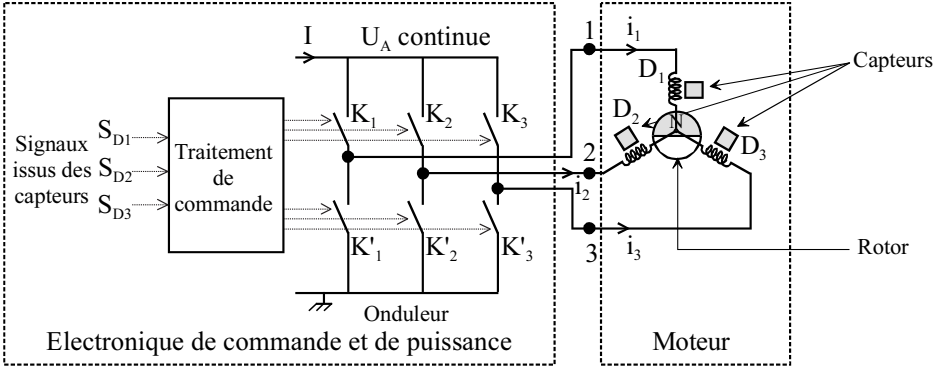


Fig. 40.19 Description du principe d'un moteur « brushless »

40.4.2 Principe de fonctionnement avec courants rectangulaires

• **Cas idéal.** La Fig. 40.20 montre l'exemple d'une machine à pôles lisses, avec un rotor bipolaire, et un stator triphasé en étoile constitué de six encoches. On se place dans le cas idéal : interrupteurs électroniques parfaits, fém rectangulaire, arc polaire de l'aimant de 180° . Trois capteurs (D_1, D_2, D_3), décalés de 120° , sont placés au stator suivant les axes (E_1, E_2, E_3) des trois phases. L'angle θ repère la position de l'axe magnétique (\vec{B}) du rotor par rapport à celui de l'enroulement d'axe E_1 .

Remarque : Un « point cerclé » représente un courant dirigé vers l'avant de la figure, et une « croix cerclée » un courant dirigé vers l'arrière.

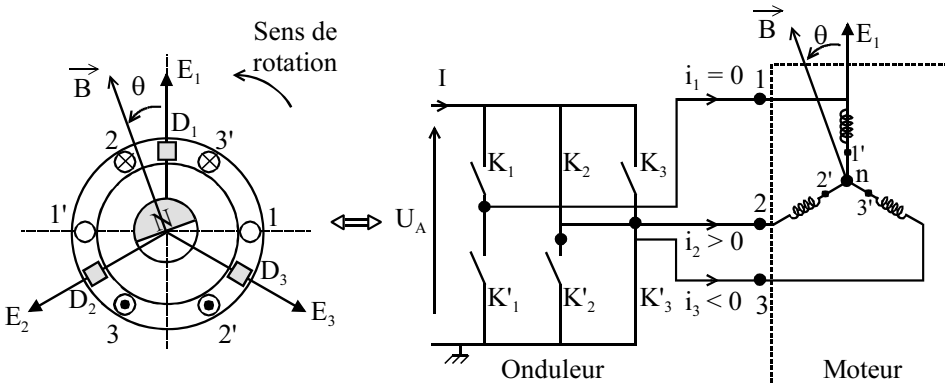


Fig. 40.20 Principe de fonctionnement

Sur la Fig. 40.20, $\theta = 20^\circ$. Le capteur D_1 détecte un pôle nord, et envoie un signal S_{D1} positif, alors que D_2 et D_3 détectent un pôle sud, et envoient des signaux S_{D2} et S_{D3} négatifs (Fig. 40.21). Pour que le moteur tourne dans le sens choisi, le courant doit rentrer par la phase 2 ($i_2 = I > 0$) et sortir par la phase 3 ($i_3 = -I < 0$). La logique de traitement doit donc fermer les interrupteurs K_2 et K'_3 , et maintenir tous les autres ouverts (Fig. 40.21).

Ainsi, les phases 2 et 3 sont alimentées par un courant constant I et la phase 1 est ouverte. Cet état sera maintenu tant que $\theta < 30^\circ$. Dès que celui-ci est atteint, D_2 détecte le pôle nord, et la logique agit en conséquence pour maintenir le sens de rotation, donc le couple, constant.

La Fig. 40.21 montre l'évolution des signaux recueillis par les capteurs en fonction de l'angle θ , les courants statoriques et les conductions des interrupteurs électroniques. Chaque interrupteur conduit pendant 120° , alimentant ainsi 2 phases simultanément par un courant continu, la troisième étant déconnectée.

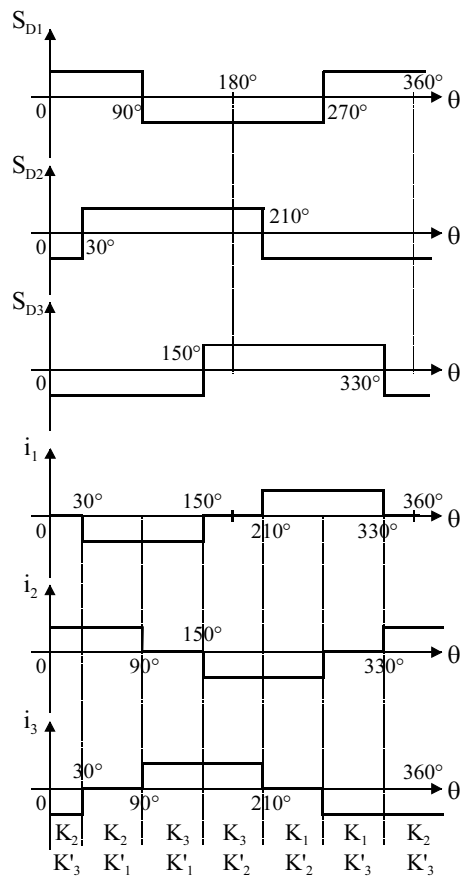


Fig. 40.21 Chronogrammes des capteurs, des courants et des interrupteurs

La Fig. 40.22 montre l'évolution du moment du couple électromagnétique crée par chaque phase, et le moment du couple total (somme des moments), qui est constant.

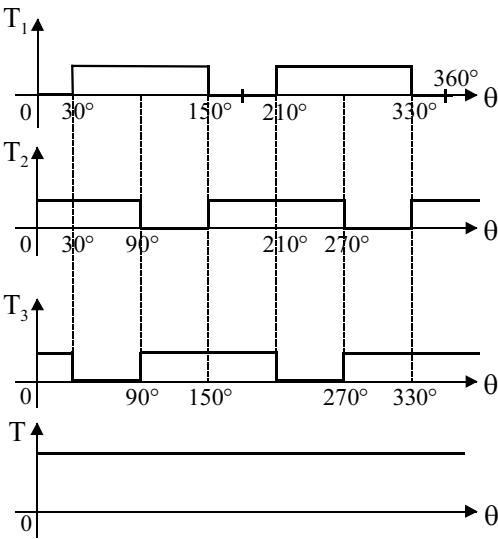


Fig. 40.22 Chronogrammes des couples par phase et couple résultant.

• **Cas plus réel.** La répartition des spires de chaque phase dans plusieurs encoches décalées de quelques degrés (voir Chapitre 39 : Champs tournants) rend l'allure de la fém et donc celle du couple dans chaque phase plutôt « trapézoïdal » (Fig. 40.23).

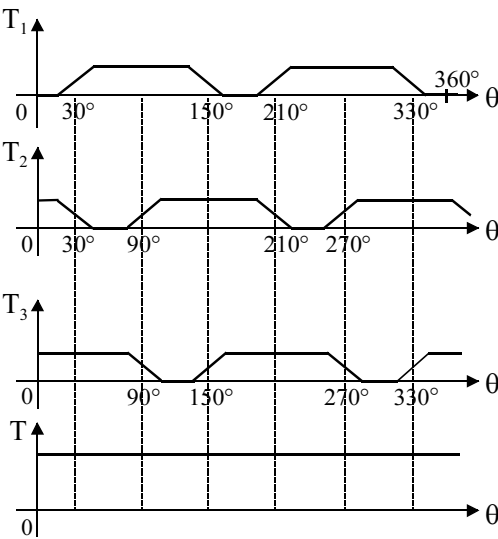


Fig. 40.23 Chronogrammes des couples par phase et couple résultant

Remarques :

- L'arc polaire de l'aimant est obligatoirement inférieur à 180° , il provoque des creux de couple (Fig. 40.24).
- On peut également piloter ces moteurs avec des courant sinusoïdaux, mais la commande est plus complexe et les capteurs doivent être plus précis. Le rotor doit posséder une forme adaptée pour créer une répartition sinusoïdale (arc polaire inférieur à 180° et des pôles saillants). Par contre, les pertes sont moindres. Cette commande est utilisée pour des puissances supérieures à 500 W.
- Les moteurs commandés avec des courants rectangulaires sont parfois appelés moteurs « DC brushless » ou moteurs brushless à « fém trapézoïdale », alors que les autres sont appelés moteurs « AC brushless » ou moteurs brushless à « fém sinusoïdale ». Cela étant, le principe reste le même.

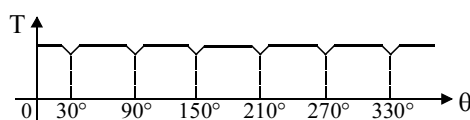


Fig. 40.24 Creux de couple dus à l'arc polaire de l'aimant

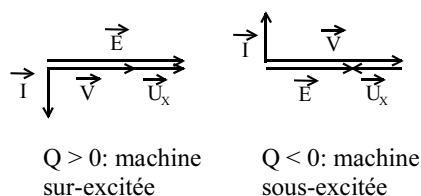


Fig. 40.25 Compensateur synchrone

40.4.3 Conclusion

Les moteurs « brushless » combinent donc les avantages des moteurs à courant continu et alternatif : couple de démarrage élevé, robustesse, vitesse élevée, pertes moindres. Les constructeurs proposent ces moteurs avec différentes options, par exemple une régulation de vitesse intégrée, la commande de la vitesse par une tension analogique ou numérique (PWM), etc.

40.5 UTILISATION DES MACHINES SYNCHRONES

- *En alternateur* : pour la production de l'énergie électrique.
- *En moteur* : Les moteurs autosynchrones à inducteurs bobinés sont utilisés dans le domaine des fortes puissances comme la traction ferroviaire (TGV), la propulsion marine, et pour les petites puissances (moteurs « brushless ») dans la robotique, le modélisme, l'entraînement des disques sur les ordinateurs, etc.
- *En compensateur synchrone* (Fig. 40.25) : la puissance active est nulle et la machine n'est utilisée que pour fournir ou absorber de la puissance réactive. Elle peut ainsi servir à relever le facteur de puissance d'une installation. Cette possibilité est notamment exploitée par EDF.

Chapitre 41

Moteurs asynchrones triphasés

41.1 CONSTITUTION – FONCTIONNEMENT – GLISSEMENT

41.1.1 Constitution

Le moteur est composé de deux parties séparées par un entrefer.

- **Le stator ou inducteur** : C'est la partie fixe, sous forme d'une carcasse ferromagnétique feuilletée comportant un enroulement triphasé $2p$ polaire ($p = 1$, $p = 2$, etc., c'est le nombre de paires de pôles), analogue à l'induit d'une machine synchrone, alimenté par un système triphasé de pulsation ω . On a couramment $p = 2$, soit une vitesse d'environ 1500 tr/min. Il peut être couplé en étoile ou en triangle.

- **Le rotor ou induit** : C'est la partie tournante. Il existe des rotors bobinés constitués d'un bobinage analogue au stator, fermé sur un rhéostat extérieur via des bagues et des balais (Fig. 41.1) et des rotors à cage, constitués de barres conductrices en court circuit (Fig. 41.2). Ces derniers sont plus robustes et moins coûteux.

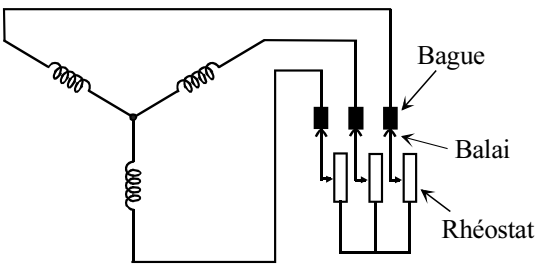


Fig. 41.1 Rotor bobiné

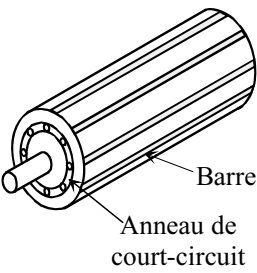


Fig. 41.2 Rotor à cage

• Symboles et conventions (Fig. 41.3)

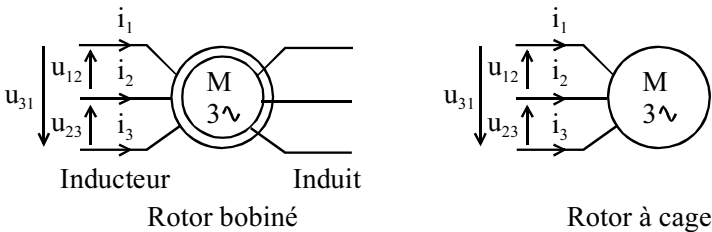


Fig. 41.3 Symboles et conventions

• Plaque signalétique (Fig. 41.4)

- La tension la plus faible est la tension nominale supportée par un enroulement du stator (ici 400 V). Cette donnée permet de définir le couplage suivant le réseau dont on dispose. Une plaque à bornes permet de réaliser le couplage.
- Le courant le plus faible est le courant nominal en ligne dans le cas d'un couplage en étoile.
- Sont aussi indiqués, pour le fonctionnement nominal, la puissance utile, le facteur de puissance, la vitesse de rotation et la fréquence d'utilisation.

Δ/Y 400 / 690 V 6,5 / 3,75 A	
3 kW	$\cos\varphi$ 0,81
1437 tr/min	50 Hz

Fig. 41.4 Plaque signalétique

Exemple 41.1.1

Avec un réseau 230/400 V, on couplera le stator en triangle alors qu'avec un réseau 400/690 V, on le couplera en étoile.

41.1.2 Fonctionnement

Le stator crée un champ tournant au synchronisme $\Omega_S = \omega/p$ (en rad/s) qui induit au rotor un système triphasé de courants, créant à leur tour un champ tournant à Ω_S (Voir chapitre 39 : Champs tournants). Le champ tournant résultant (du stator et du rotor) et les courants triphasés génèrent un couple électromagnétique qui entraîne le rotor à une vitesse $\Omega < \Omega_S$ (loi de Lenz). On change le sens de rotation en permutant deux phases.

41.1.3 Glissement

$$g = \frac{\Omega_S - \Omega}{\Omega_S} = \frac{n_s - n}{n_s}$$

(le glissement g doit rester faible : $g < 5 \cdot 10^{-2}$)

Ω_S et n_s : vitesse de synchronisme en rad/s et tr/s ou tr/min ; Ω et n : vitesse de rotation du rotor ; $0 < g \leq 1$: $g = 1$ (moteur à l'arrêt) et $g \approx 0$ (à vide).

41.2 BILAN DES PUISSANCES – RENDEMENT

- Arbre des puissances (Fig. 41.5)

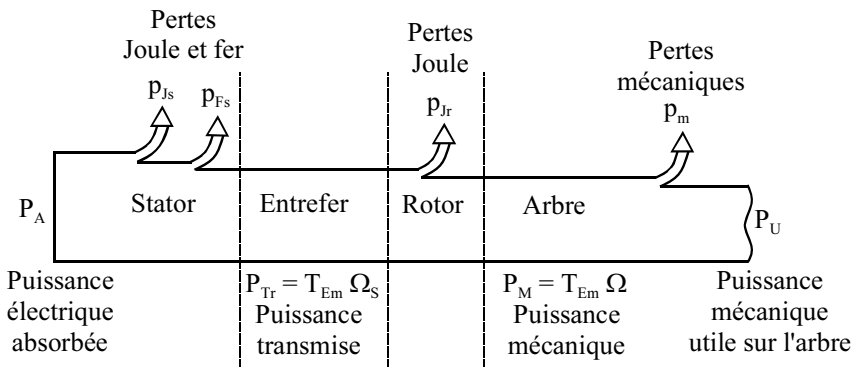


Fig. 41.5 Arbre des puissances

$P_A = \sqrt{3}U_{\text{Eff}}I_{\text{Eff}} \cos \varphi$	Unités : W = VA
$p_{Js} = \frac{3}{2}RI_{\text{Eff}}^2$	Unités : W = $\Omega \text{ A}^2$
$p_{Jr} = gP_{Tr}$	Unités : W
$P_M = (1 - g)P_{Tr}$	Unités : W
$P_U = T_U \Omega$	Unités : W = Nm rad s ⁻¹

U_{Eff} : tension entre phases ; I_{Eff} : courant en ligne ; R : résistance entre deux phases du stator.

Remarques :

- Les pertes fer au rotor sont négligées car la fréquence f_R des courants rotoriques est généralement faible ($f_R = gf$).
- À tension et fréquence constantes, p_{Fs} et p_m sont constantes.

• **Rendement**

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_A - (p_{Js} + p_{Fs} + p_{Jr} + p_m)}{P_A} = \frac{(P_A - p_{Fs} - p_{Js})(1 - g) - p_m}{P_A}$$

Remarques :

- En négligeant toutes les pertes, on a $\eta^* = 1 - g$ qui est une limite supérieure au rendement.
- Le fonctionnement du moteur asynchrone est comparable à celui d'un transformateur triphasé en court-circuit, à ceci près que les fréquences des grandeurs statorique et rotorique sont différentes, $f_R = gf$ sauf à l'arrêt où $g = 1$.

41.3 MODÈLE ET CARACTÉRISTIQUES

• **Modèle linéarisé ramené au stator pour une phase (Fig. 41.6)**

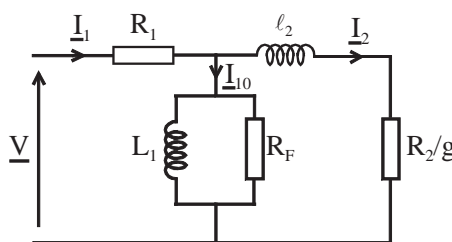


Fig. 41.6 Modèle d'une phase ramené au stator

R_1 : résistance du stator ; L_1 et R_F : bobine à noyau de fer ; ℓ_2 : inductance de fuite ; R_2/g : résistance fictive représentant la puissance transmise, R_2 étant la résistance du rotor ramenée au stator.

Remarques :

- On ramène les éléments du rotor au stator en les divisant par m^2 , m étant le rapport de transformation par phase, rotor ouvert.
- Comme $P_{Tr} = P_m + p_{Jr}$, on fait parfois apparaître la résistance du rotor ramenée au stator en décomposant la résistance fictive :

$$\frac{R_2}{g} = R_2 + \frac{(1 - g)R_2}{g}$$

Cela permet de dissocier les pertes joules (dissipées dans R_2) de la puissance mécanique (dissipée dans $(1 - g)R_2/g$).

• **Détermination des éléments du modèle**

- Un essai à vide au synchronisme permet de déterminer R_F et L_1 en mesurant :

$$P_0 \approx \frac{3V_{\text{Eff}}^2}{R_F} \text{ (Unités : } W = \frac{V^2}{\Omega} \text{) et } Q_0 \approx \frac{3V_{\text{Eff}}^2}{L_1 \omega} \text{ (Unités : } \text{var} = \frac{V^2}{H \text{ rad s}^{-1}} \text{)}$$

- Un essai à vide à rotor bloqué sous tension réduite telle que $I_{\text{IEff}} = I_{1N \text{ Eff}}$ permet de déterminer R_2 et ℓ_2 en mesurant :

$$P_1 \approx 3R_2 I_{\text{IEff}}^2 \text{ (Unités : } W = \Omega A^2 \text{)}$$

et

$$Q_1 \approx 3\ell_2 \omega I_{\text{IEff}}^2 \text{ (Unités : } \text{var} = H \text{ rad s}^{-1} A^2 \text{)}.$$

- R_1 peut se mesurer à chaud par un essai en continu.

Remarque : Si on ne peut pas mesurer la résistance R_1 de l'enroulement, on peut toujours mesurer la résistance R entre deux phases. On rappelle que $R = 2R_1$ avec un couplage étoile, et $R = 2R_1/3$ avec un couplage triangle.

- **Moment du couple électromagnétique.** D'après le modèle de la Fig. 41.6 et en négligeant la chute de tension aux bornes de R_1 , on montre que :

$$T_{\text{Em}} = \frac{3pV_{\text{Eff}}^2}{\omega} \frac{R_2}{\frac{R_2^2}{g} + g(\ell_2 \omega)^2}$$

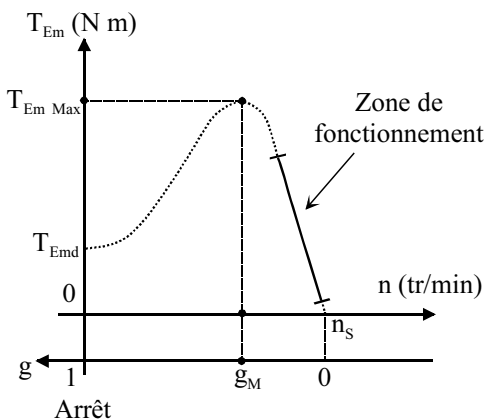


Fig. 41.7 Allure du couple électromagnétique

L'allure de T_{Em} en fonction de g ou de n , à tension et fréquence constantes, est représentée Fig. 41.7.

- Le moment du couple électromagnétique n'étant pas nul au démarrage, le moteur peut démarrer seul.
- A glissement fixé, $T_{Em} = KV_{Eff}^2$
- Dans la zone de fonctionnement, $T_{Em} \approx kg$ soit $T_{Em} \approx -an + b$. La variation est sensiblement linéaire.
- Le maximum est indépendant de R_2 et a lieu pour $g_M = R_2/(\ell_2\omega)$.

• **Caractéristiques $T_U(n)$ et $I(n)$ (Fig. 41.8)**

- Le courant au démarrage est élevé.
- Le courant à vide n'est pas négligeable.

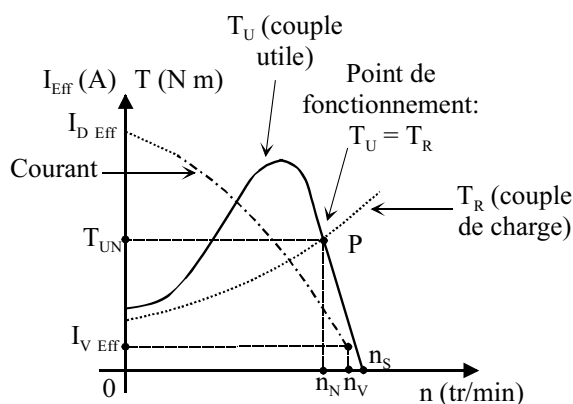


Fig. 41.8 Caractéristiques de couple et d'intensité

41.4 DÉMARRAGE

Au démarrage, le courant étant élevé et le couple faible, on ne démarre pas en charge sous tension nominale, sauf en faible puissance.

- **Par des actions sur le stator**, on réduit le courant en diminuant la tension (couplage étoile-triangle, gradateur, rhéostat ou bobine de démarrage, etc.). Ces techniques, réduisant aussi le couple au démarrage, sont généralement utilisées pour démarrer à vide.
- **En agissant sur le rotor**, on augmente le couple : rhéostat pour les moteurs à rotor bobiné, et pour les autres, réalisation de moteur à double cage (deux cages concentriques) ou à encoches profondes.

La solution actuelle met en œuvre des démarreurs ralentisseurs progressifs qui agissent sur la tension et la fréquence d'alimentation.

41.5 RÉGLAGE DE LA VITESSE

Les procédés décrits § 41.4 (variation de la tension d'alimentation, rhéostat rotorique) restent utilisables. Une solution très utilisée est celle maintenant le rapport V_{Eff}/f constant en alimentant le moteur par l'intermédiaire d'un onduleur. Elle permet de maintenir le couple T_U : la zone utile de la caractéristique $T_U(n)$ est translatée parallèlement à elle-même. On règle ainsi la vitesse.

41.6 RÉVERSIBILITÉ ET FREINAGE

41.6.1 Réversibilité

Entraînée au-delà du synchronisme ($g < 0$), la machine asynchrone fonctionne en génératrice. Elle restitue de la puissance active, mais consomme toujours de la puissance réactive.

41.6.2 Freinage

Il existe plusieurs possibilités suivant le type de charge entraînée. Citons :

- **Freinage hypersynchrone.** En vertu de la loi de Lenz, si on entraîne la machine au-delà du synchronisme, le champ tournant résultant s'oppose à cette survitesse et la machine est freinée. Si la fréquence d'alimentation est fixe, la vitesse du champ tournant est fixe, donc ce type de freinage ne permet pas l'arrêt de la machine. En revanche, alimenté par un convertisseur de fréquence fournissant au moteur une fréquence progressivement décroissante, le champ tournant ralentit et le rotor également.
- **Freinage à contre-courant.** Il consiste à inverser deux phases d'alimentation. Dans ce cas, le sens de rotation du champ tournant s'inverse, et le moteur freine.
- **Freinage par injection de courant continu.** Un courant continu est injecté entre deux phases d'alimentation, ce qui produit un flux constant, lequel engendre des courants induits dans le rotor qui est alors freiné (loi de Lenz).

Un frein mécanique permet d'immobiliser le rotor.

41.7 MOTEUR ASYNCHRONE MONOPHASÉ

Le couple au démarrage étant nul, un moteur asynchrone monophasé ne démarre pas seul, sans artifices particuliers pour créer un champ tournant comme l'utilisation d'un condensateur ou d'un enroulement auxiliaire, spires de Frager, etc. Par rapport à un moteur triphasé, leur rendement est moins bon et leur couple plus faible. Ils sont essentiellement utilisés dans les lieux non alimentés en triphasé (installations domestiques) et pour les machines entraînées de faible puissance.

Chapitre 42

Moteurs pas à pas

42.1 PRINCIPE ET DÉFINITIONS

42.1.1 Principe

Un moteur pas à pas est un moteur dont la rotation du rotor s'effectue par déplacements angulaires successifs sous l'action d'impulsions électriques appliquées sur les bobinages statoriques.

42.1.2 Définitions

- *Couple de maintien* (« holding torque » en anglais) : C'est le couple qu'il faut exercer pour écarter le rotor de sa position d'équilibre, au repos avec alimentation.
- *Couple de détente* (« detend torque » en anglais) : C'est le couple qu'il faut exercer pour écarter le rotor de sa position d'équilibre, au repos et sans alimentation.
- *Couple utile* : C'est le couple de charge maximal pour une fréquence de rotation donnée.
- *Séquence de commande* : L'ensemble des signaux électriques de commande, de vitesse et de sens de rotation qui permettent le pilotage de ces moteurs.
- *Fréquence de rotation* : Elle dépend de la période des signaux de commande. Le moteur pas à pas est un moteur synchrone.
- *Le pas ou pas angulaire* : C'est le déplacement angulaire entre deux positions stables du rotor pour une impulsion électrique.
- *Résolution* : C'est le nombre de pas par tour du rotor.

Question : La résolution d'un moteur est $N = 12$. Quel est son pas angulaire ? Calculer le nouveau pas si la résolution est $N = 400$.

Réponse : $\alpha = 360/N$. Si $N = 12$ alors $\alpha = 30^\circ$. Si $N = 400$ alors $\alpha = 0,9^\circ$, la position du rotor est alors très précise.

• **Trois catégories de moteurs pas à pas :**

- Les moteurs à aimants permanents où le rotor est un aimant.
- Les moteurs à réluctance variable où le rotor est un matériau ferromagnétique.
- Les moteurs hybrides qui sont une combinaison des deux précédents.

42.1.3 Moteurs à aimants permanents

a) Constitution et principe (Fig. 42.1)

Un aimant permanent (rotor) est placé au centre d'un système de deux bobines (stator) formant des « dents ». La bobine (ou phase) 1 étant seule alimentée par un courant $i_1 = I$, le rotor se place dans l'axe de cette bobine (Fig. 42.1.a). Si on alimente maintenant la bobine 2 seule avec un courant $i_2 = I$, le rotor tourne et se place dans l'axe de la bobine 2 (Fig. 42.1.b). Cette commande est dite « monophasée ». On a dans ce cas un pas angulaire $\alpha = 90^\circ$ et une rotation de quatre pas par tour.

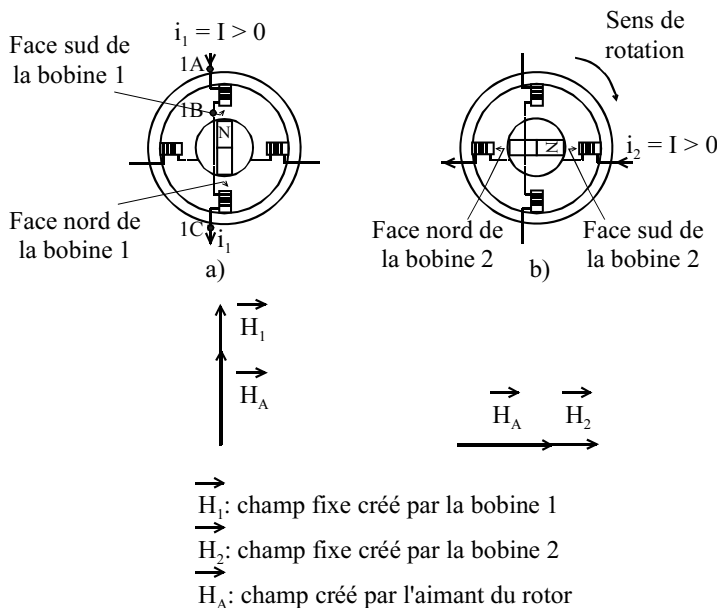


Fig. 42.1 Principe du moteur pas à pas à aimant en commande monophasée

Remarques :

- En alimentant les bobines simultanément (Fig. 42.2), on a toujours un pas $\alpha = 90^\circ$ mais les positions sont intermédiaires. C'est la commande « diphassée ». Le couple obtenu est plus élevé (multiplié par $\sqrt{2}$).
- Le nombre de pas peut être augmenté en disposant davantage de pôles au rotor.

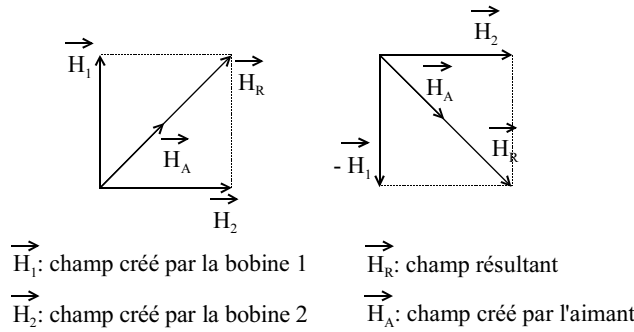


Fig. 42.2 Commande diphassée

Question : Calculer la résolution et le pas angulaire si le rotor possède 24 pôles.

Réponse : La résolution est $N = 24 \times 2 = 48$ (2 étant le nombre de phases) et le pas angulaire $\alpha = 360/48 = 7,5^\circ$.

b) Fonctionnement en demi-pas et micro-pas

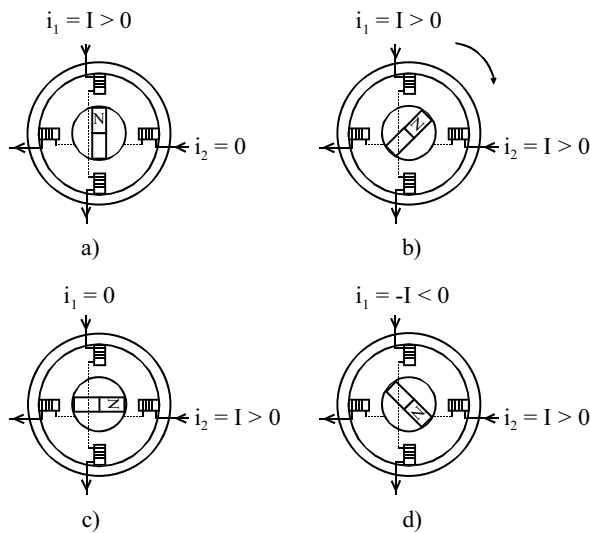


Fig. 42.3 Fonctionnement en demi-pas

- En alimentant les bobines simultanément une fois sur deux (Fig. 42.3), le rotor se cale dans une position intermédiaire. Le nombre de pas est doublé ($\alpha = 45^\circ$ et 8 pas/tour) : c'est le fonctionnement en demi-pas, qui permet un positionnement plus précis.
- En alimentant les bobines simultanément avec des courants adaptés, le rotor peut se déplacer d'une quantité infime du pas angulaire : on obtient un fonctionnement en micro-pas. La résolution et la précision sont considérablement augmentées.

42.1.4 Moteurs à réluctance variable ou réluctants (Fig. 42.4)

Un rotor denté, en matériau ferromagnétique, est placé au centre d'un système de bobines (stator) dont le nombre de dents différent permet de créer un déséquilibre. Le principe de fonctionnement est basé sur la loi du flux maximal : lorsqu'une bobine est alimentée, le rotor se place de façon à réduire l'entrefer. La réluctance de l'air est alors minimale (Fig. 42.4.a) et le flux correspondant est maximal (Voir Chapitre 4 : Électromagnétisme - Ferromagnétisme).

Exemple 42.1.1

(Fig. 42.4). On a un pas $\alpha = 30^\circ$ et une résolution de 12 pas/tour. Comme pour le moteur à aimant permanent, on peut fonctionner en mode demi-pas et en micro-pas.

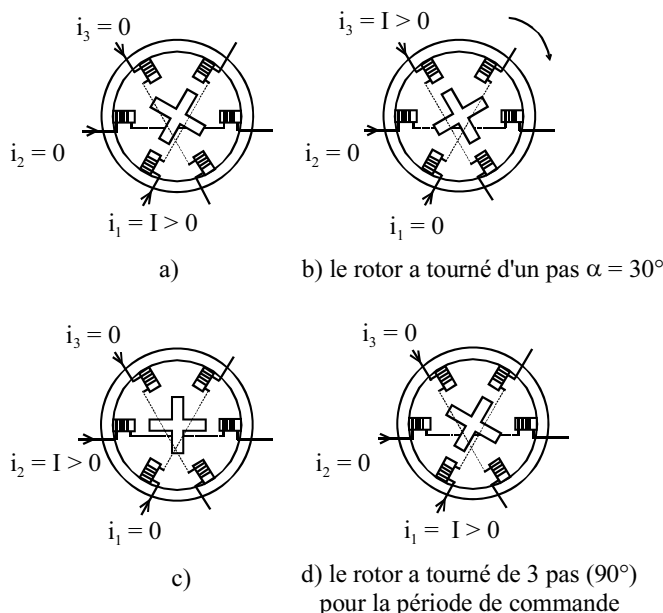


Fig. 42.4 Principe du moteur à réluctance variable

42.1.5 Moteurs hybrides

C'est un moteur à réluctance variable dont le rotor est un aimant. Il fonctionne comme le moteur réluctant.

42.2 PROPRIÉTÉS

	Aimants permanents	Réluctance variable	Hybride
Couple de détente	Oui	Non	Oui
Couple de maintien	Elevé kl	Moyen kl ²	Très élevé kl
Résolution	Moyenne	Elevée	Très élevée
Sens de rotation	Sens de l et ordre des phases	Ordre des phases	Sens de l et ordre des phases

Remarque :

- Le moteur à réluctance ne possède pas de couple de détente.
- Le moteur hybride combine les avantages des deux autres.
- Pour les moteurs à aimants, il existe actuellement des rotors en forme de disques qui permettent d'obtenir une résolution très élevée.

42.3 ÉTAGE DE PUISSANCE

L'étage de puissance assure l'alimentation convenable des bobines. Suivant la façon dont sont réalisées les bobines, on obtient des moteurs « bipolaires » (cas des Fig. 42.1, Fig. 42.2, Fig. 42.3 et Fig. 42.4) ou « unipolaires ». Dans ce dernier cas, chaque bobine est fractionnée par un point milieu et constitue deux phases (une phase par demi-enroulement).

- Dans un moteur unipolaire, le courant dans chaque phase circule toujours dans le même sens. Un seul transistor par phase est suffisant et l'alimentation est dite unipolaire (Fig. 42.5a). L'inversion du sens de rotation du moteur se fait en permutant l'alimentation de l'ordre des phases.
- Dans un moteur bipolaire, le courant dans chaque phase circule dans les deux sens. L'inversion est réalisée par une structure à quatre transistors par phase, dit pont en H et l'alimentation est dite bipolaire (Fig. 42.5b). On change le sens de rotation du moteur en permutant l'alimentation de l'ordre des phases ou le sens du courant.

Remarques :

- Le couple développé dans un moteur unipolaire est plus faible que celui d'un moteur bipolaire, car on ne peut alimenter que la moitié des phases simultanément.

- Le couple d'un moteur à réluctance étant proportionnel au carré du courant, il est insensible au sens du courant et la commande unipolaire suffit.
- Sur la Fig. 42.5b, un autre pont est nécessaire pour l'alimentation de la deuxième phase.

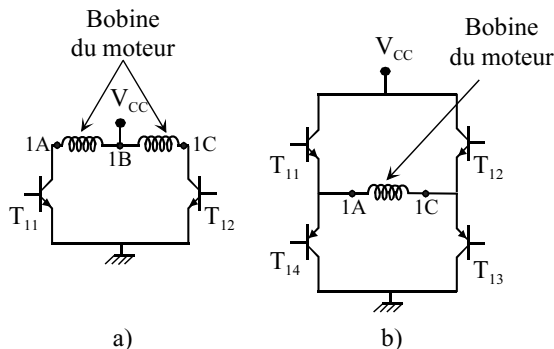


Fig. 42.5 Alimentations unipolaire (pour 2 phases) et bipolaire (pour 1 phase)

42.4 RÉGIMES STATIQUE ET DYNAMIQUE

42.4.1 Régime statique

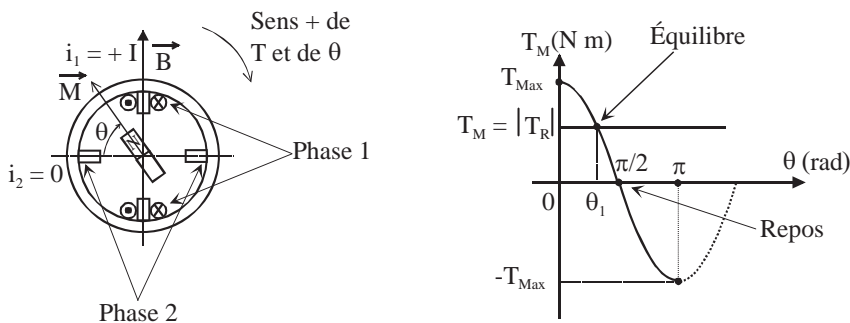


Fig. 42.6 Distribution du couple (phase 1 seule alimentée)

Évolution du couple moteur dans le cas d'un moteur diphasé dont le rotor est un aimant permanent (Fig. 42.6). Sa position étant repérée par l'angle θ , lorsque la phase 1 est seule alimentée, l'expression du couple appliqué sur le rotor est $\vec{T}_M = \vec{M} \wedge \vec{B}$ où \vec{M} est le moment magnétique de l'aimant et \vec{B} le champ magnétique créé par la phase 1, proportionnel au courant $i_1 = I$ ($B = kI$). On a :

$$T_M = MkI \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = T_{Max} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \text{Unités : Nm}$$

Si on alimente la phase 1 avec $T_R = 0$, le rotor est en $\theta = \pi/2$ et $T_M = T_R = 0$. Si on applique un couple résistant et constant T_R , le rotor prend une position d'équilibre $\theta_1 < \pi/2$ où $T_M = T_{M1} = |T_R|$.

Remarques :

- Le couple maximal T_{Max} correspond au couple de maintien.
- Seule la partie en traits pleins correspond à un fonctionnement stable.

42.4.2 Régime dynamique

Lorsqu'on alimente la phase suivante (phase 2), le couple moteur étant supérieur à T_R , le rotor avance jusqu'à θ_2 afin que $T_{M2} = T_R$. En alimentant la phase 1 avec un courant négatif, $\theta = \theta_3$ et ainsi de suite. Le moteur avance par bonds successifs, avec une résolution de 4 (Fig. 42.7).

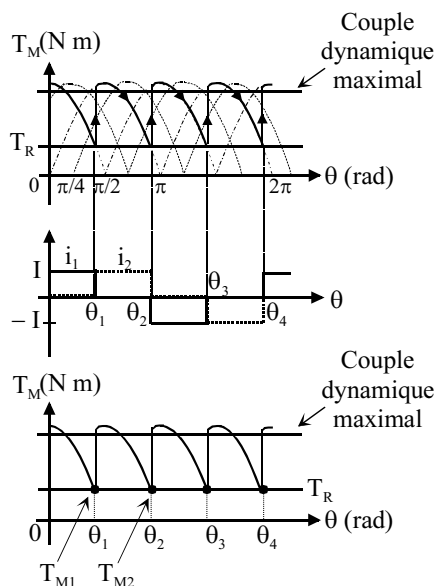


Fig. 42.7 Séquence de commande et ondulation du couple

- **Couple dynamique maximal.** Il correspond à l'intersection des courbes de phases. T_R doit être inférieur à ce couple pour que le moteur puisse tourner.

Remarques :

- Le rotor atteint sa position stable avec un mouvement oscillatoire amorti. Cela peut être gênant (résonance), et il faut parfois prévoir des dispositifs d'amortissement.
- Si on augmente la fréquence de commutation, on arrive à enchaîner les pas et obtenir une vitesse quasi continue.

- **Caractéristique couple-vitesse** (Fig. 42.8). Elle est donnée par le constructeur pour un type de commande et de charge entraînée.

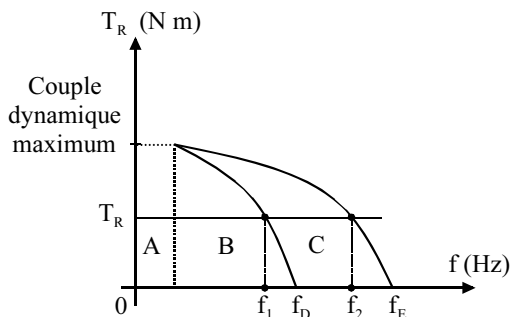


Fig. 42.8 Caractéristique couple-vitesse

Elle comprend trois zones :

- A : fonctionnement peu recommandé. En trop basse fréquence, on subit des variations dues aux rotations en saccades.
- B : zone d'arrêt-démarrage.
- C : zone de survitesse.

La fréquence f_D est la fréquence maximale à vide d'arrêt-démarrage, et f_E la fréquence maximale d'entraînement. Pour démarrer et arrêter le moteur sans sauter de pas, il faut augmenter ou diminuer la fréquence progressivement pour passer de la zone B à la zone C et inversement.

42.5 UTILISATION

Ce sont des moteurs de faible puissance qui sont utilisés dans les imprimantes, lecteurs de disquette, pousse-seringues, etc.

Chapitre 43

Machines à courant continu

43.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

43.1.1 Fonctionnement – Réversibilité – Constitution

● **Fonctionnement et réversibilité.** En déplaçant un conducteur fermé dans un champ magnétique, on engendre un courant (cas de la génératrice). Inversement, ce même conducteur, parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, est soumis à une force électromagnétique (cas du moteur). Ces deux principes sont présents dans une machine à courant continu « CC », qui est donc réversible. On a deux parties principales, séparées par un entrefer :

- un inducteur qui crée le champ magnétique (excitation) ;
- un induit dont le but est de produire le courant (génératrice), ou d'alimenter les conducteurs en courant électrique (fonctionnement en moteur).

● **Constitution.** On considère le cas simple d'une machine bipolaire (Fig. 43.1).

- L'inducteur, au *stator*, est la partie fixe. Parfois c'est un aimant permanent, pour les petites puissances, mais en général c'est un électroaimant constitué de deux bobines en série qui, alimentées en courant continu, créent un pôle nord et un pôle sud (Fig. 43.2). Le champ magnétique dans l'entrefer est maximal dans l'axe des pôles, et nul dans la direction perpendiculaire à cet axe, appelée *ligne neutre*.
- L'induit, au *rotor*, est la partie tournante. C'est un cylindre ferromagnétique feuilleté constitué d'encoches dans lesquelles sont répartis des conducteurs. C'est un enroulement fermé sur lui-même. Calé sur le rotor se trouve le *collecteur*,

Remarques :

- Le collecteur et les balais sont les points faibles d'une machine à CC.
- Une machine bipolaire comporte deux voies d'enroulement en parallèle, une voie d'enroulement étant l'ensemble des conducteurs entre les balais. Chaque voie est traversée par la moitié du courant d'induit.

- **Symbole et conventions** (Fig. 43.4).

La plaque signalétique indique les valeurs nominales des grandeurs de l'induit et de l'inducteur, le mode d'excitation, la vitesse nominale et la puissance mécanique utile dans le cas du moteur.

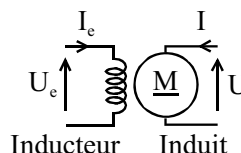


Fig. 43.4 Symbole et conventions

43.1.2 Fém – Modèle – Couple – Vitesse**a) Régime continu**

• **Expression de la fém.** L'induit étant en rotation, les conducteurs coupent le flux magnétique inducteur et sont le siège d'une tension induite alternative. Le collecteur redresse cette tension ; le nombre d'encoches étant important, la fém E entre les balais est quasiment continue.

$$E = Nn\Phi \quad \text{ou} \quad E = K\Phi\Omega \quad \text{avec} \quad K = N/2\pi$$

E : fém (V) ; N : nombre de conducteurs actifs de l'induit ; Φ : flux sous un pôle de l'inducteur (Wb) ; n et Ω : vitesse de rotation (n en tr/s, et Ω en rad/s).

Remarques :

- Le collecteur est un redresseur de tension tournant.
- Si le flux est constant (cas fréquent), $E = k\Omega$ est directement proportionnelle à la vitesse.
- Le courant dans l'induit provoque un champ magnétique qui modifie la fém : c'est la *réaction magnétique d'induit*, qu'on atténue en disposant des enroulements supplémentaires au rotor. On négligera ce phénomène par la suite.

- **Modèle de l'induit** (Fig. 43.5)

$$U = E + RI$$

E : fém (V) ;
 U : tension d'induit (V) ;
 I : courant d'induit (A) ;
 R : résistance d'induit (Ω) qui tient compte de l'enroulement, du collecteur et des balais.

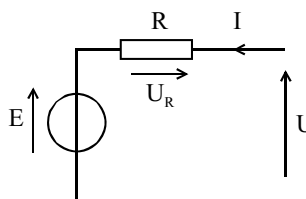


Fig. 43.5 Modèle de l'induit

- **Moment du couple électromagnétique.** La puissance électromagnétique est convertie en puissance mécanique. $P_{Em} = EI = T_{Em}\Omega$ avec $E = K\Phi\Omega$. D'où :

$$T_{Em} = K\Phi I$$

T_{Em} : moment du couple électromagnétique (Nm) ; Φ : flux sous un pôle de l'inducteur (Wb) ; I : courant dans l'induit (A).

- **Cas d'une machine multipolaire.** Une machine à p paires de pôles comporte p paires de balais. Selon la façon dont l'induit est bobiné, la machine peut comporter plus de deux voies d'enroulement. Dans ce cas, les expressions de la fém et du couple deviennent :

$$E = \frac{p}{a} K\Phi\Omega \quad \text{et} \quad T_{Em} = \frac{p}{a} K\Phi I \quad \text{avec} \quad 1 \leq 2a \leq 2p$$

$2a$: nombre de paires de voies d'enroulements en parallèles (a : entier positif).

- **Expression de la vitesse.** La loi d'Ohm et l'expression de la fém donnent :

$$\Omega = \frac{U - RI}{K\Phi}$$

Ω : vitesse de rotation de l'induit (rad/s) ; U : tension d'induit (V) ; I : courant d'induit (A) ; R : résistance d'induit (Ω) ; Φ : flux sous un pôle d'inducteur (Wb).

- **Caractéristique à vide (Fig. 43.6).** Elle se trace en fonctionnement en génératrice à excitation séparée, quel que soit le mode d'excitation ultérieur de la machine. C'est la courbe d'aimantation du circuit magnétique. Le point de fonctionnement P se situe dans le coude de saturation.

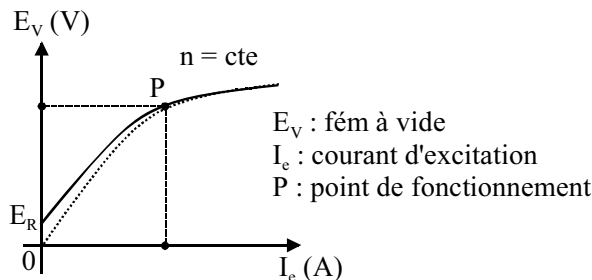


Fig. 43.6 Caractéristique à vide

Remarque : Du fait de l'hystérésis, la courbe ne passe pas par l'origine. Il existe une fém rémanente E_R (ainsi qu'un étroit cycle d'hystérésis, non représenté sur la figure).

b) Régime variable

• Équations électriques et mécaniques du modèle dynamique (Fig. 43.7)

$$u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

$$e(t) = k\Omega(t)$$

$$T_{Em}(t) = ki(t)$$

$$J \frac{d\Omega(t)}{dt} + f\Omega(t) = T_{Em}(t) - T_R(t)$$

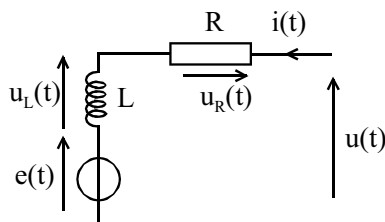


Fig. 43.7 Schéma équivalent de l'induit

• Schéma bloc du modèle dynamique du moteur

La charge et la tension d'alimentation faisant varier la vitesse, le moteur constitue un système asservi (Fig. 43.8). En utilisant la formulation de Laplace, on a :

$$U(p) = E(p) + RI(p) + LpI(p)$$

$$pJ\Omega(p) + f\Omega(p) = T_{Em}(p) - T_R(p)$$

avec

J : Moment d'inertie

f : frottement visqueux

$f\Omega$: couple de frottement

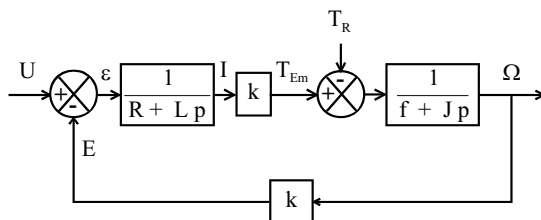


Fig. 43.8 Schéma bloc

43.2 MOTEUR À EXCITATION INDÉPENDANTE OU SÉPARÉE

43.2.1 Schéma – Démarrage – Réglage de la vitesse

• **Schéma.** Ce mode d'excitation nécessite deux sources d'alimentations distinctes (voir Fig. 43.4). On change le sens de rotation en permutant les bornes de l'induit ou de l'inducteur.

• Conditions de démarrage

- On alimente l'inducteur avant l'induit en réglant I_e à sa valeur nominale.
- Il faut limiter le courant d'induit I_D au démarrage ($I_D < 2I_N$ en général) en démarant sous tension réduite, grâce à un hacheur ou un redresseur commandé.
- On peut démarrer en charge si $I_D > T_{RD}/(K\Phi)$ où T_{RD} est le couple résistant opposé par la charge au démarrage. En conséquence le moteur possède un couple important au démarrage.

- **Réglage de la vitesse.** On peut régler la vitesse en agissant sur Φ , donc sur l’excitation, ou sur la tension U (alimentation de l’induit) :
 - L’action sur l’excitation, avec un rhéostat de champ ou une tension U_e réglable, n’offre qu’une variation limitée, et n’est pas possible si l’inducteur est à aimants permanents.
 - L’action sur la tension d’induit résout le problème du démarrage.
- En conclusion, la souplesse de ces deux réglages indépendants confère à ce moteur une grande précision.
- **Risque d’emballement.** Si l’excitation s’annule alors que l’induit est encore alimenté, le moteur s’emballe et peut détruire l’induit. En conséquences :
 - Il ne faut jamais couper le circuit d’excitation.
 - Pour arrêter le moteur, il faut couper l’induit avant l’inducteur.

43.2.2 Bilan des puissances – Rendement

- **Arbres des puissances (Fig. 43.9)**

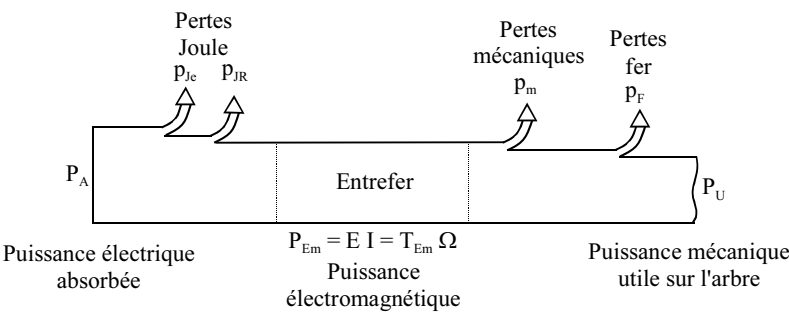


Fig. 43.9 Arbre des puissances

$P_A = UI + U_e I_e$	$p_{Jc} = r I_e^2 = \frac{U_e^2}{r} = U_e I_e$	$p_{JR} = R I^2$	$P_U = T_U \Omega$
$W = VA$	$W = \Omega A^2$	$W = \Omega A^2$	$W = Nm \text{ rad s}^{-1}$

U : tension d’induit et U_e : tension de l’inducteur (V) ; I : courant d’induit et I_e : courant de l’inducteur (A) ; R : résistance de l’induit et r : résistance de l’inducteur (Ω) ; T_U : couple utile sur l’arbre (Nm) ; Ω : vitesse de rotation (rad/s).

Remarques :

- À vitesse constante, les pertes mécaniques et les pertes fer sont constantes.
- Les pertes sont groupées sous le nom de pertes « collectives », soit $p_C = p_F + p_m$, qui, en première approximation, sont proportionnelles à la vitesse.

• Rendement

$$\eta = \frac{P_U}{P_A} = \frac{P_A - (p_{Je} + p_{JR} + p_C)}{P_A}$$

• Détermination des pertes et du rendement : méthode des pertes séparées.

- Les résistances du stator et du rotor peuvent se mesurer à chaud par la méthode voltampèremétrique.
- En charge, on mesure P_A , p_{JR} et p_{Je} .
- À vide, avec les mêmes conditions d'excitation et de vitesse, on mesure :

$$P_{A0} = RI_0^2 + p_C \approx p_C$$

43.2.3 Caractéristiques (Fig. 43.13)

43.2.4 Freinage

Le freinage du moteur utilise le principe de la réversibilité (Fig. 43.10). L'induit est relié à un rhéostat. Entraînée par son inertie, la machine fonctionne en génératrice et dissipe son énergie dans le rhéostat. On peut aussi récupérer cette énergie avec des procédés électroniques (Voir Chapitre 32 : Redressement commandé) et la renvoyer sur l'alimentation (freinage avec récupération).

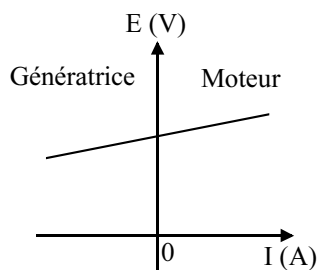


Fig. 43.10 Réversibilité

43.3 MOTEUR À EXCITATION SÉRIE

43.3.1 Schéma – Démarrage – Réglage de la vitesse

- **Schéma (Fig. 43.11).** L'inducteur est en série avec l'induit : une seule source d'alimentation suffit. On change le sens de rotation en permutant les connexions de l'induit et de l'inducteur.
- **Loi d'Ohm :** $U = E + R_T I$ avec $R_T = R + r$ (r : résistance de l'inducteur).
- **Fém et couple.** Deux cas se présentent (Fig. 43.12) :
 - La machine est saturée (zone b), le flux est sensiblement constant et on retrouve le cas d'une machine à excitation constante.
 - La machine n'est pas saturée (zone a) et le flux est proportionnel au courant. La fém et le moment du couple deviennent :

$$E = kI\Omega$$

$$T_{Em} = kI^2$$

E : fém (V) ; Ω : vitesse de rotation de l'induit (rad/s) ; I : courant d'induit (A) ;
 T_{Em} : moment du couple électromagnétique (Nm) ; k : constante du moteur.

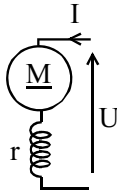


Fig. 43.11 Moteur à excitation série

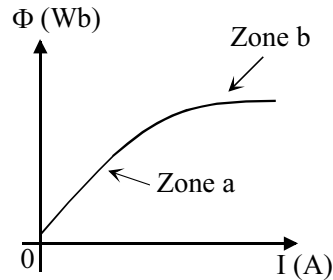


Fig. 43.12 Saturation (excitation série)

• Conditions de démarrage

- Le courant de démarrage doit être limité comme dans l'excitation séparée.
- On ne doit jamais démarrer à vide sous tension nominale car sinon, le moteur s'emballe et l'induit peut être détruit.

• **Réglage de la vitesse.** Il se fait par action sur la tension d'alimentation, comme pour le moteur à excitation séparée.

En conclusion, ce moteur possède un fort couple au démarrage, supérieur au moteur précédent, mais s'emballe à vide. Il est utilisé pour des couples élevés à basse vitesse : traction ferroviaire (TGV Sud-Est), démarreur de voitures, etc.

43.3.2 Bilan des puissances – Rendement

Il n'y a pratiquement pas de différence avec le moteur à excitation séparée.

43.3.3 Caractéristiques du moteur série (Fig. 43.13)

43.3.4 Freinage

Il se fait comme dans le cas précédent en utilisant la réversibilité de la machine (voir § 43.2.4)

43.3.5 Moteur universel

Le moment du couple d'un moteur série étant proportionnel au carré du courant d'alimentation, il peut fonctionner en régime sinusoïdal. On obtient ainsi un moteur universel. Le stator d'un tel moteur est feuilleté pour limiter les pertes fer. Ces moteurs sont très répandus (sèche-cheveux, mixeurs, ventilateurs, etc.)

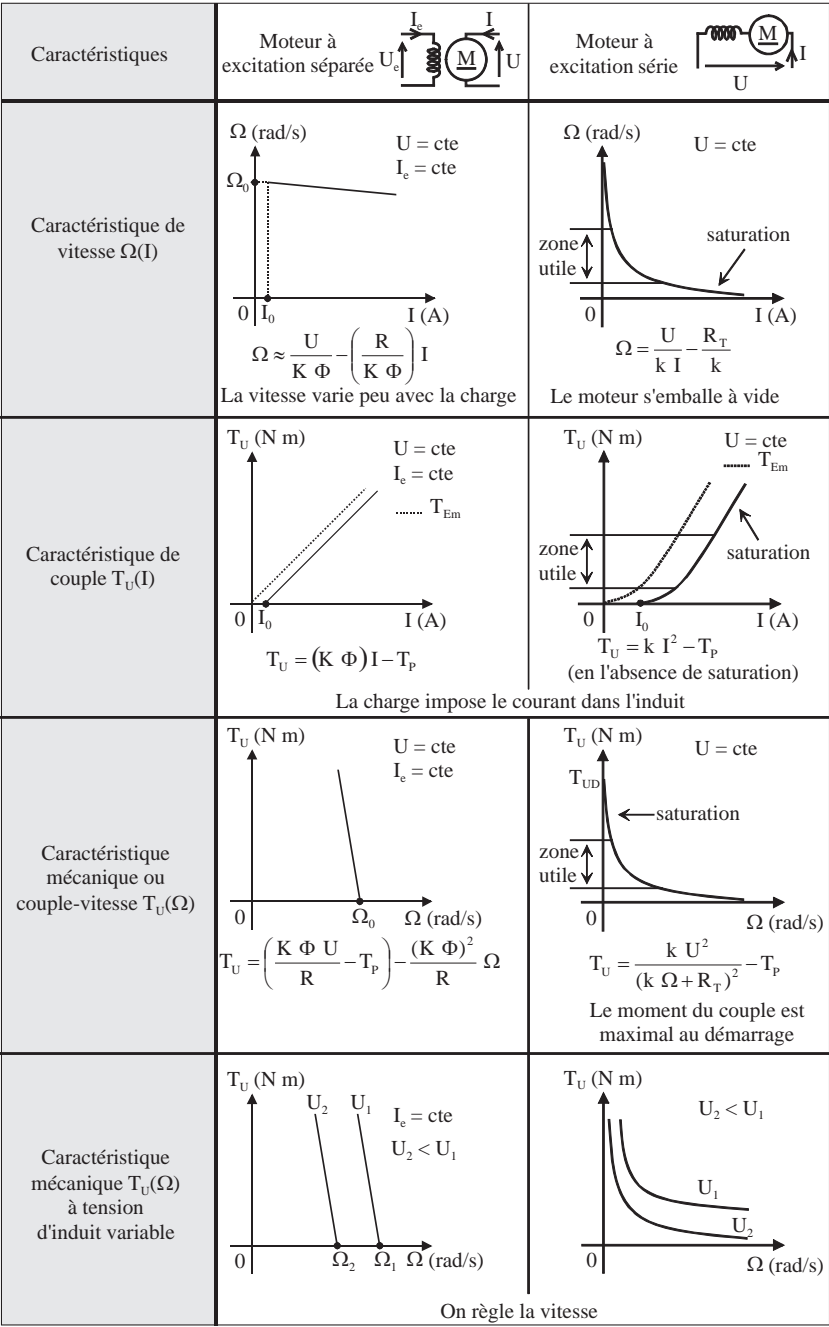


Fig. 43.13 Caractéristiques des moteurs à excitations séparée et série

Index

A

A.D.C., 415
adaptation d'impédance, 66, 353
adaptation en puissance, 206
admittance complexe, 61
admittance opérationnelle, 154
aimant, 40
amplificateur, 333
amplificateur opérationnel (A.Op.), 291
amplification
 de puissance, 348
 différentielle, 344
 en classe A, 350
 en classe AB, 352
 en classe B, 351
 en classe D, 352
 en courant, 334, 340
 en mode commun, 344
 en tension, 334, 337
amplitude complexe, 58
angle
 de décalage interne, 573
 de garde, 457, 462
 de perte, 182
 électrique, 566
arbre des puissances, 574, 586, 604
astable, 402
asynchrone, 566
autopiloté, 579

B

B.C.D., 417
B.J.T., 228
bande passante, 73, 375, 426
binaire
 biaisé, 419
 décalé, 419
 naturel, 416
boost converter, 497
Boucherot, 554
bruit de quantification, 425
buck converter, 492
buck-boost converter, 499

C

C.A.N., 415
C.M.R.R., 299, 344
C.N.A., 413

calibration analogique, 371
capacité thermique, 306
causalité, 135, 152
champ
 d'excitation magnétique, 39
 d'induction électrique, 30
 disruptif, 180
 électrique, 30, 34, 178
 excitation magnétique, 43
 induction magnétique, 44
charge électrique, 175
circuit magnétique parfait, 47
classes de fonctionnement d'un transistor, 349
coefficient
 de couplage, 197
 de dispersion de Blondel, 197
 de stabilisation amont, 367
 de stabilisation aval, 367
 de sursaturation, 236
 de surtension, 127
 ou facteur de surintensité, 71
 ou facteur de surtension, 69
collecteur, 600
commande
 décalée, 533
 de découpage des phases, 523
 de trains d'ondes pleines, 523
 symétrique ou pleine onde, 530
commutation
 asynchrone, 513
 synchrone, 513
comparaison, 392
 à fenêtre, 397
 à hystérésis, 394
comparateur, 301
compensateur synchrone, 583
complément à deux, 420
condensateur, 13, 35, 68, 125
conditionnement d'un signal, 363
conductance, 169
conduction
 ininterrompue, 444
 interrompue, 444
conductivité, 169
constante de temps, 116
 d'amortissement, 128
constante temporelle propre, 126
contre-réaction, 375, 379
conventions récepteur et générateur, 12
convertisseur
 à accumulation, 501
 à transfert direct, 508

abaisseur de tension, 492
élevateur de tension, 497
inverseur de tension, 499
couplage, 558
 en étoile, 82
 en triangle, 83
couple, 547
courant
 de décalage, 293
 de polarisation, 293
courant électrique, 4
courants de polarisation, 303
critère de Barkhausen, 384
cycle d'hystérésis, 46

D

D.A.C., 413
D.C.B., 417
D.C.B. + signe, 420
Darlington, 242
décade, 73
décibels, XIII
démodulation synchrone, 361
déphasage, 56, 72, 334
dérivateur, 357
dérivée en un point de discontinuité, 139
différence de potentiel électrique (d.d.p.), 11
DIAC, 271
diagramme de Bode, 75
diélectrique, 35, 175
diode
 à capacité variable (varicap), 226
 à jonction PN, 214
 de roue libre, 457, 467
 électroluminescente, 281
LASER, 284
PIN, 226
Schottky, 225
tunnel, 227
Zener, 224
dipôle
 actif, 13
 linéaire, 12
 passif, 13
distorsion harmonique, 336
diviseur
 de courant, 27
 de tension, 27
dynamique, 413

E

échelon
 de Heaviside, 138
 unité, 138
 effet
 de peau, 8
 Early, 237
 Joule, 170
 Miller, 241
 électron, 2
 électroaimant, 53
 énergie cinétique, 545
 équation de la dynamique, 548
 équation différentielle, 113, 153
 erreur
 absolue, 367
 aléatoire, 363
 de décalage, 422
 de gain, 422
 de linéarité, 423
 relative, 368
 systématique, 363
 excitation indépendante, 603
 excitation série, 605

F

F.T.B.F, 375
 F.T.B.O, 375
 facteur(s)
 d'amortissement, 127
 de crête, de forme et d'ondulation, 92
 de forme et d'ondulation, 103
 de mérite, 295
 de puissance, 64, 65, 84
 de puissance d'un redresseur, 469
 de qualité, 67, 182, 191
 filtre
 analogique, 316
 anti-repliement, 331
 idéal, 316, 327
 flux
 à travers une surface, 31, 47
 additifs, 195
 d'auto-induction, 50, 184
 de fuites, 198
 magnétisants, 198
 par spire, 185
 soustractifs, 195
 total, 185
 flyback, 499
 isolé, 501
 fonction de transfert (F.T.), 72, 151, 153, 157
 fondamental, 99
 force électrostatique, 179
 formule de Bessel-Parseval, 98, 101
 forward isolé, 508
 FREDFET, 261
 fréquence
 critique, 280
 d'échantillonnage, 331
 de coupures, 72
 réduite, 317

Fresnel, 57, 80
 fuite magnétique, 192

G

G.T.O., 267
 gabarits d'atténuation, 327
 gain, 72
 en courant, 334
 en tension, 334
 générateur, 12

H

hacheur, 472
 à accumulation, 484
 dévolteur, 473
 deux quadrants, 485
 parallèle, 477
 quatre quadrants, 488
 série, 472
 survolteur, 478
 harmonique, 99
 homologue, 554
 hypothèse de Kapp, 210, 556

I

I.G.B.T., 261
 impédance
 complexe, 61
 opérationnelle, 154
 thermique, 310
 impulsion de Dirac, 137–139
 incertitude
 absolue, 368
 relative, 368
 indice horaire, 558
 inductance, 50
 mutuelle, 195
 propre, 50, 185, 195
 induction rémanente, 46
 infrarouge, 280
 Intégrateur, 357

L

L^2 FET, 259
 LED, 281
 lissage
 de la tension, 428, 430, 436, 439, 442
 du courant, 428, 432, 437, 442
 loi(s)
 d'Hopkinson, 48
 d'Ohm, 5, 61, 154, 168
 de Coulomb, 3, 4
 de Faraday, 52
 de Kirchhoff, 19
 de Lenz, 52
 des mailles, 20, 21
 des nœuds, 19, 21
 élémentaire de Biot et Savart, 41

M

M.L.I., 393
 onde 2 niveaux, 536, 539

onde 3 niveaux, 537, 541
 par découpage, 539
 pré-calculée, 536
 marge
 de gain, 377, 379
 de phase, 377, 378
 milieu amagnétique, 44
 milieu ferromagnétique, 45
 modèle de Behn-Eschenburg, 573, 578
 modèle de Schichman-Hodges, 253
 modulation d'amplitude, 361
 module, 72
 moment, 546
 d'inertie, 549
 monostable, 400
 MOSFET, 245
 à appauvrissement, 258
 à mesure de courant, 259
 canal N à enrichissement, 246
 canal P à enrichissement, 257
 moteur universel, 526
 multiplieur, 360
 mutuelle inductance, 194

N

nombre complexe, 60

O

octave, 73
 ondulation, 91
 crête à crête, 92
 onduleur
 assisté, 456
 autonome, 528
 orientation d'une surface, 30, 47
 oscillateur
 à pont de Wien, 390
 Colpitts, 388
 Hartley, 389
 sinusoïdal, 384

P

P.W.M., 393, 536
 paramètres
 admittances, 336
 de transfert, 337
 hybrides, 336
 impédances, 336
 passe-bande, 324
 passe-bas, 317, 320
 passe-haut, 318, 323
 perméabilité
 absolue, 44, 186
 magnétique, 44
 relative, 45, 46, 185
 permittivité
 absolue, 29, 176
 relative, 29, 176
 pertes
 cuivre, 210, 555
 fer, 192, 210, 555
 petite variation, 365
 photoconductif, 288

photocoupleur, 290
 photodiode, 285
 photon, 2, 277
 photopile, 290
 phototransistor, 289
 photovoltaïque, 287
 plage pleine échelle, 371, 412
 pleine échelle, 412
 point milieu, 433
 pont
 de Graëtz, 434, 449
 mixte, 457, 467
 tout thyristors, 449, 457, 463, 467
 potentiel électrique, 10, 33
 précision, 363, 367, 421
 principe de linéarité, 28, 103
 produit gain-bande, 295
 puissance
 active, 63
 apparente, 63
 fluctuante, 63
 instantanée, 62, 545
 moyenne, 102
 réactive, 63
 pulsation
 propre, 126
 réduite, 317
 Push-Pull, 351

Q

quantum, 412

R

rapport
 cyclique, 402
 de transformation, 199, 204, 211
 réaction, 374, 380
 négative, 375, 379
 positive, 375
 récepteur, 12
 redressement, 428
 monophasé double alternance, 433, 449
 monophasé simple alternance, 429, 445
 triphasé double alternance, 440, 463
 triphasé simple alternance, 438, 458
 redresseur commandé, 444
 régime
 apériodique, 127
 continu, 87
 critique, 127
 périodique, 87, 99, 128
 permanent, 87, 116, 122
 pseudo-périodique, 127

sinusoïdal permanent, 56
 transitoire, 116
 variable, 87
 règle
 de la main droite, 43
 des trois doigts de la main droite, 41, 43
 du flux maximum, 53
 réjecteur de bande, 326
 réjection du mode commun, 344
 relais statique, 512
 réluctance, 48
 réponse
 à un échelon, 113
 à une rampe, 113
 à une sinusoïde causale, 113
 forcée, 115
 harmonique, 71, 113, 157
 impulsionnelle, 113, 137, 152
 indicielle, 113, 117, 129
 libre, 115
 permanente, 116
 transitoire, 116
 résistance thermique, 306
 transitoire, 310
 résistivité, 168
 résolution analogique, 412
 résolution numérique, 413, 421
 résonance, 69, 71
 résonateur piézoélectrique, 385
 rigidité diélectrique, 36, 180
 r.m.s., 89

S

S.C.R., 262
 S.C.R. blocable, 267
 sensibilité, 363, 376
 série de Fourier, 95
 signal périodique, 87, 99
 Slew-Rate, 299
 solénoïde, 40
 sommateur, 355
 source, 14
 commandée, 15, 21
 spectre, 105
 d'amplitude bilatéral, 107
 d'amplitude unilatéral, 106
 de phase, 108
 stabilité, 377, 378
 step-down, 492
 step-up, 497
 synchrone, 566
 système
 direct, 79
 inverse, 79
 linéaire, 112, 150

triphasé équilibré, 79, 81

T

T.R.M.C., 299, 344
 taux de distorsion harmonique, 103
 TECMOS, 245
 temporisation, 405
 temps d'ouverture, 424
 temps de réponse, 118, 129, 132, 375
 tension
 composée, 78
 de décalage, 293, 303
 électrique, 11
 simple, 78
 thermodynamique, 215
 théorème(s)
 d'Ampère, 42
 de Boucherot, 65
 de Ferraris, 568
 de Gauss, 32
 de Huygens, 549
 de Kennelly, 27
 de Leblanc, 568
 de Millmann, 26
 de Shannon, 331
 de superposition, 21
 de Thévenin et de Norton, 22
 thyristor, 262
 tolérance, 367
 tore, 43
 transadmittance, 334, 342
 transformateur
 parfait, 204
 réel, 211
 transformée de Laplace (T.L.), 140
 transimpédance, 334, 341
 transistor
 bipolaire, 228
 MOS, 245
 Schottky, 244
 transmittance, 72, 151
 travail, 546
 TRIAC, 267
 trigger de Schmitt, 394

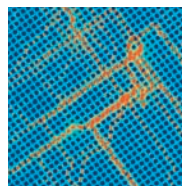
U

unités optiques, 278

V

valeur
 efficace, 21, 89, 91, 101
 instantanée, 91
 moyenne, 88, 91
 vitesse de synchronisme, 567

Guy Chateigner
Michel Boès
Daniel Bouix
Jacques Vaillant
Daniel Verkindère



MANUEL DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

Ce manuel présente les notions de base et les méthodes du génie électrique enseignées dans les premières années d'études supérieures.

Le cours, divisé en cinq grandes parties (Électricité et signaux, Composants électroniques, Électronique du signal, Électronique de puissance et Machines électriques), est illustré par de nombreux exemples d'application qui permettent à l'étudiant de « tester » immédiatement sa bonne compréhension. Les notions sont abordées de manière progressive pour donner une vue d'ensemble de la matière.

Destiné aux étudiants en licence ou en IUT, ce livre sera aussi utile aux élèves ingénieurs à la recherche d'une introduction au génie électrique.

Les auteurs enseignent dans les classes conduisant aux Bac et aux BTS spécialisés en électronique et électrotechnique (lycée Jules Algoud à Valence) ; et interviennent en IUT (université Pierre Mendès-France de Valence).

GUY CHATEIGNER
et DANIEL BOUIX
sont professeurs
de génie électrique.

MICHEL BOËS,
JACQUES VAILLANT
et DANIEL VERKINDÈRE
sont professeurs
de physique appliquée.



MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

INFORMATIQUE

SCIENCES DE LA VIE

SCIENCES DE LA TERRE



6456537

ISBN 978-2-10-048499-7



www.dunod.com

