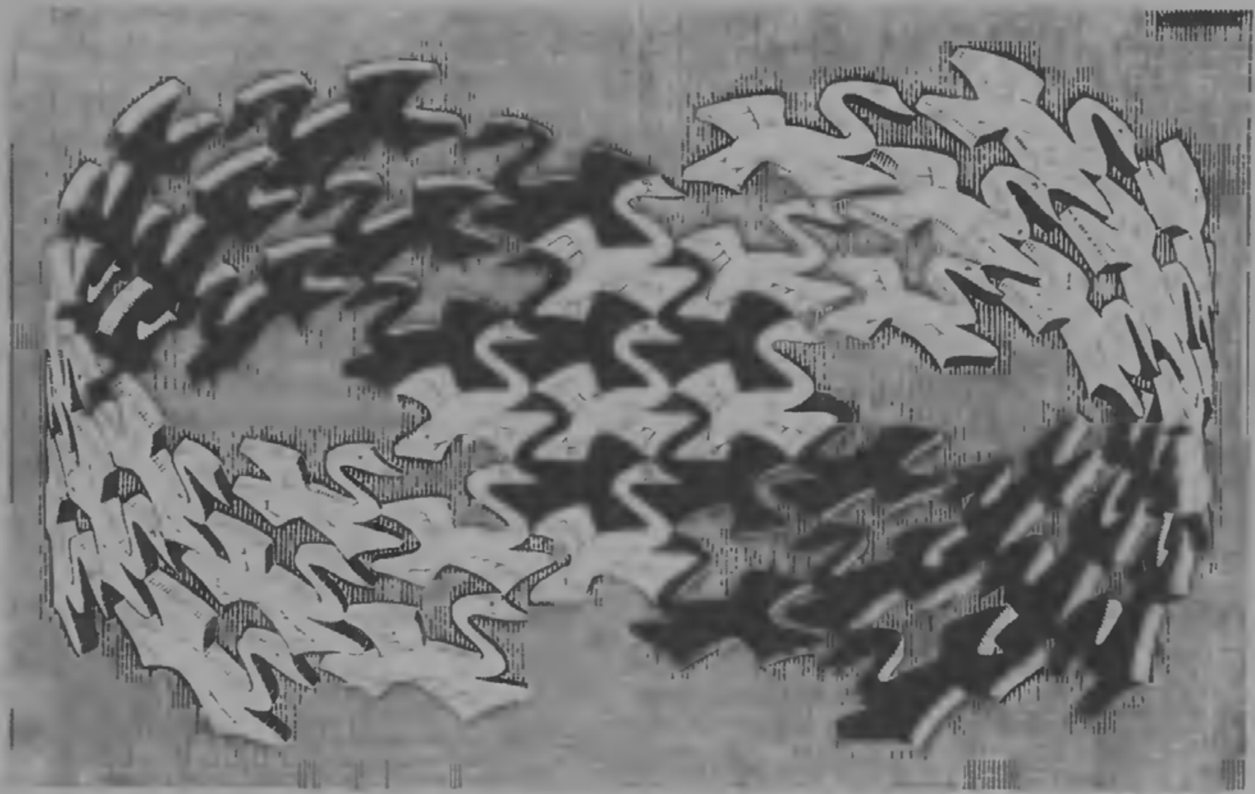
AVENTURES MATHÉMATIQUES

Miguel de Guzmán



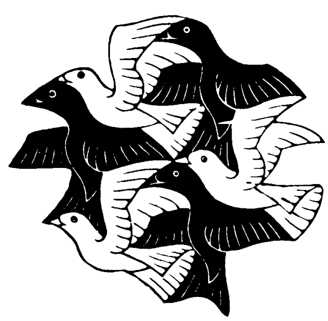
PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Collection «Réflexions sur les sciences et les techniques»

AVENTURES MATHÉMATIQUES

Miguel de Guzmán

Traduit de l'espagnol par Elisabeth Schmitt



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES

Dans la même collection

Le chercheur à la recherche de lui-même
Sens et limites de la recherche scientifique

André Delessert, Lawrence W. Freedman, Josef Hofstetter, François Jéquier, Marcel Jufer, Carl-A. Keller, J.-Claude Piguet, Dominique Rivier, François Schaller, Pierre-Bernard Schneider

Pour une informatique consciente
Réflexions sur l'enjeu humain
et l'impact socio-culturel de l'informatique
rassemblées par Pierre-Gérard Fontolliet

Le huitième jour de la création
Introduction à l'entropologie

Jacques Neirynck

L'ordre et la volupté
Essai sur la dynamique esthétique dans les arts et dans les sciences.

Roland Fivaz

Illustrations de la couverture et de la page
titre de M.C Escher

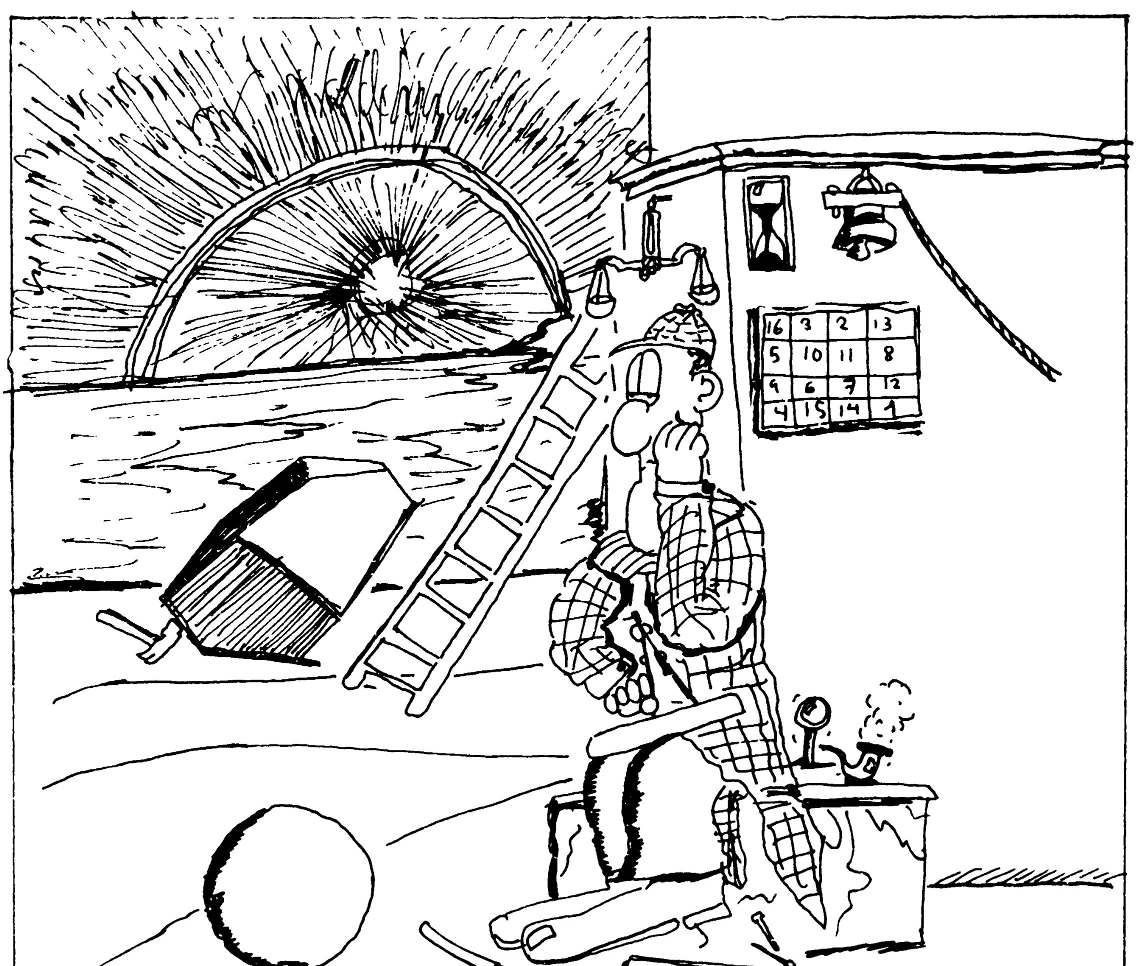
Edition originale espagnole

Editorial Labor, S.A.-Calabria, 235-239 - 08029 Barcelona
Viñetas: Miguel de Guzmán G.-Monge

ISBN 2-88074-171-8

Imprimé en Suisse par Schüler SA à Bienne

Dédié aux médecins, infirmiers, infirmières et amis du Centre hospitalier Ramon y Cajal, où j'ai eu l'occasion d'écrire ces aventures mathématiques. Par leurs attentions et leur attachement, ils m'ont appris qu'être malade un certain temps peut ne pas être si mauvais.


16 3 2 13
5 10 11 8
9 6 7 12
4 15 14 1

Préface

Voici un recueil de jeux, énigmes, histoires..., ayant tous un certain contenu mathématique. Je les ai choisis pour vous aider à constater que cette manière d'explorer la réalité peut être intéressante, amusante et parfois passionnante. D'autre part, quelques-unes des questions que nous verrons ensemble, non seulement sont distrayantes, mais aussi touchent de très près à des parties importantes des mathématiques de tous les temps, ainsi qu'à quelques-uns des mystères qui en dépendent encore

La science entière est en fait une immense tâche d'exploration des nombreuses énigmes que nous présente la nature. Parfois ces énigmes sont très concrètes et proches de nous: Comment fonctionne le cerveau humain pour que l'homme soit capable de savoir ce qu'il sait? Quels sont et comment réagissent entre eux les derniers composants de la matière? De combien de façons différentes peut-on plier une carte routière avec $m \times n$ plis? D'autres fois, nous nous occupons d'énigmes plus abstraites sur les réalités mentales que nous nous inventons: peut-il y avoir une infinité de couples de nombres premiers dont la différences soit 2, tels que (11,13), (29,31) (101,103), (2381,2383), (3557,3559)...? Entre les nombres 11, 111, 1111, 11111,..., peut-il y avoir une infinité de nombre premiers? ainsi, les questions mathématiques que nous verrons dans ces essais, sont certaines fois concrètes et d'autres fois, plus abstraites.

J'ai voulu écrire ces chapitres en comptant essentiellement sur votre intervention active. C'est vous qui serez le détective, et vous essayerez de tirer au clair les cas qui se présentent. Chaque question qui se posera tout au long de l'étude, même si je ne vous le suggère pas explicitement à chaque fois, devrait vous permettre de faire une pause dans votre lecture afin d'y réfléchir un moment. Parfois, il sera aisé de trouver rapidement la réponse adéquate, d'autre fois ce sera moins facile, mais de toute façon, le temps que vous passerez à réfléchir n'est pas perdu, loin de là.

Dans le chapitre 0, vous trouverez quelques suggestions sur la délicate manière d'aborder les problèmes mathématiques et non mathématiques. Certains chapitres dissèquent des jeux classiques ou moins classiques, d'autres présentent des problèmes de différents genres; dans d'autres enfin, nous tâcherons de suivre le fil de la pensée de certains grands savants de la Mathématique comme Fermat, Cantor, Brouwer... A la fin de chaque chapitre, vous trouverez des commentaires qui tentent d'en mettre en valeur les grandes idées, à travers la biographie d'éminents personnages, le sens de certaines théories... Il y a aussi des remarques sur ce que je pense de l'actuelle didactique des mathématiques. Beaucoup de ces opinions seront certainement erronées, mais il m'a semblé que, dans l'ensemble, elles pourraient vous aider à vous faire une idée personnelle des mathématiques actuelles et de ce qu'il y a à prendre et à laisser dans les programmes des différents niveaux de l'enseignement.

Les chapitres de cet ouvrage sont indépendants entre eux et également indépendants de mon livre antérieur «Cuentos con cuentas», que je cite parfois en référence.

Je tiens à remercier tout spécialement de sa collaboration, mon fils Miguel qui, par ses dessins, a animé ces aventures mathématiques. Beaucoup d'amis, trop nombreux pour que je les cite tous individuellement, on lu l'original de ce texte. J'ai tenu compte de leurs observations très judicieuses pour l'élaboration de la version finale. A eux tous, merci beaucoup.

Miguel de Guzmán

Table des matières

Chapitre 0

Ce chapitre est très important, mais vous n'êtes pas obligé de le lire

Les contes et jeux mathématiques que nous allons voir ensemble peuvent être interprétés comme des histoires policières où vous aurez le rôle du détective. Vous allez être le premier à les vivre... à votre façon, bien que beaucoup d'autres les aient déjà vécues à la leur. Préparez-vous à l'aventure! Le bon détective se caractérise par son bon flair. Il est évident qu'un bon flair s'acquiert... en flairant beaucoup et partout, et en s'exerçant à distinguer les odeurs les unes des autres, tout en tirant les conséquences. Ainsi, si vous voulez devenir un bon détective, il faudra vous exercer sérieusement. Il n'y a pas de recettes miraculeuses pour y arriver.

Pour ma part, je peux vous offrir ici, pour vous aider, une série de stratégies générales, que les détectives de tous les temps ont utilisées dans leurs tâches. L'expérience que vous acquerrez vous fera sentir, lorsque vous rencontrerez une situation particulière, quelles sont la ou les stratégies combinées qui peuvent s'adapter à votre cas. Tout au long des cas concrets que nous verrons ensemble dans les chapitres suivants, j'ai l'intention de vous aider à chausser les lunettes de grands savants des mathématiques et à regarder à travers leur loupe, ce qui consistera généralement à utiliser une de ces stratégies que je vous présente.

N'essayez pas de les apprendre par cœur! Il ne s'agit point ici de mémoire! Pour le moment, contentez-vous de les regarder rapidement pour vous familiariser un peu avec elles. Ensuite, face à un problème concret, relisez-les lentement, pour essayer de trouver les plus adéquates. En les utilisant plusieurs fois, vous vous en pénétrerez peu à peu de façon naturelle et, ainsi, vous les assimilerez définitivement. Je vous les énoncerai d'abord, tout en les expliquant un peu en détail et, à la fin du chapitre, vous les trouverez toutes ensemble, dans une liste sous forme de résumé, pour qu'il vous soit plus aisé de les voir d'un seul coup d'œil.

...sur les traces des grands savants...

Une dernière observation. Ne pensez pas que les méthodes de raisonnement que vous trouverez ici ne servent qu'à résoudre des problèmes et des jeux mathématiques. Dans l'ensemble, en changeant ce qu'il faut changer, vous pourrez utiliser ces mêmes stratégies dans grand nombre de problèmes de la vie courante. Ceci est quelque chose de très important: les mathématiques peuvent, en effet, enseigner à tout le monde une méthode de pensée sobre, raisonnable, fiable...

A. AVANT D'AGIR, ESSAYEZ DE COMPRENDRE

Cela va de soi, mais parfois, parce que nous sommes pressés ou parce que nous recevons des pressions extérieures, nous nous mettons immédiatement en route... vers nulle part. Lorsque l'on proposait une affaire à Sherlock Holmes, celui-ci commençait par accumuler tous les journaux, des visites aux endroits probables concernés, des ragots venant des voisins ou de la bande de voyous de Londres – ses indicateurs personnels – ... et ensuite, avec tout cet amas de données dans la tête, il se mettait à improviser sur son violon ou à faire de folles expériences de chimie dans son propre laboratoire, durant de longs moments. Lorsque l'on vous proposera un cas, un jeu, un problème, un casse-tête – tout ceci revient au même –, vous devrez vous assurer que vous comprenez parfaitement les règles du jeu, les données, ainsi que l'emplacement probable de chacune de ses pièces et comment elles s'enchaînent les unes avec les autres. Utilisez-les, familiarisez-vous avec les éléments de la situation, jouez un moment avec eux. Bien qu'au début cela vous semble éloigné du sujet, vous gagnerez du temps.

B. À LA RECHERCHE DE STRATÉGIES

A cette étape du travail, vous devez essayer de trouver toutes les façons possibles d'aborder le problème. Il s'agit de faire sortir beaucoup d'idées de votre cerveau, même si, au début, elles vous paraissent complètement insensées. Les idées les plus extravagantes peuvent devenir les meilleures. Comme le disent les techniciens du *brainstorming* (bouillonnement d'idées, une des techniques de créativité), *la quantité engendre la qualité*. Vous n'allez pas encore les utiliser. Pour obtenir l'affluence d'idées, il est nécessaire d'agir avec spontanéité, *d'en différer le jugement critique*; il ne s'agit pas pour le moment de décider si l'une est meilleure que l'autre. Peu importe qu'à première vue elles puissent paraître ridicules. Nous verrons bien si elles le sont! Le premier *gentleman* qui a eu l'idée, à Londres, d'utiliser une ombrelle pour se protéger de la pluie, a été hué et bombardé de tomates. Dites maintenant aux Britanniques qu'un parapluie est une invention ridicule et efféminée!

Pour faciliter cet afflux d'idées, voici quelques règles que vous pouvez mettre en pratique. Je suis convaincu que votre expérience vous permettra d'en augmenter la liste, par des suggestions utiles et distinctes, qui vous seront plus profitables, à *vous en particulier*.

Brainstorming

B.1 *Cherchez des ressemblances avec d'autres jeux et problèmes.* Rien n'est nouveau sur terre. Que vous rappelle cette situation? N'avez-vous pas l'impression qu'elle pourrait être semblable à telle autre?

B.2 *Commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile.* Le problème est compliqué, peut-être à cause de ses nombreux éléments. Pourquoi ne pas le faciliter? Fabriquez-en un semblable, mais avec moins de pièces. Peut-être ainsi jaillira l'étincelle qui vous permettra de résoudre le plus compliqué.

B.3 *Faites des expériences, et cherchez des traits communs, des règles.* L'expérience est la mère de la science, des mathématiques aussi. Les grands théorèmes de l'histoire des mathématiques sont le fruit de nombreuses expériences, plus ou moins insensées. Les mathématiques aussi procèdent par essai, erreur et correction, et ainsi de suite...

B.4 *Faites-vous un schéma et éventuellement...colorez-le.* Nous sommes nombreux à mieux réfléchir avec des images qu'avec des mots. Une image vaut mieux que mille mots. Si c'est aussi votre cas, vous êtes en bonne compagnie. Einstein, par exemple, affirmait que, lorsqu'il faisait de la recherche, sa pensée n'était jamais verbale, mais accompagnée d'images sensorielles, et même motrices.

B.5 *Modifiez le problème, changez légèrement l'énoncé, pour voir si, ainsi, vous trouvez un chemin possible.* Ce ne sera plus le problème proposé, mais il peut vous fournir une passerelle, à laquelle vous pourrez en ajouter une autre, et atteindre ainsi votre objectif.

... choisissez une bonne notation ...

B.6 *Choisissez une bonne notation.* Beaucoup de problèmes se compliquent extrêmement si la notation est inadéquate, et deviennent clairs comme de l'eau de roche, dès que l'on prend les axes corrects, les noms appropriés des éléments... La meilleure notation est celle qui se prête le mieux à l'expression des symétries, celle qui exprime brièvement la fonction même des éléments qu'elle représente. Leibniz et Euler furent les créateurs d'une grande partie de la notation qu'aujourd'hui encore nous utilisons en mathématiques. Comme elle s'adaptait à ce qu'ils voulaient représenter, elle leur permit de simplifier notablement des problèmes compliqués.

B.7 *Exploitez la symétrie..., si vous le pouvez.* Nombreux sont les jeux, les problèmes qui se résolvent grâce à la symétrie qu'ils présentent de façon évidente ou cachée. Pensez à cette possibilité dans votre cas particulier.

B.8 *Supposons que vous ne pouvez pas...; où allons-nous?* C'est le raisonnement que l'on appelle indirect ou *par l'absurde.* En quoi consiste-t-il? Imaginez que l'on vous propose le puzzle suivant, très facile: démontrez qu'aux échecs, un même pion ne peut bouger que six fois au maximum. Vous pouvez procéder de cette façon: supposons que le pion bouge sept fois. Comme il part du second rang et que, à chaque mouvement, il avance au rang suivant, il est évident qu'au sixième mouvement, il est au moins au huitième rang et qu'au septième, il sortirait de l'échiquier. C'est absurde. Il en résulte donc qu'il ne peut pas bouger sept fois. De nombreux problèmes peuvent être traités de cette façon. A. Vous commencez par supposer qu'elle ne se comporte pas ainsi. Vous avancez en déduisant et en raisonnant correctement et votre chaîne de raisonnements vous mène à une contradiction. Il est donc clair que votre point de départ, non A, doit être faux. Ainsi, la situation initiale doit être A.

B.9 *Supposons que le problème est résolu.* Cette tactique vous sera spécialement utile dans les jeux et problèmes où il vous faudra construire une figure ou un élément, qui devra, selon les règles du jeu, être en rapport avec d'autres éléments qu'on vous donnera. Quand vous imaginez le problème résolu, en faisant un schéma, à vue d'œil, des éléments donnés, vous avez l'occasion d'explorer les relations entre ces derniers et ceux que vous cherchez. Ainsi, en les rapprochant, peut jaillir l'étincelle, qui vous fera voir clairement comment vous devez procéder à partir des données.

B.10 *Pensez à des techniques générales: récurrence, descente de l'infini, procédé diagonal, principe du pigeonnier...* Je ne vais pas vous harceler ici, en vous racontant une par une ces stratégies, qui sont de véritables bijoux de la pensée mathématique, extrêmement simples et puissantes à la fois. Vous les verrez plus tard, dans d'autres chapitres. Chacune d'entre elles porte le nom du mathématicien célèbre qui enrichit la science par l'utilisation systématique de celle-là: principe de récurrence de Pascal, principe de descente de l'infini de Fermat, procédé diagonal de Cantor, principe du pigeonnier de Dirichlet... Peu à peu, en toute tranquillité, nous les contemplerons ensemble, tout en les utilisant.

C. MENEZ À TERME VOTRE STRATÉGIE

Vous disposez maintenant d'un certain nombre de stratégies, accumulées à l'étape B, qui vous permettront d'attaquer votre problème. Je vous conseille d'en avoir sous les yeux une liste écrite, où vous n'oublierez pas celles qui, au début, vous ont paru absurdes...

Maintenant, afin de laisser mûrir vos idées et d'attendre *l'illumination,* vous devriez passer un bon moment à jouer du violon ou à faire des expériences de chimie, comme Sherlock Holmes, ou bien des expériences culinaires comme je le fais moi-même – ce qui revient au même et est bien plus substantiel – ... ou encore, vous pouvez vous laisser absorber par votre hobby préféré. Laissez votre subconscient décanter à son gré l'accumulation d'idées que vous lui avez préparée.

Vous êtes revenu au problème. Voici maintenant le moment de décider, parmi les stratégies que vous avez sous les yeux, lesquelles ont le plus de chance de succès. Il est possible qu'une idée, qui vous semblait si extravagante auparavant, vous paraisse maintenant précisément la meilleure.

...en attendant l'illumination...

C.1 *Menez à terme les meilleures idées que vous avez eues à l'étape B. Une à une. Ne les mélangez pas au début.* Travaillez avec décision et confiance en vous-même, méthodiquement, tranquillement et sans vous troubler. Si, en mettant en pratique une idée, il vous en vient une autre à l'esprit, sans aucun rapport avec la première mais qui pourrait – vous semble-t-il – vous aider, ne la rejetez pas! Notez-la sur votre liste! Mais, ne laissez quand même pas dévier votre attention de votre idée initiale.

C.2 *Ne vous découragez pas trop vite. Mais ne vous obstinez pas trop sur une seule idée. Si les choses se compliquent vraiment, il y a probablement une autre voie.* N'abandonnez pas facilement une idée qui vous a paru bonne; cependant, soyez prêt à reconnaître que son intérêt n'était qu'une illusion, décelée en approfondissant cette idée. Si vous voyez qu'elle ne vous rapproche absolument pas de la solution, essayez-en une autre. Souvenez-vous: essai, erreur et correction, etc...

C.3 *Cela a marché? Vous en êtes sûr? Analysez bien votre résultat.* Ne vous trompez pas vous-même. les demi-idées et demi-solutions ne servent à rien. Assurez-vous bien que vous avez atteint votre but.

D. TIREZ PROFIT DU JEU ET DE VOTRE EXPÉRIENCE

Vous avez résolu le problème? Félicitations! Ou alors, vous y avez travaillé pendant des heures, vous n'êtes pas arrivé à le résoudre et vous avez décidé de regarder la solution? Félicitations de même! Si vous avez passé un long moment à réfléchir, tout en vous amusant, puis vous avez finalement décidé de regarder la solution, l'expérience est probablement encore plus satisfaisante que dans le premier cas. On apprend très souvent beaucoup plus et avec plus de profit des problèmes qu'on a essayés de faire avec intérêt et ténacité... sans succès, que de ceux que l'on résout pratiquement à première vue. De toute façon, vous devriez maintenant réfléchir un bon moment à tout ce processus, afin d'avoir une idée des difficultés rencontrées, des impasses dans lesquelles vous êtes tombé et pour quelles raisons..., et de la manière dont vous pourriez procéder dans le futur, pour mieux résoudre d'autres problèmes et jeux, semblables ou non. Cette étape du processus est probablement la plus profitable de toutes... et celle que nous oublions de réaliser le plus souvent.

D.1 *Analysez bien la voie que vous avez empruntée. Comment êtes-vous arrivé à la solution? Ou alors, pourquoi n'y êtes-vous pas arrivé?* Aviez-vous pris la bonne voie dès le début? Aviez-vous pensé à la stratégie correcte à l'étape B? Ou bien, pourquoi n'y avez-vous pas pensé? Ou bien, qu'est-ce qui vous a fait penser que vous aviez raison?

D.2 *Essayez de comprendre non seulement la solution, mais aussi le pourquoi de cette solution.* Ne vous contentez pas d'être comme l'âne qui a réussi, par hasard, à sortir un son de la flûte. Si vous n'êtes pas plus exigeant envers vous, vous aurez moins de chance la plupart du temps. Par définition, les hasards sont rares.

D.3 *Regardez maintenant si vous pouvez le faire plus simplement.* Habituellement, les mathématiciens considèrent qu'ils n'ont pas *compris* un théorème, tant qu'ils ne sont pas capables d'en contempler au moins les éléments principaux d'un simple coup d'œil paisible, sans devoir ramper péniblement d'un syllogisme à l'autre. Celui qui arrive à une telle compréhension sera capable de construire, à partir de ce résultat, d'autres structures plus puissantes.

D.4 *Examinez bien la méthode que vous avez suivie, afin de voir s'il est possible de l'utiliser dans d'autres circonstances.* Peut-être pourriez-vous inventer d'autres jeux ou problèmes plus intéressants, qui seront résolus avec les mêmes procédés, la même heureuse idée.

D.5 *Réfléchissez un peu à votre manière de raisonner et tirez-en les conséquences pour le futur.* Ces expériences répétées vous permettront peut-être de la connaître. Chacun a sa propre façon de raisonner. Comment est la vôtre? Visuelle ou analytique? Dépendez-vous beaucoup de l'expression verbale ou de la formule écrite? Avez-vous tendance à tourner en rond, de façon obsessive? Allez-vous au but avec une idée fixe, inflexiblement? Comment pourriez-vous stimuler l'afflux spontané d'idées variées, originales, nouvelles? Si vous y arrivez, vous aurez l'avantage de savoir quels problèmes vous pouvez résoudre, et ceux où votre probabilité de succès n'est pas si grande. Vous saurez comment aborder des problèmes, non plus mathématiques, mais de toute sorte, en les approchant de façon à tirer le meilleur profit possible de votre propre style.

A. AVANT D'AGIR, ESSAYEZ DE COMPRENDRE

B. A LA RECHERCHE DE STRATÉGIES

B.1 Cherchez des ressemblances avec d'autres jeux et problèmes
B.2 Commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile
B.3 Faites des expériences et cherchez des traits communs, des règles
B.4 Faites-vous un schéma et éventuellement... colorez-le
B.5 Modifiez le problème, changez légèrement l'énoncé, pour voir si, ainsi, vous trouvez un autre chemin possible
B.6 Choisissez une bonne notation
B.7 Exploitez la symétrie..., si vous le pouvez
B.8 Supposons que vous ne pouvez pas... où allons-nous?
B.9 Supposons que le problème est résolu
B.10 Pensez à des techniques générales: récurrence, descente de l'infini, procédé diagonal, principe du pigeonnier...

C. MENEZ À TERME VOTRE STRATÉGIE

C.1 Menez à terme les meilleures idées que vous avez eues à l'étape B. Une à une. Ne les mélangez pas au début.
C.2 Ne vous découragez pas trop vite. Mais ne vous obstinez pas trop sur une seule idée. Si les choses se compliquent vraiment, il y a probablement une autre voie.
C.3 Cela a marché? Vous en êtes sûr? Analysez bien votre résultat.

D. TIREZ PROFIT DU JEU ET DE VOTRE EXPÉRIENCE

D.1 Analysez bien la voie que vous avez empruntée. Comment êtes-vous arrivé à la solution? Ou alors, pourquoi n'y êtes-vous pas arrivé?
D.2 Essayez de comprendre non seulement la solution, mais aussi le pourquoi de cette solution
D.3 Regardez simplement si vous pouvez le faire plus simplement
D.4 Examinez bien la méthode que vous avez suivie, afin de voir si vous pouvez l'utiliser dans d'autres circonstances
D.5 Réfléchissez un peu à votre manière de raisonner et tirez-en les conséquences pour le futur.

DES BLOCAGES

Saviez-vous que nous tous, nous n'utilisons qu'une partie minime de notre capacité intellectuelle à résoudre des problèmes et à penser de façon créative? En effet, nous faisons généralement fonctionner notre cerveau à un rendement très bas. Pourquoi? Pour des causes très diverses: essentiellement parce que nous nous laissons dominer par des blocages de toutes sortes. Beaucoup sont des blocages émotionnels, d'autres enfin sont des blocages dus à notre milieu particulier... En voici quelques-uns.

«CHERCHEZ LA SOLUTION CORRECTE»

De nombreux problèmes peuvent avoir quinze solutions correctes. Lorsque nous en trouvons une, nous pensons que tout est terminé. Or, il est très probable qu'elle n'est ni la meilleure, ni la plus adéquate, ni la plus belle, ni la plus nouvelle, ni même celle qui servira toujours...

«IL FAUT ÊTRE PRATIQUE»

Quiconque, ayant assisté de l'intérieur, aux spéculations solitaires d'Einstein presque enfant, réfléchissant à ce qui se passait s'il s'élevait dans un ascenseur à une vitesse proche de celle de la lumière, lui aurait tiré les oreilles, pour perdre ainsi son temps: «Albert, c'est à tes devoirs qu'il faut que tu penses...».

«SE TROMPER N'EST PAS BIEN»

Et comme nous avons peur de nous tromper, nous ne faisons que les quatre choses dont nous sommes sûrs. Ainsi, avec un peu de chance, nous faisons bien *quatre* choses. En revanche, celui qui sait qu'il se trompera dans 40% des cas et, malgré cela, persévère et fait vingt choses, en fera *douze* correctement.

«NE SOYEZ PAS ENFANTIN. JOUER EST PUÉRIL»

Et pourtant, c'est en jouant, en cultivant la pensée ambiguë ou en faisant un peu le fou, que surgissent le plus souvent les idées géniales.

L'étude systématique de la créativité et de ses mécanismes est assez récente. Elle a débuté aux Etats-Unis dans les années cinquante. Rapidement, on a mis en évidence que beaucoup d'éléments de l'éducation traditionnelle inhibent et étouffent la créativité innée, présente chez les enfants... pendant les premières années de l'école. Vers dix ans, après quelques quatre ans d'efforts pour les introduire dans le système de pensée des adultes, pour beaucoup, la spontanéité d'action et de pensée, les idées brillantes, le goût de l'inconnu ont disparu... C'est triste, vous ne croyez pas? Si ça vous intéresse de voir ce que vous pouvez faire pour échapper à ce conditionnement et aider les autres à se sortir des blocages et de la non-créativité, vous pouvez chercher dans la littérature sur la psychologie et la pédagogie, des noms tels que Guilford, Torrance, Taylor...

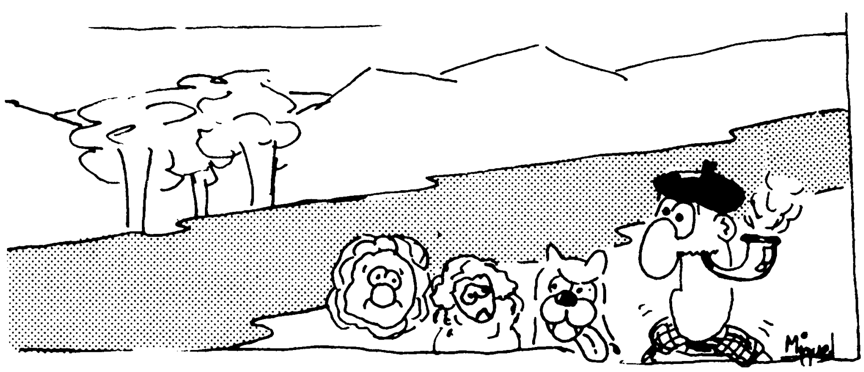
Chapitre 1

Quelques cas pour vous entraîner

Nous allons maintenant nous entraîner. Nous affronterons des cas intéressants, plus ou moins connus – certains sont classiques dans l'histoire du genre – et nous verrons comment, nous pouvons aiguiser notre flair pour d'autres cas plus difficiles. D'abord, je vous proposerai les cas. Essayez de les résoudre, en faisant attention aux démarches de votre pensée, comme je vous l'ai suggéré au chapitre 0, non seulement en essayant de trouver la solution, mais aussi en tâchant d'analyser les voies que vous empruntez, bonnes ou mauvaises, car par la suite, elles pourront vous être utiles. Plus tard, nous verrons ensemble comment les stratégies mentionnées précédemment, peuvent être une aide effective dans cette tâche.

a) *Berger, mouton, loup et chou.* Un berger, accompagné d'un mouton, d'un loup et d'un gros chou, s'approche de la berge d'une rivière qu'il doit traverser. Il y trouve une barque si petite, qu'elle ne peut transporter à la fois, que lui et l'un de ses accompagnateurs. Mais s'il laisse seuls sur la rive le mouton et le chou, celui-là avalera celui-ci. S'il laisse seuls le mouton et le loup, celui-ci dévorera celui-là. Comment organisez-vous les voyages, pour que le berger atteigne l'autre rive avec les trois possessions?

EN PASSANT LA BARQUE, LE BATELIER M'A DIT...



Berger, mouton loup et chou

Ce problème est facile et vous l'avez sûrement fait plus d'une fois. Il serait intéressant que vous vous organisiez un système de pensée, une tactique qui vous permette de devenir spécialiste dans ce genre de problèmes, pour le cas où les maris jaloux de la devinette suivante viennent vous consulter.

b) *Les deux maris jaloux.* Deux couples de jeunes mariés arrivent sur la rive d'un fleuve qu'ils veulent traverser. Là, se trouve une barque, qui ne peut transporter que deux personnes à la fois. (Pourquoi fait-on toujours des barques si exigües?) Or, les deux maris sont si jaloux qu'aucun d'eux ne tolère que sa femme reste seule avec un autre homme, sauf s'il est lui-même présent. Malgré tout, pouvez-vous aussi leur organiser les voyages?

HARICOTS ROUGES ET BLANCS

Dans un sac blanc, vous avez environ 2000 haricots blancs et dans un autre, rouge, environ 3000 haricots rouges. Vous faites passer 50 haricots du sac blanc au sac rouge. Vous mélangez bien les haricots du sac rouge, et sans regarder, vous en sortez 50 haricots que vous mettez dans le sac blanc. Vous recommencez l'opération: vous faites passer maintenant 100 haricots du sac blanc au sac rouge, vous mélangez et vous sortez aussi du sac rouge 100 haricots, que vous mettez dans le sac blanc. Vous recommencez une troisième fois avec 150 haricots. Voici la question: y a-t-il, à la fin, plus de haricots blancs dans le sac rouge que de haricots rouges dans le sac blanc, ou inversement?

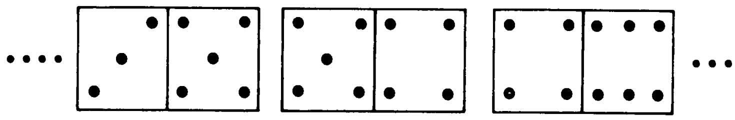
EN JOUANT AU BRIDGE

a) Vous êtes quatre amis, prêts à faire une partie de bridge (peu importe que vous ne sachiez pas jouer au bridge pour comprendre ce que je vais vous proposer). Vous êtes en train de distribuer les 52 cartes du jeu anglais, une par une, comme le font les Britanniques et en commençant, naturellement, par la gauche. Au milieu de la distribution, on vous téléphone, Vous vous interrompez, vous vous en allez, vous répondez au téléphone et quand vous revenez...vous avez oublié où vous en étiez de votre distribution. Compter les cartes donne beaucoup de travail. Avez-vous une idée de la manière de distribuer les cartes restantes, de façon à ce que chaque joueur, non seulement reçoive le nombre exact de cartes, 13, mais aussi que vous ne changiez pas le sort et lui donniez celles qui auraient dû lui revenir s'il n'y avait pas eu d'interruption?

b) A propos, qu'est-ce qui est le plus probable? que votre compagnon et vous ayez tous les trèfles, ou que vous et lui, vous n'en ayez aucun?

AVEC LES DOMINOS

a) Les 28 dominos peuvent tous être placés l'un à la suite de l'autre, selon la règle du jeu, c'est-à-dire de telle façon que les moitiés adjacentes de deux dominos aient le même nombre de points par exemple,



Otez du jeu les 7 dominos qui contiennent un six. Pouvez-vous placer sur la table les 21 dominos restants, en respectants les règles du jeu?

b) Voici un jeu pour deux joueurs, A et B. On joue avec 32 dominos (peu importe leur valeur) et un échiquier. Si vous n'avez ni l'un ni l'autre, vous pouvez vous faire un quadrillage en papier de 8×8 carreaux et 32 rectangles en papier, tels que chacun couvre deux carreaux de votre tableau.

A ouvre le jeu, en couvrant avec un domino, deux carreaux au choix. Ensuite, B place un domino sur les deux carreaux non couverts qu'il désire. Ensuite, A... Le premier qui ne peut pas placer de domino, perd.

Pouvez-vous trouver une stratégie pour les joueurs? Comment évolue le déroulement du jeu, si le tableau est de 8×9? Et s'il est de 9×9?

LES CAS RÉSOLUS

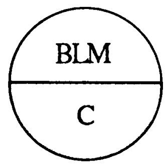
Une observation. Ne pensez pas que les solutions que je vous présente ont été trouvées facilement. Elles sont le fruit de longs moments, parfois d'heures entières, de réflexion. Si je vous racontais toutes les allées et venues de la pensée autour de chaque problème, les impasses dans lesquelles on peut raisonnablement tomber avant de trouver la solution adéquate, élégante, simple, nous n'en finirions jamais. C'est pourquoi, il ne faut absolument pas vous laisser impressionner ni vous décourager, si, après avoir longtemps travaillé, vous avez le sentiment d'être arrivé à peu de chose. On apprend à penser en pensant.. On apprend à bien penser, en pensant beaucoup, bien et mal. Courage!

En passant la barque...

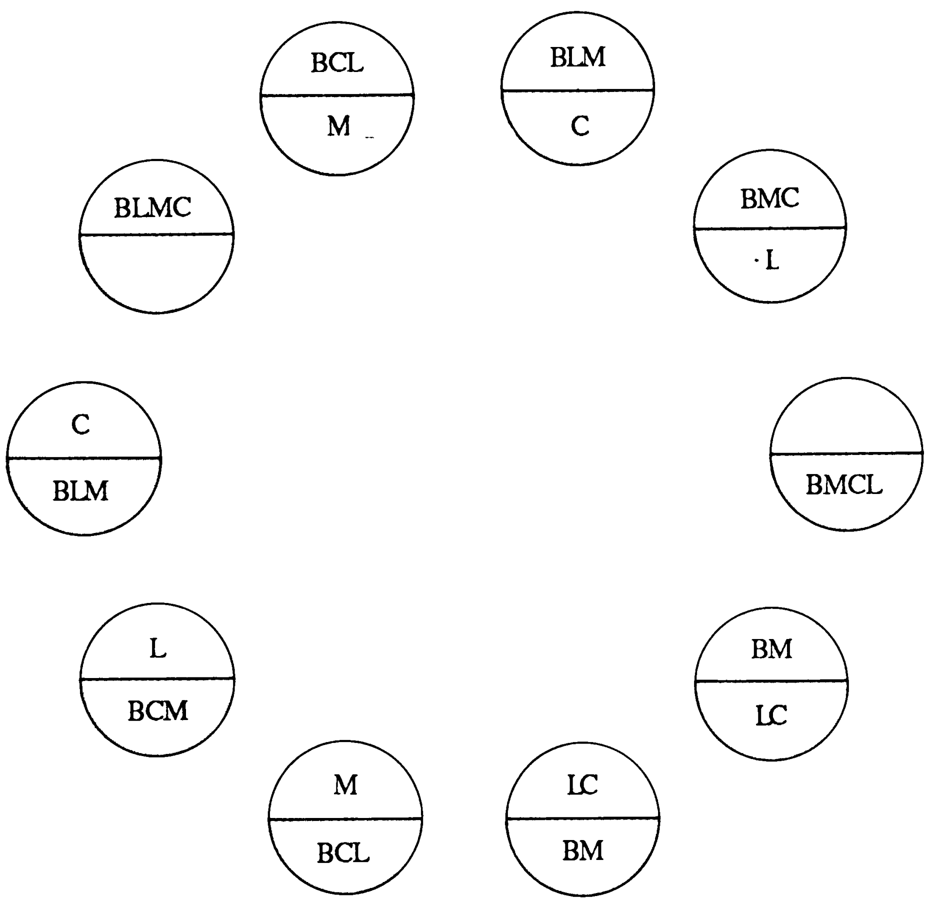
a) La seule chose à faire, c'est de ne pas s'arrêter. D'emprunter la seule voie possible. A un moment donné, il y a deux chemins. Nous prenons les deux et nous observons ce qui se passe. Le berger se rend compte que la seule chose sans danger, c'est de laisser seul à seul le loup et le chou. Voici donc ce qu'il fait: 1) Il passe avec le mouton; 2) il revient et il passe avec le chou (il a l'intention de laisser le chou et le loup sur l'autre rive); 3) il revient avec le mouton; 4) il fait passer le loup; 5) il laisse le chou et le loup et il va chercher le mouton. A partir de l'étape 2), il y a une autre possibilité: 3*) il revient avec le mouton; 4*) il fait passer le chou; 5) il laisse le chou et le loup et il va chercher le mouton. Et c'est tout.

En procédant ainsi, vous devez entrevoir que, si dans certains cas les choses se compliquent, vous aurez besoin d'un procédé plus schématique, moins verbal, qui vous aiderait à voir d'un coup d'œil les chemins possibles (souvenez-vous qu'il faut choisir une notation adéquate). Vous pouvez schématiser la situation de la façon suivante:

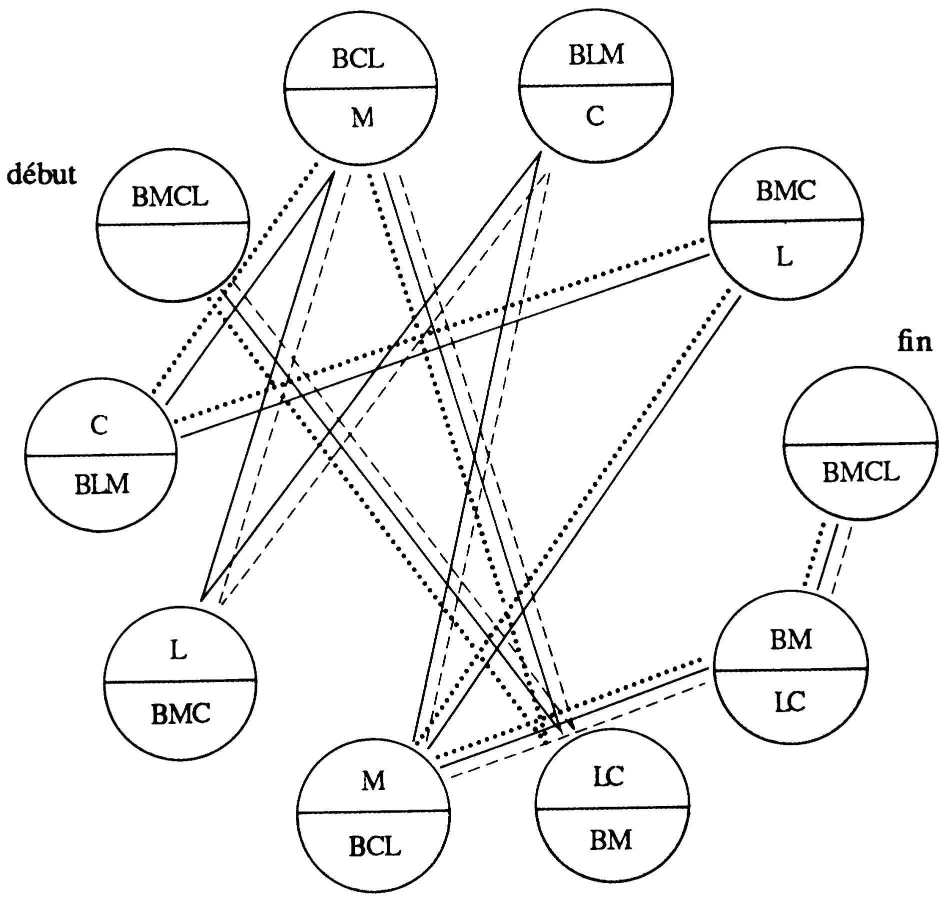
Vous appelez *B* le berger, *M* le mouton, *C* le chou, *L* le loup et vous représentez les différentes situations permises par les règles (que personne ne mange personne) de la façon suivante (souvenez-vous: faites un schéma et colorez-le).



veut dire que *B*, *M*, *L* sont sur la rive de départ et *C* sur l'autre. D'après cela, les situations, dans lesquelles personne ne mange personne, sont les suivantes:



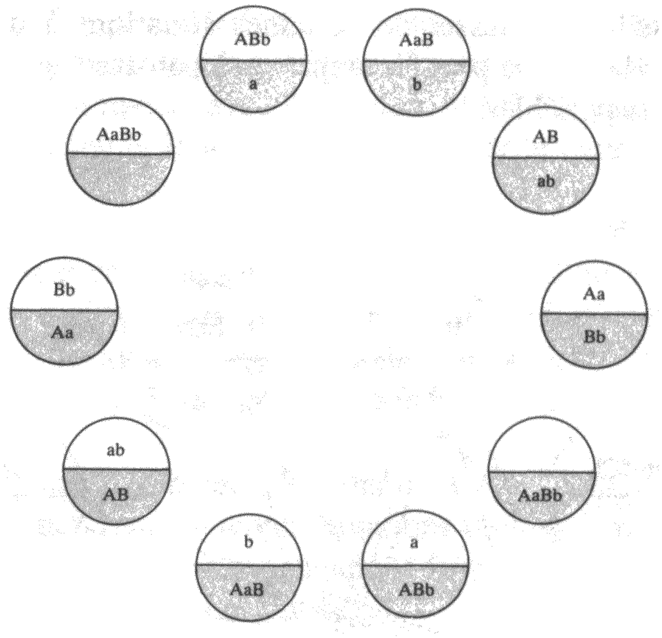
Il est possible de passer de certaines situations à d'autres. Le passage de la barque peut être représenté par une ligne. Voici tous les passages possibles:



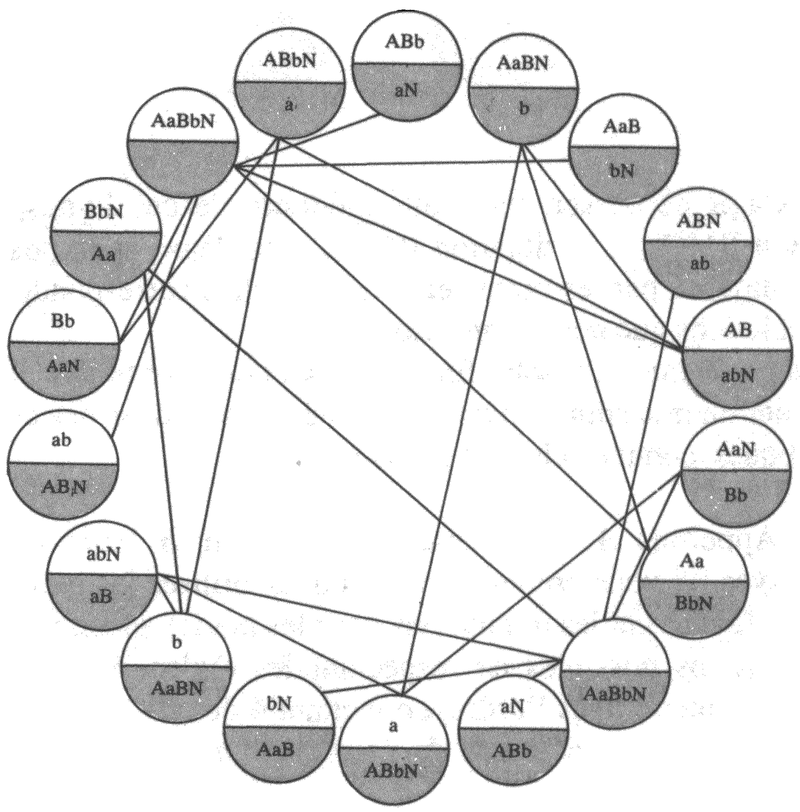
Il s'agit de passer, par l'intermédiaire de ces lignes, de la situation BMCL à la situation BMCL. Les deux voies possibles sont indiquées par les points et les tirets; elles correspondent aux deux solutions que nous connaissons déjà.

Le problème est résolu. En réalité, ici nous avons pris un fusil pour tuer un moustique, mais le procédé est utile dans des cas plus compliqués, comme celui des maris jaloux.

b) Appelons *A*, *B* les maris jaloux et *a*, *b* leurs épouses respectives (si vous préférez, vous pouvez utiliser les majuscules pour les femmes et les minuscules pour les maris). Occupons-nous des situations possibles en respectant les règles. Vous pouvez toutes les obtenir dans l'ordre, en mettant 4 des personnages d'un côté, ensuite 3 d'un côté et 1 de l'autre, enfin 2 d'un côté et 2 de l'autre:



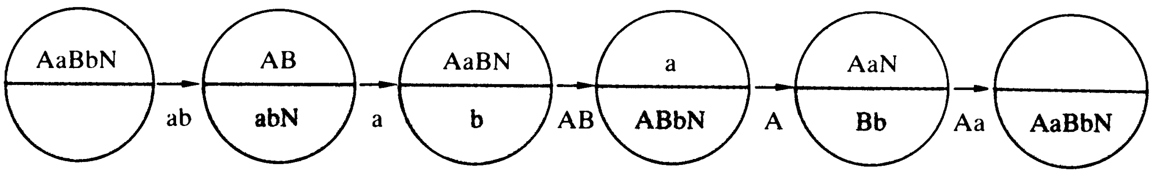
Et maintenant, il ne reste qu'à tracer les lignes qui indiquent les passages d'une situation à l'autre. Mais, ici une complication apparaît. Où se trouve la barque dans chaque situation? Dans le cas du berger, comme lui seul savait ramer, la barque se trouvait évidemment au même endroit que lui. Ici, on peut supposer que



tous les quatre savent ramer, et il semble en principe, que la barque peut être sur n'importe quelle rive, du moment qu'il y a quelqu'un. Notre tableau se complique donc un peu. Si nous appelons N la barque, nous pouvons composer un nouveau schéma qui apparaît ci-dessus et où sont indiquées les lignes de passage possible d'une situation à l'autre.

Maintenant, il ne nous reste plus qu'à chercher les différents chemins qui mènent de la position initiale à celle que l'on recherche.

Voici l'un d'entre eux:



Vous pouvez vous poser la question suivante – et je vous laisse le soin d'y répondre –: combien de possibilités y a-t-il? Quel est le nombre minimal de voyages? Si nous leur mettons des notes et nous supposons que, en aviron, A a 5, B a 8 a a 7 et b a 4 et que, lorsque deux d'entre eux rament, leurs notes s'additionnent, quelle est la meilleure façon de voyager, c'est-à-dire celle qui permettra d'obtenir la note totale maximale? Que se passe-t-il, si seulement les femmes savent ramer? Que se passent-il, si seulement B et a savent ramer?

Avez-vous le courage d'aborder le problème des trois maris jaloux ou bien en avez-vous assez? Si le sujet vous attire, vous pouvez en trouver une analyse très complète dans le livre de Schuh (la référence est dans la bibliographie).

Haricots rouges et blancs

Pour commencer, vous avez certainement eu l'idée de simplifier un peu le problème (souvenez-vous: commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile), en essayant de voir ce qui se passe après *une seule opération.* Vous pourriez même le simplifier encore plus, si au lieu de sortir autant de haricots – 50 est un très grand nombre–, vous en sortiez moins, par exemple, un seul. Vous sortez du sac blanc, un haricot, blanc bien entendu, et vous le mettez du sac blanc dans le sac rouge. Vous mélangez, et vous faites passer un haricot (qui peut être blanc ou rouge) du sac rouge au blanc. Si le haricot est rouge, il est évident que le blanc est resté dans le sac rouge et, de cette façon, il y a un haricot rouge dans le sac blanc et un haricot blanc dans le sac rouge. Si le haricot est blanc, il n'y a pas de haricot blanc dans le sac rouge, ni de haricot rouge dans le sac blanc. Dans les deux cas, *il y a le même nombre de haricots rouges dans le sac blanc que de haricots blancs dans le sac rouge.*

Le cas est simple, mais symptomatique. Vous pouvez voir qu'avec *deux* haricots, il se passe exactement la même chose. Et avec 50? Cherchez une bonne notation pour représenter le problème. On peut obtenir ceci:

PREMIÈRE OPÉRATION

SAC BLANC	SAC ROUGE
haricots blancs seulement	haricots rouges seulement

On fait passer 50 haricots blancs dans le sac rouge
On mélange
On fait passer 50 haricots du sac rouge au blanc:
b blancs et r rouges, $50 = b+r$

Il y a r haricots rouges dans le sac blanc	Il reste $50 - b$ haricots blancs dans le sac rouge

Or $r = 50-b$; ainsi, après la première opération, il y a autant de haricots rouges dans le sac blanc, que de haricots blancs dans le sac rouge.

DEUXIÈME OPÉRATION

SAC BLANC	SAC ROUGE
h haricots rouges	h haricots blancs
p haricots blancs	q haricots rouges

On fait passer du sac blanc au rouge, 100 haricots,
b_1 blancs et r_1 rouges, $100 = b_1 + r_1$

$h - r_1$ haricots rouges	$h + b_1$ haricots blancs

On mélange

On fait passer du sac rouge au sac blanc, 100 haricots,
b_2 blancs et r_2 rouges, $100 = b_2 + r_2$

$h - r_1 + r_2$ haricots rouges	$h + b_1 - b_2$ haricots blancs

Mais comme $b_1 + r_1 = 100 = b_2 + r_2$, on obtient $h - r_1 + r_2 = h + b_1 - b_2$; ainsi, il y a autant de haricots rouges dans le sac blanc que de haricots blancs dans le sac rouge.

Il est maintenant évident que, si on recommence l'opération autant de fois que l'on veut et avec des quantités différentes, le résultat sera toujours le même.

Voici un magnifique tour de magie, basé sur cette astuce. Prenez un jeu de cartes bleu et donnez à un spectateur un autre jeu rouge. Vous demandez au spectateur d'enlever du jeu bleu, un nombre de cartes compris entre 1 et 15 – sans qu'ils vous précise combien –, de les mélanger à ses cartes rouges et de vous donner de son jeu le même nombre de cartes qu'il vous avait enlevées. Puis, vous lui dites de donner son jeu à un autre spectateur. Vous demander à ce dernier de faire la même opération, d'enlever de votre jeu de 1 à 15 cartes, de les mélanger aux siennes et de vous rendre autant de cartes qu'il vous avait prises. C'est alors que vous leur annoncez que, grâce à vos dons télépathiques, vous avez pu mener les opérations de telle façon qu'il y ait autant de cartes bleues dans le jeu rouge que de cartes rouges dans le jeu bleu. Vous les comptez et, ô merveille, c'est exact !

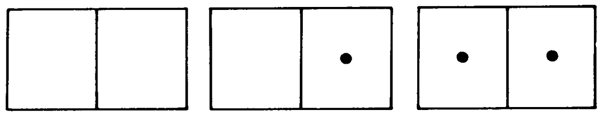
En jouant au bridge

a) Commençons par la fin. si vous aviez fini de distribuer, il est évident que vous auriez eu la dernière carte. L'avant-dernière aurait été pour le premier joueur à votre droite, l'avant-avant-dernière pour le deuxième joueur à votre droite, etc... Ainsi, vous n'avez qu'à distribuer le tas, en prenant les cartes du dessous, et à commencer par vous-même, en distribuant de droite à gauche, à l'inverse des Britanniques.

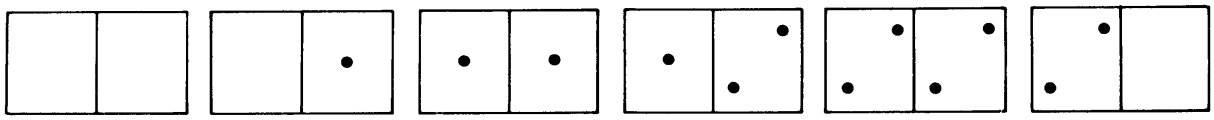
b) Comme avant, il convient de penser à la situation opposée. Le fait que vous et votre compagnon n'ayez aucun trèfle, signifie que vos deux adversaires les ont tous eus. Ainsi, par symétrie, la probabilité que votre compagnon et vous n'ayez aucun trèfle est exactement le même que celle que vous les ayez tous.

Avec les dominos

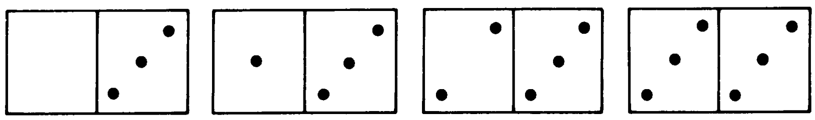
a) Commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile. Supposez que vous enleviez presque tous les dominos et que vous ne gardiez que



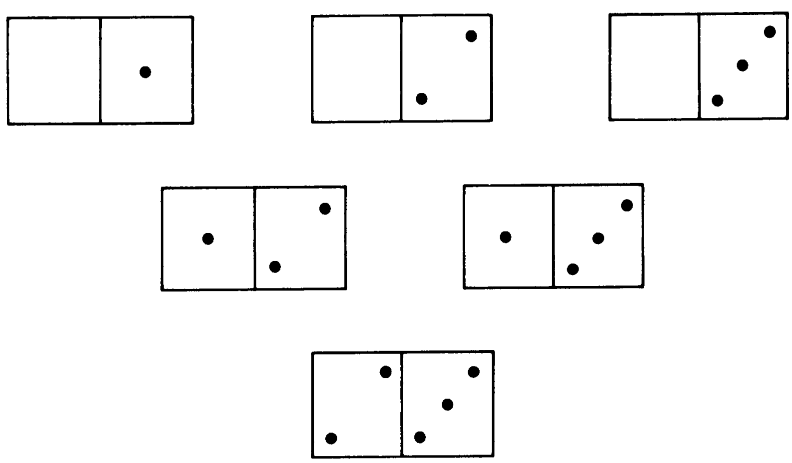
On voit immédiatement comment les disposer sur la table en respectant les règles du jeu. De même si vous gardez



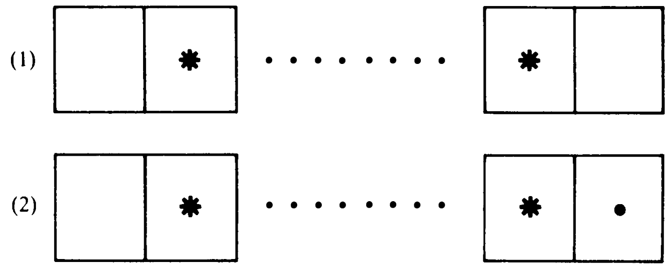
Si vous ajoutez les trois aux dominos ci-dessus



les choses se compliquent. Essayez-donc. Est-ce possible? Pour simplifier, vous avez dû observer que les doubles ne jouent aucun rôle dans ce problème. Si c'est possible avec les doubles, ce l'est aussi sans eux, et si ce n'est pas possible sans les doubles, ce ne l'est pas non plus avec eux. Ainsi, on peut limiter le problème aux dominos suivants:

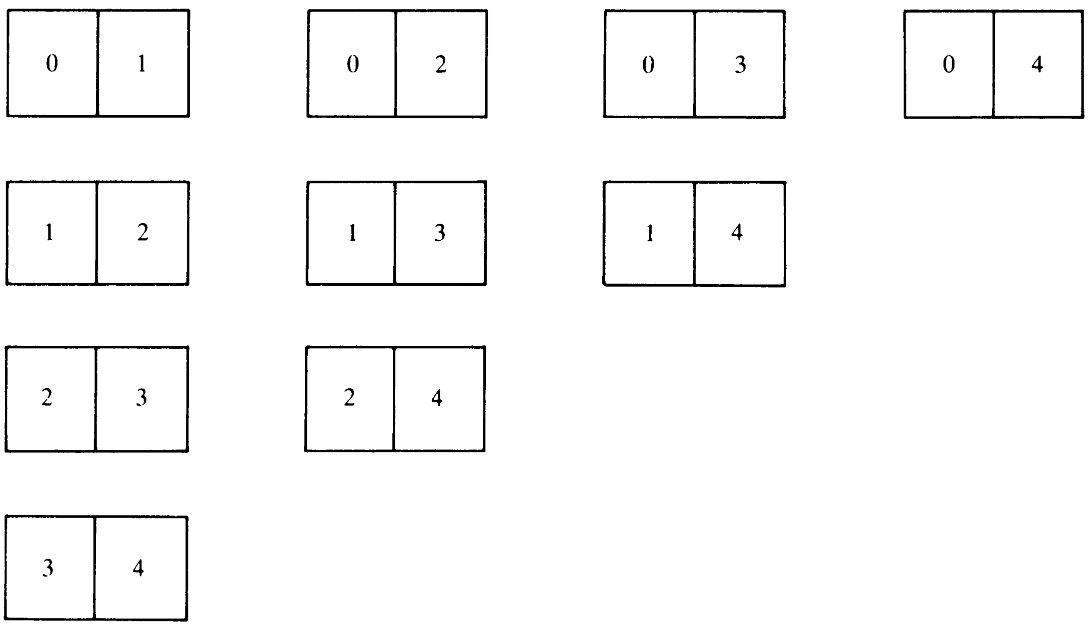


La règle du jeu est très souple en ce qui concerne la disposition des dominos et permet de très nombreuses combinaisons. Afin de les limiter un peu, vous pouvez penser que, si votre objectif est réalisable, il devra y avoir aux extrémités deux demi-dominos égaux ou différents, par exemple

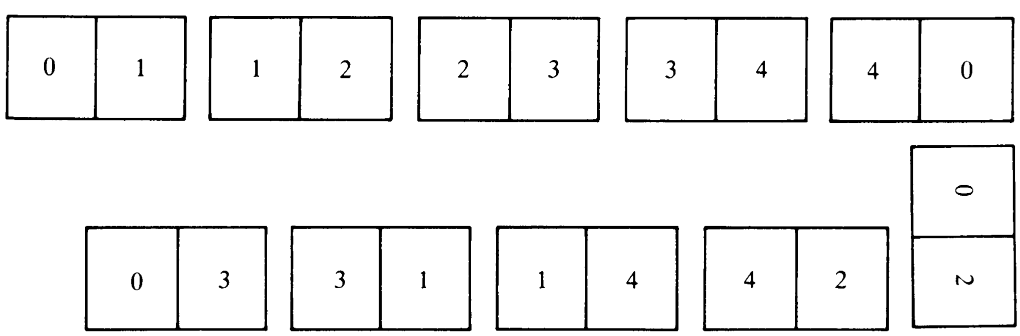


ici une étoile représente n'importe quelle autre moitié de domino

Est-ce que (1) est possible? Remarquez qu'il ne reste qu'une moitié blanche à placer et comme les dominos du milieu vont par paires (blanc avec blanc, etc), l'option (1) est évidemment impossible. Est-ce que (2) est possible? Ici, il restera au milieu trois dominos avec un deux. Là aussi, c'est impossible. Les cas (1) et (2) nous éclairent: il est impossible de placer tous les dominos antérieurs selon les règles du jeu. Et pourtant, c'est possible avec les 28 dominos du jeu! Quel est ce mystère? Que va-t-il se passer si vous avez des dominos avec 0, 1, 2, 3, 4 points? Nous allons affronter cette dernière question et, pour simplifier, nous changerons les points par leurs chiffres équivalents.



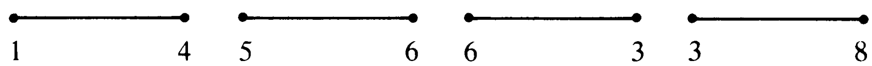
Essayez et vous verrez qu'on peut les placer. Par exemple, de cette façon:



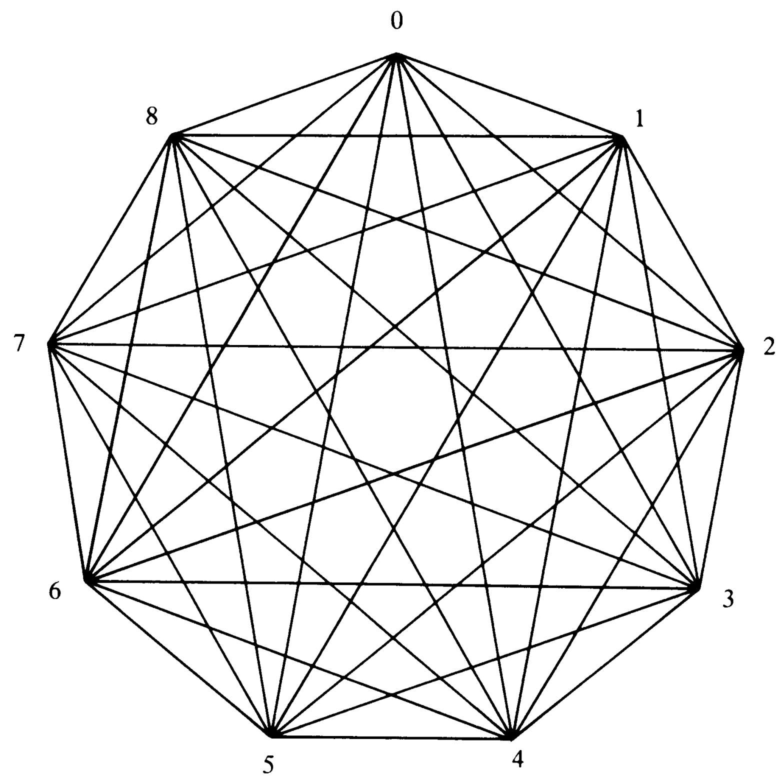
Et si l'on ajoute les cinq? Est-ce possible ou pas? Le cas de 0, 1, 2, 3 points nous donne une piste. Comme dans ce cas-là, si c'était réalisable, quelles que soient les extrémités de la chaîne, par exemple un 2 et un 3, ou bien un 2 et un 2, il nous resterait toujours à placer au milieu 5 dominos avec un quatre, 4-0, 4-1, 4-2, 4-3, 4-5, et comme ils vont par paires au milieu, c'est donc impossible. En suivant ce même raisonnement, *le problème n'aura pas de solution si les dominos ont* 0, 1, 2, 3, ... *p points, du moment que p est un nombre impair supérieur à 1.*

Dans le cas où p est pair, par exemple 6, tout ce que nous avons pour prouver que nous pouvons placer les dominos, relève de cas particuliers. Pouvons-nous toujours faire ce qu'on nous demande si *p* est pair? Peut-être arriverons-nous à éclaircir la situation, *en faisant un schéma plus approprié, plus transparent...*

Observez-bien. Nous pouvons représenter les dominos par segments:



Ou alors, de façon plus compacte, par cette figure

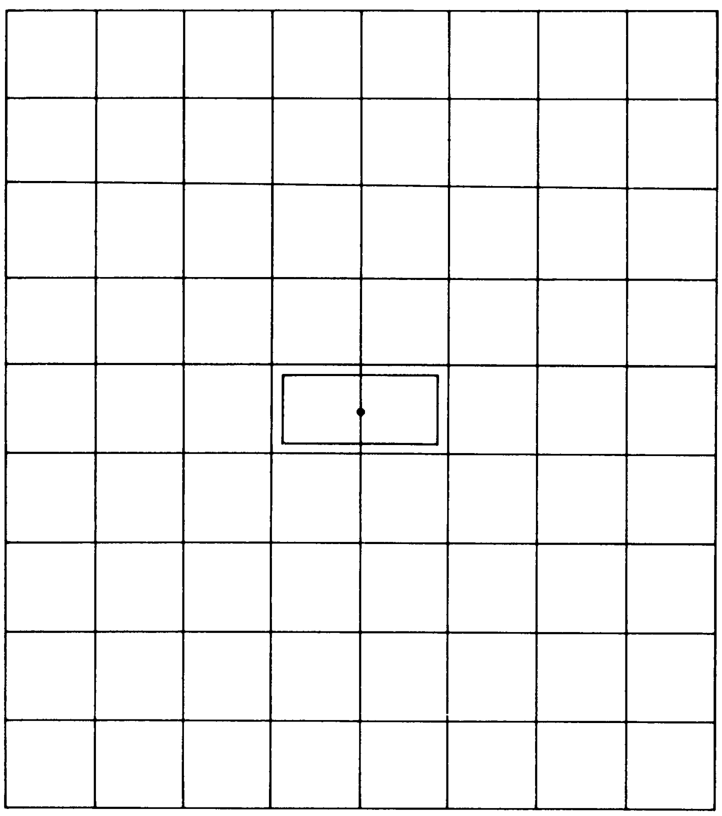


Placer deux dominos à la suite, revient à tracer deux de ces segments sans lever le crayon du papier. Placer tous les dominos équivaut donc, à dessiner toute la figure dans lever le crayon du papier et sans repasser sur une même ligne. On considère que les lignes ne s'unissent qu'aux points marqués 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Nous tombons ici dans le domaine du connu, du moins si auparavant, vous avez vu le problème des ponts de Königsberg (par exemple dans mon livre: *Cuentos con cuentas). Le problème a une solution, si et seulement si, il n'y a que deux, ou moins de deux sommets de degré impair.* Souvenez-vous que le degré d'un sommet est le nombre de lignes qui en partent.

Cette interprétation du problème éclaircit tous les mystères. Quand p est pair, tous les sommets sont de degré pair et nous pouvons alors faire ce que nous cherchions. Quand p est un nombre impair supérieur à 1, tous les sommets sont de degré impair et c'est donc impossible. Vous trouverez en outre, dans Cuentos con cuentas, une recette qui vous permettra de faire le parcours lorsque c'est possible; dans notre cas, cependant, ce n'est pas nécessaire; le problème est en effet plus facile, étant donné que le graphe correspondant est très régulier. Avez-vous le courage de chercher une solution pour le cas $p = 8$?

b) La symétrie de l'échiquier par rapport au centre procure une stratégie à B, le second joueur. Celui-ci n'a qu'à regarder où A met son domino et à placer le sien à l'endroit symétrique par rapport au centre. De cette façon, si A peut placer son domino, l'endroit symétrique est libre lui aussi et B peut alors mettre le sien. Par conséquent, si cette stratégie est respectée, A perdra sûrement.



La stratégie change complètement si le tableau est de 9×8, par exemple. C'est alors A qui pourra profiter de la symétrie. Le centre du tableau se trouve maintenant au point marqué sur la figure. A commence et place son domino de façon à couvrir le centre, comme l'indique la figure. Maintenant, comme vous le voyez, chaque fois que B placera un domino, le point symétrique restera libre pour A. Si cette stratégie est respectée, c'est maintenant A qui gagne.

Que se passe-t-il si le tableau est de 9×9? Cela semble plus difficile à analyser. Avec un tableau de 3×3, on voit facilement que B doit toujours gagner. Osez-vous faire l'étude du cas 5×5? Je n'ai rien lu sur ce dernier cas, ni sur celui du tableau 9×9.

MATHÉMATIQUE ET JEU

Où finit le *jeu* et où commence la *mathématique* sérieuse? Voici une question insidieuse qui admet de multiples réponses. Pour beaucoup de ceux qui l'observent de l'extérieur, la Mathématique, mortellement ennuyeuse, n'a rien à voir avec le jeu. En revanche, aux yeux de la plupart des mathématiciens, la Mathématique ne cesse jamais complètement d'être un jeu, tout en étant, en outre, beaucoup d'autres choses.

Le jeu, dont les règles sont bien définies et qui possède une certaine richesse de mouvements, se prête très fréquemment à un genre d'analyse intellectuelle, dont les caractéristiques sont très semblables à celles que présente le développement mathématique. Les pièces, les objets dont s'occupent les différentes parties de la Mathématique, sont en ce qui concerne leur comportement mutuel, bien déterminés par les définitions de la théorie. Les règles valides d'utilisation de ces pièces sont données par leurs définitions et par tous les procédés de raisonnement admis comme étant valables dans le domaine mathématique. Lorsque la théorie est élémentaire, ces raisonnements ne sont ni très nombreux, ni très compliqués et s'acquièrent rapidement, ce qui ne veut pas dire que le jeu soit trivial. Elémentaire signifie proche des éléments initiaux et pas forcément simple. Il existe des problèmes élémentaires qui sont beaucoup plus compliqués que ne le laisse supposer leur énoncé. En voici un exemple: déterminer le minimum des aires des figures planes, dans lesquelles une aiguille de longueur unité, peut être retournée par des mouvements continus. Lorsque la théorie n'est pas élémentaire, c'est en général parce que les règles de ce jeu se sont extrêmement développées en nombre et en complexité; un effort intense est alors nécessaire pour les contrôler et les employer correctement. Ce sont des instruments très puissants qui ont été élaborés, de façon de plus en plus sophistiquée, tout au long des siècles. Telle est, par exemple, la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue dans l'analyse supérieure.

La mathématique ainsi conçue est un véritable jeu, qui présente le même genre de stimulation et d'activité que les autres jeux intellectuels. On apprend les règles; on étudie les coups les plus importants en s'entraînant dans des parties simples, on examine les parties des grands joueurs, leurs meilleurs théorèmes, en tâchant de les utiliser dans des conditions semblables, on essaie finalement de participer plus activement en affrontant, soit les nouveaux problèmes qui surgissent de la richesse même du jeu, soit les anciens problèmes encore ouverts en espérant qu'une heureuse idée nous permettra d'assembler, de façon originale et utile, des instruments déjà existants, ou bien de créer un nouvel outil qui conduira à la solution du problème.

Pour toutes ces raisons, il ne faut absolument pas s'étonner que beaucoup de grands mathématiciens de tous les temps, Leibniz, Gauss, Einstein..., aient été de grands amateurs et observateurs de jeux, et y aient participé activement, et que beaucoup de leurs élucubrations – précisément à cause de ce recoupement particulier du jeu et de la mathématique qui les rend parfois indiscernables – aient donné lieu à de nouveaux domaines et façons de penser dans ce qu'aujourd'hui nous considérons des mathématiques réellement sérieuses.

Chapitre 2

En descendant les escaliers avec ... la descente de l'infini de Fermat

Il y a des principes si simples et si évidents qu'il semble difficile qu'ils puissent conduire à quelque chose d'intéressant. voici l'un d'eux, que nous allons utiliser ici: ***dans tout ensemble de nombres naturels*** (c'est-à-dire une partie des nombres 1, 2, 3, 4, 5...), il y en a un, qui est le plus petit de tous. Nous supposons naturellement que notre ensemble contient des nombres, qu'il n'est pas vide. C'est facile, n'est-ce pas? Vous diriez presque... stupide. Or, un des mathématiciens les plus importants du XVII[e] siècle, Fermat, a utilisé, pour établir un grand nombre de résultats curieux, ce principe que l'on appelle généralement la méthode de descente de l'infini de Fermat. Il l'a utilisé tout spécialement pour démontrer qu'il n'existe pas de nombre naturels qui satisfont telle ou telle condition. Voyons comment.

Nous voulons démontrer qu'*il n'existe pas trois nombres naturels x, y, z qui vérifient*

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il y en ait, qu'il existe au moins un triplet (x,y,z) ayant cette propriété. Parmi tous les triplets possédant cette propriété, nous en choisissons un, que nous continuerons à appeler (x,y,z), *x étant le plus petit possible*: en ce moment, nous sommes en train d'appliquer le stupide principe antérieur. C'est-à-dire que, x,y,z sont des nombres naturels, que la relation $x^2+y^2 = 3z^2$ se vérifie, et qu'en plus, pour aucun autre triplet de nombres (x^*, y^*, z^*) vérifiant ces deux propriétés, on peut avoir x^* inférieur à x.

Maintenant, étant donné l'égalité $x^2+y^2 = 3z^2$, nous nous posons la question suivante. Puisque le second membre $3z^2$ est un multiple de 3, comment sont *x et y*? L'un d'eux peut-il être multiple de 3? Les deux peuvent-ils l'être? Ou aucun des deux?

Il est évident que si l'un d'eux, par exemple x, est un multiple de 3, c'est-à-dire $x=\dot{3}$, alors:

$$y^2 = 3z^2 - x^2 = \dot{3}$$

et donc, y est aussi multiple de 3. Il en résulte que, si l'un est multiple de 3, tous les deux le sont. Peut-il arriver que ni l'un ni l'autre, ne soit multiple de 3? Voyons. Si un nombre n'est pas multiple de 3, alors il doit être $\dot{3}+1$ ou $\dot{3}-1$, et son carré sera:

$$\left(\dot{3}+1\right)^2=\dot{3}+1$$

ou bien

$$\left(\dot{3}-1\right)^2=\dot{3}+1$$

D'où, si ni x ni y ne sont des multiples de 3, alors

$$x^2+y^2=\left(\dot{3}+1\right)+\left(\dot{3}+1\right)^2=\dot{3}+2$$

qui n'est clairement pas un multiple de 3. Mais comme ceci est égal à $3z^2$, cette situation est impossible. Ainsi, l'un des deux, x ou y, est un multiple de 3, et par conséquent, comme nous l'avons vu avant, tous les deux le sont. Maintenant, nous allons supposer que $x=3x^*$, $y=3y^*$ et ainsi nous pourrons écrire

$$3z^2=x^2+y^2=3^2x^{*2}+3^2y^{*2}=3^2\,(x^{*2}+y^{*2})$$

Donc, $z^2=3(x^{*2}+y^{*2})$, ce qui démontre que 3 est un des facteurs premiers de z, c'est-à-dire que z est un multiple de 3. Nous pouvons écrire $z=3z^*$ et par conséquent, en le substituant dans la dernière égalité, on obtient

$$3^2z^{*2}=3(x^{*2}+y^{*2})$$

c'est-à-dire

$$3z^{*2}=x^{*2}+y^{*2}$$

Qu'avons-nous obtenu? Trois nombres naturels x^*, y^*, z^*, clairement plus petits que x, y, z, respectivement, tels que $x^{*2}+y^{*2}=3z^{*2}$. Or, ceci n'a aucun sens avec notre choix de x, car x était le nombre le plus petit possible. Ainsi, en raisonnant bien, nous sommes arrivés à une contradiction. Notre point de départ est faux, c'est-à-dire que: *il ne peut exister trois nombres naturels x, y, z tels que* $x^{*2}+y^{*2}=3z^{*2}$.

LA CONJECTURE DE FERMAT

Fermat a utilisé cette méthode dans de nombreuses démonstrations importantes en théories des nombres. Elles ont toutes une certaine ressemblance avec le problème traité et portent le nom de problèmes *diophantiens*. Fermat notait ses résultats dans la marge d'un livre du mathématicien grec Diophante du deuxième siècle, qui venait d'être traduit en latin par Bachet de Meiziriac. Dans une de ces marges, il écrivit un jour, quelques chose comme ceci:

Si n est un nombre naturel supérieur à 2, il n'existe aucun triplet de nombres naturels x,y,z tels que $x^n+y^n=z^n$. *J'ai découvert une merveilleuse démonstration de ce théorème, mais cette marge est trop petite pour la contenir.*

On n'a trouvé nulle part la démonstration de Fermat et plus de trois siècles de travail intense de nombreux mathématiciens se sont écoulés sans que l'on ait pu trouver la moindre démonstration. On suppose, grâce aux nombreux résultats que l'on connaît et qui confirment partiellement ce qu'il a dit, que l'affirmation de Fermat est vraie. Spécialement, à la suite des résultats et des méthodes originales qu'a obtenus en 1984 le mathématicien allemand Faltings. Celui-ci a démontré que, pour tout n fixe supérieur à 2, il peut exister, tout au plus, un nombre fini de triplets (x,y,z) tels que $x^n+y^n=z^n$. Son travail laisse présager que l'on va bientôt obtenir une démonstration de ce qui n'est encore que *la conjecture de Fermat.* Mais le chemin suivi par Faltings est très compliqué et il est difficile d'imaginer que Fermat ait pu ne serait-ce que l'entrevoir, bien qu'avec les génies, on ne puisse jamais savoir... Avez-vous le courage de réfléchir à la merveilleuse démonstration de Fermat?

L'ALGORITHME D'EUCLIDE

La méthode de descente de l'infini semble si simple qu'on se demande si, en réalité, elle n'a pas déjà été utilisée, avant même que Fermat ne le fasse explicitement et systématiquement. C'est mon avis, et je pense que Fermat s'est inspiré de la façon de procéder des Grecs, pour obtenir quelques-uns de ses résultats les plus frappants, comme nous allons le voir maintenant.

Le dénommé *Algorithme d'Euclide*, pour obtenir le plus grand commun diviseur de deux nombres naturels a et b est, en réalité, un processus de descente de l'infini. Supposez que a est supérieur à b. Il s'agit de trouver le plus grand commun diviseur des deux. Divisez a par b et vous obtenez un reste r_1, qui est évidemment, plus petit que b. Bien entendu, si r_1 est égal à zéro, il est évident que b divise a et le plus grand commun diviseur que nous cherchons est b. Supposons que r_1 est différent de zéro. Appelons q_1 le quotient. Nous avons

$$a = bq_1 + r_1 \qquad r_1 = a - bq_1$$

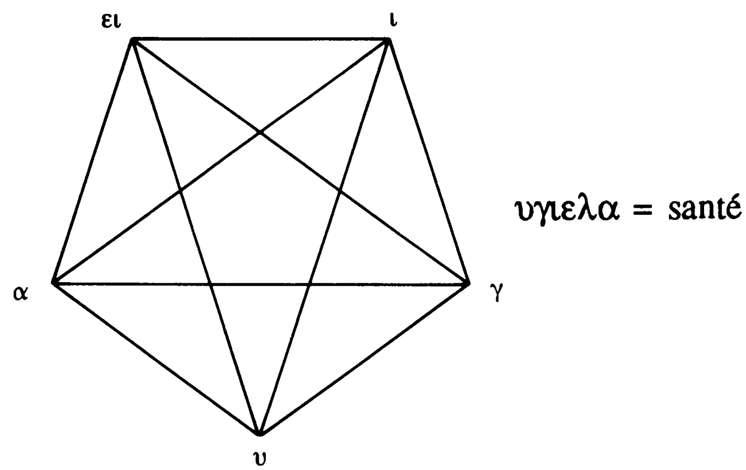
de telle façon qu'un nombre quelconque qui divise a et b, divise aussi r_1. Souvenez-vous que r_{V} est plus petit que b: notre problème s'en trouve simplifié. Il s'agit maintenant de trouver le plus grand commun diviseur de b et r_1. Divisons b par r_1. Soit q_2 le quotient et

r_2 le nouveau reste. Comme avant, si r_2 est égal à zéro, il est le plus grand commun diviseur de b et r_1, c'est-à-dire de a et de b. Si r_2 est différent de zéro, alors $b = q_2r_1+r_2$ et $r_2 = b-q_2r_1$ le plus grand commun diviseur que nous cherchons est le même que celui de r_1 et r_2, si r_2 *est* plus petit que r_1. Comme nous sommes partis de a et b et que nous descendons, ce processus se termine par une division de r_{n-1} par r_n qui donne un reste de zéro.

Ainsi, r_n est le plus grand commun diviseur de a et b.

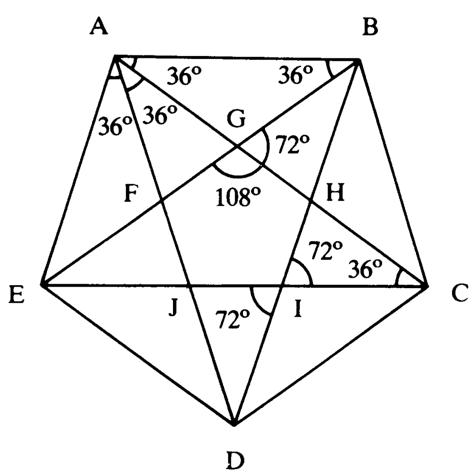
LE PENTAGRAMME

Les Pythagoriciens, qui ont développé l'étude des relations harmonieuses exprimées dans des proportions numériques et géométriques, avaient un profond respect pour une figure géométrique de grande valeur esthétique, et encore plus frappante du point de vue intellectuel. C'était ce qu'ils ont appelé le *pentagramme*, construit sur un pentagone régulier comme celui-ci:



LE NOMBRE D'OR

Quels mystères enferme-t-il? Un grand nombre; entre autres ceux-ci: tout segment déterminé sur la figure est en proportion du nombre d'or avec tout autre qui le suit en longueur. Regardez, par exemple, la figure suivante où j'ai refait le pentagramme en le complétant avec des lettres de notre alphabet.



FG est en proportion du nombre d'or avec *AF*, *AF* l'est avec *AE*, *AJ* l'est avec *AD*. Souvenez-vous: un segment *b* est en proportion du nombre d'or avec un autre *a*, lorsque *b* a la même proportion avec *a* que *a–b* avec *b*. Ainsi, si *a* est égal à 1 et *b* à *x*, alors *x* est à 1 ce que $1-x$ est à *x*, c'est-à-dire $x/1 = (1-x)/x$. Il en résulte le nombre d'or $x = \sqrt{(5} - 1)/2$.

D'autre part, l'amplitude de tout angle de la figure est en relation avec celle de tout autre, moyennant des nombres entiers. Ainsi

$$2 \times 108° = 2\widehat{FGH} = 3\,\widehat{BGH} = 3 \times 72°$$

$$72° = \widehat{BGH} = 2\,\widehat{GBH} = 2 \times 36°$$

Pour les Pythagoriciens, le Pentagramme était le symbole sacré grâce auquel ils se reconnaissaient comme membre de la communauté scientifico-religieuse. Probablement, comme le pensent certains historiens, ce fut précisément dans le Pentagramme que les Pythagoriciens trouvèrent le nombre irrationnel sous forme de grandeur incommensurable, en utilisant le procédé de la descente de l'infini, comme nous allons le faire ensuite.

Les Pythagoriciens croyaient que c'était les nombres naturels qui régissaient tous les rapports entre les choses et ils se demandaient ainsi quels seraient les nombres naturels qui mettraient en rapport les longueurs des segments qui apparaissent dans le Pentagramme. Selon le sens de l'esthétique des Pythagoriciens, il devait exister deux nombres *m* et *n* correspondants, par exemple, à *EB* et *EG* tels que, si nous divisions *EB* en *m* parties égales de longueur *u* et si nous prenons *n* de ces parties égales, nous obtenons la longueur de *EG*; mathématiquement, $EG = (n/m)\,EB$ ce qui signifie que *EB* et *EG* sont commensurables, sont mesurables dans une même unité. La *m*-ième partie de *EB* (l'unité de *u*) reproduite *m* fois donne *EB*, de même qu'elle donne *EG* si elle est reproduite *n* fois.

Ils durent avoir une belle surprise en constatant qu'il ne peut en être ainsi, et leurs croyances scientifiques et religieuses durent être profondément ébranlées. Comment arrivèrent-ils à le démontrer? En réalité, par la méthode de descente de l'infini. Supposons, comme le croyaient fermement les Pythagoriciens, qu'il existe des couples de nombres *m* et *n* tels que $EB/m = EG/n$. En observant la figure, on voit clairement que $n<m<2n$, puisque, effectivement

$$EG < EB < 2EG$$

Parmi tous les couples de nombres naturels (n, m) tels que $EG/n = EB/m$, choisissons-en un (n^*, m^*), tel que n^* soit le plus petit possible. De la figure, nous pouvons facilement déduire que

$$EG/EB = EA/EB = EF/EA = EF/EG$$

où

$$EB = m^*u,\ EG = n^*u,\ EF = n^*u - n^*u = (m^* - n^*)u.$$

Donc

$$EG/EB = n^*/m^* = (m^* - n^*)/n^* = EF/EG$$

Si $m^* - n^*$ -est appelé n^{**} et n^*, m^{**}, alors

$$EG/EB = n^{**}/m^{**} \text{ où } n^{**} = m^* - n^* < n^*$$

étant donné que $m^* < 2n^*$ comme nous l'avons vu plus haut.

Nous avons trouvé ainsi un autre couple de nombre (n^{**}, m^{**}) avec n^{**}, plus petit que n^*, tels que $EG/EB = n^{**}/m^{**}$, ce qui est en contradiction avec le choix de n^*, le plus petit possible. Il en résulte donc qu'*il ne peut exister deux nombre naturels tels que*

$$EG/EB = n/m$$

Le côté et la diagonale du pentagone sont donc incommensurables, ce qui implique à son tour que le nombre d'or n'est pas un nombre rationnel, et que le Pentagramme n'est pas régi par les nombres naturels.

FERMAT

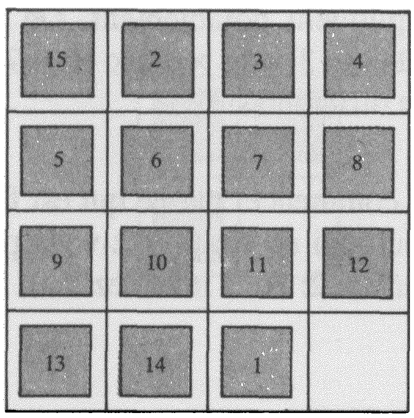
On pense généralement que s'adonner à l'étude et à l'exercice du droit et faire des mathématiques sont des activités, peut-être pas incompatibles, mais, du moins, situées dans deux mondes différents. L'exemple contraire le plus remarquable est celui de Pierre de Fermat (1601-1665), bien qu'il ne soit pas unique, loin de là. Arthur Cayley (1821-1895), grand algébriste, et Arthur Kempe, qui en 1879 a trouvé la première démonstration (fausse, mais dont les idées très importantes ont permis d'obtenir celle de 1976) du théorème des quatre couleurs, en sont d'autres exemples importants. Pour ma part, parmi les nombreux et brillants élèves que j'ai eu la chance d'avoir à l'Université *Complutense* de Madrid, je distinguerai l'un d'eux, mon ami Julio Gutierrez Oliva, qui fut durant des années magistrat à la cour des comptes et qui serait allé très loin en mathématiques, s'il n'était mort prématurément.

Pierre de Fermat naquit dans une famille de commerçants et étudia le droit à Toulouse: il fut même, un temps, membre du Parlement de la ville. L'exercice du droit ne lui laissait probablement que peu de temps libre pour les mathématiques, mais il le mit certainement bien à profit. On peut dire qu'il développa, en même temps que Descartes, une géométrie analytique plus précise et mieux organisée que celle de ce dernier; ses idées embryonnaires sur le calcul infinitésimal anticipèrent celles de Newton et de Leibniz; il créa la théorie de la probabilité dans sa correspondance avec Pascal, et surtout, dans la marge du livre de Diophante qui venait d'être traduit du grec au latin, il obtint une telle quantité de résultats importants en théorie des nombres, que l'on peut aisément affirmer que, jusqu'à l'époque de Gauss (1777-155) avec ses *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), la théorie des nombres ne vécut que la forte impulsion que lui donna Fermat. Il est curieux de voir que Fermat s'est contenté d'énoncer, dans sa correspondance ou dans des lettres personnelles, les résultats qu'il obtenait, généralement sans démonstration ou bien, tout au plus, avec une brève indication de la méthode suivie (très souvent, la méthode de descente de l'infini). Ce fut une tâche ardue, même pour des génies comme Euler, de démontrer les théorèmes de Fermat. Peu d'articles furent publiés de son vivant. Les autres, ainsi que quelques livres, le furent après sa mort. En toute justice, Fermat peut être considéré comme le prince et le patron des amateurs de mathématiques.

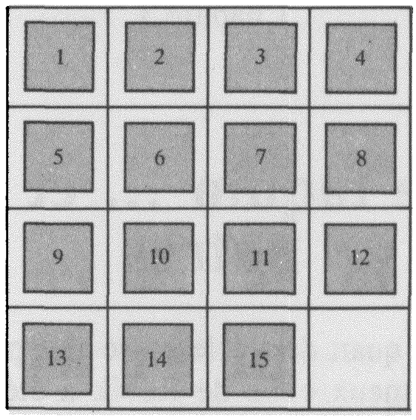
Le jeu de taquin ... et quelques autres

Dans le dernier quart de siècle passé est apparu un jeu qui fut alors ce que le fameux cube de Rubik a été chez nous il y a quelques années. Les enfants des écoles en cachette, les secrétaires devant leurs machines arrêtées, les cadres à huis-clos, tous y jouaient avec délectation. Sam Loyd père en fut le créateur en 1878. On l'appela *le jeu de taquin.* Aujourd'hui, on le trouve encore parmi nous sous diverses formes. L'engouement tomba, mais de toute façon il reste un de ces grands jeux mathématiques forts intéressants qui se prêtent à de nombreuses variations toutes aussi curieuses.

Vous pouvez vous fabriquer rapidement ce jeu de façon rudimentaire. Faites-le le plus vite possible, pour pouvoir y travailler tout de suite. Sur un papier, faites un quadrillage de 4 × 4, divisé en carrés de un et demi à deux centimètres de côté. Puis découpez, dans un papier de couleur ou encore mieux dans un carton, 15 petits carrés légèrement plus petits que ceux du quadrillage. Sur ces petits cartons, écrivez les nombres 1, 2, 3, 4, ..., 15. Ensuite, placez-les sur le quadrillage de cette façon:



Ils sont tous dans l'ordre, sauf le 15 qui occupe la place du 1 et le 1 la place du 15. Le jeu consiste à faire glisser les petits cartons, sans les soulever, en profitant de la case vide (par exemple, le 12 peut descendre, ensuite le 11 peut aller à droite, le 1 en haut...), de manière à les replacer dans leur ordre naturel, c'est-à-dire, ainsi:



Lorsque Sam Loyd proposa le jeu, il offrit une grande quantité de dollars au premier qui lui apporterait la solution. Le jeu fit rapidement fureur et devint à la mode. D'après Ahrens, un des grands spécialistes de l'histoire des jeux, certains rois se donnèrent, en cadeaux officiels, un jeu de taquin de poche avec étui et pièces en or.

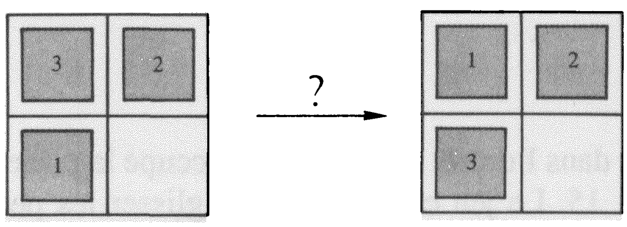
AU TRAVAIL

Mais je ne veux pas vous ôter le plaisir d'utiliser votre jeu. Au travail!

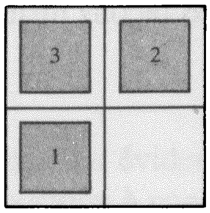
Si vous avez essayé un long moment, vous devez sans doute commencer à penser que Sam Loyd s'est moqué de ses compatriotes avec ses dollars, et que moi-même je me moque de vous. Peut-être même, en avez-vous maintenant la certitude, si vous avez suivi les directives que je vous ai donnés au chapitre 0. Le nombre 15 n'est pas très grand, mais si vous manipulez 15 petits cartons et si vous jouez à les ordonner de différentes façons, les choses se compliquent notablement. On peut, en effet, les ordonner de $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ façons différentes!

LE TAQUIN À TROIS

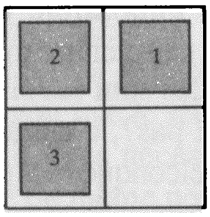
Souvenez-vous: commencer par ce qui est facile rend facile ce qui est difficile. Pourquoi ne simplifiez-vous pas? Comment? En substituant 4×4 par 2×2: vous inventez ainsi le *taquin à 3*



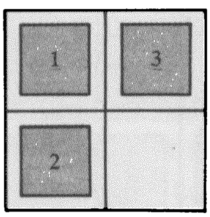
Ici, les possibilités de mouvements sont très réduites; vous pouvez toutes les réaliser... et vous vous rendez compte alors que la tâche proposée est impossible. Comment? C'est simple. En faisant tous les mouvements possibles jusqu'à ce que, lorsque vous terminez, la case vide soit placée dans la partie inférieure droite du tableau, de



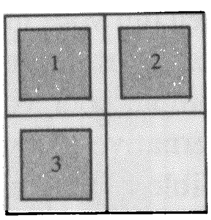
on ne peut arriver qu'à

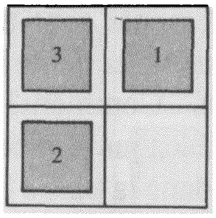


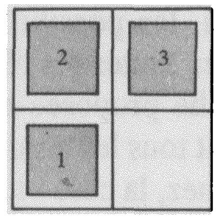
ou bien à



mais jamais à



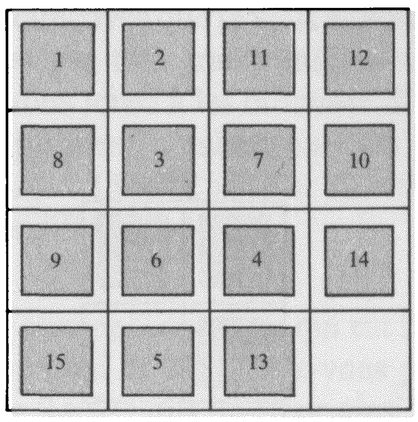
ni à 

ni à 

C'est curieux, n'est-ce pas? Les nombres 1, 2, 3 peuvent être ordonnés de $3 \times 2 \times 1 = 6$ façons différentes que nous répartirons en deux groupes

3	2	1		1	2	3
2	1	3		3	1	2
1	3	2		2	3	1

D'une position à l'intérieur d'un groupe, nous pouvons passer, dans notre taquin à 3, à une position du même groupe, mais jamais à une de l'autre groupe. Ceci doit vous faire supposer que le taquin à 15 pourra présenter un grand nombre de positions de départ à partir desquelles il sera impossible d'arriver à l'ordre naturel demandé. le problème est maintenant multiple: est-ce réellement ce que vous supposez? Quelles sont les situations possibles et quelles sont celles qui ne le sont pas?, c'est-à-dire, si on vous donne les nombres dans un ordre quelconque, par exemple



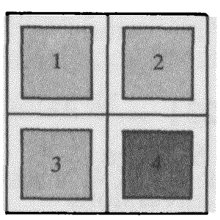
comment pourrez-vous dire si c'est possible ou non? Si c'est possible, pourriez-vous mettre en place une stratégie pour le faire, ou, en d'autres termes, pouvez-vous indiquer une succession de mouvements dans votre jeu qui vous mènera toujours à l'ordre final que vous recherchez? La situation du cas facile 2×2 peut vous sembler peut-être trop simple pour vous éclairer sur le cas 4×4. Vous avez plusieurs alternatives: vous pouvez essayer d'épuiser toute l'information possible obtenue à partir du cas 4×4. Vous

pouvez aussi essayer avec un cas intermédiaire 3 × 3, ou... (pourquoi choisir toujours un carré?) 3 × 2, qui est déjà assez compliqué. Réfléchissez bien....
Si l'on observe le cas de tableau 2 × 2 et la liste

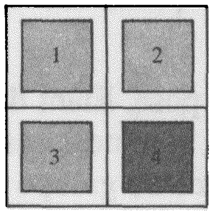
	A	B
a)	3 2 1	1 2 3
b)	2 1 3	3 1 2
c)	1 3 2	2 3 1

que nous avons faite, une question évidente se pose. Etant donné qu'il s'agit de passer d'une position à une autre, comment passe-t-on de chacune des positions du groupe *A* à celles du groupe *B* ou aux autres du groupe *A*? de la *Aa* qui est 321, on passe à la *Bc*, qui est 231, en échangeant 3 et 2. On passe à la *Aa*, 321, à la *Bb*, 312, en échangeant 2 et 1. De la *Aa* à la *Ba*, 123, on passe en échangeant 3 et 1 *Pour passer de n'importe quelle position du groupe A à n'importe laquelle du groupe B, il faut échanger deux nombres. Et, par analogie, pour passer de n'importe quelle position du groupe A à une autre du même groupe A, deux échanges sont nécessaires.* Ceci laisse entrevoir que le secret de toute l'affaire peut résider dans le nombre d'échanges nécessaires pour passer d'une position à une autre; il en est de même pour le cas 4 × 4.
qui ont lieu dans un mouvement autorisé par les règles, en utilisant la case vide. Pour cela, il est intéressant de donner un nom à la case vide, et quel meilleur nom que 4, qui correspond au lieu qu'elle doit occuper dans le tableau 2 × 2 au début et à la fin de tous nos mouvements?

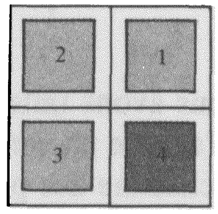
A chaque mouvement permis, le 4 (la case vide) se déplace vers le haut, le bas, à droite ou à gauche, dans les limites du tableau. C'est-à-dire que chaque mouvement du jeu est un échange du 4 avec d'autres nombres possibles situés en haut, en bas, à droite ou à gauche. Rendez-vous compte que, d'après les règles, le 4 doit retourner à sa place en bas, dans le coin droit... Combien de mouvements doit-il faire? Réfléchissez... Il part du coin et revient à ce même coin, si bien que, chaque fois qu'il se déplacera à gauche, il devra revenir à droite, chaque fois qu'il ira vers le haut, il reviendra vers le bas... *ce qui donne un nombre pair de mouvements!* Nous pouvons être sûrs que, par exemple, *si l'on part de l'ordre*



on ne peut arriver qu'à des positions que l'on obtiendra par un nombre pair d'échanges, et peut-être même pas à toutes. En voici une conséquence intéressante: si nous pouvons démontrer qu'une position des nombres 1,2,3,4, terminant en 4, comme par exemple 2134, ne peut être obtenu que moyennant un nombre impair d'échanges du 4, alors, nous aurons démontré qu'il est impossible d'arriver de



à



Nous étions déjà arrivés à cette conclusion, en épuisant toutes les possibilités de mouvements, mais maintenant nous pourrons en trouver la raison, ce qui nous permettra d'éviter cette façon de procéder, pratiquement interminable dans le cas 4×4.

A partir de 1 2 3 4 , essayons d'identifier les positions capables de donner un résultat, moyennant un nombre pair et moyennant un nombre impair d'échanges du 4 avec un autre nombre.

INVERSIONS

Le 4 peut être échangé facilement avec le chiffre adjacent, avec le 3. Que nous donne cet échange? Nous obtenons 1243. Dans 1243, il y a une *inversion* de l'ordre naturel des nombres 1,2,3,4, puisque le 4 est devant le 3. Si nous faisons de nouveau un échange, du 4 avec le 2, on obtient 1423 et nous avons *deux inversions* de l'ordre naturel: le 4 est devant le 2 et devant le 3. Si, à partir de la position 1234, nous échangeons le 4 et le 1, on obtient 4231 qui contient les inversions suivantes: le 4 est devant le 2, devant le 3 et devant le 1, le 2 est devant le 1, le 3 devant le 1. Nous avons cinq inversions! Si maintenant, dans 4231, nous échangeons le 4 et le 2, nous obtenons 2431. Il y a quatre inversions. Si ensuite nous échangeons 4 et 3, nous aurons 2341, avec trois inversions. Dans nos exemples, nous avons obtenu les résultats suivants:

1234 ⟶	1243 ⟶	1423
	1 échange	2 échanges
	1 inversion	2 inversions
1234 ⟶	4231 ⟶	2431
	1 échange	2 échanges
	5 inversions	4 inversions

Comme vous pouvez l'observer, un nombre impair d'inversions correspond à un nombre impair d'échanges, et un nombre pair d'inversions correspond à un nombre pair d'échanges. Peut-on généraliser cette observation? En d'autres termes, est-ce vrai que, si nous avons les n nombres 1, 2, 3, 4,..., n dans un certain ordre

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

ayant un nombre pair d'inversions, et si on échange deux nombres quelconques, par exemple a_3 et a_{n-1}, pour obtenir

$$a_1, a_2, a_{n-1}, a_4, \ldots a_{n-2}, a_4, a_n$$

le nombre d'inversions deviendra impair?

Observez comment on pourrait réaliser cet échange de a_3 et a_{n-1} et moyennant des échanges successifs de deux nombres adjacents. Remarquez que entre a_3 et a_{n-1}, il y a $(n-1)-4 = h$ nombres. Nous échangeons a_3 et a_4, puis a_3 et a_5, a_3 et a_6, ..., a_3 et a_{n-2} et a_3 et a_{n-1}. Jusqu'ici, nous avons fait $(n-1)-4 = h$ échanges de deux nombres adjacents et nous avons obtenu

$$a_1, a_2, a_4, a_5, a_6, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_3, a_n$$

Maintenant, menons a_{n-1} vers la gauche. Nous échangeons a_{n-1} avec a_{n-2}, puis a_{n-1} avec a_{n-2}, et enfin a_{n-1} avec a_4, et après ces $(n-1)-3 = h+1$ échanges, nous arrivons finalement à l'ordre recherché:

$$a_1, a_2, a_{n-1}, a_4, a_5, a_6, \ldots a_{n-2}, a_3, a_n$$

LA PARITÉ DU NOMBRE D'INVERSIONS

Au total, nous avons fait $(n-1)-4 + (n-1)-3 = 2h+1$ échanges de nombres adjacents. Remarquez que c'est un nombre impair. Qu'en est-il du nombre d'inversions dans chacun de ces échanges, par exemple de a_3 avec a_4? c'est-à-dire, que se passe-t-il lors du passage de

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

à

$$a_1, a_2, a_4, a_3, a_5, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n \ ?$$

Si $a_3 < a_4$, il y a une inversion de plus. Si, $a_3 > a_4$ il y a une inversion de moins. Ainsi, à chaque échange de deux nombres adjacents, *La parité du nombre d'inversion change*. Comme nous avons fait un nombre impair de ces échanges de nombres adjacents, il en résulte que *dans l'échange de*

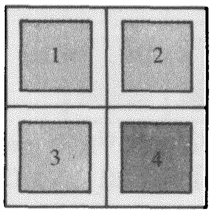
$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

à

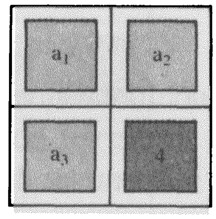
$$a_1, a_2, a_{n-1}, a_4, \ldots a_{n-2}, a_3, a_n$$

La parité du nombre d'inversion change.

Ce raisonnement est valable pour tous les cas, comme il est facile de s'en rendre compte (h peut être un nombre quelconque), et ceci résout, du moins en partie, notre problème: *si le nombre d'inversions des nombres* 1, 2, 3, 4 *dans l'ordre qu'on nous a donné* $a_1a_2a_34$ ($a_1a_2a_3$ *sont les nombres* 1, 2, 3, *dans un autre ordre) est impair, alors de la situation*



on ne peut pas passer à



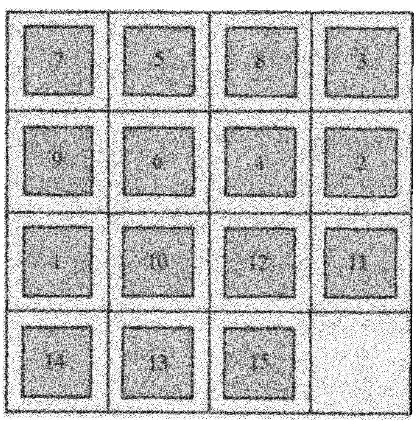
(l'inverse non plus n'est pas réalisable, de cette dernière situation à la première).

Il est facile de compter le nombre d'inversions, comme nous l'avons fait, en comparant chaque nombre avec ceux qui le suivent et en comptant ceux qui sont plus petits que lui. ainsi, le nombre d'inversions de

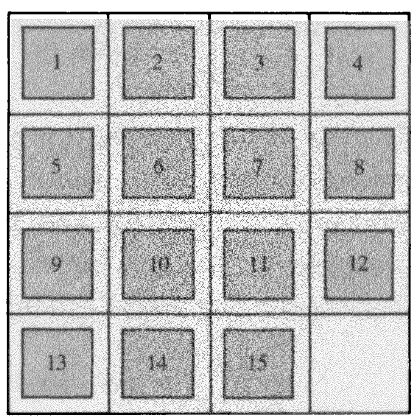
7, 5, 8, 3, 9, 6, 4, 2, 1, 10, 12, 11, 14, 13, 15, 16

se calcule de la façon suivante:
le 7 a 6 inversions, le 5 en a 4, le 8 en a 5, le 3 en a 2,
le 9 en a 4, le 6 en a 3, le 4 en a 2, le 2 en a 1, le 1 en a 0,
le 10 en a 0, le 12 en a 1, le 11 en a 0, le 14 en a 1, le 13 en a 0,
le 15 en a 0, le 16 en a 0.
Au total, il y a 29 inversions.

Comme le raisonnement que nous avons suivi précédemment dans le cas de 2×2 est parfaitement valable dans le cas 4×4, il en résulte que, si on vous propose de passer de



à



on se moque de vous. C'est impossible. C'est plus évident dans le jeu présenté au début du chapitre; nous n'avons pas à compter les inversions, car nous savons déjà qu'en échangeant deux nombres quelconques (ici le 1 et le 15), la parité du nombre d'inversions change. Sam Loyd n'avait rien à craindre pour son argent!

TAQUIN À QUINZE

Mais, nous n'avons pas encore éclairci tous nos problèmes relatifs au taquin à 15. En premier lieu, combien de positions initiales possibles, ont-elles un nombre impair d'inversions, et ne permettent donc pas d'atteindre le but fixé? En second lieu, quand la position initiale a un nombre pair d'inversions, sommes-nous sûrs que le jeu est possible? Quelle est alors la démarche à suivre?

La réponse à la première question est simple, et est suggérée par le jeu 2 × 2: la moitié des jeux que l'on peut proposer ont un nombre impair d'inversions et sont donc impossibles, sans aucun doute. Pour le vérifier, remarquez que si

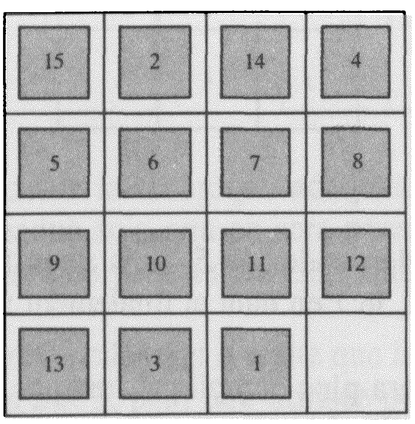
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$$

a un nombre pair d'inversions, alors

$$a_{15}, a_{14}, a_{13}, a_{12}, a_{11}, a_{10}, a_9, a_8, a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1$$

résulte des 7 échanges a_1—a_{15}, a_2—a_{14}, a_7—a_9 et est impair, et réciproquement. Maintenant, nous savons que pour la moitié des $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ positions initiales, leur transformation est impossible dans la succession naturelle. Si vous choisissez un ordre au hasard, vous aurez 50% de chances d'être tombé sur un point de départ qui rend le jeu impossible.

Prenons une position initiale ayant un nombre pair d'inversions, par exemple, en échangeant 15 et 1 ainsi que 14 et 3, ce qui donne sûrement un nombre pair d'inversions.



Le jeu est-il possible avec ce départ? Quelles stratégie suivre? si vous trouvez effectivement une stratégie applicable aux cas restants, c'est-à-dire, ayant un nombre pair d'inversions, alors vous aurez répondu à la question sur la possibilité de réaliser le jeu. Pour trouver la stratégie, vous pouvez recourir à un cas plus simple, le cas 2×3.
Voici le problème.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	

$\longrightarrow$

1	2	3
4	5	

où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 représentent un ordre des nombres 1, 2, 3, 4, 5 dans lequel le nombre d'inversions est pair (nous savons que sinon le jeu est impossible). Occupez-vous seulement du 1 et du 2 en oubliant les 3, 4, 5, et essayez de les placer dans cette position

2	*	*
1	*	

une étoile symbolise
un des nombres 3, 4, 5

Dès que vous y serez arrivé, vous aurez résolu le problème. Dans les quatre cases de droite, vous aurez le 3, 4, 5 que vous pouvez facilement placer ainsi

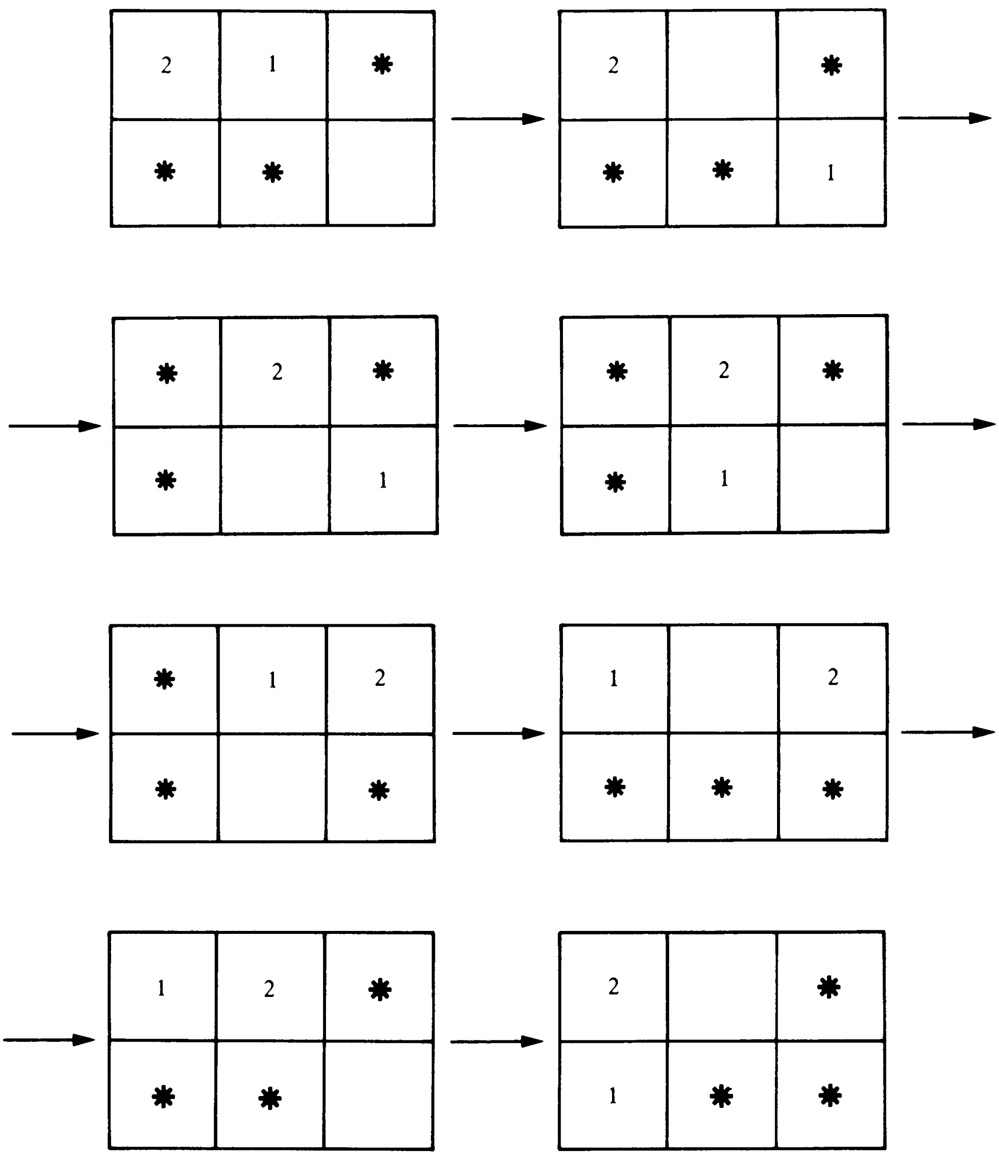
2	3	5
1	4	

Maintenant vous descendez le 5, puis vous faites passer le 3 à droite, le 2 à droite, le 1 en haut et finalement vous poussez le 4 et le 5.

Le problème sera plus compliqué lorsque vous trouverez une situation comme celle-ci:

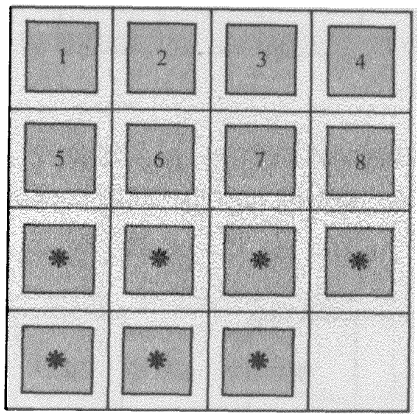
2	1	4
3	5	

Il faut essayer d'intervertir l'ordre du 1 et du 2. En voici la manière, schématiquement; les étoiles représentent tout autre nombre.

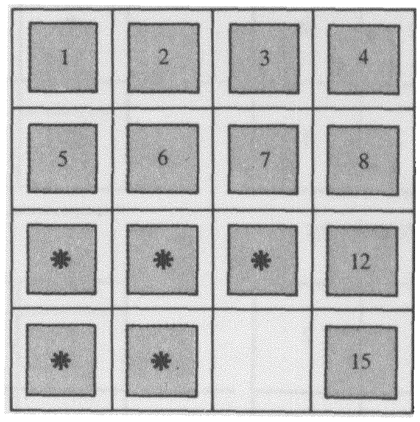


Quand vous posséderez la technique adéquate pour résoudre le problème 2 × 3 chaque fois que ce sera possible, vous pourrez essayer d'en trouver une pour le jeu de taquin. Réfléchissez un peu...

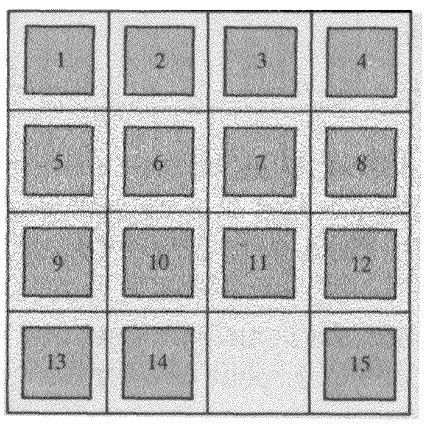
Vous vous rendrez facilement compte que la solution que vous avez trouvée du cas 2 × 3, peut être utilisée pour le problème du taquin à 15 de la façon suivante. D'abord, avec cette technique ou sans elle, vous pouvez facilement arriver à avoir le jeu dans cette position



En utilisant la case vide et la stratégie du 2×3, vous placez le 15 au coin Sud-Est et le 12 au-dessus. Vous obtenez ainsi



et vous constaterez que les étoiles sont les 9, 10, 11, 13, 14 mis dans une situation telle que, en vous servant encore de la stratégie 2×3, vous pouvez les placer ainsi



Vous terminez en poussant le 15.

DES VARIATIONS

Maintenant que nous avons bien réfléchi à ce jeu de taquin et que nous l'avons assez bien compris, nous allons en inventer un autre.

LE TAQUIN ET LA CASE VIDE - ROI...

Vous avez dû observer que dans le jeu classique de taquin, la case vide se déplace presque à la façon d'une tour du jeu d'échecs, bien que plus lentement. Elle va d'une case adjacente au nord, sud, est ou ouest. Supposez que nous donnions à la case vide la faculté de se déplacer comme le roi aux échecs, d'une case au N, S, E, O, mais aussi d'une case en diagonale, vers le NE, NO, SE, SO. Quelles seront alors les positions initiales qui rendent le jeu possible ou impossible? Quelle est la stratégie à suivre pour résoudre les cas faisables?

Ça vous sera très facile, compte tenu de ce que vous savez. Maintenant, toutes les positions initiales rendent le jeu possible et vous pourrez trouver une stratégie beaucoup plus rapide qu'avant.

LE TAQUIN ET LA CASE VIDE - TOUR...

Supposez que la case vide se déplace au N, S, E, O, non plus d'une case, mais d'autant que vous voulez à chaque mouvement, et vous l'échangerez avec le nombre qui occupe la case où vous voulez aller. Les positions initiales permettent toutes d'exécuter le jeu. Sauriez-vous expliquer pourquoi? La stratégie est maintenant plus rapide et plus simple que dans le cas classique.

LE TAQUIN ET LA CASE VIDE - CAVALIER...

Maintenant, la case vide peut se déplacer à la manière d'un cavalier des échecs, c'est-à-dire, que chaque mouvement se fait en deux temps: deux cases au N, S, E ou O, puis une case en direction perpendiculaire à l'antérieure, bien entendu sans sortir du cadre du jeu. Quelles sont les positions initiales possibles et impossibles? Réfléchissez...

Le jeu semble beaucoup plus intéressant et varié que les précédents, mais aussi plus difficile. Que je sache, il n'a jamais été proposé auparavant. Le jeu analogue 2×2 n'a aucun sens, bien entendu. Le jeu semblable, dans un tableau 3×3, sera toujours impossible si, dans la situation initiale, le 15 n'occupe pas le centre du tableau, car la case vide ne pourrait pas atteindre cette case. Dans le tableau 3×3 ou 4×4, les positions initiales où le nombre d'inversions est impair rendent le jeu impossible, et ceci par le même genre de raisonnement qui nous a servi à déterminer les positions de transformation impossible dans le jeu classique de taquin. Dans le cas 3×3, en supposant que le 5 est au centre du tableau, le jeu ne sera possible qu'avec 7 positions initiales différentes de 123 456 78. Quelles sont les positions initiales de transformation possible et impossible dans le tableau 4×4? Quelle stratégie suivre? Je ne peux pas vous en dire beaucoup plus, parce que je n'ai pas étudié ce cas. Réfléchissez-y et si vous arrivez à le résoudre, ne manquez pas de m'envoyer la solution.

LA COMBINATOIRE

La combinatoire, dans laquelle on peut inclure le genre de raisonnement que nous avons employé ici, est un ensemble bigarré de méthodes et de résultats qui doivent permettre de répondre aux questions suivantes: *comment et de combien de manières différentes peut-on réaliser une opération donnée?*

Une telle question doit être à la base même de tout essai de rationalisation mathématique de la réalité, et en effet la combinatoire, avec la théorie des nombres, est la discipline mathématique la plus ancienne. On situe habituellement ses débuts, vers l'an 2000 av. J.C., avec le livre chinois *I Ching (Livre des échanges)*, où apparaissent pour la première fois, des carrés magiques ainsi que des énumérations de combinaisons de deux symboles, yang, ---, masculin, et ying, —, féminin, dans 64 hexagrammes ayant des significations mystiques différentes.

De même, il est évident que, de par sa propre nature, la combinatoire, doit envahir un grand nombre de disciplines, théoriques et appliquées, où l'objet de l'étude dépend fondamentalement des différentes façons dont certains éléments de la structure en question réagissent entre eux. C'est pourquoi, il n'est absolument pas surprenant d'entendre évoquer des résultats de combinatoire et de voir son développement stimulé dans des domaines aussi divers que ceux-ci: mathématique discrète pour la programmation d'ordinateurs, dessins d'expériences, biologie moléculaire, théorie de la programmation *(scheduling theory)* pour le bon fonctionnement d'une usine ou d'une entreprise, logique, économie mathématique, théorie des réseaux, cristallographie, mécanique statistique, théorie des graphes, géométrie combinatoire...

La partie de combinatoire, que l'on nous enseigne traditionnellement au niveau secondaire, n'est que la pointe visible d'un énorme iceberg. Il existe des résultats plus profonds et aussi simples, si ce n'est plus, que ceux que l'on explique habituellement, et leur intérêt est extraordinaire en raison de la grande variété de problèmes de nature très différente qu'ils permettent de résoudre. Les programmes de la combinatoire, comme de la théorie élémentaire des nombres, se sont vus notablement réduits, dans notre enseignement primaire et secondaire, alors que leur simplicité, leur profondeur et leur intérêt pratique auraient dû en faire un domaine privilégié pour la présentation de la beauté et de la puissance du raisonnement mathématique. Il n'en est pas de même dans beaucoup d'autres pays, où ces matières ainsi que la géométrie élémentaire constituent la base des idées, autour desquelles se développe avec profit l'activité mathématique des élèves dès les niveaux inférieurs.

Chapitre 4

En montant les escaliers ... vers le paradis de Cantor

Voici une curieuse question. Considérez tous les nombres 1, 2, 3, 4, 5... Les uns sont impairs 1, 3, 5, 7..., les autres sont pairs 2, 4, 6, 8... Vous pouvez maintenant vous demander: y a-t-il plus de nombres pairs que d'impairs, ou inversement? La réponse est facile à trouver: le 2, pair, suit le 1, impair; le nombre pair suivant, 4, suit le nombre impair suivant, 3... C'est clair. Chaque impair peut être rattaché au pair qui le suit. Ainsi, la moitié des nombres sont impairs et l'autre moitié pairs. *Il y a autant de nombres impairs que de nombres pairs.*

Continuons. Considérez maintenant, d'un côté, tous les nombres: 1, 2, 3, 4, 5... et de l'autre, tous les nombres pairs: 2, 4, 6, 8... Demandez-vous de nouveau: *Quels sont les plus nombreux, tous les nombres ou les nombres pairs?* Votre première idée sera certainement celle-ci: tous les nombres ne sont pas pairs! Par exemple, 1, 3, 5... Ainsi donc, il y a plus de nombres que de nombres pairs. Mais réfléchissez un peu à ce que vous avez fait auparavant quand vous avez comparé les pairs et les impairs. Vous avez rattaché chaque impair avec un seul pair et vous en avez conclu: il existe autant de nombres impairs que de pairs. Ne pourriez-vous pas faire quelque chose de semblable? Réfléchissez un peu...

Voilà. Vous y avez tout de suite pensé. Chaque nombre pair peut être divisé par 2, heureusement! Nous obtenons ainsi les résultats suivants:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

Dans la file du haut, se trouvent *tous les nombres pairs*, dans celle du bas *tous les nombres* et les flèches réunissent les partenaires de chaque file: *il y a autant de nombre pairs que de nombres!*

Quel désarroi! C'est probablement ce que s'est dit Galilée la première fois que ces idées, qui constituent ce que l'on appelle aujourd'hui le *paradoxe de Galilée*, sont passées par sa tête. Euclide, Aristote et le sens commun de tous les temps avaient toujours dit que *le tout est plus grand que la partie*. Les nombres pairs s'obtiennent en retranchant à *tous* les nombres ceux qui sont impairs et, par conséquent, sont une partie d'un tout. Mais auparavant, nous avons rattaché chaque nombre pair à un seul nombre et aucun de tous ces nombres n'est resté sans son partenaire pair, ce qui prouve bien qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers.

Un paradoxe est une situation mentale à laquelle nous aboutissons lorsque, raisonnant de manière clairement justifiée, nous arrivons à une conclusion et raisonnant d'une autre manière tout aussi clairement justifiée, nous arrivons à la conclusion opposée.

...un paradoxe n'est pas un malheur...

Un paradoxe n'est pas un malheur, c'est une grande chance, car il indique que dans toute l'affaire, il y a quelque chose de profond que nous n'avons pas bien compris et qui peut nous conduire à de nouveaux mondes. Au milieu d'un difficile problème, les collègues de Niels Bohr, un des grands physiciens de notre temps, l'entendirent murmurer: «Formidable! Nous sommes tombés sur un paradoxe! Maintenant, nous pourrons enfin avoir l'espoir de progresser!»

Galilée ne poursuivit pas ses idées sur le paradoxe des nombres pairs. Il avait probablement beaucoup d'autres choses à penser qui l'intéressèrent davantage. Plus de deux siècles passèrent, avant que Georg Cantor ne s'occupe de cette affaire, en prenant le dilemme par les cornes: «Il y a plus de nombres naturels que de nombres pairs... Il y a autant de nombres naturels que de nombres pairs... Le tout est plus grand que la partie...»

LA MÉTHODE DE COMPARAISON DE CANTOR

Que signifie «il y a plus de»...? Lorsque je dis qu'un tas est plus grand qu'une de ses parties, je veux dire que je peux enlever cette partie et qu'il me reste encore quelque chose dans le tas. Lorsque je dis qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres naturels, je dis que je peux les accoupler un par un et qu'aucun de tous les nombres, ni aucun de tous les nombres pairs, ne reste sans partenaire. Il y a donc deux façons distinctes de comparer.

Considérons l'ensemble des choses A et l'ensemble des choses B. Il y a autant de choses dans A que dans B, lorsque l'on peut accoupler chaque chose de A avec un chose de B, de façon qu'il n'en reste aucune de A ni de B sans partenaire et en outre, qu'aucune chose de A ne soit partenaire de deux choses distinctes de B et qu'aucune chose de B ne soit partenaire de choses distinctes de A. Ceci admet une expression plus sophistiquée et terrible dans les termes d'applications bijectives et autres, mais je crois que l'idée qui va nous intéresser se comprend parfaitement avec ce qui est écrit.

Lorsque chaque chose de A peut être accouplée avec une chose unique de B mais que, d'une manière ou d'une autre, des choses de B restent toujours sans partenaire, alors il est clair que B a plus de choses que A.

Cette façon de comparer, que Cantor a énoncée, est celle qui se prête à un parfait développement mathématique adéquat. Pourquoi? Parce qu'elle comprend une notion opérative facilement maniable: *Il y a autant de choses dans A que dans B, lorsque nous pouvons utiliser les choses de B pour étiqueter correctement celles de A: c'est-à-dire, chaque chose de A a une étiquette (chose de B) distincte, et il ne nous reste aucune étiquette.*

Pour sa part, Euclide aussi avait raison quand il disait que le tout A est plus grand que la partie B, voulant dire par ceci que, si B est une partie de A, les choses de B sont des choses de A, et de plus, il y en a d'autres de A qui n'appartiennent pas à B. Mais ceci est si proche de la tautologie qu'il est difficile d'en faire quelque chose d'intéressant en mathématiques.

Vous avez maintenant un outil pour savoir si un ensemble possède plus de choses qu'un autre ou pas, et vous pouvez vous lancer dans l'aventure, comme le fit Cantor au début de notre siècle. Dans les ensembles finis, c'est-à-dire ceux dont on peut décompter les éléments, il n'y a aucun problème. Si A a 358 éléments et B en a 456, on voit clairement qui en a le plus. Les choses commencent à devenir intéressantes lorsque nous affrontons les ensembles infinis. Parmi les ensembles infinis, il y en a un qui est privilégié et que nous avons utilisé pour comparer. C'est celui des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6... Pour commencer, voici les étiquettes que nous utiliserons pour comparer d'autres ensembles infinis. Comme nous l'avons vu, les nombres pairs peuvent être correctement étiquetés avec les nombres naturels

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

Lorsqu'un ensemble infini A peut être étiqueté de cette façon (à chaque chose de A correspond une étiquette (nombre naturel) distincte et de façon qu'il ne reste pas d'étiquette), on dit que A est *dénombrable*. Ainsi, l'ensemble des nombres pairs, 2, 4, 6, 8... est dénombrable.

UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE

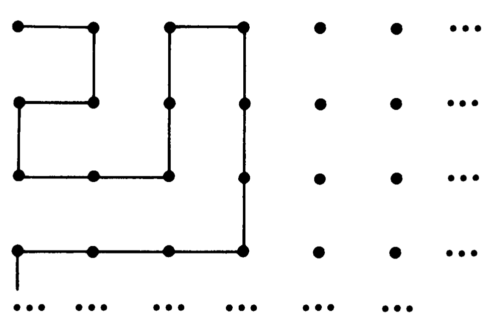
Nous allons considérer un autre curieux ensemble infini. Prenons tous les couples ordonnés de nombres naturels, c'est-à-dire que notre ensemble A sera l'ensemble de toutes les paires de nombres naturels de la forme (3,5), (7,10), (1001,35) ... en considérant que (3,5) n'est pas la même chose que (5,3). Question: *est-ce que A est dénombrable?* C'est-à-dire, peut-on étiqueter correctement A avec les nombres naturels? Réfléchissez bien...

Vous avez probablement pensé que la première chose à faire si vous voulez étiqueter l'ensemble A avec des nombres naturels, c'est de placer ses éléments en ordre. Si vous arrivez à les mettre tous en file indienne, les uns derrière les autres, vous pourriez les numéroter... Essayez donc...

Effectivement, vous pouvez d'abord les placer comme dans le tableau suivant:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	...
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	...
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	...
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	...
...	...	...	...	...	...

Ils sont tous là, mais il reste à les ranger en une seule file de façon à les numéroter. Il est évident que nous ne pouvons pas parcourir d'abord la première rangée parce qu'alors nous ne passerions jamais à la seconde. Sauriez-vous les parcourir tous en ordre, de façon à passer par chacun d'entre eux? Oubliez que ce sont des paires de nombres. Comment parcourir en ordre tous les points de ce tableau infini?



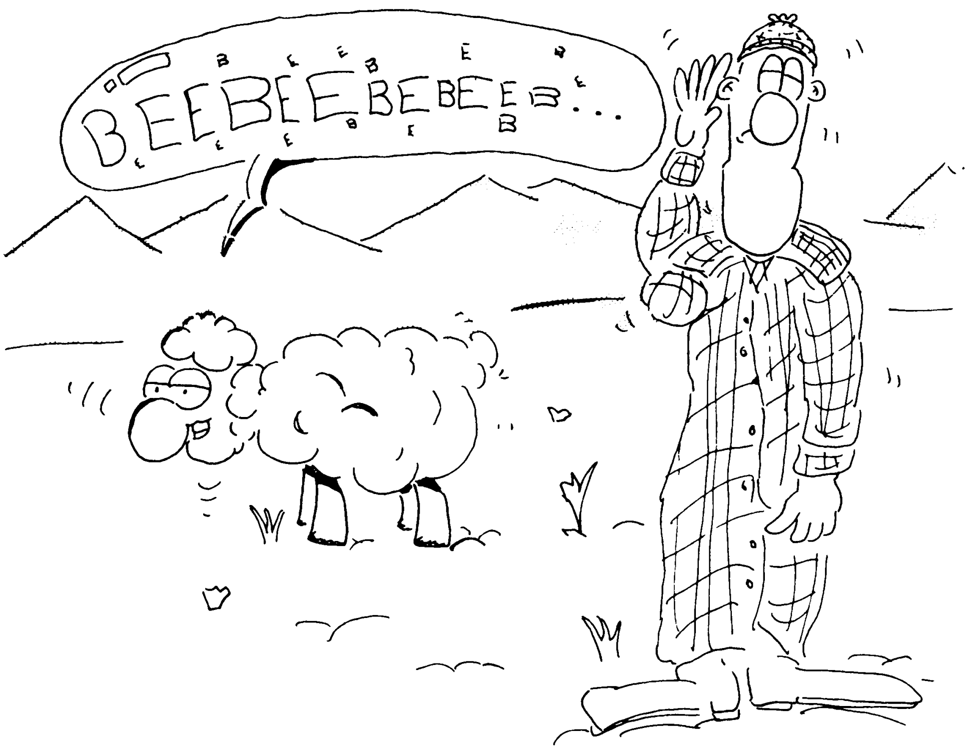
Une possibilité est celle que je vous indique sur la figure, mais vous pouvez vous en inventer une autre qui vous plaise plus. A votre avis, que peut-on faire si vous prenez toutes les paires ordonnées de tous les nombres entiers, qu'ils soient négatifs, zéro ou positifs? Et si vous prenez tous les triplets ordonnés de nombres naturels? Avez-vous une idée?

Du point de vue mathématique, observez ce que démontre ce que nous venons de faire avec les paires de nombres. Les nombres rationnels sont des paires ordonnées de nombres entiers (le deuxième différent de zéro), si l'on considère que (m,n) et (p,q) sont égaux quant $mq = pn$. Il en résulte que l'ensemble des nombres rationnels est plus petit qu'un ensemble (celui de toutes les paires de nombres entiers) qui est dénombrable. Donc, *l'ensemble des nombres rationnels est aussi dénombrable.*

Vous pouvez maintenant vous demander à juste titre, de même que se l'est demandé Cantor, si tous les ensembles infinis sont également infinis, ou bien s'il existe des ensembles infinis que l'on ne peut pas dénombrer? Qu'en pensez-vous? Quelle est votre impression?

UN ENSEMBLE NON DÉNOMBRABLE

Nous allons nous construire un ensemble très intéressant et bien facile. Prenez deux symboles, par exemple les deux lettres a et b de notre alphabet. Nous allons former des mots infinis arbitraires, évidemment sans aucun sens, avec ces deux symboles. Un mot possible pourrait être babababababababab..., un autre bbbbbbbbbbbbbbb..., un autre aabaaabaaaabaaaaabaa...



...mots infinis de deux lettres...

Notre ensemble A va être celui de *tous les mots infinis construits avec deux lettres.*

Nous nous demandons maintenant: L'ensemble A est-il dénombrable? Pourra-t-on l'étiqueter avec les nombres naturels? Réfléchissez un moment...

Si vous avez résolu le problème, réjouissez-vous. Lorsque Cantor trouva la solution, il écrivit à un ami: «Je le vois et je ne peux pas y croire». La méthode de raisonnement de Cantor s'appelle maintenant le procédé diagonal et fonctionne de cette manière. Nous allons essayer de démontrer *que l'ensemble A proposé n'est pas dénombrable.* Pour cela, supposons qu'il l'est (souvenez-vous du raisonnement par l'absurde). Supposez que *tous* vos mots infinis sont étiquetés avec les nombres naturels. Ainsi, nous pouvons les ranger tous par ordre, par exemple, de cette façon

Mot 1	b	a	b	a	b	a	b	a	...
Mot 2	a	a	b	a	b	b	a	b	...
Mot 3	b	a	b	b	b	a	a	b	...
Mot 4	b	b	b	a	b	b	b	b	...
....									

Peut-on réellement les trouver tous ici? Pourriez-vous en trouver un qui n'y soit pas?

Cantor en trouva un. Il regarda à la diagonale du tableau, le mot b a b a... et forma le mot a b a b... c'est-à-dire qu'il changea chaque a par b et chaque b par a. Qu'a de particulier ce mot? Ici se trouve l'astuce de Cantor. Le mot est différent du mot 1 du moins par sa première lettre. Il est différent du mot 2, du moins par sa deuxième lettre. Il est différent du mot 535 du moins par la lettre qui occupe la place 535. Ce mot peut-il être dans le tableau? S'il en est ainsi, il occupera une certaine place, par exemple ce pourrait être le mot 1 537 787. Mais alors il différera du mot 1 537 787 du moins par la lettre qui occupe la place 1 537 787! c'est-à-dire, *le mot que nous avons formé ne peut pas être dans le tableau.* Il est donc faux qu'ils soient tous dans le tableau: l'ensemble que nous considérons ne peut pas être dénombrable.

Ce que nous venons de démontrer est très intéressant du point de vue mathématique. Chaque nombre réel entre 0 et 1 peut être exprimé par son développement décimal d'une infinité de chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, d'une seule manière, si nous convenons de substituer le développement qui se termine par une infinité de zéro (décimaux exacts), par exemple 0,2527000000... par 0,2526999999... qui représente le même nombre. En utilisant le même procédé diagonal, vous pourrez voir que cet ensemble de nombres ne peut pas être dénombrable. Il en résulte, donc, que *l'ensemble de tous les nombres réels est un ensemble infini non dénombrable.*

Nous avons trouvé des ensembles infinis qui ne sont pas dénombrables. Ceci nous incite à nous demander maintenant: avons-nous épuisé les genres d'ensembles infinis? c'est-à-dire, pour un ensemble infini quelconque, est-il vrai que si l'on ne peut pas l'étiqueter avec les nombres naturels, on peut du moins l'étiqueter avec les éléments de l'ensemble A que nous avons construit (mots infinis de deux lettres)? Ou bien, peut-il y avoir un ensemble plus infini encore que A et qui ne peut pas être étiqueté avec les éléments de A?

... ET DES ENSEMBLES ENCORE PLUS GRANDS

Cantor a eu le courage de ne reculer ni devant les difficultés de l'infini, ni devant les critiques qui, au début, ont été faites à ses méthodes. L'idée géniale du procédé diagonal lui a probablement suggéré la manière de construire un ensemble plus infini que A.

Oubliez maintenant ce que représente A, car ce que nous allons faire est valable pour tout ensemble infini. Cantor a observé que lorsqu'un ensemble est fini et a deux éléments, par exemple l'ensemble $I=\{g,h\}$, alors le nombre des parties de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre des sous-ensembles de I, est 2^2, car les parties de I sont: $\emptyset$ = l'ensemble vide $\{g\}$, $\{h\}$, $I = \{g,h\}$, et ainsi le nouvel ensemble, des parties de I, est $P(I) = \{\emptyset, \{g\}, \{h\}, \{g,h\}\}$ et $a^2 2^2 = 4$ éléments. De la même manière, si un ensemble S a n éléments, l'ensemble de ses parties a 2^n éléments. (Essayez de le démontrer, par exemple par récurrence). Cantor a eu l'intuition que pour un ensemble infini quelconque A, l'ensemble de ses parties devait être plus infini que A. Sa démonstration est un des joyaux de la Mathématique. Vous allez le voir.

Nous voulons démontrer que $P(A)$, l'ensemble des parties de A, ne peut pas être étiqueté avec les éléments de A. Comment le démontrer? Supposons qu'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire que $P(A)$ peut être étiqueté avec les éléments de A, de façon que chaque partie de A ait une seule étiquette, un élément différent de A, et qu'il ne reste aucune étiquette, c'est-à-dire que chaque élément de A soit une étiquette d'une seule partie de A. Partons de cette étiquetage des parties de A. Prenons une étiquette e, un élément de A, et la partie de A, H, dont il est l'étiquette. Comme l'étiquette e est un élément de A, et la partie de A, H, est un ensemble de quelques éléments de A (éventuellement le vide), il en résulte que e peut être un élément de H ou peut ne pas l'être. S'il l'est, c'est-à-dire si e appartient à H, alors imaginons-le peint en rouge, et si e n'appartient pas à H, imaginons-le peint en noir. Procédons ainsi avec tous les éléments de A, c'est-à-dire, avec toutes les étiquettes. Chacune d'entre elles sera rouge ou noire. Rappelez-vous, car c'est l'essentiel, que *si elle est rouge, cela veut dire que cet élément de A est dans l'ensemble dont il est étiquette. Si elle est noire, cela veut dire que cet élément de A n'est pas dans l'ensemble dont il est l'étiquette.*

Maintenant vous prenez l'ensemble *N* des éléments de *A* qui sont des étiquettes noires. Cet ensemble est une partie de *A* et ainsi, comme toute autre partie de *A*, elle a une étiquette *p*, élément de *A*, qui sera rouge ou noire. *p* peut-elle être rouge? Qu'elle soit rouge signifie (rappelez-vous ce qui est ci-dessus en *italique*) que *p* appartient à l'ensemble *N*, l'ensemble dont il est l'étiquette, mais dans *N* il n'y a que des étiquettes noires; il en résulte que *p* ne peut pas être rouge, donc elle devra être noire. Mais, *p* peut-elle être noire? Qu'elle soit noire signifie (revoyez ce qui est en *italique*) que *p* n'appartient pas à *N*, qui est l'ensemble dont elle est étiquette. Mais si *p* n'appartient pas à *N*, c'est qu'elle n'est pas noire, car *N* est l'ensemble de toutes les étiquettes noires. Ainsi, *p* ne peut pas non plus, être noire. Notre supposition que *P(A)* peut être étiqueté avec les éléments de *A* nous conduit à une contradiction, c'est pourquoi elle doit être fausse. Donc, *l'ensemble des parties de A ne peut jamais être étiqueté avec l'ensemble A. C'est un ensemble plus infini que A.*

Ce procédé nous procure une échelle pour monter d'un infini à un autre supérieur, et ne finit jamais.

CANTOR

«La création la plus surprenante de la pensée mathématique, l'une des réussites les plus belles de l'activité humaine dans le domaine du purement intelligible». C'est ainsi que David Hilbert, l'un des mathématiciens les plus éminents de notre siècle, célébrait en 1926 les louanges de l'arithmétique des infinis créée par *Cantor*. «Personne ne nous expulsera du paradis que Cantor a créé pour nous.»

Cette reconnaissance solennelle cependant, arrivait un peu tard pour ce pauvre Georg Cantor. Il avait beaucoup souffert de l'opposition à ses nouvelles idées sur l'infini, menée surtout par Léopold Kronecker.

Il était né à Saint-Petersbourg en 1845 d'une famille originaire du Danemark. Mais en 1856 ils partirent définitivement à Francfort, et c'est en Allemagne que Cantor passa la plus grande partie de sa vie. C'est peut-être à cause de l'ambiance religieuse de sa famille, père juif converti au protestantisme et mère catholique, que Georg s'intéressa à l'étude de la philosophie et de la théologie médiévales, spécialement en ce qui concerne le problème de la continuité et de l'infini. Il étudia à Zurich, Göttingen et Berlin, la philosophie, la physique et les mathématiques, mélange qui probablement stimula sa façon de penser qui plus tard donna naissance à son nouveau traitement mathématique de l'infini. Il termina comme professeur à l'Université de Halle, lieu brillant en mathématiques, où il demeura le reste de sa vie académique.

En 1874, il commença à publier dans le *Journal* de Crelle, une des revues importantes de l'époque, ses idées révolutionnaires sur l'infini mathématique, qui rapidement se heurtèrent à la méfiance régnante dans l'atmosphère contre la conception, nouvelle en mathématiques, d'un ensemble *infini actuel*, c'est-à-dire par exemple, de l'ensemble des nombres naturels pris comme un tout fini, non comme quelque chose qui se fait peu à peu et ne se termine jamais (*infini potentiel*).

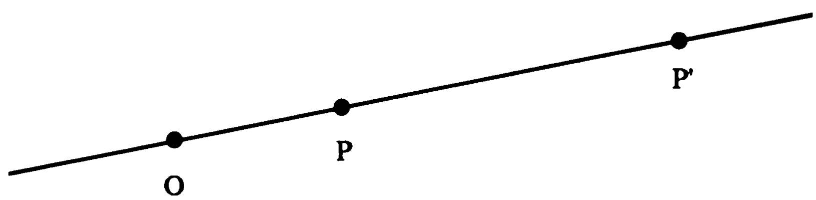
Cantor eut la malchance d'avoir pour adversaire Léopold Kronecker, qui était un bon mathématicien à l'esprit très critique, ainsi qu'un homme d'affaires heureux; celui-ci dut remplir d'amertume, par ses critiques mordantes, les transfinis de Cantor. En outre, son influence fut déterminante, semble-t-il, pour que l'on refuse à Cantor un poste de professeur resté vacant à l'Université de Berlin. En 1914, Cantor subit la premières des graves dépressions qui se répétèrent plus tard et qui l'achevèrent en 1918, dans une clinique psychiatrique. En mathématiques, comme dans d'autres domaines, le génie côtoie la folie.

Quelques métamorphoses du plan

De même que les insectes, les figures d'un plan admettent de nombreuses métamorphoses différentes. Certaines d'entre elles sont des transformations surprenantes qui changent des êtres difficiles à manier en d'autres, beaucoup plus apprivoisables et facilement manipulables. Une métamorphose sans grandes complications est *l'homothétie*, qui est un peu comme l'image d'une croissance ennuyeuse, mais qui permet, comme vous le verrez, de résoudre des problèmes curieux. Une autre est *l'inversion*, beaucoup plus originale et farfelue, qui transforme des cercles, certaines fois en droites, d'autres fois en cercles, et qui résout des problèmes très compliqués avec une simplicité étonnante.

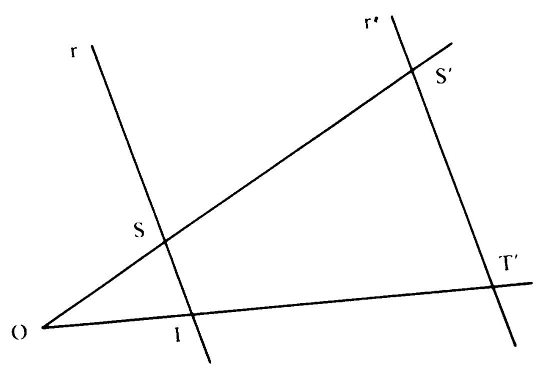
HOMOTHÉTIE. IMAGE DE LA CROISSANCE

Fixons un point O du plan; chaque point P, distinct de O, va se transformer en un point P' sur la droite OP à une distance de O triple de la distance OP, comme l'indique la figure:



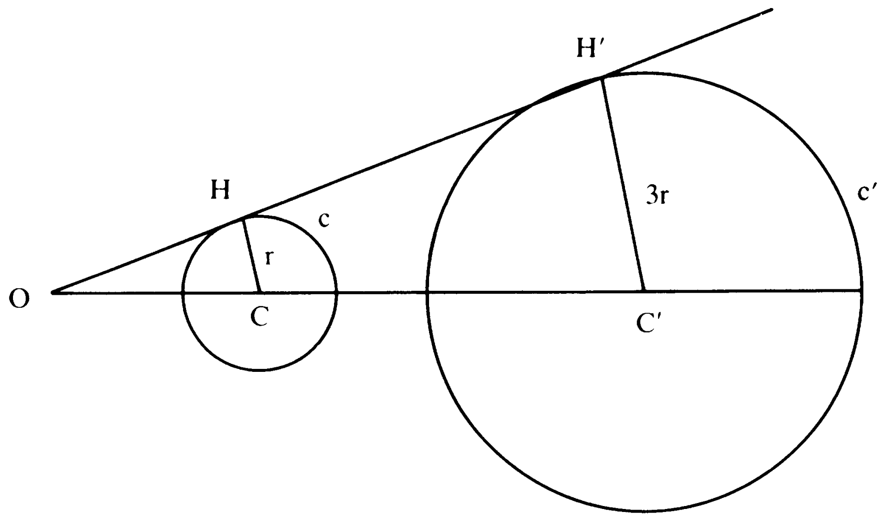
C'est l'*homothétie de centre O et de rapport 3*.

Il est facile de voir comment se transforment les différents habitants familiers du plan: droite, cercle... Une droite qui passe par O, comme OP, s'étire sur elle-même à partir de O. Chacun de ses points, à l'égal de P, se sépare de O, pour aboutir à triple distance de O sur la même droite. Le seul point qui reste à sa place est O. Une droite qui ne passe pas par O, comme r, se transforme en une autre droite parallèle à elle, à une distance de O triple de celle de r.



En effet, si le point S de r sur la figure se transforme en S', et un autre point T de r en T', et si nous unissons S' à T', comme $OS'/OS = 3 = OT'/OT$, alors les triangles OST et $OS'T'$ sont semblables, les angles en S et S' sont égaux, et donc ST et $S'T'$ sont parallèles. Comme il en est de même pour tout autre point U que nous prenons sur r, il en résulte que la transformée de r par cette homothétie est r', parallèle à r passant par S' et par conséquent, située à une distance de O triple de celle de r.

Quelle sera l'image d'un cercle c de centre C et de rayon r? C'est facile à deviner, n'est-ce pas? Un autre cercle, trois fois plus grand, de centre situé sur OC à une distance de O trois fois plus grande que OC, comme l'indique la figure:



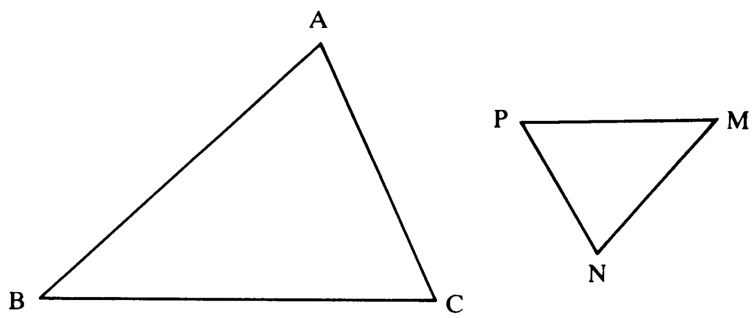
Le centre C se transforme en un point C'. Un point H du cercle devient H' et comme $3 = OH'/OH = OC'/OC$, il en résulte aussi que (les triangles OHC et $OH'C'$ sont semblables) $H'C'/HC = 3$ et ainsi, $H'C' = 3\ HC$ = trois fois le rayon r de c, c'est-à-dire que H' se trouve sur le cercle de centre C' et de rayon $3r$.

Il est facile de voir que deux triangles de côtés parallèles non égaux sont homothétiques. Comment trouve-t-on le centre de cette homothétie? De même, il est aisé de voir, et je vous laisse le faire, que deux cercles quelconques de rayon distinct sont toujours homothétiques. Quel est le centre de l'homothétie? Quel est son rapport?

Pareillement, l'image de toute figure par l'homothétie antérieure sera la même figure – même si la figure initiale est étrange – mais vue à travers une loupe qui augmente trois fois, et éloignée de O trois fois plus que la figure initiale.

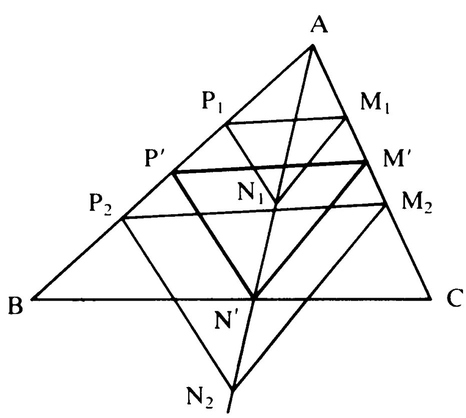
L'HOMOTHÉTIE EST PARFOIS TRÈS UTILE

L'homothétie semble une transformation très ennuyeuse, mais elle *est parfois très utile*. On vous donne un triangle ABC et un autre étrange, comme le triangle MNP de la figure suivante.



On vous demande alors de construire un triangle $M'N'P'$, de côtés parallèles à ceux de MNP et ayant ses sommets situés ainsi: M' sur la droite AC, N' sur BC et P' sur AB. Etrange problème! Essayez de le résoudre avant de continuer...

Si vous commencez en tâtonnant, ce qui est toujours très sain et très recommandable, en traçant des parallèles aux côtés de MNP, comme sur la figure suivante $M_1N_1P_1$, $M_2N_2P_2$,

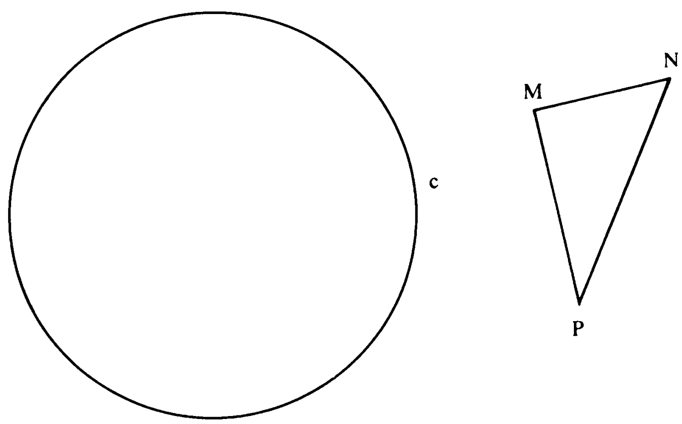


vous trouvez alors que le troisième sommet est parfois trop proche de A comme N_1 et parfois trop loin de A comme N_2, et à première vue, il semblerait bien difficile d'ajuster les parallèles pour que le troisième sommet se trouve sur BC. Mais si vous observez, à la lumière de la métamorphose de l'homothétie, les figures que vous êtes en train de dessiner, vous verrez tout de suite que $M_1N_1P_1$ et $M_2N_2P_2$ sont homothétiques de centre A. N_1 et N_2 sont alignés avec A et avec le point N_3 du triangle $M_3N_3P_3$ correspondant à n'importe quel autre essai! Il en est donc de même avec l'essai qui devrait donner le résultat cherché, N' se trouvant sur BC. Il est facile alors, de trouver N'.

Vous unissez A avec N_1 qui coupe BC en N'. Une fois situé le point N', il ne reste plus qu'à tracer $M'N'$ parallèle à MN et $N'P'$ parallèle à NP. Ainsi, $M'P'$ est nécessairement parallèle à MP, comme vous pouvez le vérifier, puisque $M'N'P'$ est semblable à MNP.

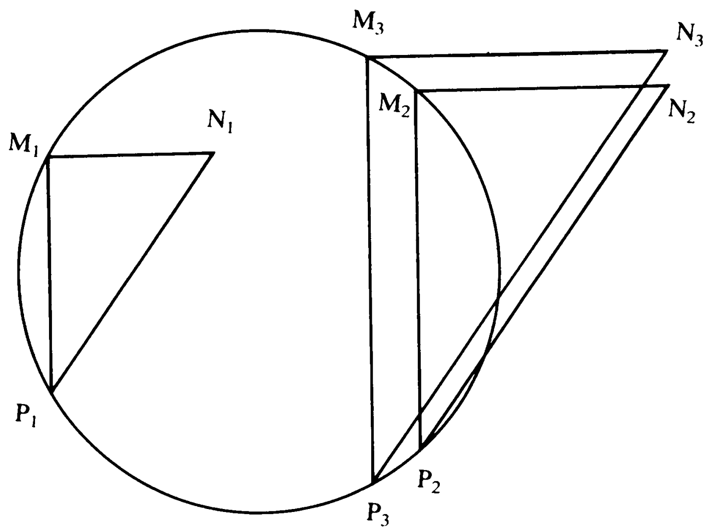
Comment résoudriez-vous maintenant le problème suivant? On vous donne un triangle ABC et on vous demande de construire un carré ayant un côté sur BC, un sommet sur AB et un autre sommet sur AC. Au travail! Il vous sera très facile de trouvez la solution compte tenu de ce que vous savez.

Et cet autre problème? On vous donne un cercle c et un triangle MNP. On vous demande de construire un triangle $M'N'P'$ de cotés parallèles à ceux de MNP et tel que $M'N'P'$ soient sur c.



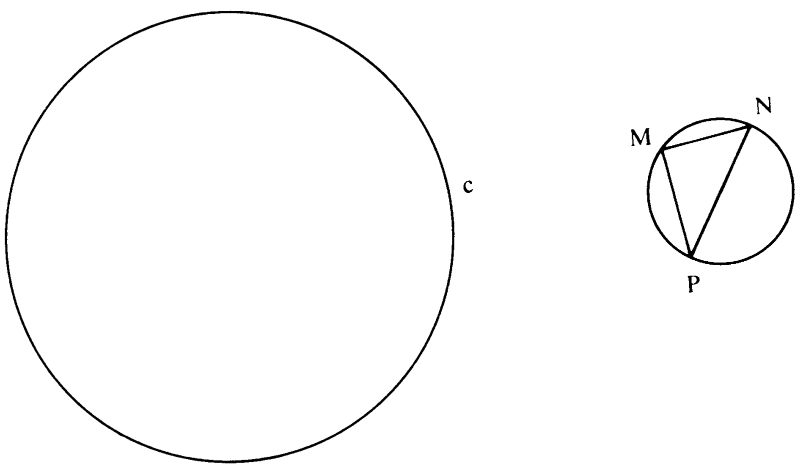
Avant de voir ensemble la solution, essayez de la trouver par vous-même...

Si vous avez essayé de procéder comme auparavant avec le triangle ABC, vous vous serez rendu compte bien vite qu'il y a des problèmes. Si vous tracez $M_1N_1P_1$ et $M_2N_2P_2$ et $M_3N_3P_3$ plus ou moins comme je l'ai fait sur la figure suivante,

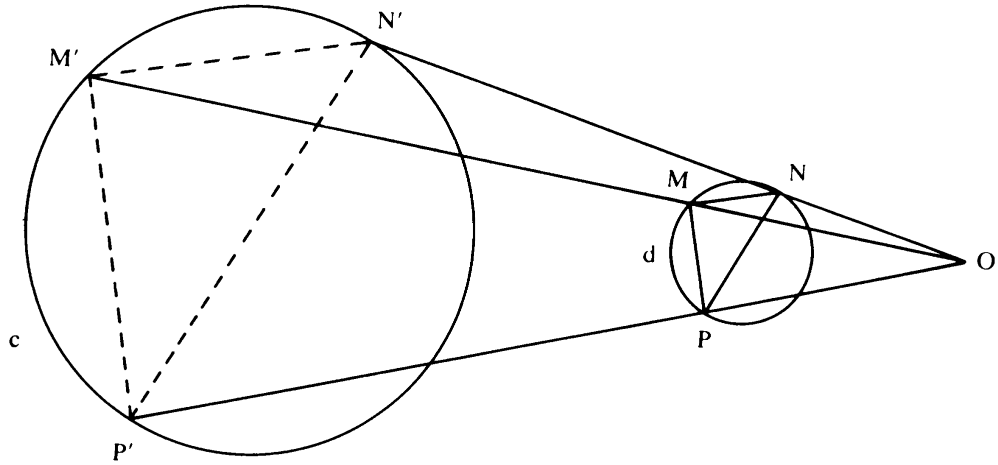


il est évident que N_1, N_2 et N_3 maintenant ne sont pas sur une droite. Les triangles $M_1N_1P_1$ et $M_2N_2P_2$ sont homothétiques et $M_1N_1P_1$ et $M_3N_3P_3$ le sont aussi, mais le centre de l'homothétie varie avec le choix de la sécante M_2P_2 parallèle à MP! Dans le problème des triangles, le centre était fixe: c'était le point A. Maintenant, il se déplace et nous sommes perdus. Réfléchissez encore au problème, peut-être en le retournant et en prenant une autre perspective...

Si on vous demandait de construire un cercle passant par *MNP*..., ce serait facile! Mais ce n'est pas ce qu'on vous demande; bien que, du moins, cela semble avoir un rapport avec votre problème. Pourquoi ne pas le faire? Au travail...! Les étincelles jaillissent en rapprochant les câbles adéquats. Voici:

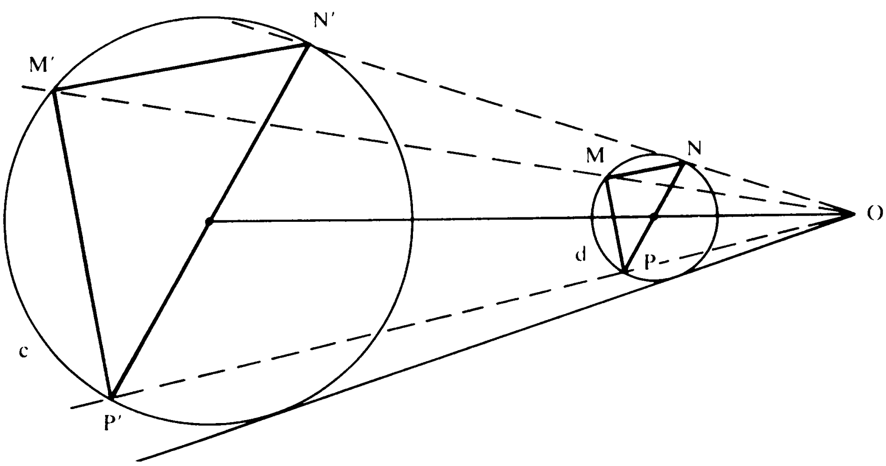


Quel rapport y-a-t-il entre ceci et ce qu'on vous demande? Vous ne savez pas encore construire exactement le triangle sur le cercle, mais vous pouvez déjà imaginer comment le faire et le construire approximativement. Souvenez-vous: *Supposons que le problème est résolu...* Nous aurions à peu près ceci:



Les deux figures se ressemblent, mais l'une est plus grande que l'autre... Est-ce que la grande peut être la transformée de l'autre par une homothétie? Le triangle que nous cherchons *M'N'P'* est clairement homothétique de *MNP*. Si nous savions comment sont situés *M'N'P'*, nous saurions trouver facilement le centre de son homothétie. Il suffirait d'unir *N'N*, *M'M* et *P'P* qui se coupent au centre de l'homothétie *O*. Mais nous ne connaissons pas *M'N'P'*; il est donc difficile de les unir à quelque chose.

Pourtant... les cercles *c* et *d*, que nous connaissons, sont aussi homothétiques et ont le même centre d'homothétie et le même rapport d'homothétie que *M'N'P'* et *MNP*. Il est alors facile de trouver *O*. Le point *O* se situe sur la droite qui unit les centres et sur la tangente commune aux deux cercles, comme l'indique la figure. (Savez-vous tracer la tangente commune à deux cercles avec une règle et un compas?)

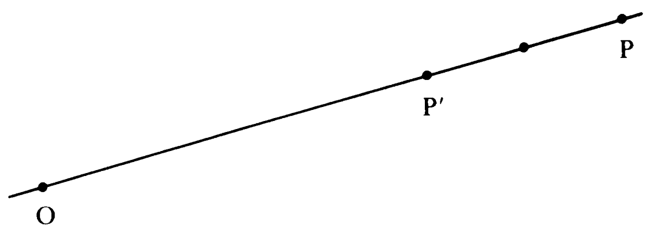


Maintenant, c'est plus clair. Il n'y a plus qu'à unir *O* avec *M*, *N*, *P* et à prolonger la droite d'intersection jusqu'à ce qu'elle coupe *c* en *M'N'P'* comme sur la figure. Le problème est ainsi résolu.

INVERSION. UNE MÉTAMORPHOSE PLUS AMUSANTE

L'homothétie est la métamorphose la plus ancienne de la géométrie. Thalès de Milet la connaissait et l'employa pour de multiples usages, tant pacifiques que guerriers, tels que mesurer la hauteur d'un arbre sans y grimper, calculer la distance d'un bateau à la côte pour lui catapulter un projectile, etc. De nombreux siècles passèrent, plus de vingt-quatre, avant que ne fasse son apparition une métamorphose beaucoup plus originale, l'inversion, inventée par Steiner, un curieux personnage de l'histoire des mathématiques, dont vous trouverez la vie dans les commentaires en fin du chapitre.

Prenons un point du plan O et un nombre R supérieur à zéro, par exemple 5. Chaque point P du plan, différent de O, va se transformer maintenant en un autre point P' situé sur la droite OP et tel que les distances OP et OP' respectent la relation $OP \cdot OP' = R^2$. Le point O s'appelle généralement centre ou pôle de l'inversion et le nombre R^2, puissance de l'inversion.



Par exemple, si $R = 5$ et $OP = 6$, alors $OP' = 25/6 = 4{,}1$

Comment se transforment, par inversion, les figures familières du plan?

Les points d'une droite r qui passe par O se transforment, clairement, en points de la même droite, comme dans l'homothétie. Mais, contrairement à celle-ci, plus P sera éloigné de O, plus P' sera proche de O, puisque pour $R^2 = 25$, $OP' = 25/OP$. Si P est à une distance de 1000 de O, alors $OP' = 0{,}025$. Si P s'approche de O, par exemple $OP=1/5$, alors $OP' = 125$, c'est-à-dire P' s'éloigne de O.

L'inversion a une propriété curieuse, qui lui donne d'ailleurs son nom. Si nous transformons P, nous obtenons P', un point du plan distinct de O. Mais P', comme tout point du plan distinct de O a aussi sa transformée P'', située sur la droite OP' (qui est la même que OP) et à la distance

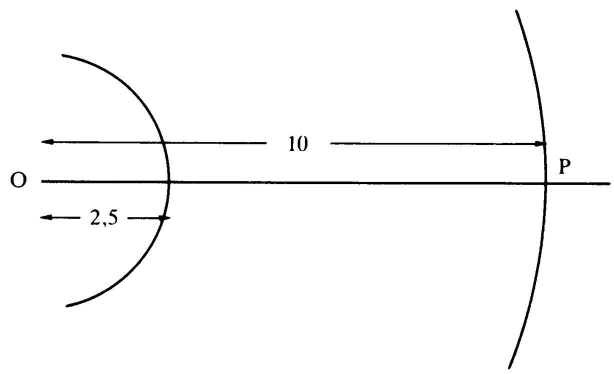
$$OP'' = 25/OP' = 25/(25/OP) = OP$$

Ainsi, P'' coïncide avec P. Si *la métamorphose est reproduite deux fois, nous obtenons le point de départ.* C'est le même phénomène qu'avec les nombres: l'inverse de l'inverse est le nombre initial.

POINTS INVARIANTS

Sur chaque demi-droite qui passe par le centre d'inversion, il existe un point tel que son inverse coïncide avec lui-même. En effet, si $OP=5$, alors $OP'=25/5=5$ et ainsi, P' coïncide avec P. On dit que P est *invariant* par l'inversion, c'est-à-dire qu'il ne varie pas quand on lui applique la transformation. Dans une machine qui change toute sorte de pièces de monnaie espagnoles en douros (pièce de 5 pesetas), les douros seraient les invariants pour la machine. Si vous mettez un douro, il en sort un douro. Evidemment, les points du cercle de centre O et de rayon 5 sont tous invariants. Nous savons donc en quoi se transforme une droite qui passe par le centre d'inversion et le cercle de centre O et de rayon R. Cette droite se transforme en elle-même et le cercle aussi. Mais il y a une différence: chaque point de la circonférence est invariant, alors que sur la droite, il n'y a que deux *points invariants*, tous les deux étant situés à une distance R d'un côté et de l'autre de O.

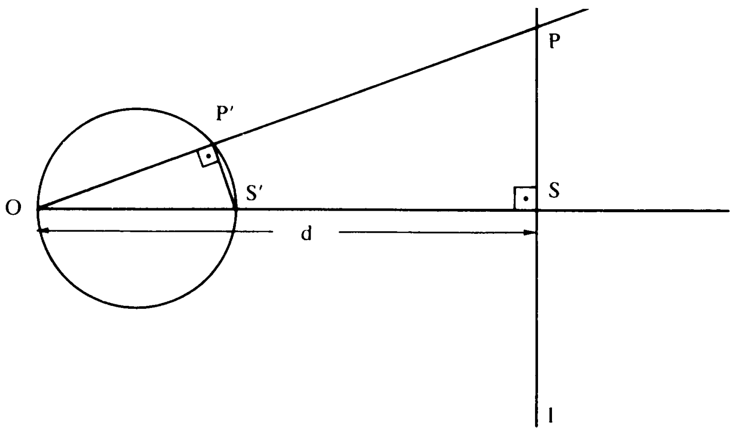
Jusqu'à maintenant, l'inversion paraît très ennuyeuse. Cette impression se renforce lorsque nous nous demandons, par exemple, quelle figure sera la transformée d'un cercle de centre O et de rayon 10. Si P est sur ce cercle, alors $OP = 10$, $OP' = 2,5$



et ainsi la figure inverse d'un cercle de rayon 10 est un autre cercle concentrique de rayon 2,5. En général, la figure inverse d'un cercle, dont le centre est le centre d'inversion et le rayon r, est un autre cercle de même centre et de rayon $r^* = R^2/r$. De sorte que, plus le rayon du cercle originel est grand, plus le cercle transformé a un petit rayon et inversement.

L'INVERSE D'UNE DROITE

Demandons-nous maintenant quelle sera la figure inverse d'une droite l qui ne passe pas par O, située à une distance d=8 de O. Le point S de l sur la figure deviendra S' situé à une distance $OS = R^2/d$.



Un autre point P de l deviendra P' et nous aurons $OP{\cdot}OP'=R^2=OS{\cdot}OS'$. Par conséquent, $OP/OS=OS'/OP'$ et ainsi les triangles OSP et $OP'S'$ sont semblables (angle en O commun et côtés adjacents à O proportionnels), mais... attention aux côtés homologues! Dans la similitude, OP correspond à OS' et OS à OP'; l'angle en P' est égal à l'angle en S et, par conséquent, est droit. *Le triangle OP'S' est rectangle en P'!* Comme ceci est valable pour tout point P sur la droite, il en résulte que *la figure inverse de la droite l qui ne passe pas par le centre d'inversion est le cercle de diamètre OS'*. (Il faut exclure de ce cercle le point O qui ne correspond à aucun point de la droite, ou si vous voulez, qui correspond au point de l'infini de la droite). Comme l'inverse de l'inverse est la figure initiale, il en résulte aussi que *la figure inverse du cercle de diamètre OS' est la droite l.*

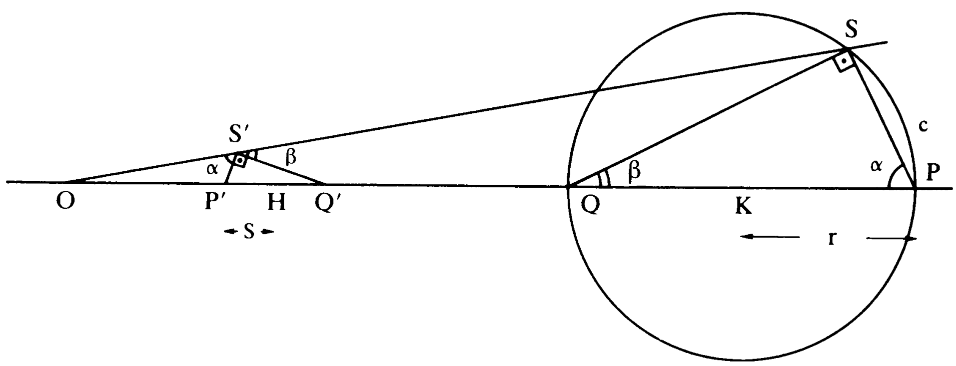
Notre métamorphose s'anime peu à peu:

Une droite qui passe par O ⟷ La même droite
Cercle centré en O ⟷ Autre cercle centré en O

Droite qui ne passe pas par O ⟷ Cercle qui passe par O
Cercle qui passe par O ⟷ Droite qui ne passe pas par O

Parmi les figures familières, il nous en manque une. Que peut-il se passer avec un cercle qui ne passe pas par O et n'est pas centré en O quand on le transforme par inversion?

Prenons un cercle comme dans la figure suivante.



Il y a un axe de symétrie qui apparaît clairement, la droite qui unit O au centre K du cercle c. Ainsi, la figure inverse sera aussi symétrique par rapport à cet axe OK. Tracez Q' inverse de Q et P' inverse de P (comme P est plus éloigné de O que Q, P' sera plus proche de O que Q'), et prenez un point quelconque S de c. Son inverse sera S' sur OS. Comme nous l'avons vu avant, OSP et $OP'S'$ sont semblables (attention aux côtés correspondants). Ainsi, les angles appelés α sont égaux. De même, OSQ et $OS'Q'$ sont semblables, et ainsi, les angles appelés β, supplémentaires de $OS'Q'$ et OQS, sont égaux. Mais, $\alpha+\beta = 90°$, car l'angle QSP est droit. Il en résulte donc que le triangle $P'S'Q'$ est aussi rectangle en S' et, par conséquent, S' se trouve sur le cercle de diamètre $P'Q'$. Comme ceci est valable pour tout S pris sur c, il en résulte que *la figure inverse de c est un autre cercle de diamètre $P'Q'$.*

Connaissant $OK=d$ et r le rayon de c, calculer le centre H et le rayon s du cercle transformé, n'est pas difficile quand on observe la figure:

$$OH = {}^1/_2\,(OP' + OQ'), \qquad OP' = R^2/OP, \qquad OQ' = R^2/OQ$$

$$OP = d + r, \qquad OQ = d - r, \qquad OH = R^2d/(d^2 - r^2)$$

$$s = OH - OP' = R^2d/(d^2 - r^2) - R^2/(d + r) = R\,r/(d^2 - r^2)$$

Le cercle inverse de c a son centre H sur OK à une distance de O, $OH = R^2d/(d^2-r^2)$ et son rayon est $s = R^2r(d^2-r^2)$.

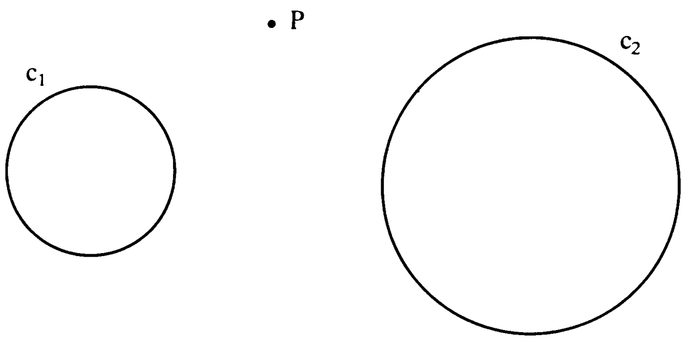
Observez que le centre H de c', transformé de c, n'est pas le point transformé du centre K de c, sauf si c se réduit à un point. Effectivement, si nous avions $OH{\cdot}OK=R^2$, alors $(R^2d)/(d^2 - r^2) \cdot d = R^2$ et $r = 0$, si bien que c serait réduit à un point.

Vous pouvez vous demander: peut-il y avoir un cercle c tel que son transformé c' coïncide avec lui-même? S'il en est ainsi, nous devons avoir $s=r$, c'est-à-dire, $s = R^2r(d^2-r^2) = r$, ce qui implique que, $d^2 = R^2+r^2$, et alors, effectivement, $OH = R^2d/(d^2-r^2) = d = OK$. *Par conséquent, si c' est tel que $d^2=R^2+r^2$, alors son transformé c' coïncide avec c.* (Observez que, comme dans le cas de la droite qui passe par O, il n'y a que deux points de c invariants, bien que la figure se transforme en elle-même dans son ensemble.)

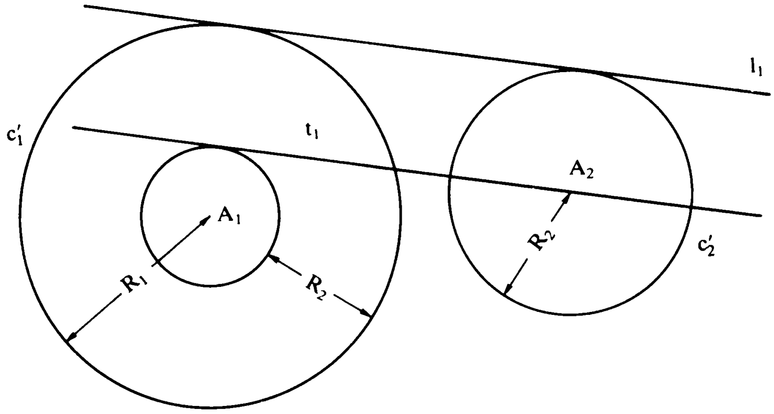
QUE PEUT-ON FAIRE AVEC L'INVERSION?

Vous en savez déjà long sur l'inversion. Que peut-on faire avec elle? De nombreuses choses et de très intéressantes. Voici une idée générale pour utiliser l'inversion avec profit. Comme vous l'avez vu, un cercle se transforme en une droite quand le centre de l'inversion se trouve sur le cercle. Supposez que vous cherchez un cercle qui doit satisfaire certaines conditions, entre autres celle de passer par un point donné O. Vous choisissez ce point O comme centre d'inversion, un nombre quelconque, par exemple $R=1$ ou tout autre, et vous transformez par inversion de centre O et de puissance R^2 tous les éléments du problème. Le cercle que vous cherchez, votre inconnu, devient une droite, qui doit satisfaire certaines conditions, les conditions transformées par inversion de celles qu'on vous a données. Généralement, trouver cette droite sera plus facile que trouver directement le cercle du début. Vous trouvez la droite qui résout le problème transformé. Vous inversez de nouveau, et vous obtenez le cercle recherché. Mais vous comprendrez mieux tout ceci par des exemples.

Problème: on vous donne un point P et deux cercles c_1 et c_2 qui ne passent pas par P, comme sur la figure suivante. On vous demande de tracer un cercle qui passe par P et soit tangent à c_1 et c_2.

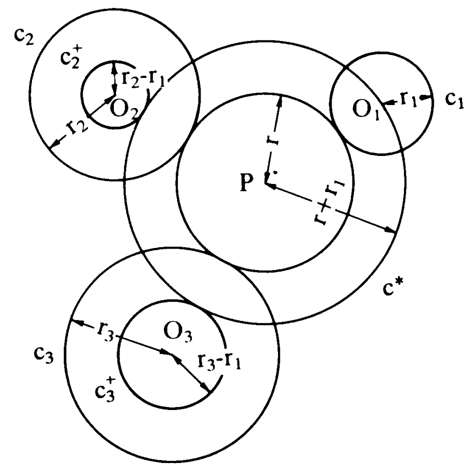


Vous ne savez rien du cercle que vous cherchez, seulement qu'il doit passer par P. Appelez-le c. Prenez P comme centre d'inversion avec R=1. Inversez. Le cercle c_1 devient un autre cercle c'_1 que vous savez construire. De même, c_2 se transforme en un autre cercle c'_2. Le cercle c qui était tangent à c_1 et c_2 devient une droite, l, que vous ne connaissez pas encore, mais qui doit être tangente à c'_1 et c'_2 (remarquez que si deux figures ont un seul point commun, leurs inverses n'ont aussi qu'un seul point commun). Quand vous avez trouvé cette droite l, vous construisez alors c par inversion de l. Ainsi, le problème se réduit à: *étant donné deux cercles* c'_1 *et* c'_2, *tracez une droite* l *tangente aux deux.*



Mais ce problème est très facile. Supposez que c'_1 et c'_2 se trouvent dans la situation indiquée sur la figure. Il y a clairement, quatre solutions l_1, l_2, l_3, l_4. Comment tracer l_1, par exemple? Regardez la figure ci-dessus. Vous ne savez pas comment est l_1, mais vous pouvez voir facilement que si vous tracez le cercle auxiliaire de centre A_1 et de rayon $R_1 - R_2$, l_1 est alors parallèle à la tangente t_1 depuis A_2 jusqu'à ce cercle. Or, cette tangente est très facile à tracer. Vous trouvez ainsi l_1 et de façon analogue l_2, l_3, l_4.

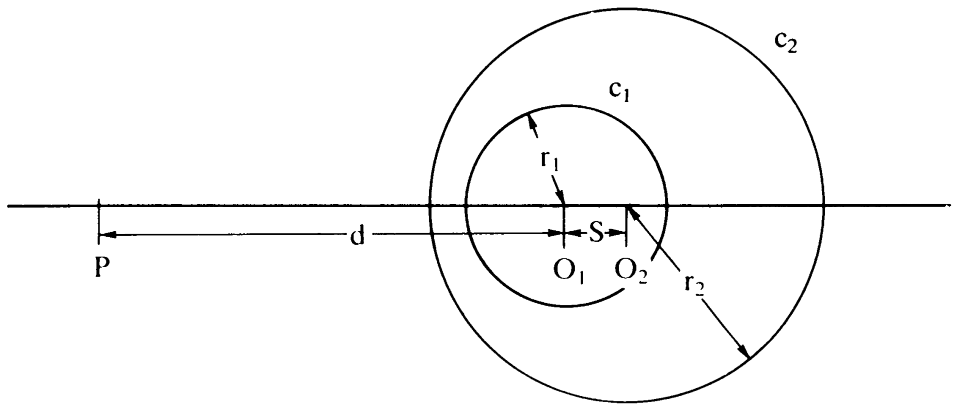
Steiner, l'inventeur de l'inversion, a dû se réjouir en remarquant que sa transformation résolvait très simplement un problème très célèbre depuis le III^e siècle avant J.C., *le problème d'Apollonius: tracer un cercle c tangent à trois autres donnés* c_1, c_2, c_3.



Supposez que les cercles c_1, c_2, c_3 se trouvent dans la situation de la figure ci-dessus. Nous pouvons dessiner c, approximativement tel qu'il apparaît sur la figure. (Souvenez-vous: supposons le problème résolu...) Le cercle c aura un centre P et un rayon r. Naturellement, vous ne connaissez ni P ni r, mais continuons et recherchons quelles propriétés aura c par rapport à c_1, c_2, c_3, qui ont, respectivement des rayons r_1, r_2, r_3. Si nous traçons un cercle c^* de centre P et rayon $r+r_1$, alors celui-ci passera par O_1 et sera tangent à c^+_2 de centre O_2 et de rayon r_2-r_1 et aussi à c^+_3 de centre O_3 et de rayon r_3-r_1. Ainsi, si nous arrivons à construire c^*, nous obtiendrons P et de cette façon, nous aurons résolu le problème. Or, construire c^* passant par O_1 et tangent à c^+_2 et c^+_3 est le problème que nous venons de résoudre. Ainsi, se trouve résolu simplement le problème d'Apollonius, qui fut considéré très difficile pendant des siècles. L'inversion a permis le miracle.

DROITES, CERCLES ET INVERSION

L'inversion est un instrument qu'il faut toujours penser à utiliser dans des problèmes où interviennent des *droites* et des *cercles*. Observez le phénomène suivant, utile et curieux: si deux cercles c_1, c_2, l'un à l'intérieur de l'autre, ne sont pas concentriques, aucune homothétie ne peut les transformer en deux cercles concentriques. En revanche, il est possible de trouver une *inversion* qui les transforme en deux cercles concentriques. Supposez que c_1 et c_2 sont situés comme l'indique la figure suivante.



Essayons de trouver un point P sur la droite O_1O_2 qui unit les centres, et un nombre R tel que l'inversion de centre P et puissance R_2 transforme les cercles c_1 et c_2 en c'_1 et c'_2 de façon que les centres de c'_1 et c'_2 coïncident. Nous ne savons pas où peut se trouver P, ni ce que peut être R, mais appelons d la distance inconnue de P à O_1, et s la distance *connue* entre O_1 et O_2. De même, r_1 et r_2 de la figure sont *connus*. D'après les formules que nous avons obtenues avant pour trouver le centre H de c'_1 nous savons que H doit être sur PO_1 et $PH = R^2d / (d^2 - r^2_1)$. De la même manière, le centre J de c'_2 sera sur PO_2 et $PJ = R^2(d + s)/[(d + s)^2 - r^2_2]$ Si nous voulons faire coïncider les centres, il faudra que $PH=PJ$ et ainsi

$$R^2d / (d^2 - r^2_1) = R^2(d + s) / (d + s)^2 - r^2_2$$

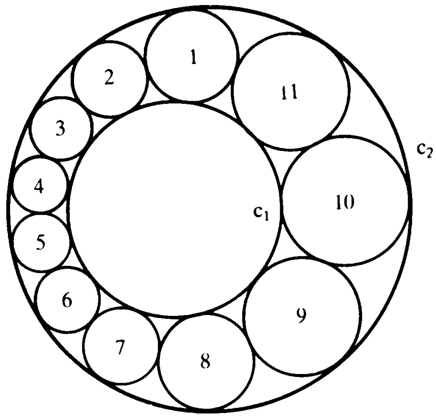
d'où il résulte que

$$d = \frac{r_2^2 - s^2 - r_1^2 \pm \sqrt{\left(r_2^2 - s^2 - r_1^2\right)^2 - 4s^2 r_1^2}}{2s}$$

et comme $r_2 > s + r_1$, il en résulte que $(r^2_2 - s^2 - r^2_1) > 2sr_1$ et $(r^2_2 - s^2 - r^2_1)^2 - 4s^2r^2_1 > 0$ d'où il existe des solutions réelles. Si bien que, en choisissant le point P ainsi déterminé comme centre d'inversion, et R quelconque, c'_1 et c'_2 seront concentriques.

Avec cet outillage, il est très simple de démontrer la curieuse propriété suivante, ce qui est assez difficile par d'autres procédés: si deux cercles c_1 et c_2, c_1 étant situé à l'intérieur de c_2, sont tels que l'on peut construire une chaîne de 11 cercles tangents, comme l'indique la figure, en partant d'un certain cercle 1, alors, on peut construire une telle chaîne de 11 cercles en partant d'un quelconque cercle tangent aux deux c_1 et c_2 .

Grâce à ce que nous venons de voir, nous savons qu'il existe une inversion qui transforme c_1 et c_2 en deux cercles concentriques c'_1 et c'_2. Les cercles 1, 2 , 3... 10, 11, se transforment chacun en cercles 1', 2', 3',..., 10', 11', tangents à c'_1 et c'_2 et formant une chaîne avec chaque cercle tangent aux deux adjacents.



Il est évident que c'_1 et c'_2 étant concentriques, cette chaîne peut tourner autour du centre commun. En inversant de nouveau la chaîne tournée convenablement, celle-ci nous donne une chaîne comme celle que nous cherchions parmi les cercles initiaux c'_1 et c'_2.

Bien entendu, 11 n'est pas un nombre magique pour ce problème. 15 ou 23 seraient également valables.

STEINER

On pourrait penser que pour être un bon mathématicien il faut commencer très tôt, dès la plus tendre enfance. Jakob *Steiner* (1796-1863), l'Apollonius des temps modernes, ce qui revient presque à dire le plus grand des géomètres, fut complètement analphabète jusqu'à l'âge où beaucoup de ses contemporains se préparaient à entrer à l'Université. Cinquième enfant d'une famille de paysans du canton suisse de Berne, il fut très occupé par les travaux des champs pendant son enfance. Il apprit à lire et à écrire à 14 ans, mais il lui arrivait de passer des nuits entières à contempler les étoiles et à penser que l'astronomie devait être la plus belle de toutes les sciences. A 18 ans, son désir d'apprendre fut plus fort que la volonté de ses parents, et il alla lui-même à une école que dirigeait à Yverdon un célèbre pédagogue, Pestalozzi, qui le reçut cordialement et l'admit gratuitement dans son centre. Ses professeurs de mathématiques reconnurent rapidement qu'il avait du génie. Normalement, il résolvait les problèmes qu'on lui proposait à l'instant même et de la façon la plus élégante possible. Il travaillait consciencieusement les problèmes les plus difficiles. A propos de l'un d'eux, il note ceci dans son journal: "Gefunden Samstag, den 10. Christmonat 1814, nachts ein Uhr; 3+3+4 Stunden daran gesucht". (Trouvé le samedi 10 décembre 1814, la nuit, à une heure, après avoir cherché pendant 3+3+4 heures).

Après un an et demi d'études à l'école de Pestalozzi, il alla à l'Université d'Heidelberg, décidé à se consacrer entièrement à la recherche mathématique. Pour vivre, il donnait des leçons particulières, tout en suivant des cours de mathématiques et de mécanique, ainsi que de physique, d'astronomie, de chimie, de sciences naturelles et d'histoire; ces derniers cours cependant, avec moins d'assiduité et moins d'intérêt. Après cinq semestres d'études, encouragé par un camarade, il se rendit à Berlin où il demanda un poste de professeur dans un des centres d'enseignement secondaire. Sa formation n'était certainement pas très équilibrée. En principe, il devait se soumettre à toutes sortes d'examens. Il refusa de passer ceux d'histoire et de latin. Le philosophe Hegel, l'un de ses examinateurs, trouva très superficiel son travail sur la nature de la mémoire et le raisonnement. En mathématiques, bien entendu, ce fut autre chose. Il devint maître auxiliaire intérimaire, mais l'année suivante, en 1822, le directeur du centre décida qu'il ne devait pas occuper de poste fixe. Steiner dut se chercher de nouveau des cours particuliers pour survivre. Il avait 26 ans. Il demeura ainsi, en tant que Privatlehrer, de 1822 à 1825, une des époques les plus fécondes et productives de sa vie mathématique. Il songeait à abandonner Berlin pour se trouver un mode de vie plus stable, lorsque deux événements eurent lieu et le retinrent: la création d'une nouvelle école, la *Gewerbeschule* (Ecole des Arts et Métiers), où il fut embauché comme professeur auxiliaire, et la création du *Journal* de Crelle, où il publia ses premiers travaux. En réalité, Crelle se décida à commencer la publication de ce qui allait devenir le fameux *Journal*, étant donné la qualité et la quantité des travaux de deux jeunes, le Suisse Steiner et le Norvégien Abel, qui avait alors 23 ans et allait mourir prématurément en 1829, à 27 ans, après avoir fortement affermi ce qui devait devenir l'algèbre moderne.

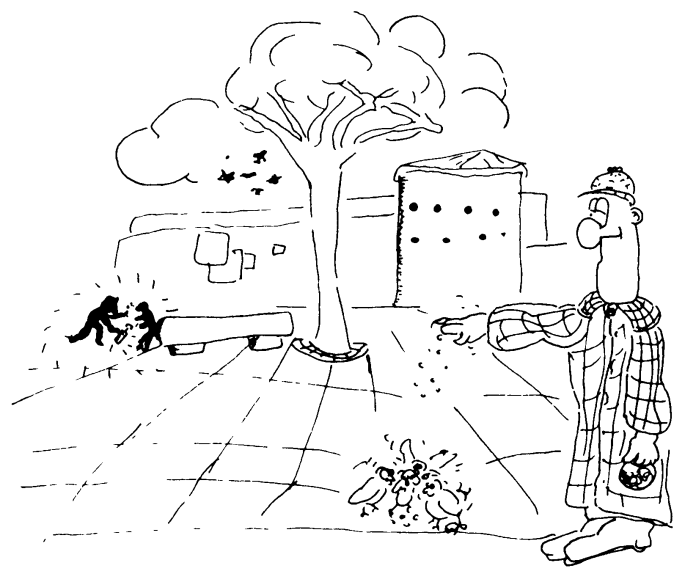
Pendant plusieurs années, Steiner demeura professeur auxiliaire, jusqu'à ce qu'il soit nommé professeur titulaire de la Gewerbeschule. Il fut de nouveau sur le point de quitter Berlin, à cause de certaines difficultés avec le directeur du centre et aussi, semble-t-il, à cause de problèmes de discipline avec ses élèves. Voici ce qu'écrit le maire de la ville, prenant partie pour le directeur; «Je dois avouer que je considère que c'est un grand avantage d'écarter un tel homme de l'enseignement, et ceci, quand bien même il serait Archimède lui-même! Il n'a aucune notion de ce qu'est la subordination et ne peut donc lui-même, maintenir la moindre discipline avec ses élèves. Qu'il retourne donc avec les siens dans les montagnes de son maudit pays, et qu'il cesse de corrompre nos Brandebourgeois»!

Mais la protection et l'amitié de la famille du baron Wilhelm von Humboldt (parent du fameux naturaliste Alexander von Humboldt) le tranquillise et il réussit à terminer en 1832 une de ses œuvres importantes *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Développement systématique de la dépendance entre les figures géométriques), qu'il dédia au baron.

A partir de là, tout est reconnaissance de sa valeur. En 1832, il est nommé *Doctor honoris causa* par l'Université de Berlin; en 1833, le roi de Prusse le nomme Professeur Royal; en 1834, il est admis membre de l'Académie des Sciences de Berlin. Il est très apprécié de ses nombreux et éminents collègues, tels que Jacobi, Dirichlet, Bessel, Crelle. Le reste de sa vie fut une succession de découvertes profondes en géométrie synthétique, à laquelle il consacra toute son énergie. Il mourut en 1863 à Berne, où il était retourné après de longues années pour se reposer et travailler avec deux de ses élèves, Schläfli et Sidler.

Pigeons, pigeonniers ... et le principe de Dirichlet

Imaginez-vous paisiblement assis sur un banc du parc. Autour de vous, un tas de pigeons picorent le sol. Vous les comptez... Il y en a 21. Soudain, un pétard éclate et les effraie. Ils s'envolent tous au pigeonnier qui se trouve en face et se cachent dans les trous du pigeonnier.Vous les comptez... Il y en a 20. Que pouvez-vous en déduire, Holmes? Il n'est pas nécessaire d'être un lynx, bien entendu, pour en conclure qu'au moins deux pigeons se sont mis dans le même trou. Et bien, ceci, qui semble être une vérité de Lapalisse, reçoit habituellement le pompeux nom de *principe de Dirichlet* ou le moins pompeux de *principe du pigeonnier.* Dirichlet, un des mathématiciens importants du XIX^{e} siècle, l'a longuement utilisé en travaillant sur la théorie des nombres, et a obtenu, grâce à lui, des résultats curieux, surprenants et profonds. Mais, avant de pénétrer dans la Mathématique pure, nous allons en voir une application commune.



Des pigeons dans un parc, un pigeonnier au fond...

Saviez-vous qu'à Madrid, en ce moment même, il y a plus de 20 personnes qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête? Ceci est une simple conséquence du principe du pigeonnier, comme vous le verrez. A Madrid, il y a plus de 4 000 000 d'habitants. Ils vont être nos pigeons. Personne ne peut avoir 200 000 cheveux; pour cela il faudrait une tête énorme, comme il n'en existe pas. Si bien que, chaque Madrilène doit avoir sur la tête, un nombre de cheveux pris parmi les nombres 0 (complètement chauve), 1, 2, 3, 4, 5 ..., 199 998, 199 999.

Ces 200 000 nombres seront les trous de notre pigeonnier. Quand le pétard éclate, chaque Madrilène court se réfugier dans le trou qui correspond à son nombre de cheveux. Si, dans chaque trou, se mettent 20 madrilènes ou moins, le nombre total de Madrilènes serait, tout au plus $20 \times 200\,000 = 4$ millions. Ainsi, comme les Madrilènes sont plus nombreux, cela veut dire que dans un même trou, se mettent plus de 20 Madrilènes, c'est-à-dire qu'il y en a plus de 20 qui ont exactement le même nombre de cheveux. Que pensez-vous de cette façon de compter sans compter?

UN RÉSULTAT DE DIRICHLET

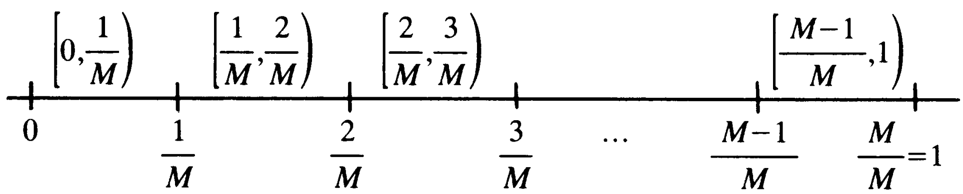
Voici *un des* curieux *résultats* que *Dirichlet* a obtenus avec le principe du pigeonnier. Pour tout nombre réel α, il existe une fraction p/q, telle que $|\alpha - (p/q| < 1/q^2$. Si α est lui-même une fraction, m/n, le résultat est bien clair si nous faisons $p=m$, $q=n$. Alors, effectivement,

$$|\alpha - (p/q)| = |\alpha - (m/n)| = 0 < 1/q^2.$$

Le problème devient intéressant, lorsque α n'est pas une fraction, c'est-à-dire, lorsque α est un nombre irrationnel. Nous supposerons que α est irrationnel et positif. S'il était négatif, il faudrait traiter le problème de la même façon. Quel rapport y a-t-il avec le pigeonnier? Regardez comment Dirichlet s'y est pris. Prenez un nombre entier quelconque M, plus grand que zéro. Par exemple, M pourrait être 235. Nous allons construire un pigeonnier de M trous. Pour cela, nous divisons l'intervalle de nombre entre 0 et 1 en M petits intervalles égaux. Les trous du pigeonnier seront les M intervalles de nombres suivants:

trou 1: tous les nombres entre 0 et $1/M$ ($1/M$ exclu)
trou 2: tous les nombres entre $1/M$ et $2/M$ ($2/M$ exclu)
trou 3: tous les nombres entre $2/M$ et $3/M$ ($3/M$ exclu)
....
trou M: tous les nombres entre $(M-1)/M$ et 1 (1 exclu)

Dans l'intervalle entre 0 et 1, nous pouvons les représenter ainsi

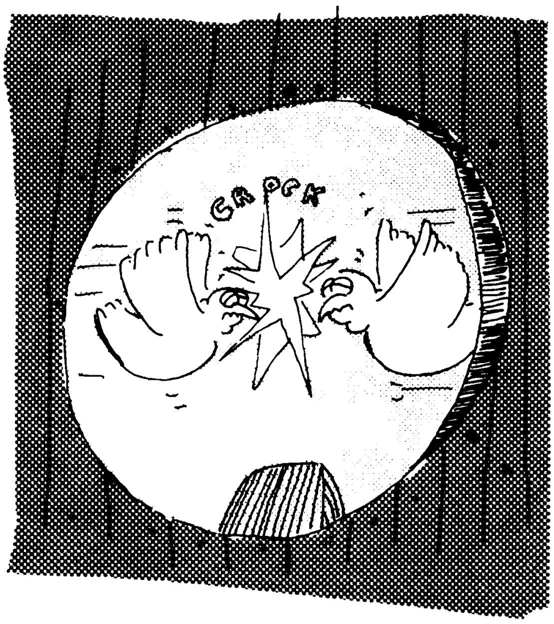


Quels vont être nos pigeons? Pour fabriquer les pigeons, qui vont être des nombres, nous prenons α et nous le multiplions par 0, 1, 2, 3, 4, ..., M, obtenant ainsi $0 \cdot \alpha = 0$, $1 \cdot \alpha = \alpha$, 2α, 3α, ..., $(M-1)\alpha, M\alpha$.

Tous ces nombres, sauf $0 \cdot \alpha = 0$, sont des nombres irrationnels, mais comme ils peuvent être supérieurs à zéro et que nos trous sont constitués de nombres entre 0 et 1, nous ne pouvons pas les mettre dans ces trous. Ce que nous ferons, c'est enlever à chaque $h \cdot \alpha$ sa partie entière, notée $[h\alpha]$, qui est le nombre entier égal ou immédiatement antérieur au nombre $h\alpha$; de cette façon, il nous reste $h\alpha - [h\alpha]$, qui est clairement un nombre entre 0 et 1. (On pourrait aussi écrire le nombre $h\alpha$ sous la forme décimale et lui enlever sa partie entière $[h\alpha]$, en conservant ce qu'il y a derrière la virgule). Voici donc nos $M+1$ pigeons, les nombres

$$0\alpha - [0\alpha] = 0,\ 1\alpha - [\alpha],\ 2\alpha - [\alpha],\ ...,\ M\alpha - [M\alpha]$$

qui eux se trouvent entre 0 et 1, si bien que, en les mettant dans les M trous de notre pigeonnier, il y en aura au moins deux d'entre eux, qui seront dans le même trou.



au moins deux pigeons dans le même trou...

Supposons que ce sont $s\alpha - [s\alpha]$ et $t\alpha - [t\alpha]$.

Ils sont dans le même trou, qu'est-ce que cela signifie? Clairement, que leur différence est plus petite que $1/M$. Supposons que s est plus grand que t et appelons $s-t=q$, plus grand que 0. Appelons aussi

$$[s\alpha] - [t\alpha] = p$$

Ainsi, p et q sont des nombres entiers si q est supérieur à zéro. Nous pouvons écrire, avec la nouvelle notation

$$| s\alpha - [s\alpha] - (t\alpha - [t\alpha]) | = | (s-t)\alpha - ([s\alpha] - [t\alpha]) | < 1/M$$

C'est à dire $| q\alpha - p | < 1/M$ et ainsi $| \alpha - (p/q) | < 1/Mq$. Mais comme $q = s - t \leq M$, car s et t sont entre 0 et M, il en résulte que

$$| \alpha - (p/q) | < 1/Mq \leq 1/q^2$$

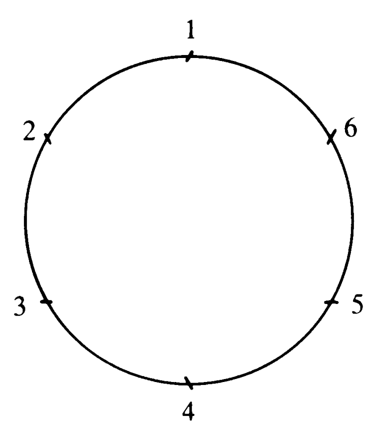
et nous atteignons ainsi le résultat recherché.

Il est facile de voir que nous obtenons même un peu plus. Il y a une infinité de fractions p/q telles que $| \alpha - (p/q) | < 1/q^2$. En effet, nous avons obtenu $| \alpha - (p/q) | < 1/Mq \leq 1/M$. Donc, si nous avons obtenu une première fraction p_1/q_1 telle que $| \alpha - (p_1/q_1) | < 1/q^2_1$ et si nous recommençons maintenant le même travail en partant d'un autre nombre M_2 au lieu de M tel que $1/M_2 < | \alpha - (p_1/q_1) |$, nous arrivons à p_2/q_2, tel que $| \alpha - (p_2/q_2) | < 1/M_2$, il en résulte alors que p_2/q_2 ne peut pas être égal à p_1/q_1. Nous avons ainsi obtenu une autre fraction distincte de p_1/q_1. En réitérant le procédé, nous obtiendrons autant de fractions différentes que nous voudrons.

UN RÉSULTAT DE RAMSEY

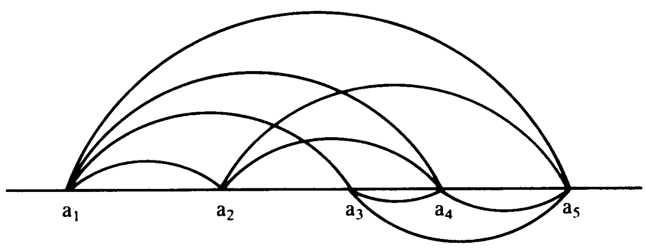
Voici le raisonnement de Dirichlet: si on veut ranger beaucoup d'objets dans peu de tiroirs, il y en aura forcément beaucoup dans un des tiroirs. Ce raisonnement permet d'obtenir un *résultat* célèbre de *Ramsey*, qui peut s'énoncer simplement de la manière suivante: sur un cercle, on prend six points. On les unit deux à deux, obtenant ainsi beaucoup de segments. Si vous dessinez les segments en rouge ou en vert, à votre choix, d'une façon ou d'une autre, vous obtiendrez toujours trois segments formant un triangle dont les côtés sont de la même couleur. Faites-en l'expérience, réfléchissez... et voyez si vous en découvrez une démonstration.

En voici une. Appelez les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 et dessinez-les ainsi:



Les segments qui partent de 1 sont 12, 13, 14, 15, 16. Quand vous les dessinez, certains seront rouges, d'autres verts, mais, comme il y en a cinq au total, il y en aura *au moins* trois de la même couleur. Supposez qu'il y en a trois rouges et que ce sont 13, 14, 15. Maintenant, faites attention. Si 34 est rouge, alors le triangle 134 est complètement rouge, et vous avez déjà ce que vous vouliez. Supposez maintenant que 34 est vert. Si 45 est rouge, tout le triangle 145 est rouge et vous avez fini. Mais supposons que 45 est vert. Si 35 est rouge, alors le triangle 135 est rouge. Supposez que même 35 est vert. Alors, tout le triangle 345 est vert. Dans tous les cas, il y a un triangle dont les trois côtés sont d'une même couleur.

Il existe une version infinie du théorème de Ramsey que l'on peut énoncer ainsi: nous avons l'ensemble infini dénombrable des points a_1, a_2, a_3... sur la droite des nombres réels et nous allons supposer qu'ils sont rangés de cette façon, $a_1 < a_2 < a_3 < ...$ On unit deux à deux tous les points par un arc et on colore chaque arc ainsi obtenu en rouge ou en vert, à notre gré. Qu'on le fasse d'une façon ou d'une autre, il y a toujours un sous-ensemble infini des points donnés a^*_1, a^*_2, a^*_3, ... tels que tous les arcs qui les unissent sont d'une même couleur. Comment peut-on démontrer qu'il en est toujours ainsi?



Considérez le point a_1. Il est uni à tous les autres par des arcs. Puisqu'il y a une infinité d'arcs, il y en aura une infinité d'une couleur; par exemple, soit $a_1a_3, a_1a_9, a_1a_{11}, a_1a_{27},...,$ verts. Eliminons maintenant, tous les autres points extrêmes des arcs qui, partant de a_1, ne sont pas verts, et restons avec $a_1, a_3, a_9, a_{11}, a_{27},...$ Nous appellerons le point a_1 *point vert* parce que tous les arcs qui en naissent et vont vers les points postérieurs qui nous restent, sont verts. Maintenant, considérons le point suivant qui nous reste après l'élimination des points que nous venons de faire. C'est-à-dire, considérons a_3 et les arcs qui unissent a_3 aux points suivants restants $a_3a_9, a_3a_{11}, a_3a_{27}$ ... Il existe une infinité de tels arcs et, ainsi, il y en aura une infinité d'une même couleur. Supposons que $a_3a_{11}, a_3a_{27}...,$ sont rouges. Pour ce qui suit, laissons de côté les autres points extrêmes des arcs qui partent de a_3 et qui ne sont pas rouges, ici par exemple a_9 ..., et nous dirons que a_3 est un *point rouge*, car les arcs qui en partent vers les points suivants restants sont tous rouges. Considérons ensuite, le premier des points restants, ici a_{11}, et procédons de la même façon. Nous obtiendrons un ensemble infini de points a_1, a_3, a_{11}, ... Chacun est un point rouge ou vert, selon notre nomenclature. Et il y en aura une infinité d'une même couleur. Supposons qu'il y en a une infinité de rouges. C'est notre succession que nous appelons, en changeant de nom, a^*_1, a^*_2, a^*_3, ... a^*_n ... Effectivement, les arcs qui unissent a^*_n à tous les points suivants sont rouges, mais par exemple celui qui unit a^*_1 à a^*_n l'est aussi, puisque a^*_1 est un point rouge et ainsi a^*_1 a^*_n est un arc rouge. Ceci démontre le théorème de Ramsey dans sa version infinie.

UN RÉSULTAT D'ERDÖS

Voici un autre beau résultat que l'on obtient en appliquant le principe du pigeonnier: *dans toute liste des* n^2+1 *premiers nombres naturels, il y en a toujours au moins* $n+1$ *d'entre eux qui sont en ordre (ascendant ou descendant).*

Par exemple, pour $n=2$, selon l'énoncé, si on vous donne une liste des 5 premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5 dans n'importe quel ordre, il y en a toujours au moins trois d'entre eux en ordre, du plus petit au plus grand ou du plus grand au plus petit. Essayez de faire une liste, pour démontrer que cet énoncé est faux, et vous serez convaincu que vous ne pouvez pas.

Par exemple, vous commencez, 5,1; 2,5,1; 2,5,1,4; vous avez déjà placé quatre nombres, et il n'y en a pas encore trois en ordre. Où placez-vous le 3? Quelle que soit la place choisie

$\underline{3}$,	$\underline{2}$,	5,	$\underline{1}$,	4	$\longrightarrow$	3,	2,	1
$\underline{2}$,	$\underline{3}$,	$\underline{5}$,	1,	4	$\longrightarrow$	2,	3,	5
$\underline{2}$,	5,	$\underline{3}$,	1,	$\underline{4}$,	$\longrightarrow$	2,	3,	4
$\underline{2}$,	5,	1,	$\underline{3}$,	$\underline{4}$,	$\longrightarrow$	2,	3,	4
2,	$\underline{5}$,	1,	$\underline{4}$,	$\underline{3}$,	$\longrightarrow$	5,	4,	3

vous aurez toujours trois nombres en ordre, ceux qui sont soulignés.

Comment peut-on démontrer qu'il va en être toujours ainsi quel que soit n? Essayez, ce n'est pas du tout facile.

Les nombres sont donc 1, 2, 3, 4,..., n^2+1 et ils sont en désordre. Comme ceci:

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_{n^2+1},$$

c'est-à-dire que a_1 est un des nombres, a_2 un autre, etc. Considérez a_1. Dans la liste qu'on vous a donnée, il doit y avoir des successions ascendantes de nombres qui commencent par a_1. Si l'une d'entre elles comprend $n+1$ éléments, alors nous avons terminé. Supposons qu'il n'y a aucune succession ascendante, de $n+1$ éléments qui commence par a_1. On peut alors affirmer, qu'il y aura une succession ascendante, commençant par a_1, qui contiendra un *nombre maximum* de nombres donnés. Appelons ce nombre maximum $1(a_1)$. Nous supposons que $1(a_1) \leq n$, car sinon, comme je l'ai dit précédemment, nous aurions terminé. Remarquez que $1(a_1)$ est un nombre supérieur ou égal à 1.

Considérez maintenant a_2. Dans la liste donnée, il y aura des successions ascendantes qui commencent par a_2. Si l'une comprend $n+1$ nombres, nous avons alors terminé. Supposons qu'il n'en est pas ainsi. Soit $1(a_2)$ le nombre des éléments de la succession ascendante la plus longue parmi celles qui commencent par a_2. Ainsi, $1 \leq 1(a_2) \leq n$. Nous considérons pareillement a_3, a_4...

Maintenant, considérons les nombres 1, 2, 3, ..., n et demandons-nous: combien de a_j de notre liste $a_1, a_2, a_3,..., a_{n^2+1}$ sont tels que $1(a_j) = 1$? Combien de a_j de notre liste sont tels que $1(a_j) = 2$? Combien de a_j de notre liste sont tels que $1(a_j) = n$? Si notre réponse était toujours un nombre inférieur ou égal à n, alors nous aurions au maximum n^2 nombres, ce qui est impossible, puisque les nombres donnés sont n^2+1. Il en résulte que (comme vous le voyez, nous avons utilisé le principe du pigeonnier) pour un nombre quelconque h compris entre 1 et n, il y a au moins $n+1$ nombres a_j de notre liste tels que $1(a_j) = h$. Ces $n+1$ nombres, que nous changeons de nom pour simplifier la notation, apparaissent dans la liste qu'on nous a donnée, $a_1, a_2, a_3,..., a_{n^2+1}$, comme

$$... b_1,... b_2, ..., b_3,..., b_{n+1}...$$

Mais, pour avoir $b_1 < b_2$? S'il en était ainsi, b_2 serait en tête d'une succession ascendante de h éléments et ainsi, si l'on met b_1 devant, b_1 serait alors en tête d'une succession ascendante de $h+1$ éléments. Or, nous avons décidé que le nombre maximum d'éléments des successions ascendantes commençant par b_1 était h. Donc, on doit avoir $b_1 > b_2$. De la même façon, peut-on avoir $b_2 < b_3$? Non, par le même raisonnement qu'avant. Et ainsi de suite, jusqu'à la fin. Nous obtiendrons ainsi

$$b_1 > b_2 > b_3 > ... > b_{n+1}$$

et par conséquent, nous avons une succession descendante de $n+1$ éléments de la liste donnée. Comme vous le voyez, il y a au maximum, soit une succession ascendante d'au moins $n+1$ éléments, soit une sucession descendante d'au moins $n+1$ éléments. N'est-ce pas magnifique?

Vous avez pu observer dans ce chapitre et les précédents, une des particularités frappantes des mathématiques. Des principes et des observations très simples produisent, après une élaboration rationnelle peu compliquée, des énoncés qui, lorsqu'on les voit pour la première fois, semblent appartenir à un ordre d'idées complètement différent.

Il en est de même avec le phénomène, encore plus surprenant, de l'application de la Mathématique au monde de la réalité. Il est vrai que nous empruntons à la réalité les principes sur lesquels nous basons notre édifice mathématique et que les connexions de notre esprit prétendent imiter d'une certaine manière les lois de fonctionnement du monde extérieur. Pour certains, ceci suffit à dévoiler le mystère de l'application des mathématiques. Mais les principes mathématiques de base sont jusqu'à un certain point, des mutilations d'une réalité beaucoup plus riche et, de même, il est presque certain que nos lois logiques n'approchent que très grossièrement le fonctionnement réel du monde extérieur. Et pourtant... c'est sur ces principes et avec cette logique que nous nous construisons un édifice mental qui, par la suite, se révèle capable de prévoir des phénomènes réels avec une exactitude surprenante. Cette situation est, pour des mathématiciens et des scientifiques en général, une perpétuelle source d'étonnement, fort bien exprimée par un célèbre Prix Nobel de Physique, *E.P. Wigner*, dans un article très justement intitulé «L'efficacité irraisonnable de la Mathématique dans les sciences naturelles»: «Le miracle de l'adaptation du langage mathématique à la formulation des lois physiques est un don merveilleux que nous ne comprenons ni ne méritons pas. Nous devrions en être reconnaissants et espérer qu'il demeurera valable dans la recherche future et qu'il s'étendra, pour le bien ou pour le mal, pour notre plaisir mais aussi peut-être pour notre perplexité, à des branches plus vastes du savoir».

Ce que dit N. Bourbaki à ce sujet, dans un article sur «L'architecture des mathématiques», est aussi remarquable: «L'existence d'une relation étroite entre les phénomènes expérimentaux et les structures mathématiques semble se confirmer pleinement, de façon tout à fait inespérée, par les découvertes les plus récentes de la physique contemporaine. Mais nous ne savons absolument rien des fondements de ce fait (en supposant qu'on puisse trouver réellement une signification à ces mots), et peut-être, n'arriverons-nous jamais à le savoir».

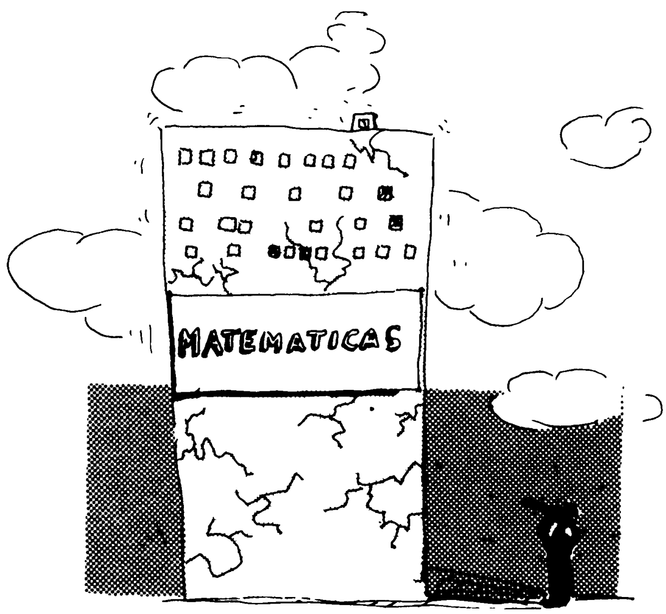
Chapitre 7

Sur l'infini

UNE PETITE HISTOIRE

Je ne résiste pas à la tentation de vous raconter une petite histoire. Après tout, bien qu'elle me paraisse amusante, vous pouvez parfaitement ne pas la lire et passer directement quelques pages plus loin, où nous commencerons à utiliser la récurrence mathématique comme une des méthodes de traitement de l'infini.

Dès les débuts de l'histoire de la Mathématique, on a cherché une méthode mathématique de traitement adéquat des processus infinis. En réalité, les nombres naturels 1, 2, 3,..., eux-mêmes, par lesquels débutent les mathématiques, constituent, avec leur apparente simplicité, un premier essai d'élévation de cette tour. Les point de suspension que nous écrivons derrière 1, 2, 3 sont les premières marches de notre montée vers l'infini mathématique. Les Pythagoriciens, au VI^{e} siècle avant J.C., pensèrent qu'essentiellement les nombres naturels leur suffiraient pour interpréter mathématiquement toute la réalité. Comme nous l'avons vu précédemment (chap. 2), ils ont dû être surpris en constatant que, dans le symbole même de leur fraternité religieuse, le pentagramme, un monstre incompréhensible, le *nombre irrationnel*, s'était caché. Les paradoxes de Zénon (Achille et la tortue, etc.) apparurent et mirent en évidence que nos idées de l'infiniment petit étaient bien loin d'êtres claires. La même confusion eut lieu plus tard avec les paradoxes de Galilée sur l'infiniment grand. La situation sembla se redresser à la fin du XIX^{e} siècle, lorsque Weirstrass et Dedekind réussirent, en réinterprétant et en mettant à jour de vieilles théories des Grecs, à baser le traitement du nombre irrationnel sur les nombres naturels et à donner des règles bien claires pour l'utilisation adéquate de l'infiniment petit. Avec ses nouvelles idées sur les ensembles infiniment grands – nous en avons vu certaines (chap. 4) –, Cantor sembla ouvrir les portes d'un nouveau *paradis*, comme Hilbert appela ce monde des infinis et superinfinis. Mais des nuages obscurs se profilèrent à l'horizon. Nous avons vu comment, pour tout ensemble infini I que nous pouvons fabriquer, l'ensemble formé par ses sous-ensembles, c'est-à-dire l'ensemble $P(I)$ des parties I, est un ensemble plus infini que I, c'est-à-dire que ses éléments ne peuvent être étiquetés en utilisant comme étiquettes les éléments de I. Nous avons ainsi une méthode qui permet de construire une échelle pour nous élever à des ensembles de plus grande infinité... jusqu'où? Nous pouvons penser que l'ensemble U de toutes les choses pensables est l'univers entier, qu'il ne peut pas y avoir d'infini plus grand... Mais l'ensemble $U^* = P(U)$ des parties de U est encore plus infini, et l'ensemble $P(P(U))$ l'est encore plus, et ainsi de suite indéfiniment...

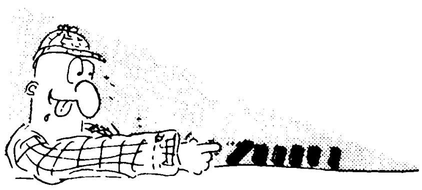


...l'édifice des mathématiques est ébranlé...

De nombreux et nouveaux paradoxes commencèrent à ébranler l'édifice des mathématiques dans ses fondations mêmes. En 1925, Hilbert, un des mathématiciens les plus prestigieux de notre siècle, se donna, dans un célèbre discours intitulé comme ce chapitre, *Uber das Unendliche*, la tâche d'assainir les fondations de la Mathématique en démontrant, par des méthodes indiscutables, la *consistance* des mathématiques, en d'autres termes, l'impossibilité, si on raisonne correctement à partir des axiomes, d'arriver quelquefois à une contradiction, c'est-à-dire à une proposition A et à sa négation non A. Quelques années plus tard, en 1931, Kurt Gödel détruisit toute espérance d'arriver à cet objectif. Gödel démontra que, dans tout système mathématique suffisamment puissant pour qu'on puisse y développer l'arithmétique ordinaire, celle des nombres naturels, *il existe des propositions P, parfaitement sensées à l'intérieur du système, qui sont indéterminables, c'est-à-dire que P ne peut pas être démontré, mais non P non plus... et c'est l'une d'elles qui précisément affirme la consistance du système.*

LA CONSISTANCE DU SYSTÈME

La confiance des mathématiciens dans la solidité de leur édifice s'appuie sur l'expérience de leurs 25 siècles d'existence, illuminés par leurs succès indiscutables, mais aussi, en même temps, par leurs périodes de clairs-obscurs et d'angoisses sur la sûreté de leur science, spécialement lorsqu'une découverte importante est apparue à l'horizon: nombres irrationnels, calcul infinitésimal, géométries non euclidiennes, crises des fondements, théorèmes de Gödel... En général, leur attitude face à ces situations a été de suivre le chemin le plus prometteur, en ce qui concerne l'interprétation mathématique de la réalité... Et il en est toujours ainsi aujourd'hui. Il y a cependant une différence: les mathématiciens d'aujourd'hui, qui ont le plus réfléchi au sens de l'activité de leur science, se rendent compte, contrairement à beaucoup de leurs prédécesseurs des siècles passés, que la Mathématique n'est pas le bastion infaillible de la certitude fondée sur un roc, d'où on peut regarder avec un certain mépris les autres sciences, mais qu'elle participe beaucoup du caractère empirique et expérimental de celles-ci.



...le jeu de la récurrence...

Récurrence. Une autre façon de traiter l'infini.

Laissons maintenant les contemplations philosophiques et passons à l'action. Comment utilise-t-on l'infini mathématique? Nous avons déjà vu quelques méthodes. La méthode de descente de l'infini peut être utilisée avantageusement pour démontrer que parmi les nombres naturels il n'y a pas de nombres qui vérifient telle ou telle propriété. Le procédé diagonal de Cantor nous a permis de nous élever d'un infini à un autre. En réalité, la plupart des méthodes mathématiques inventées, calcul infinitésimal, calcul intégral..., sont des méthodes pour traiter des situations où apparaissent, sous un aspect ou sous un autre, des processus infinis.

LA RÉCURRENCE

Une des méthodes les plus simples, utilisée systématiquement de façon explicite pour la première fois par Pascal, est le principe de *récurrence*. En voici l'idée. Vous avez les 28 dominos du jeu. Vous êtes sûr que vous les avez placés debout, en file indienne, de telle façon que si l'un tombe, le suivant tombe à coup sûr. Quelqu'un fait tomber le premier sur le second. Conclusion? Ils vont tous tomber! Vous pouvez concevoir les nombres naturels 1, 2, 3, 4, ..., comme des dominos. Supposez que vous pouvez être sûr que vous pouvez *démontrer* que si l'un quelconque d'entre eux h possède une certaine propriété P, alors le suivant $h+1$ la possède aussi. Vous vous assurez ensuite que le premier de tous a la propriété P. Conclusion? C'est clair: tous les nombres naturels ont la propriété P. Cette méthode si simple est la récurrence. Naturellement, vous pouvez parfois démontrer que le 4 a la propriété P. Alors, vous en concluez que tous les nombres à partir du 4 ont la propriété P. Le fait que *si l'un des h possède la propriété P, le suivant* $h+1$ *la possède aussi est la démarche importante.* Si h possède la propriété P, on l'appelle habituellement *hypothèse de récurrence*. Observez que cette importante démarche antérieure ne démontre rien par elle-même! C'est comme si vous placiez les dominos debout, en file indienne, sans savoir que le premier est tombé. Ce n'est pas très utile non plus, si vous voulez généraliser un résultat *à tous les nombres*, de savoir que tous les nombres de 1 à 57 ont une certaine propriété P si vous ne démontrez pas que si h la possède, $h+1$ la possède aussi. Par exemple, ils possèdent tous la propriété P, *être plus petit que h,* mais il est évident que vous ne pouvez pas démontrer que si h est plus petit que 58, $h+1$ l'est aussi. Ici, 57 possède cette propriété, mais pas 58.

La méthode de récurrence résout une multitude de problèmes et de jeux. Vous commencez par faire l'expérience avec des petits nombres. Lorsque vous avez suffisamment exploité la situation, vous commencez à en deviner les règles, et vous trouvez facilement une conjecture. Avec 1, il se passe ceci, avec 2 de même, avec 3 aussi... Ce qui revient à dire que 1 possède une certaine propriété, 2 aussi, 3 aussi... *Est-il possible que tout n la possède aussi ?* Comment le démontrer? Vous supposez alors que h la possède, et à partir de là, vous démontrez que $h+1$ la possède aussi. C'est clair. *Tout n possède la propriété.* Voyons-en quelques exemples.

PAR EXEMPLE NOMBRE DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE DE n ÉLÉMENTS

a) Quel est *le nombre de sous-ensembles d'un ensemble* de n éléments?

Commençons par chercher une notation adéquate. Soit $C_n = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. Expérimentons:

Si $n=1$, $C_1 = \{a_1\}$. Sous-ensembles de C_1 : ϕ , $\{a_1\}$. Il y en a 2.

Si $n=2$, $C_2 = \{a_1, a_2\}$. Sous-ensembles de C_2: ϕ, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$. Il y en a 4.

Si $n=3$, $C_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Il y a 8 sous-ensembles de C_1: ϕ , $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Conjecture: Pour C_n, y en aura-t-il 2^n?

Essayons de la démontrer par récurrence. Supposons que si $n=h$, alors il y a effectivement 2^h sous-ensembles de C_h (hypothèse de récurrence). Avec cette hypothèse, nous essayons de démontrer que $C_{h+1} = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_h, a_{h+1}\}$ possède 2^{h+1} sous-ensembles.

Comment forme-t-on les sous-ensembles C_{h+1} ? Si nous regardons comment nous avons formé ceux de C_2 à partir de ceux de C_1 ceux de C_3 à partir de C_2 ... nous nous rendons rapidement compte que ceux de C_{h+1} sont, d'une part, les mêmes que ceux de C_h, et, d'autre part, ceux-ci mêmes, en ajoutant à chacun a_{h+1}. Il est alors évident que ceux de C_{h+1} sont deux fois plus nombreux que ceux de C_h Comme nous supposions que ceux de C_h étaient 2^h, il en résulte alors que ceux de C_{h+1} sont 2^{h+1}, si bien que le résultat est ainsi démontré. Le nombre de sous-ensembles de C_n est 2^n.

UNE PROPRIÉTÉ DES NOMBRES PREMIERS

b) *Démontrer que pour tout nombre premier p et tout nombre naturel n, on vérifie* $n^p - n = \dot{p}$.

Essayons de le faire par récurrence. Ici la conjecture nous donne le résultat. Nous n'avons pas à expérimenter beaucoup. Nous vérifions que, pour $n = 1$, $1-1 = 0 = \dot{p}$, et ainsi la proposition donnée est vraie pour $n = 1$.

Supposons que pour h on vérifie $h^p - h = \dot{p}$. Voyons si nous pouvons en déduire qu'alors on vérifie aussi $(h+1)^p - (h-1) = \dot{p}$. Comment? En essayant de ramener ceci au cas h.

$$(h+1)^p - (h+1) =$$

$$\left[h^p + \binom{p}{1} h^{p-1} + \binom{p}{2} h^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} h + 1\right] - (h+1) =$$

$$\left[h^p - h\right] + \left[\binom{p}{1} h^{p-1} + \binom{p}{2} h^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} h\right]$$

Nous supposons (hypothèse de récurrence) que $h^p - h = \dot{p}$. Si nous réussissons à voir que

$$\left[\binom{p}{1} h^{p-1} + \binom{p}{2} h^{p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1} h\right]$$

est multiple de p, alors tout est fait. Observez les coefficients du binôme qui interviennent dans l'expression ci-dessus pour les nombres premiers successifs p

	1 2 1
$p = 3$	1 3 3 1
	1 4 6 4 1
$p = 5$	1 5 10 10 5 1
	1 6 15 20 15 6 1
$p = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
	. . . .

L'expérience semble indiquer qu'il va être vrai que $\binom{p}{j}$ est multiple de p, si $1 \le j \le p-1$. Comment s'en assurer? Comment est $\binom{p}{j}$?

$$\binom{p}{j} = \frac{p!}{J!\,(p-j)\,!} = p\,\frac{(p-1)\,!}{j!\,(p-j)\,!}$$

Le nombre $\binom{p}{j}$ est un nombre entier qui coïncide avec celui de droite de l'égalité. Le nombre p du numérateur de cette expression est un nombre premier et ainsi, il ne peut être simplifié avec aucun de ceux du produit que constitue le dénominateur, car $1 \le j \le p-1$ et $1 \le p-j \le p-1$. Donc, p figure entre les facteurs premiers de $\binom{p}{j}$, c'est-à-dire que $\binom{p}{j}$, si $1 \le p-j \le p-1$, est un multiple de p. Ainsi, nous avons démontré que si la proposition est vraie pour h, elle l'est aussi pour $h+1$. Comme elle l'était pour $n=1$, *la propriété énoncée est démontrée pour tout n.*

POUR TOUT N NATUREL, ON A

c) *Démontrez que pour tout n naturel, on a*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

Si $n=1$, $1 < 2\sqrt{1}$. Vrai.

Si $n=2$, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$. Vrai.

Supposons que c'est vrai pour $n=h$, c'est-à-dire, supposons (hypothèse de récurrence) que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{h}} < 2\sqrt{h}$$

Nous devons alors établir que

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{h+1}} < 2\sqrt{h+1}$$

Est-ce vrai? En utilisant l'hypothèse de récurrence, nous pouvons écrire

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{h}}\right)+\frac{1}{\sqrt{h+1}}<2\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}$$

et notre tâche sera terminée si nous arrivons à prouver que

$$2\sqrt{h}+\frac{1}{\sqrt{h+1}}<2\sqrt{h+1}$$

Ceci revient à démontrer que

$$2\sqrt{h(h+1)}+1<2(h+1)$$

et ceci, à son tour, revient à démontrer que

$$2\sqrt{h(h+1)}<2h+1$$

ce qui, en élevant au carré, revient à démontrer que

$$4h(h+1)<4h^2+4h+1=4h(h+1)+1$$

En simplifiant, il suffit de démontrer que

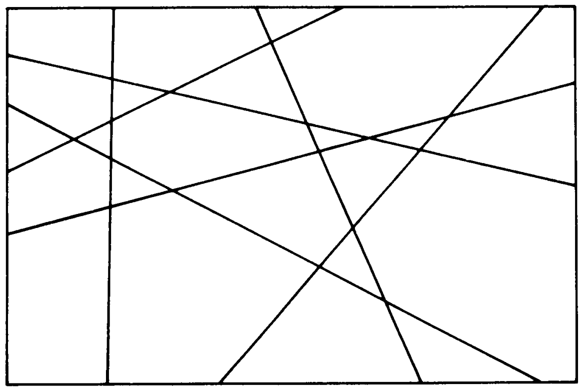
$$0<1$$

ce qui est vrai, sans aucun doute. Il en résulte ainsi que si la propriété est vraie pour h, alors elle l'est aussi pour $h+1$. Comme elle est vraie pour 1, elle est donc vraie pour tout n.

LE THÉORÈME DES DEUX COULEURS

d) Parfois, le principe peut être appliqué là où les nombres naturels ne semblent pas figurer explicitement. Observez l'exemple suivant. Prenez une feuille de papier. Tracez-y un nombre quelconque fini de droites. Imaginez que ce qui en résulte est la carte d'un certain monde imaginaire. Chaque région délimitée par quelques-unes des droites est un pays. Vous avez deux crayons de couleur, blanc et gris, et vous voulez colorier la carte correctement de façon que deux pays ayant un segment de frontière en commun soient de couleur distincte, comme il se doit. S'ils ont seulement un point, ou aucun, de frontière commune, peu importe qu'ils aient la même couleur, car on les distingue suffisamment. Est-il toujours possible de réaliser cette tâche? Oui? Non? Si c'est oui, pouvez-vous indiquer une démarche adéquate, c'est-à-dire un procédé tel que, en le suivant pas à pas, vous atteigniez votre objectif dans n'importe quel cas?

Essayons de procéder par récurrence sur le nombre de droites que nous avons tracées au début sur notre plan. S'il n'y a qu'une droite, c'est très clair. Il n'y a que deux pays et ainsi l'un est blanc et l'autre gris. Supposons que chaque fois qu'il y a h droites, on peut colorier les pays des deux couleurs. Prenons le cas de h+1 droites. Si nous en enlevons une, celle que l'on veut, nous avons une carte déterminée par h droites. Nous la colorions convenablement car nous supposons que c'est possible (hypothèse de récurrence).



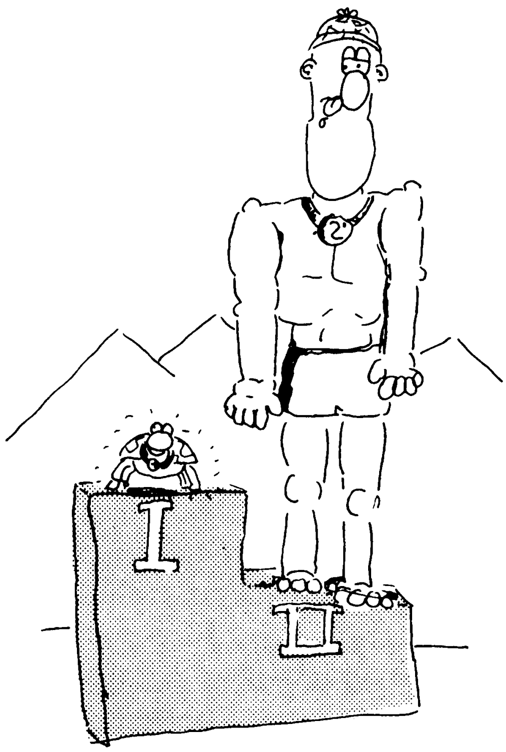
Si nous réintégrons la droite que nous avions enlevée, celle-ci divise la feuille en deux parties. Certains pays de la carte antérieurement coloriée seront aussi divisés, d'autres non. Laissons telles quelles les couleurs d'une des deux parties de la feuille que la nouvelle droite a déterminée. Changeons les couleurs de l'autre partie de la feuille. Le blanc devient gris, le gris devient blanc. Constatez maintenant que les pays de la carte de h+1 droites sont parfaitement coloriés. Nous avons ainsi vu que si la propriété est vraie quand il y a h droites, elle l'est aussi quand il y a h+1 droites. Comme pour une droite il était bien clair que la propriété était aussi vraie, il en résulte que celle-ci est vraie pour n'importe quel nombre de droites.

Cette démonstration nous procure, en outre, une assez bonne méthode pour atteindre notre but. Considérons initialement une seule des droites. Colorions. Ajoutons une droite. Changeons les couleurs d'un côté de cette droite. Ajoutons une autre droite. Changeons les couleurs d'un côté... S'il y a beaucoup de droites, c'est un peu compliqué. Il y a trop de changements de couleurs, ce qui est peu pratique. Pouvez-vous imaginez une stratégie plus simple?

PYTHAGORE
ET
GAUSS

e) *Sauriez-vous démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est un carré parfait?*

Pythagore l'a découvert, en plaçant des cailloux sur le sable de la plage.



La tortue et Achille

Gauss, à 5 ans, l'aurait démontré de cette façon: les n premiers nombres impairs sont

$$\begin{array}{lllll} 1, & 3, & 5, & 7, \ldots, 2n-1 \\ 1^{er}, & 2^{e}, & 3^{e}, & 4^{e}, \ldots, n\text{-ième} \end{array}$$

Appelons S_n la somme de ceux-ci, et écrivons-la de deux manières

$$\begin{array}{lllllll} Sn = & 1 & + \ 3 & + \ 5 & + \ldots + & (2n-3) & + (2n-1) \\ Sn = & (2n-1) & + (2n-3) & + (2n-5) & + \ldots + & 3 & +1 \end{array}$$

Additionnons

$$2S_n = 2n + 2n + 2n + 2n + \overset{n \text{ fois}}{\ldots} + 2n + 2n = 2n^2$$

$$S_n = n^2$$

Essayez maintenant de le faire par récurrence. Tout va bien pour le premier nombre impair $1=1^2$. Supposons que, lorsque nous additionnons les h premiers nombres impairs, il est vrai que

$$S_h = 1 + 3 + \ldots + (2h-3) + (2h-1) = h^2$$

Voyons ce qui se passe avec les h+1 premiers nombres impairs. Quelle est leur somme?

$$S_{h+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2h-3) + (2h-1) + (2h+1)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il résulte que

$$S_{h+1} = S_h + 2h+1 = h^2 + 2h+1 = (h+1)^2.$$

Par conséquent, étant vrai pour $S_{h+1} = (h+1)^2$, il est vrai que pour tout n, $S_n = n^2$

LES PARADOXES DE ZÉNON

C'est du premier affrontement sérieux connu de la pensée humaine avec les processus infinis, que surgirent les paradoxes de Zénon, *extraordinairement profonds*, comme les qualifia Bertrand Russell. En vérité, on ne sait pas très bien quelle fut l'intention de Zénon en les proposant, et même dans le cas du stade, on ne comprend pas non plus sa proposition. On les connaît tous, surtout grâce à Aristote, qui les déduisit rapidement, mais d'une manière peu satisfaisante.

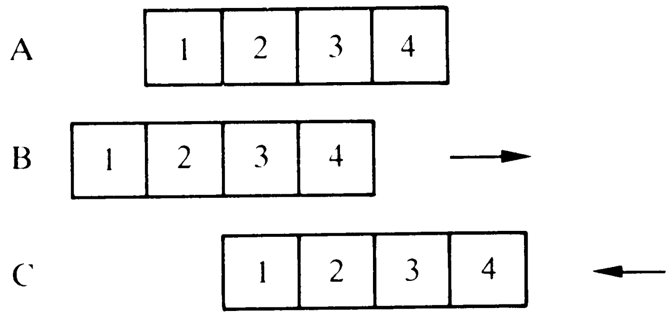
Achille et la tortue est la première des quatre propositions. Achille et la tortue font une course. La vitesse d'Achille est dix fois supérieure à celle de la tortue. C'est pour cela que, généreusement, Achille lui concède un avantage initial. Il partira du point 0 et la tortue du point 1 de la règle. Ils commencent à se déplacer. Quand Achille arrivera au point 1, la tortue sera au point 1,1. Quand Achille arrivera au point 1,1, la tortue sera au pont 1,1 + (0,1/10) = 1,11. Quand Achille arrivera au point 1,11, la tortue sera au point 1,111. Ainsi, la tortue va toujours devant Achille, et n'est jamais dépassée.

Le deuxième paradoxe s'appelle *La dichotomie*, ou division par deux. La voici: le mouvement n'existe pas, parce que pour se déplacer d'une distance d'une unité, il faut d'abord en parcourir 1/2, et quand on l'a fait, il en reste autant à parcourir. Or, pour parcourir 1/2, il faut d'abord en parcourir 1/4 et il en reste encore autant, etc. Comme pour parcourir n'importe quelle distance il faut du temps, il en résulte qu'il faudra un temps infini pour passer de n'importe quel endroit à n'importe quel autre. Par conséquent, le mouvement n'existe pas.

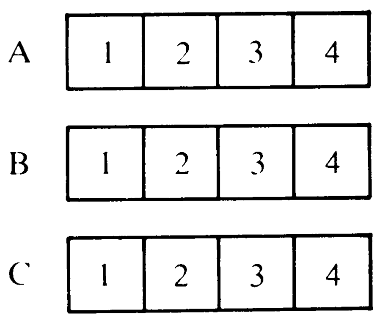
Le troisième est celui de *La flèche*. La flèche que vous avez lancée ne bouge pas, bien que vous ayez l'impression contraire, parce que, à chaque instant que vous considérez, la flèche est immobile à un endroit déterminé, ce qui revient à dire qu'à tout instant elle en est repos.

Ces trois premiers paradoxes semblent viser directement à contredire les idées des Pythagoriciens sur la structure de l'espace et du temps physiques. Les Pythagoriciens contemporains de Zénon considéraient peut-être qu'autant l'espace que le temps constituaient un agglomérat d'unités indivisibles homogènes d'espace et de temps, respectivement. A partir d'une telle conception, les paradoxes représentent une grande difficulté.

Le quatrième paradoxe, dit du *Stade*, est plus controversé. Voici une des interprétations possibles, qui vient aussi attaquer la conception atomiste de l'espace et du temps. Supposons qu'il y a effectivement une unité atomique d'espace et une autre de temps. Imaginons trois files d'un certain nombre d'unités d'espace occupées par des objets matériels comme l'indique la figure suivante



Dans une unité de temps, A va rester immobile, B va se déplacer vers la droite, d'une unité d'espace, et C va se déplacer vers la gauche d'une unité d'espace. Ainsi donc, dans l'unité de temps suivante, les choses seront telles que l'indique la figure suivante



Oublions maintenant A. Il résulte alors que, dans une unité de temps, C s'est déplacée vers la gauche de B, de *deux unités d'espace*. Mais on peut alors prendre une unité de temps plus petite, le temps que met C à se déplacer d'une unité d'espace par rapport à B. Par conséquent, le temps ne peut pas être constitué d'unités atomiques.

Réfléchissez bien, ceci a beaucoup plus d'intérêt qu'il ne paraît...

On sait peu de choses de la vie de Zénon. On situe son activité vers l'an 450 avant J.C. Il fut membre de l'école de Parménide à Elée, dans le golfe de Tarente, et sa méthode de pensée dialectique semble anticiper celle de Socrate, qui préférait lui aussi obliger son interlocuteur à réfléchir et à résoudre les problèmes, plutôt que lui donner les solutions toutes faites.

Chapitre 8

En tournant avec les flèches

Prenez deux feuilles de papier identiques. Posez-les sur la table, l'une au-dessus de l'autre. Pour chaque point P de celle du dessous, il existe un point correspondant P^* de celle du dessus, celui qui se trouve exactement au-dessus. Maintenant, ne touchez plus la feuille du bas et prenez celle du haut; pliez-la, froissez et chiffonnez-la autant que vous voulez, mais *sans la déchirer*. Puis, placez-la, telle quelle, pliée et chiffonnée, au dessus de la feuille que vous avez laissée sur la table, et écrasez-la contre celle-ci, à l'aide d'un gros livre par exemple, de façon à ce que rien ne déborde de celle du dessous. Savez-vous que l'on peut affirmer qu'un point P^* de la feuille du haut occupe la même place qu'avant le froissage, c'est-à-dire, qu'il se trouve maintenant au-dessus du point P lui-même.

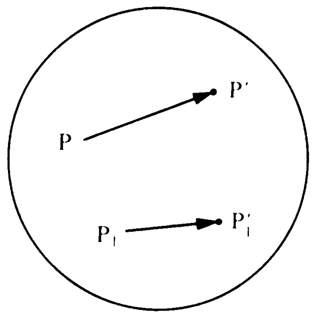
Voici une autre expérience. Vous avez une tasse de café. Vous commencez à remuer avec une cuillère, *sans éclabousser*. Vous remuez à votre gré pendant une demi-minute. Vous laissez reposer. Savez-vous qu'il y a au moins une particule de votre café qui occupe exactement la même place qu'au début, avant de remuer?

En train de remuer le café

LE THÉORÈME DU POINT FIXE

Ce sont deux exemples d'un même résultat mathématique d'un célèbre Hollandais de ce siècle, Brouwer. On l'appelle généralement le *théorème du point fixe* ou *théorème de Brouwer*. Sans lui, l'analyse mathématique actuelle serait incomparablement moins riche et puissante qu'elle ne l'est aujourd'hui. Vous verrez dans ce chapitre comment, en jouant un peu avec des flèches, nous pouvons arriver à des conclusions très curieuses et amusantes, tout en étant extraordinairement utiles pour des mathématiciens, des physiciens et beaucoup d'autres scientifiques.

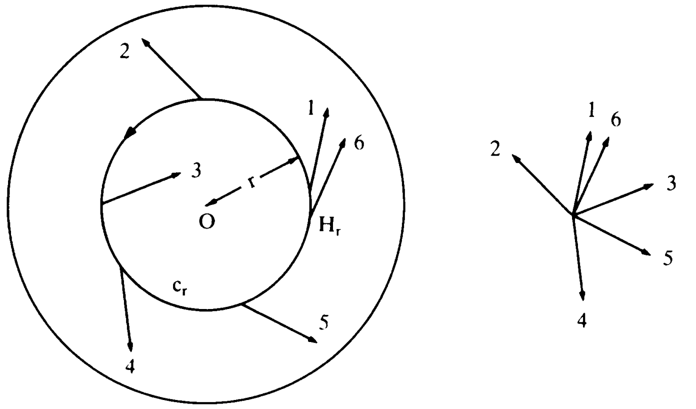
Au lieu de raisonner avec deux feuilles de papier, nous allons le faire avec deux disques égaux de rayon R. En réalité, on passe facilement d'un cas à l'autre, et ce sera plus simple d'exprimer ainsi ce que nous faisons. Nous avons donc au départ les deux disques superposés. A chaque point P de celui du bas correspond un point P^* de celui du haut, placé exactement sur P. Après avoir plié, chiffonné et replacé en l'écrasant le disque du haut sur celui du bas sans qu'il déborde, le point P^* se trouvera à une autre position P'. C'est-à-dire que le point P^* qui occupait la position P se trouve maintenant en P'.



Notre objectif est d'essayer de démontrer qu'il existe nécessairement un point P tel que son correspondant P' coïncide avec lui. Quel rapport y a-t-il avec les flèches? Vous allez voir. *Supposons que les choses sont différentes* de ce que nous voulons démontrer, c'est-à-dire que, pour chaque P le point P' est distinct. S'il est distinct, nous pouvons, pour chaque P du disque tracer une flèche PP', dont l'origine est P et l'extrémité P'. Ainsi, pour chaque point du disque, nous avons une flèche qui en part. Les extrémités P' ne rempliront pas nécessairement le disque, car le papier chiffonné et aplati sera plus petit que le disque qui ne l'est pas. Maintenant, l'intérêt est de démontrer que cette situation est insoutenable, qu'elle nous mène à une contradiction. Notre point de départ devra donc être faux, c'est-à-dire qu'il existe un point P tel que son point P' coïncide avec lui, ce que nous voulions démontrer.

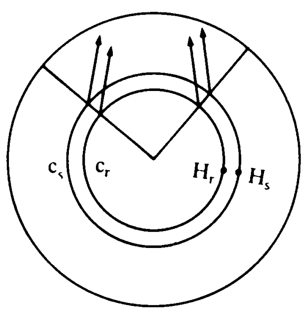
Comment arrivons-nous à cette contradiction? Il existe une manœuvre ingénieuse, qui nous sera de grande utilité dans d'autres cas, et qui consiste à observer le comportement des flèches, *les tours qu'elles font*, lorsque nous varions leurs origines.

Voici ce que nous allons faire: nous allons regarder les flèches dont l'origine se trouve sur un cercle concentrique avec le bord, par exemple c_r de rayon r, indiqué sur la figure, et nous nous demanderons: quand les origines de ces flèches font un tour dans le sens indiqué sur la figure en commençant en H_r, combien de tours fait la flèche?



Afin d'étudier plus facilement les tours que font les flèches, nous pouvons les déplacer parallèlement jusqu'à ce que leurs origines soient en un même point. On a l'impression que la flèche peut faire n'importe quoi, quand on déplace son origine sur c_r. Mais souvenez-vous que le papier a été chiffonné mais absolument pas déchiré, si bien que des flèches, dont les points d'origine sont proches, doivent avoir des extrémités proches. Ainsi, lorsque, après un tour presque complet, l'origine s'approche du point de départ H_r, l'extrémité correspondante s'approche de l'extrémité de la flèche initiale, et par conséquent, le nombre de tours que fait la flèche, quel que soit r *est un nombre entier de tours*, c'est-à-dire que la flèche ne peut pas faire trois quarts de tour ou un tour et demi.

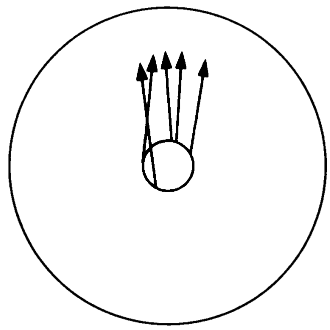
Une autre observation en découle. Si vous considérez deux cercles c_r et c_s avec r et s très proches, comme sur la figure,



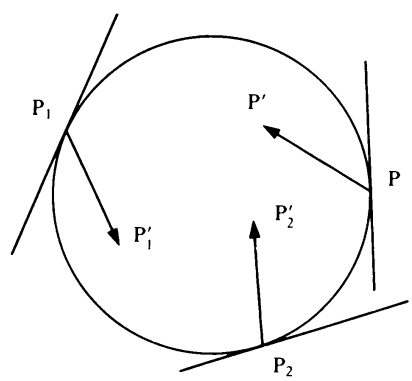
et si vous regardez les flèches, dont les origines se trouvent sur des rayons communs, il en résulte que les origines sont très proches et par conséquent, les extrémités aussi. Ainsi, les directions des flèches correspondantes ne varient pas beaucoup. De sorte que, si r et s sont très proches, alors, *les flèches, dont les origines sont en*

c_r et c_s font le même nombre de tours. Moyennant de petites augmentations, nous pouvons nous déplacer à partir de petites valeurs de r jusqu'à la valeur R, la plus grande, qui est celle du rayon extérieur de notre disque en papier. *Lorsque l'on déplace leurs origines sur c_r, les flèches doivent alors faire le même nombre de tours, quel que soit r compris entre 0 et R.* Nous pouvons dès lors vérifier une conséquence importante de notre situation hypothétique. Quel est le nombre de tours quand r est très petit? Quel est le nombre de tours quand r est R?

Si r est très petit, les points de c_r sont tous très proches du centre *0* du disque, et les extrémités des flèches correspondantes bougent à peine. Par conséquent, *le nombre de tours doit être* 0*;* la flèche ne fera pas de tour, tout au plus, il y aura de petites variations autour d'une même direction comme l'indique la figure suivante.

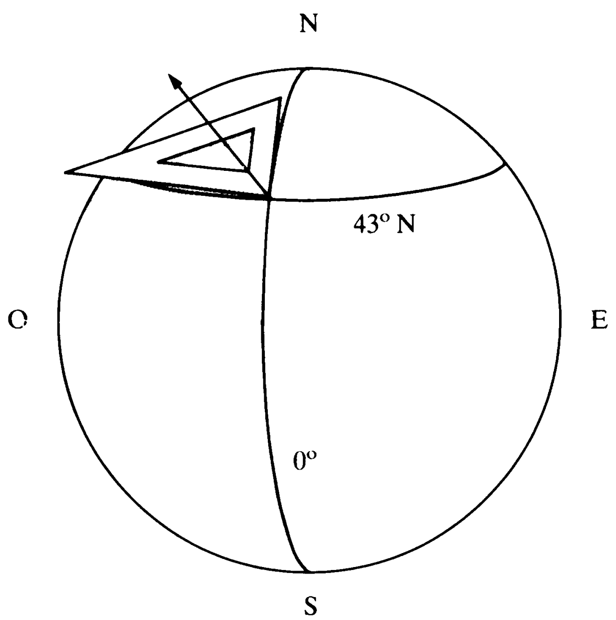


Si r est R, l'origine de chaque flèche se trouve sur le bord du disque. Comme l'extrémité est en un point intérieur du disque, il est évident que la flèche se trouve du même côté de la tangente au disque au point correspondant du bord où est le disque.



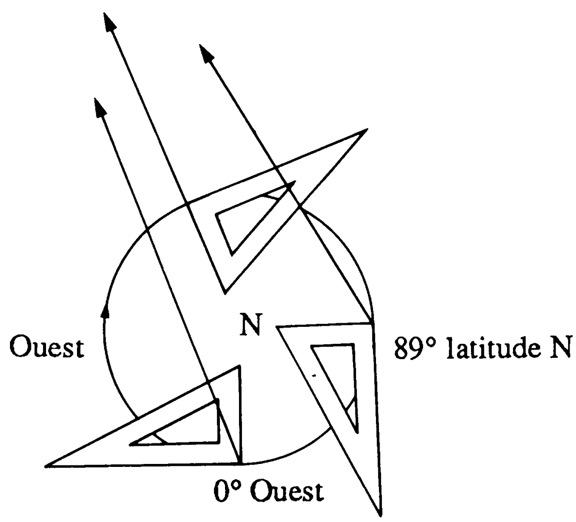
La flèche avance, comme si elle était poussée par la tangente. *Comme la tangente fait un tour, la flèche n'a pas d'autre solution que de faire elle aussi un tour.* Voilà la contradiction! Si notre hypothèse de départ est vraie, alors zéro est égal à 1. Donc, elle est fausse et *un point P, tel que P' coïncide avec P, doit exister.*

Les flèches permettent de multiples possibilités, comme vous le verrez dans le curieux *théorème de la boule de billard poilue.* Vous avez une boule de billard dans une main, et un tas de cheveux longs et hirsutes dans l'autre. Vous avez l'idée bizarre de coller, en chaque point de la surface de la boule, un cheveu par son extrémité, mais de telle façon que le cheveu soit tangent à la boule et, de plus, que les directions des cheveux varient de façon continue, c'est-à-dire que les directions des cheveux correspondants à des points rapprochés soient proches. Pensez-vous que vous pourrez arriver à vos fins? Comme vous voyez, en termes de flèches, il s'agit de couvrir la superficie de la boule avec des flèches tangentes à cette superficie, ayant leur origine en celle-ci et de manière que leurs directions varient de façon continue. Procédons comme auparavant. Nous allons essayer de démontrer que ce n'est pas possible. Pour cela nous supposons que c'est possible et nous essayerons d'arriver à une contradiction. Supposons donc que c'est possible. Nous avons déjà la boule avec les flèches placées de la façon requise. Utilisons une astuce semblable pour arriver à la contradiction. Regardons la boule comme si elle était un globe terrestre, afin de mieux nous comprendre au moment d'exprimer des directions, etc. Nous allons maintenant compter les tours que font les flèches en déplaçant leurs origines sur différents parallèles. Nous nous plaçons sur l'un d'eux, par exemple celui de latitude 43° N, et sur le méridien de Greenwich, longitude 0°, le sommet correspondant à l'angle droit d'une équerre étant situé sur le point exact. En nous déplaçant, nous allons maintenir en direction ouest, le côté long de l'équerre qui passe par ce sommet et en direction nord, le côté court.

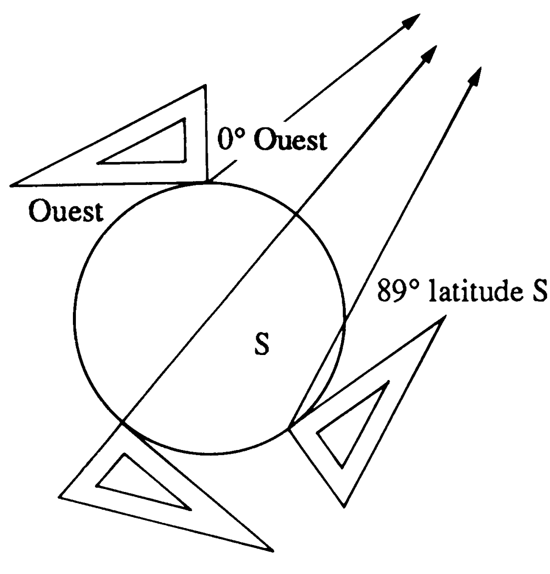


L'équerre, par conséquent, va demeurer tangente au globe, l'un de ses côtés étant dans la direction du méridien et l'autre dans la direction du parallèle. Dans cette situation, la flèche qui correspond au point où nous sommes, reste à tout moment dans le plan de l'équerre, et nous allons considérer l'angle que forme cette flèche avec le côté de l'équerre en direction ouest. Nous nous déplaçons vers l'ouest et nous parcourons tout le parallèle. Dans notre plan de l'équerre, nous voyons tourner la flèche, en faisant comme avant, *un nombre entier de tours.*

De même, puisque la direction des flèches varie de façon continue, le nombre de tours est le même pour deux parallèles rapprochés, et comme avant, nous trouvons aussi que *le nombre de tours est le même, et dans le même sens, pour tous les parallèles.* Est-ce vrai? Quand nous sommes sur un parallèle très proche du pôle Nord, les flèches, à cause de la variation, changent à peine de direction, car leurs origines sont très proches. On peut le voir plus ou moins comme sur la figure suivante, en regardant cette région à la loupe



et sur notre plan de l'équerre, nous voyons la flèche faire *un tour dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.* Lorsque nous nous approchons du pôle Sud, on voit à peu près ceci



et nous voyons comment la flèche fait un tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Ceci est impossible, si bien que notre essai de mettre ce genre de perruque à la boule est forcément impossible.

Voici quelque chose de plus sérieux en apparence, et que l'on peut faire avec les flèches. Je vais supposer que vous savez ce qu'est un nombre complexe, comment on le représente sur le plan, comment on représente le produit de deux nombres complexes, et un peu plus. Si vous ne savez rien de tout ceci, passez à autre chose. Les démonstrations que je vais présenter ici, n'apportent rien de nouveau aux exemples antérieurs.

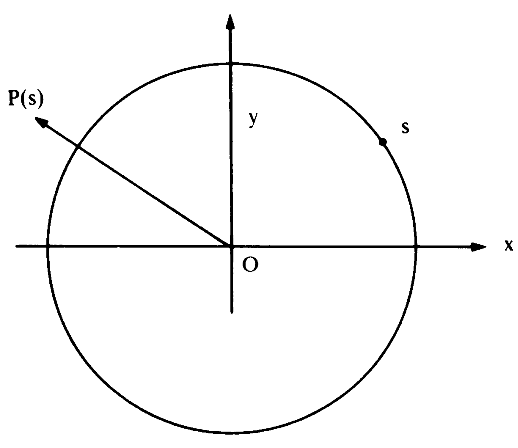
LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Au moyen des flèches, nous allons démontrer ce que l'on appelle *le théorème fondamental de l'algèbre*: pour tout polynôme ayant des coefficients $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ réels ou complexes

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + ... + a_{n-1} z + a_n$$

il existe au moins un nombre s (réel ou complexe) tel que P(s)=0.

Comment procéder? Comme auparavant. Supposons qu'un tel s n'existe pas. La situation est alors la suivante: pour chaque nombre complexe s, $P(s) \neq 0$. Pour tout nombre complexe s, nous pouvons tracer une flèche, celle dont l'origine est 0 et l'extrémité $P(s)$. Comme nous supposons que $P(s) \neq 0$, il y a une flèche pour tout point. Maintenant, faisons tourner s sur des cercles centrés en 0, et regardons les tours que font les flèches correspondantes.



Que se passe-t-il lorsque le cercle a un rayon très petit? comme $P(0) = a_n$, si le rayon du cercle est très petit, alors $|s|$ est très petit, et comme

$$P(s) - P(0) = (s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n) - a_n = s(s^{n-1} + ... + a_{n-1})$$

alors $|P(s) - P(0)|$ est une quantité très petite. Donc, $P(s)$ reste toujours très proche de $P(0)$ et de cette manière, la pointe de la flèche, correspondante à s, n'oscille que très faiblement autour du point $P(0) = a_n$. Par conséquent, *lorsque le cercle est très petit, la flèche ne fait pas de tour.*

Que se passe-t-il si le cercle est très grand? Alors $|s|$ qui est le rayon de ce cercle est très grand et $P(s)$ peut s'écrire ainsi

$$P(s) = s^n + (a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots a_n)$$

et $|s^n|$ sera beaucoup plus grand que $|a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots a_n|$. Supposons que le rayon du cercle est si grand que $|s^n| > 100\, |a_1 s^{n-1} + \dots + a_n|$. Pour cela, il suffit de choisir le rayon R tel que

$$\frac{|a_1|}{R} + \frac{|a_2|}{R^2} + \dots + \frac{|a_n|}{R^n} < \frac{1}{100}$$

ce qui est toujours possible.

Regardons maintenant ce qui se passe lorsque s se déplace sur ce cercle à partir du point complexe $R+0i$ dans le sens positif, c'est-à-dire dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Dans ce cas, le mouvement de $P(s) = s^n + (a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n)$ est clairement dominé par celui de s^n, c'est-à-dire que s^n se déplace sur un disque de rayon R^n et ce qui est entre parenthèses, représente une perturbation de moins d'un centième de ce rayon R^n du mouvement de s^n. Or, que fait s^n lorsque s fait un tour sur le cercle de rayon R? Lorsque s a un argument de $360°/n$, alors, s^n a un argument $n \cdot 360°/n = 360°$, c'est-à-dire que s^n a fait un tour complet. Si s a un argument $2 \cdot 360°/n$, alors s^n a un argument $2 \cdot 360°$ et ainsi, s^n a fait deux tours... Si s a un argument $n \cdot 360°/n = 360°$, c'est-à-dire, si s a fait un tour, alors s^n a fait n tours. Par conséquent, comme $P(s)$ est une perturbation relativement très petite (inférieure à un centième), la flèche correspondante à $P(s)$ fait elle aussi n tours.

Ceci est-il possible? Observez que, comme dans les cas antérieurs, lorsque nous prenons deux points s et s' sur des cercles, dont les rayons r et r' sont très proches, de telle façon que Oss' soient sur la même demi-droite, alors $P(s)$ et $P(s')$ sont très proches et ainsi les flèches correspondantes aux cercles de rayons r et r' très proches, font le même nombre de tours. De proche en proche, il résulte que le nombre de tours pour des petits rayons est le même que pour le rayon R. Si bien que $0=n$, ce qui est la contradiction que nous recherchions. D'où vient-elle? D'avoir supposé que pour tout s, on peut vérifier que $P(s) \neq 0$. Donc, il doit exister un s, tel que $P(s)=0$.

Parmi les instruments les plus importants de l'analyse moderne, on peut compter précisément les théorèmes du point fixe comme ceux que nous avons vus dans ce chapitre. Il y en a beaucoup d'autres plus sophistiqués, basés sur des idées semblables à celles que nous avons développées ici. La théorie des équations différentielles s'est considérablement enrichie grâce à ces théorèmes. Pour que vous voyiez comment utiliser, en analyse, le théorème du point fixe de Brouwer, nous allons nous poser la question suivante:

Considérons le système suivant de deux équations à deux inconnues x et y:

$$\begin{cases} x + \sin^2(xy) + \cos^3 y = 0 \\ y + \sin^3(x^2 + y^2) + \cos^5(x+y) = 0 \end{cases}$$

Voici la question: ce système a-t-il une solution? Pour l'étudier, posons le système de cette façon:

$$\begin{cases} x = -\sin^2(xy) - \cos^3 y \\ y = -\sin^3(x^2 + y^2) - \cos^5(x+y) \end{cases}$$

Qu'il y ait une solution signifie qu'il existe un point (x,y) du plan en coordonnées cartésiennes tel que, si on prend ces deux nombres x,y et qu'on fait les opérations indiquées par les seconds membres du système, c'est-à-dire

$$\begin{array}{l} -\sin^2(xy) - \cos^3 y \\ -\sin^3(x^2 + y^2) - \cos^5(x+y) \end{array}$$

nous obtenons les valeurs x et y, respectivement. Ces opérations des seconds membres peuvent être interprétées comme une transformation de chaque point du plan $P = (x,y)$ en le point $T(P) = (-\sin^2(xy) - \cos^3 y\ ,\ -\sin^3(x^2 + y^2) - \cos^5(x+y))$. Nous demander s'il existe une solution (x^*,y^*) du système revient à nous demander s'il existe un point $P^* = (x^*,y^*)$ tel que $T(P^*) = P^*$, c'est-à-dire, s'il existe un point fixe pour la transformation T.

Si nous considérons la région du plan

$$R = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$$

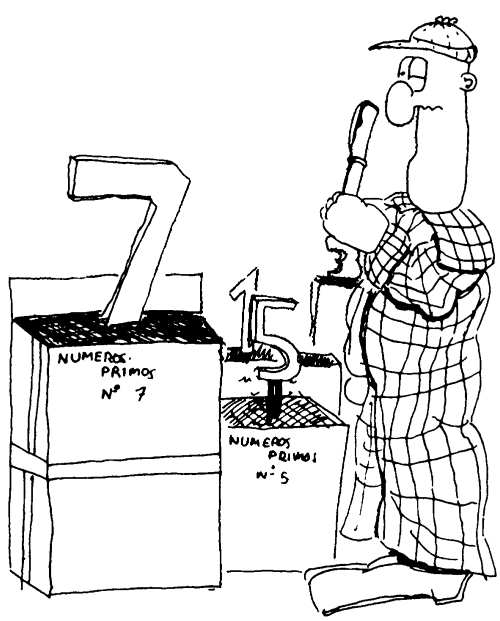
nous observons facilement que T transforme des points de R en des points de R, T chiffonne et déforme R et la place sur R. Le théorème de Brouwer nous permet d'affirmer qu'il existe bien un point fixe et que par conséquent *il existe au moins une solution au système.*

Chapitre 9

Sur les nombres et les nombres premiers

Voici quelques autres problèmes. Même s'ils vous paraissent un peu trop scolaires, ne vous effrayez pas. Traitez-les avec le même esprit sportif que les cas les plus courants. Il n'est pas nécessaire d'en savoir beaucoup pour les résoudre. Ce que vous devez faire, c'est chercher le bon raisonnement, sans hésiter à raisonner d'abord incorrectement. Au travail! QUELQUES PROBLÈMES

1. Démontrer que pour tout nombre premier p supérieur à 3, on vérifie que p^2 est égal à un multiple de 12 plus une unité.
2. Démontrer que si n est un nombre naturel tel que $2n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.
3. On vous donne $n+1$ nombres, pris parmi les suivants: 1, 2, 3, ..., $2n$. Démontrer que deux de ceux qu'on vous a donnés sont premiers entre eux, c'est-à-dire que leur plus grand commun diviseur est 1.
4. On vous donne les mêmes nombres que le cas antérieur. Démontrer que l'un d'eux est multiple d'un autre.
5. Démontrer que le produit de quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique de nombre naturels est la différence de deux carrés parfaits.



A la découverte des mystères des nombres premiers

6. Démontrer que si a est un nombre entier positif, il y a toujours deux nombres entiers x, y tels que $x^2-y^2 = a^3$.
7. Démontrer que si a, b, c sont des nombres entiers impairs, alors, il n'existe aucun nombre fractionnaire x tel que $ax^2+bx+c = 0$.
8. Démontrer qu'il n'existe pas de nombres entiers x, y, z plus grands que zéro, tels que $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$.
9. Démontrer que, si grand que soit le nombre N, il existe deux nombres premiers p et q tels que $p-q$ est plus grand que N, et entre p et q il n'y a aucun nombre premier (c'est-à-dire qu'il existe des nombres premiers qui se suivent aussi éloignés que l'on veut).

QUELQUES PISTES POUR LES CAS PROPOSÉS

1. Démontrer que $p^2 = \dot{12}+1$ équivaut à démontrer que $p^2-1 = (p+1)(p-1) = \dot{12}$. Voyons donc, si c'est vrai que $(p+1)(p-1)$ est multiple de 12. Un multiple de douze doit être multiple de 3 et multiple de 4. p étant premier, il en résulte que $p+1$ est pair et que $p-1$ l'est aussi. Le produit de nombres pairs est visiblement multiple de 4. Ainsi, $(p+1)(p-1)$ est multiple de 4. Est-il aussi multiple de 3? Si p est plus grand que 3 et nombre premier, alors p n'est pas multiple de 3. Il doit donc avoir la forme $\dot{3}+1$ ou bien $\dot{3}+2$. Si $p = \dot{3}+1$, alors $p-1= \dot{3}$. Si $p= \dot{3}+1$, alors $p+1= \dot{3}+3=\dot{3}$. Dans tous les cas, $(p+1)(p-1)$ est multiple de 3. Par conséquent, $p^2 = \dot{12}+1$.
2. On nous dit que $2n+1$ est un carré parfait. Nous commençons par écrire que $2n+1=q^2$, équivalent à $2n=(q+1)(q-1)$, ce qui met en évidence que les deux membres $q+1$ et $q-1$ sont pairs. Soit $q+1 = 2h$. Alors, $2n = 2h(2h-2)$ et donc, $n = h(2h-2)$ et $n+1 = 2h^2-2h+1 = h^2+(h-1)^2$.
3. Une idée dont il faut tenir compte quand il s'agit de nombres naturels est la possibilité d'appliquer le principe de récurrence. Il est évident que si $n=1$ et qu'on vous donne deux nombres quelconques choisis parmi $\{1, 2\}$, il y en a deux dont le plus grand commun diviseur est 1. C'est le premier pas de la récurrence. Supposez que la proposition de l'énoncé est vraie quand $n=h$ (hypothèse de récurrence), c'est-à-dire que si parmi $\{1, 2, 3,...2h\}$, on choisit $h+1$ nombres $a_1,a_2,a_3,...a_{h+1}$, alors il y en a deux dont le plus grand commun diviseur est 1. Voyons maintenant si, grâce à cette hypothèse, nous pouvons démontrer que la proposition est aussi vraie lorsque $n=h+1$. C'est-à-dire que, parmi $\{1, 2, 3..., 2h, 2h+1, 2h+2\}$, on choisit $h+3$ nombres $b_1,b_2,b_3,...b_{h+2}, b_{h+3}$. Y en a-t-il parmi eux, deux qui soient premiers entre eux? Essayons de nous ramener au cas antérieur. Si aucun des nombres donnés n'est $2h+1$ ni $2h+2$, il est évident qu'on nous a donné $h+3$ nombres choisis parmi $\{1, 2, 3, 4, ... 2h\}$ et nous pouvons appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure qu'il y a deux nombres qui sont premiers entre eux. Il reste le cas où deux des nombres donnés

sont $2h+1$ et $2h+2$. Or, ceux-ci sont des nombres consécutifs et deux nombres consécutifs ont toujours 1 comme plus grand commun diviseur. Tout est ainsi résolu.

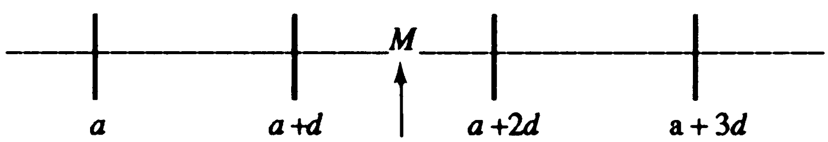
Puisque nous venons de vérifier que deux nombres consécutifs sont toujours premiers entre eux, nous pouvons procéder directement pour donner une autre démonstration. Nous allons essayer de démontrer que parmi les nombres donnés, il y en a toujours deux consécutifs. L'idée est simple. Imaginez par exemple que n est égal à 10. Vous avez $\{1, 2, 3, ..., 20\}$. Considérez-les comme s'il s'agissait des fauteuils d'une rangée dans un cinéma, où $a_1, a_2, a_3, ... a_{11}$, entrent et s'asseoient chacun sur un siège. Ils sont 11. Il est facile de vérifier qu'il y en a deux d'entre eux qui seront assis l'un à côté de l'autre.

4. Comme avant, nous avons la possibilité d'appliquer le principe de récurrence. Une autre idée serait d'appliquer la parité, le principe du pigeonnier... Voici une démonstration très ingénieuse. Vous avez $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ et parmi eux $a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1}$. Chacun d'eux aura la forme $a_j = 2^{r_j} c_j$, c_j étant impair et r_j plus grand ou égal à zéro, c'est-à-dire que nous avons séparé le facteur 2 avec son exposant dans a_j. Vous avez maintenant $c_1, c_2, c_3, ... c_n, c_{n+1}$, qui sont impairs et compris bien entendu entre 0 et $2n$. Par conséquent, deux d'entre eux sont égaux (pigeonnier). Par exemple, $c_2 = c_5 = s$. Ainsi, $a_2 = 2^{r_2}s$, $a_5 = 2^{r_5}s$. Si $r_2 > r_5$, alors a_2, est multiple de a_5. Si $r_2 < r_5$, alors a_5 est multiple de a_2.

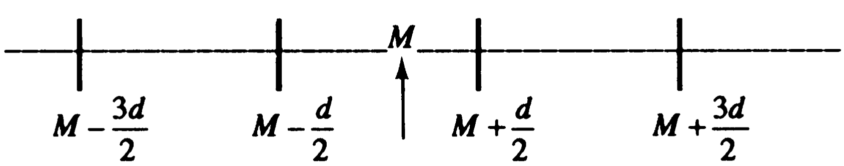
5. Ici, il est important de trouver la notation adéquate. Quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique ont la forme suivante

$$a, a+d, a+2d, a+3d$$

Si vous les multipliez: $a, (a+d)\,(a+2d)\,(a+3d) = ...$, vous obtenez un résultat horrible, confus, chaotique.... Pourquoi ne pas leur donner une forme plus maniable, plus symétrique? Les nombres se trouvent sur la droite des nombres réels



Prenons le point du milieu M. Il ne sera probablement pas entier (si d est impair), mais... continuez! Les nombres sont maintenant



et leur produit

$$\left(M-\frac{3d}{2}\right)\left(M-\frac{d}{2}\right)\left(M-\frac{d}{2}\right)\left(M-\frac{3d}{2}\right)=\left(M^2-\frac{9d^2}{2}\right)\left(M^2-\frac{d^2}{2}\right)=$$

$$M^4+\frac{9d^4}{16}-\frac{10d^2}{4}M^2=\left(M^2+\frac{3d^2}{4}\right)^2-(2dM)^2$$

Si d est pair, alors M est entier et $3d^2/4$ l'est aussi; nous obtenons ainsi ce que nous voulions.

Si d est impair, alors $M = a + 3d^2/2$ n'est pas entier, mais $2dM$ l'est et $M^2 + 3d^2/4 = a^2 + 9d^2/4 + 3ad + 3d^2/4 = a^2 + 3d^2 + 3ad$ l'est aussi. De même, nous obtenons ce que nous recherchions.

6. Vous aurez certainement l'idée de mettre l'expression recherchée sous la forme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = a^3$. Si a est un nombre impair, alors nous pouvons poser: $x-y = 1$, $x+y = a^3$, et en résolvant ce système d'équations, nous obtenons $x=(a^3+1)/2$, $y = (a^3-1)/2$, qui sont deux nombres entiers satisfaisant la relation demandée. Si a est un nombre pair, $a = 2h$, nous pouvons mettre l'expression recherchée sous la forme $x^2-y^2 = (x+y)(x-y) = 2^3h^3$, et nous pouvons maintenant poser, par exemple, que $x-y = 2$, $x+y = 2^2h^3$. Le système étant résolu, nous obtenons $x = 2h^3+1$, $y = 2h^3-1$, qui sont des nombres entiers satisfaisant l'expression demandée. Pourriez-vous trouver d'autres solutions? Pourriez-vous trouver toutes les solutions?

7. Vous avez dû avoir plus ou moins l'idée suivante: supposons que x existe, et soit $x = p/q$ la fraction irréductible que représente x. Vous avez alors $a(p/q)^2 + b(p/q) + c = 0$, c'est-à-dire,

$$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$$

Nous allons essayer d'utiliser la parité de p et q, suggérée clairement par l'énoncé lui-même. Comme p/q est irréductible, si p est pair, alors q est impair, et inversement, si q est pair, alors p est impair. Supposons d'abord que p est pair et q impair. Alors $ap^2 + bpq$ est pair et cq^2, impair. Ce qui est impossible, car la somme pair + impair n'est jamais zéro. De la même façon, on exclut que q soit pair et p impair. Supposons donc, que p est impair et q aussi. Alors, ap^2 est impair, bpq l'est aussi et cq^2 aussi. Or, la somme de trois nombres impairs ne peut jamais être zéro. Notre supposition est donc fausse. Le nombre x ne peut jamais être un nombre rationnel.

8. En voyant le 2 dans $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$, vous pouvez aussi penser à utiliser la parité. Supposons qu'il existe x, y, z satisfaisant l'expression proposée. Tous les trois pourront-ils être impairs?

Non, car $2xyz$ est pair et la somme de trois nombres impairs x^2, y^2, z^2 est impaire. L'un peut-il être impair, et les deux autres pairs, par exemple, x, y pairs et z impair? Non, pour des raisons semblables. L'un pourra-t-il être pair et les deux autres impairs, par exemple x pair et y, z impairs? Si nous raisonnons comme avant, en principe, nous ne pouvons par le nier. Examinons ce cas un peu plus à fond. Si y, z sont impairs, nous aurons $y = 2j+1$, $z = 2k+1$. Si x est pair, nous aurons $x = 2h$. Nous aurions ainsi

$$(2h)^2 + (2j+1)^2 + (2k+1)^2 = 2 \cdot 2h(2j+1)(2k+1)$$

c'est-à-dire

$$4h^2 + 4j^2 + 4j + 4k^2 + 4k+2 = 4h(2j+1)(2k+1)$$

Par conséquent, ce deux (2) devrait être multiple de 4 car tous les autres termes de l'égalité le sont. Ce qui est impossible. On exclut donc aussi ce cas.

Il ne reste que la possibilité de x, y, z pairs. Posons

$$x = 2^h x_1, \quad y = 2^j y_1, \quad z = 2^k z_1$$

où h, j, k sont supérieurs à 0 et x_1, y_1, z_1 impairs. Nous avons ainsi

$$2^{2h} x^2{}_1 + 2^{2j} y^2{}_1 + 2^{2k} z^2{}_1 = 2^{h+j+k+1} x_1 y_1 z_1$$

L'un des trois nombres h, j, k, doit être inférieur ou égal aux autres. Supposons qu'il s'agit de h. Nous pouvons alors écrire, en simplifiant l'égalité antérieure.

$$x^2{}_1 + 2^{2(j-h)} y^2{}_1 + 2^{2(k-h)} z^2{}_1 = 2^{j+k-h+1} x_1 y_1 z_1$$

Si $j=h$, $k=h$, alors l'égalité devient $x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1 = 2^{j+k-h+1} x_1 y_1 z_1$ où $x^2{}_1 + y^2{}_1 + z^2{}_1$ serait pair. Ce qui est impossible. Si $j=h$, $k>h$, alors

$$x^2{}_1 + y^2{}_1 + 2^{2(k-h)} z^2{}_1 = {}^{2k+1} x_1 y_1 z_1$$

Comme avant, si x_1, y_1 sont impairs, $x^2{}_1 + y^2{}_1$ est multiple de 2 mais pas de 4. Or, $2^{k+1} x_1 y_1 z_1 - 2^{2(k-h)} z^2{}_1$ est multiple de 4. Ainsi, la dernière hypothèse est aussi impossible. Pareillement, on exclut le cas $j>h$, $k>h$.

Toutes les possibilités sont exclues quand nous utilisons comme nous l'avons vu, la parité, et ainsi, il ne nous reste plus qu'à conclure que notre point de départ est faux. C'est-à-dire qu'il ne peut exister trois nombres entiers x,y,z, tels que $x^2+y^2+z^2 = 2xyz$.

Par un raisonnement semblable, on prouve que, quel que soit le nombre entier m plus grand que zéro, il n'existe pas trois nombres entiers positifs x, y, z tels que $x^2+y^2+z^2= 2^m xyz$. Pourquoi ne pas essayer de le démontrer par la méthode de descente de l'infini? Supposons qu'il existe bien des quadruplets de nombres (x, y, z, m), tels qu'ils vérifient l'expression antérieure $x^2+y^2+z^2= 2^m xyz$. Soit (x, y, z, m) un quadruplet tel que la somme $x+y+z+m$ soit minimale. Selon le raisonnement antérieur, on ne peut pas avoir les trois nombres x, y, z impairs, ni deux pairs et un impair, ni deux impairs et un pair. La seule possibilité restante est que les trois nombres soient pairs. Posons

$$x = 2x_1, \ y = 2y_1, \ z =2z_1,$$

et nous aurons alors $2^2x^2_1 + 2^2y^2_1 + 2^2z^2_1 = 2^{m+3}x_1y_1z_1$,, c'est-à-dire que $x^2_1 + y^2_1 z^2_1 = 2^{m+1}x_1y_1z_1$.

Nous avons ainsi le quadruplet de nombres $(x_1, y_1, z_1, m+1)$.ayant la propriété de l'énoncé et tel que

$$x_1+ y_1+ z_1+ (m + 1) = \frac{x + y + z}{2} + m + 1 < x + y + z + m$$

ce qui est en contradiction avec notre choix (x, y, z, m). Ceci démontre qu'il ne peut exister aucun quadruplet ayant la propriété proposée, comme nous voulions le démontrer.

9. Nous prenons le nombre $N+1$ et nous formons maintenant le nombre $(N+1)! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7....\cdot (N-1)\cdot(N)\cdot(N+1)$. Appelons ce nombre H. Il est évident que $H+2$ est un multiple de 2, $H+3$ est multiple de 3, $H+4$ est multiple de 4, ..., $H+N$ est multiple de N, $H+(N+1)$ est multiple de $N+1$. Aucun de ces N nombres consécutifs n'est premier et ainsi, si p est le nombre premier immédiatement antérieur et q est immédiatement postérieur, ils satisfont la condition demandée.

LA THÉORIE DES NOMBRES

La théorie des nombres est le domaine de la Mathématique qui s'occupe fondamentalement des propriétés des nombres naturels. Pour les mathématiciens, depuis les Pythagoriciens jusqu'à nos jours, la théorie des nombres a été la *reine des mathématiques*, comme l'a appelée Gauss.

Dans la théorie des nombres, la profonde unité des mathématiques se manifeste de manière éclatante. Dans le développement actuel de la théorie des nombres interviennent de façon décisive, l'algèbre, l'analyse réelle et complexe, la géométrie, et même les méthodes probabilistes. Et dans cette interaction profonde des diverses méthodes mathématiques, un fait frappant, qui produit une inévitable sensation de mystère, est clairement mis en évidence. Des théorèmes, dans les énoncés desquels n'interviennent que les plus simples concepts relatifs aux nombres naturels – comme être premier, être exprimable par des sommes de telles ou telles puissances... – ne peuvent être établis que moyennant la mise en action d'instruments compliqués de l'analyse, de la géométrie algébrique ou d'autres domaines, dont la trace n'apparaît ni dans les hypothèses, ni dans la thèse du théorème. Il est difficile d'expliquer pourquoi le mécanisme cognitif de l'homme a besoin de prendre des détours si compliqués, pour établir la connexion entre une hypothèse et une thèse qui semblent si proches. La simplicité des énoncés, la sophistication des méthodes, l'unité et l'harmonie profonde des idées qui sont introduites dans la théorie des nombres, ont attiré irrésistiblement les mathématiciens de tous les temps.

La théorie des nombres est un des domaines où abondent les bons problèmes ouverts, ceux que l'homme de la rue peut comprendre immédiatement et sans aucune préparation spéciale: est-ce vrai que si n est plus grand que 2, alors l'équation $x^n+y^n=z^n$ n'est pas résoluble en nombres naturels différents de 0,1 (théorème de Fermat)? Est-il vrai que tout nombre pair peut être exprimé comme étant la somme de deux nombres premiers (conjecture de Goldbach)? Existe-t-il un nombre infini de nombres premiers de la forme x^2+k si k est donné? Existe-t-il un nombre infini de nombres premiers, dont les chiffres en base 10 sont tous des uns?

Chapitre 10

La région perdue

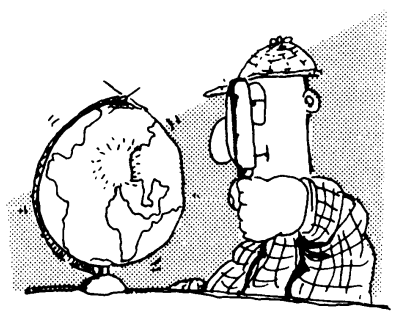
Sur un cercle, marquons n points de telle façon que, lorsque l'on trace toutes les cordes possibles les unissant deux à deux, il n'y ait pas trois cordes concourantes. On peut se poser plusieurs questions évidentes: QUELQUES QUESTIONS

Combien de points d'intersection à l'intérieur du cercle sont déterminés par l'ensemble de toutes les cordes que l'on peut tracer, en unissant les n points deux par deux? A.

En combien de régions le disque se trouve-t-il divisé par ces cordes? B.

Le graphe déterminé par les n points, les cordes qui les unissent et les arcs du cercle entre deux points contigus des n donnés, est-il eulérien, c'est-à-dire, peut-on le parcourir sans lever le crayon du papier et sans passer deux fois par le même segment? C.

Voici quelques questions frappantes qui se prêtent à des considérations mathématiques profondes et belles, tout en étant élémentaires, c'est-à-dire proches des éléments, ce qui ne veut pas forcément dire simples ou faciles.



A la poursuite de la région perdue

Pour essayer de répondre à la première question nous pouvons commencer naturellement à expérimenter et à faire une liste des nombres de points intérieurs pour différentes valeurs de n. A.

n	points intérieurs
3	0
4	1
5	5
6	15
7	35
8	70
.	.
.	.

La loi de formation de la suite des nombres de points intérieurs n'est certainement pas immédiate, mais la nature même du problème suggère de regarder la table des coefficients du binôme, connue sous le nom de triangle de Pascal

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
• • • • • • •

UNE CONJECTURE

Ici, il n'est pas difficile d'observer que notre colonne de nombres coïncide, semble-t-il, avec la série des coefficients indiquée. *Voici déjà une conjecture plausible: les nombres 1, 5, 15, 35, 70... semblent être*

$$\binom{4}{0}=\binom{4}{4},\quad \binom{5}{1}=\binom{5}{4},\quad \binom{6}{2}=\binom{6}{4},\quad \binom{7}{3}=\binom{7}{4},\quad \binom{8}{4}$$

Si bien qu'il est possible que le nombre de points intérieurs soit en général $\binom{n}{4}$.

Il serait maintenant naturel de démontrer cette conjecture par récurrence, mais $\binom{n}{4}$ étant un nombre dont la signification intuitive est si directe, n'y a-t-il pas une raison plus évidente, pour que le nombre soit effectivement $\binom{n}{4}$?

Comment détermine-t-on un point d'intersection intérieur? Clairement, par les deux cordes qui s'y coupent. Et ces dernières? Chacune le sera évidemment, par ses deux extrémités sur le cercle... Alors? ... *Chaque point d'intersection intérieur est déterminé de façon univoque, par chaque sous-ensemble de quatre points des n donnés.* Combien y en a-t-il? Evidemment, $\binom{n}{4}$. Le problème est résolu. Le nombre de points intérieurs est $\binom{n}{4}$.

Pourriez-vous mener à bien l'autre démonstration suggérée par récurrence?

Pour répondre à la question sur le nombre de régions, nous pouvons penser à faire des calculs comme dans le cas antérieur: B.

nombre de points	nombre de régions
2	2
3	4
4	8
5	16

L'expérience semble suggérer la conjecture

n	2^{n-1}

mais si nous continuons un peu plus, nous obtenons

6	31

et ainsi, la conjecture est mise en défaut. Et si nous continuons encore un peu, à l'aide d'un grand dessin et de beaucoup de patience, nous obtiendrons

7	57

situation encore plus éloignée de notre conjecture.

Etant donné que, lorsque l'on a six points, 31 régions apparaissent au lieu des 32 attendues, on appelle habituellement le problème présent *le problème de la région perdue.*

On trouve une discussion intéressante sur ce problème, dans un magnifique livre de Ogilvy, où le cas apparaît, encore entouré de mystère. En 1973, Gibbs, dans un article intitulé *Euler, Pascal and the Missing Region,* a réussi à éclaircir pleinement la situation. Voyons comment.

Celui qui connaît la formule d'Euler pour une configuration plane comme celle que nous avons sous les yeux

$$\text{Faces} + \text{Sommets} = \text{Arêtes} + 1$$

fera tout de suite des rapprochements. (Pour une démonstration facile, vous pouvez consulter le chapitre sur les points de Königsberg dans mon livre *Cuentos con cuentas*, Editorial labor, Barcelona, 1985).

Nous cherchons le nombre de faces C. Nous connaissons déjà le nombre de points d'intersection intérieurs $\binom{n}{4}$, si bien que le nombre total de sommets sera $V = n + \binom{n}{4}$. Il en résulte

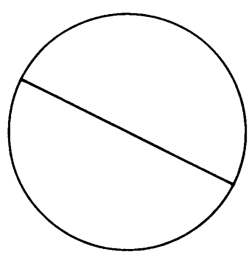
$$\text{Faces} = \text{Arêtes} + 1 - n - \binom{n}{4}$$

Les arêtes de notre configuration constituent un problème plus sérieux. Si vous expérimentez un peu plus, vous verrez que leur nombre exact ne semble pas facile à déterminer. En modifiant légèrement le problème, essayons de passer à un cas plus général, qui permette de voir plus clairement la loi de formation des segments qui composent les arêtes de la configuration. Nous essayerons de répondre à la question suivante.

B* *Dans un disque, on trace n cordes de façon qu'il n'y en ait pas trois concourantes. Combien de segments, à l'intérieur du disque, déterminent-elles en se coupant?*

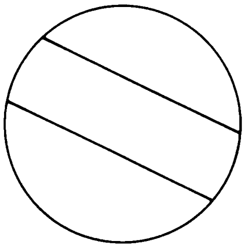
Faisons des expériences. Manifestement, le nombre de segments dépend du lieu d'intersection des cordes, c'est-à-dire, du nombre de points d'intersection intérieurs.

1 corde

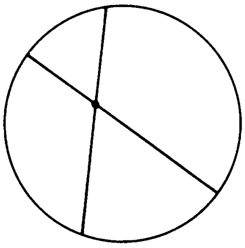


0 point intérieur
1 segment

2 cordes

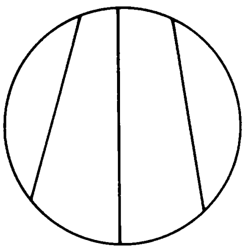


0 point intérieur
2 segments

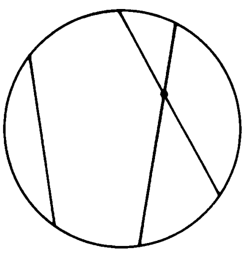


1 point intérieur
4 segments

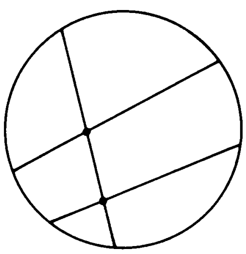
3 cordes



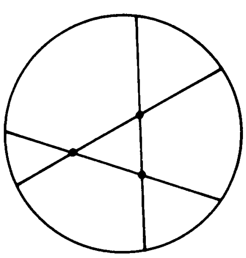
0 point intérieur
3 segments



1 point intérieur
5 segments



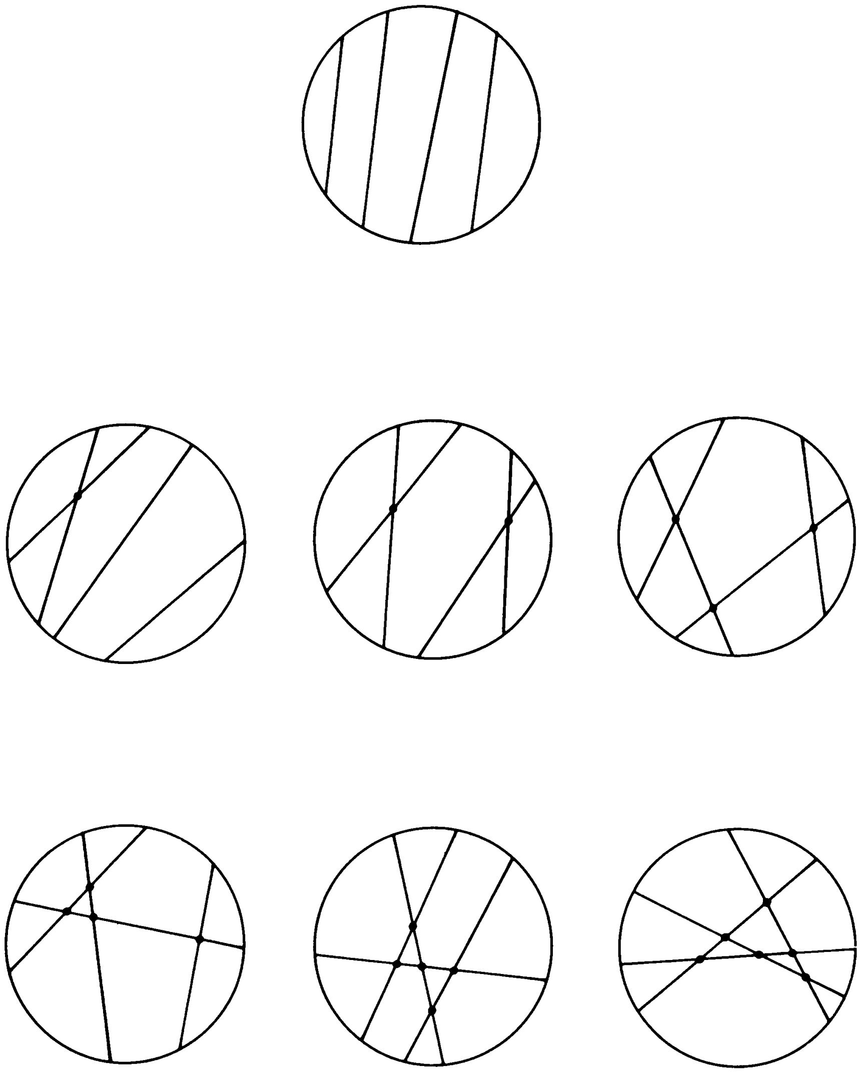
2 points intérieurs
7 segments



3 points intérieurs
9 segments

4 cordes

schéma



points intérieurs	segments
0	4
1	6
2	8
3	10
4	12
5	14
6	16

La loi de formation semble déjà assez transparente. Si l'on ajoute un point d'intersection, on ajoute deux segments. S'il n'y a pas de point d'intersection, il y a autant de segments que de cordes. Ceci suggère que:

Segments = Cordes + 2 · Points intérieurs

Nous avons maintenant une conjecture qui semble acceptable. Comment la démontrer? Il semble naturel d'essayer un raisonnement par récurrence sur le nombre de cordes. Supposons que la formule se vérifie lorsque le nombre de cordes est h. C'est-à-dire que notre hypothèse de récurrence est

(H) Segments (cas de cordes) = h + 2 · Points intérieurs
(cas de h cordes)

Ajoutons une corde. Nous voulons voir si par l'intermédiaire de *(H)*, nous pouvons démontrer:

Segments (cas h+1 cordes) = h+1 + 2 · Points intérieurs
(cas h+1 cordes)

Si on ajoute une corde au cas de h cordes que nous considérons, le nombre de points intérieurs sera le nombre de points du cas de h cordes plus le nombre de *points d'intersection ajoutés*, c'est-à-dire, le nombre d'intersections de la nouvelle corde avec les h antérieurs. Ainsi, en résumant nous pouvons écrire

(*) Points intérieurs (cas h+1 cordes) = points intérieurs
(cas h cordes) + Points ajoutés

Or, pour chaque point ajouté, un des segments qu'il y avait avant, est coupé en deux. D'autre part, sur la nouvelle corde, il y a autant de segments que de points ajoutés plus un.

(**) Segments (cas h+1 cordes) = Segments
(cas h cordes) + (points ajoutés) + (points ajoutés +1)

En utilisant maintenant l'hypothèse de récurrence *(H)* et les deux relations (*) et (**), nous obtenons

Segments (cas h+1 cordes) = [h + 2 · points intérieurs
(cas h cordes)] + 2 · (points ajoutés) + 1= h+1 + 2 · points
intérieurs (cas h cordes) + points ajoutés] = h+1 + 2 · points
intérieurs (cas h +1 cordes)

qui est précisément l'expression à laquelle nous voulions arriver. Si bien que notre conjecture, qui était vraie pour 1, 2, 3, 4 cordes, est ainsi démontrée.

En conséquence de cela, le problème de la région perdue est maintenant très simple. Nous savons que

$$\text{Faces} = \text{Arêtes} + 1 - \text{Sommets}$$

Les sommets étaient les $\binom{n}{4}$ points intérieurs plus les n points qui sont sur le cercle. Le nombre des arêtes est celui des segments intérieurs plus les n arcs déterminés sur le cercle par les n points. Et le nombre de segments est celui des cordes, c'est-à-dire $\binom{n}{4}$, plus deux fois celui des points intérieurs $\binom{n}{4}$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\text{Régions} = \text{Faces} =$$

$$\left[\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + n\right] + 1 - \left[\binom{n}{4} + n\right] =$$

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

que l'on peut écrire aussi de la façon suivante

$$\text{Régions} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$$

Cette formule explique le mystère de la région perdue. Si n est 2, 3, 4, 5, la somme des termes de la dernière expression qui ont un sens est égale à $(1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$, mais, à partir de n=6, cela change. Pour n=6, c'est $2^{5}-1$ et pour n=7, c'est $2^{6} - \left[\binom{6}{5} + \binom{6}{6}\right] =$ 64–7 = 57.

C. Pour ceux qui connaissent la caractérisation des graphes eulériens, le problème C est très simple. (Vous pouvez trouver une explication de cette caractérisation, dans le chapitre mentionné ci-dessus de *Cuentos con cuentas*). Le graphe sera eulérien, si et seulement si, le nombre de sommets de degré impair, c'est-à-dire, le nombre de sommets où concourt un nombre impair d'arêtes, est 0 ou 2.

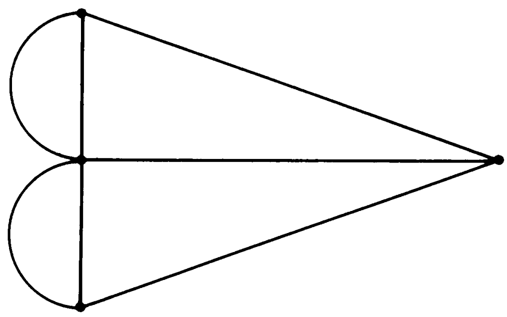
Chacun des sommets sur le cercle est uni à d'autres $(n+1)$ sommets du graphe par des arêtes du graphe (chacun étant uni par une corde aux $(n-1)$ sommets restants et par un arc aux deux sommets contigus sur le cercle). Ainsi, pour $n=2, 4, 6, 8, 10...$ les n sommets sont de degré impair. Si $n=2$, le graphe est encore eulérien, mais si $n=4, 6, 8, ...,$ il ne l'est plus. Donc, le graphe est eulérien seulement si $n=1, 2, 3, 5, 7, 9, ...$

Vous vous êtes peut-être souvenu d'un problème de dominos que nous avons résolu dans le chapitre 2, en le ramenant à celui que nous venons de voir.

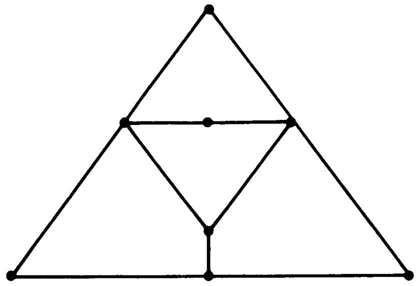
LA THÉORIE DES GRAPHES

La théorie des graphes, dont certains résultats ont été vus dans ce chapitre, est un de ces domaines de la Mathématique actuelle qui ont commencé sous forme de jeu, et sans avoir entièrement perdu ce caractère, sont devenus des instruments très utiles pour résoudre des problèmes profonds, tout en étant proches et familiers.

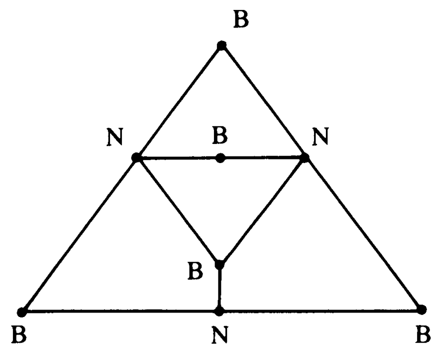
Un graphe n'est qu'un ensemble de sommets et de quelques arêtes qui les unissent. Et cette simple définition nous approche des mystères à découvrir. Quelle est la caractéristique générale qui fait ce graphe



admettre un parcours, sur quelques-uns de ses arcs sans lever le crayon du papier, et passant par tous et chacun de ses sommets une seule fois (parcours hamiltonien), et que cet autre graphe ne l'admette pas?

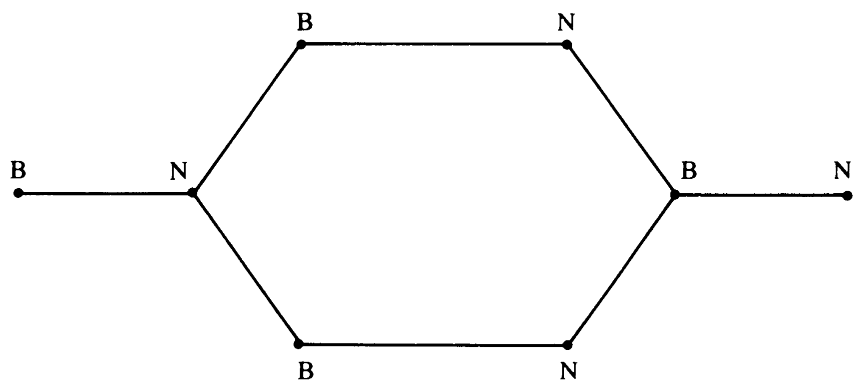


Pour vérifier que le second n'admet pas de parcours hamiltonien, nous pouvons procéder de la façon suivante. Marquons quelques sommets blancs, B, et d'autres noirs, N, comme sur la figure ci-après.



Comme on peut l'observer, d'un sommet B on ne peut passer directement, par des arêtes du graphe, qu'à des sommets N et d'un N, qu'à des sommets B. Il y a cinq sommets B et trois sommets N. Si l'on pouvait faire le parcours demandé, il serait de la forme BNBNBN ... ou bien de la forme NBNBNB ... Dans le premier cas, s'il se terminait en B, il y aurait cinq sommets B et quatre N. Ce qui est faux. S'il se terminait en N, il y aurait autant de sommets N que de B. Ce qui est aussi faux. Pareillement, on exclut le second cas.

Un graphe est connexe si, de chaque sommet, on peut aller à n'importe quel autre, par des arêtes du graphe. On pourrait penser qu'une condition nécessaire et suffisante, pour qu'un graphe connexe comme l'antérieur n'admette pas de parcours hamiltonien, est qu'il puisse avoir une coloration des sommets avec les caractéristiques antérieures, mais le simple graphe suivant



qui n'admet pas de parcours hamiltonien, nous délivre de cette erreur. Jusqu'à présent, on ne connaît aucun critère pour distinguer les graphes hamiltoniens de ceux qui ne le sont pas.

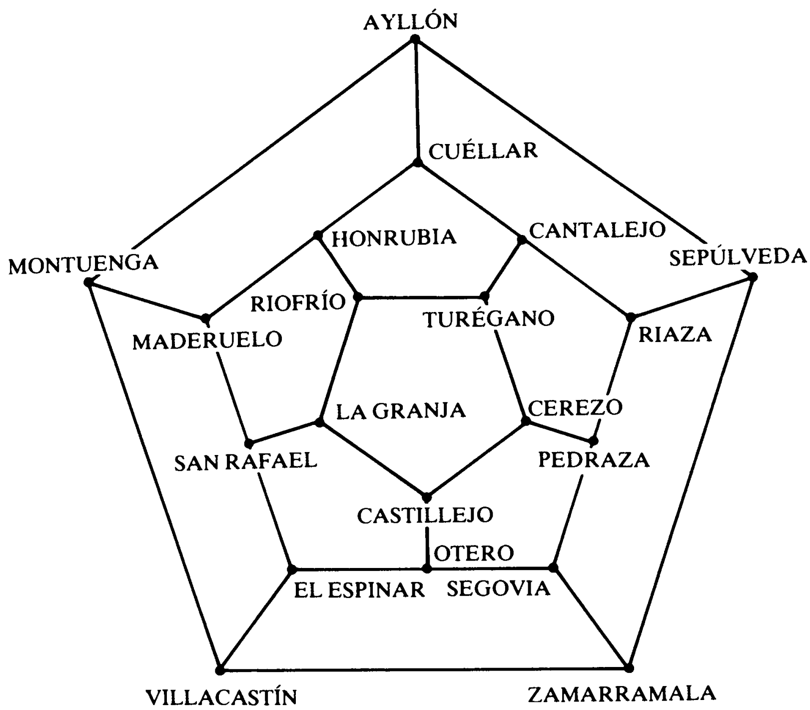
HAMILTON

Sir William Rowan Hamilton fut un de ces nombreux monstres précoces de l'histoire des mathématiques. Il naquit à Dublin en 1805, et étant orphelin de père et de mère dès la plus tendre enfance, sa première éducation fut à la charge d'un de ses oncles, linguiste expert. A cinq ans, William lisait le latin, le grec et l'hébreu. A dix ans, il savait acceptablement une demi-douzaine de langues orientales. Rapidement, il montra aussi un profond intérêt pour les mathématiques. Il entra au Trinity College de l'Université de Dublin et avant même d'y avoir terminé ses études, il fut nommé, à 23 ans, Astronome royal, directeur de l'Observatoire de Dunsink et professeur d'astronomie. En 1835, à 30 ans, il reçut le titre de Sir, en vertu de ses mérites scientifiques.

Il s'occupa principalement de faire progresser l'algèbre, ce qu'il fit en créant la théorie des quaternions, une généralisation intéressante des nombres complexes.

Hamilton publia un très beau jeu, qui fut même commercialisé et devint un certain temps à la mode. Il s'appelait *Voyage à travers le monde*. C'était un dodécaèdre régulier en bois. Sur chaque sommet, il y avait un pivot avec le nom d'une ville: Dublin, Rome, Paris, Madrid ... Il s'agissait d'indiquer un itinéraire continu, sur les bords du dodécaèdre, en partant d'une ville déterminée, de façon à parcourir chacune des villes en une seule fois. On marquait l'itinéraire avec de la laine de couleur qu'on attachait à Dublin et on entourait chaque pivot de la ville par laquelle on passait. Cette tâche est faisable et n'est pas très difficile. Les experts pouvaient jouer en fixant deux, trois... villes comme point de départ du parcours.

Le dodécaèdre régulier en bois est un peu volumineux et peu commode à manier. Voici un graphe, équivalent à celui du dodécaèdre, qui vous amusera tout autant et sera meilleur marché. A la place de la laine, vous pouvez utiliser un crayon.

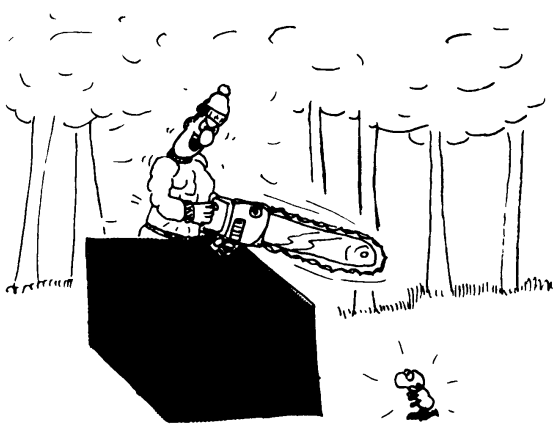


Voyage dans la province de Ségovie

Chapitre 11

Le cube, la termite et autres animaux géométriques

Voici quelques cas qui sont en rapport avec de simples éléments géométriques. Les problèmes géométriques sont habituellement d'un grand intérêt. Avec eux, plus qu'avec n'importe quel autre genre de problèmes, on a l'impression que l'esprit est capable de percevoir immédiatement le cheminement des idées qui mènent à la solution. Il est vraiment dommage que cette façon de penser ne soit pas présente dans notre enseignement dès les premières années, comme elle l'était autrefois, au plus grand plaisir de ceux qui l'ont connue.



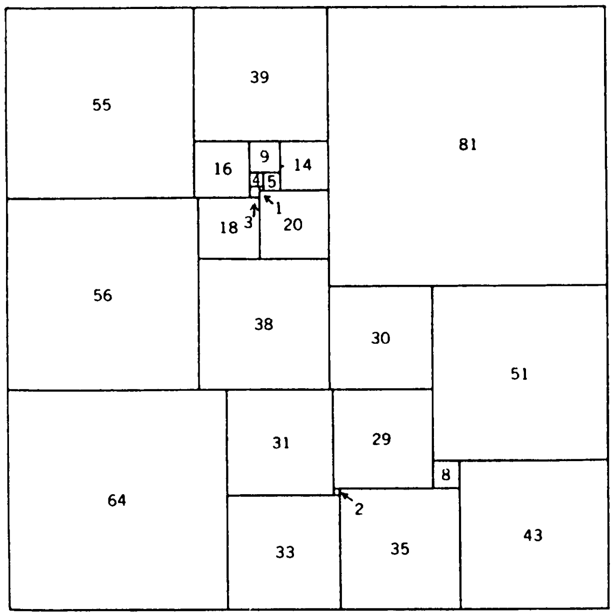
Le cube et la termite

1. LE CUBE ET LA TERMITE

Un cube en bois est divisé en $3 \times 3 \times 3 = 27$ petits cubes égaux. Une termite a la fantaisie de pénétrer jusqu'au centre même du petit cube central, mais en s'imposant certaines restrictions: elle veut partir d'un point central d'une des faces extérieures du grand cube et aller, en perçant, vers le centre du petit cube qui contient ce point; puis, elle veut aller en ligne droite au centre d'un des cubes adjacents ayant une face commune avec ce petit cube, et de là, au centre d'un autre des petits cubes adjacents non parcourus, etc. Elle veut parcourir tous les centres des cubes une seule fois et arriver au centre du petit cube central. Est-ce possible? Comment lui prépareriez-vous l'itinéraire?

2. DISSECTION D'UN CUBE

Voici un autre problème de cubes et petits cubes. Un carré peut être divisé exactement en un nombre fini de petits carrés, tous inégaux, dont les côtés sont parallèles à ceux du carré donné. Si vous ne le croyez pas, voici une figure qui le démontre (cette division en 24 petits carrés est la division en *le plus petit nombre* de carrés, connue jusqu'à présent). Voici la question proposée: est-il possible de diviser pareillement un cube, en un nombre fini de cubes tous inégaux?



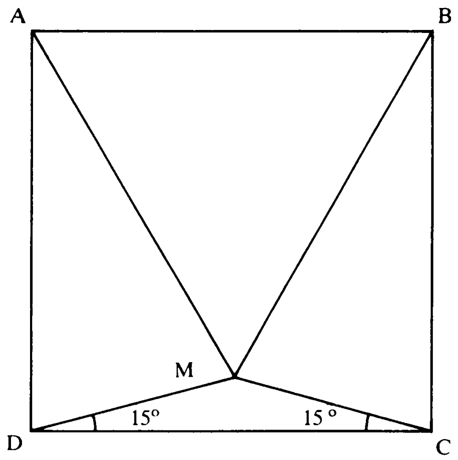
3. TROIS CONSTRUCTIONS AVEC RÈGLE, COMPAS ET EQUERRE

3a. On vous donne les longueurs des deux côtés b, c et de la médiane m_a associée au troisième côté d'un triangle. Construisez le triangle.

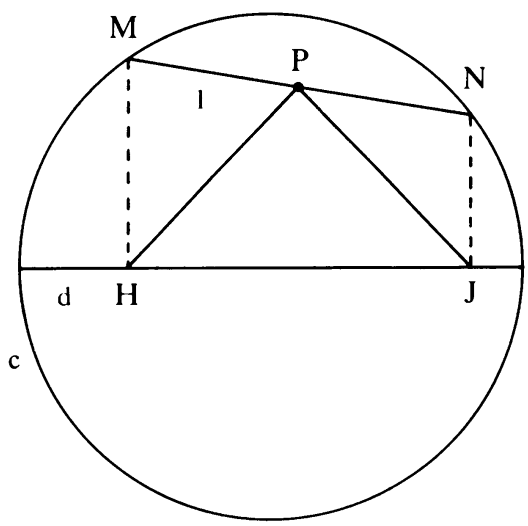
3b. On vous donne la mesure de l'angle A, la longueur du côté opposé a et celle du rayon du disque inscrit r, d'un triangle ABC. Construisez le triangle.

3c. On vous donne, dans le plan, deux cercles et une droite. Construisez un cercle tangent à la droite et aux deux autres cercles donnés.

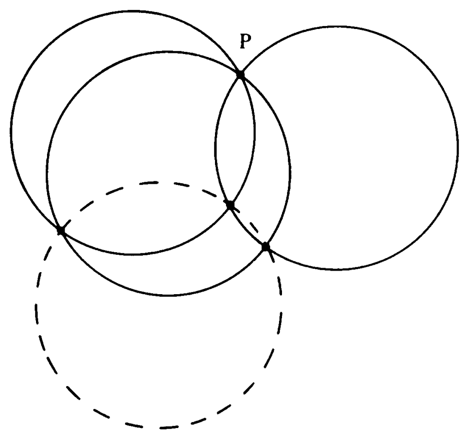
Dans le carré $ABCD$, construisez le point M comme l'indique la figure, en traçant MD et MC, inclinés de 15° par rapport à DC. Démontrer que le triangle MAB est équilatéral. 4a.



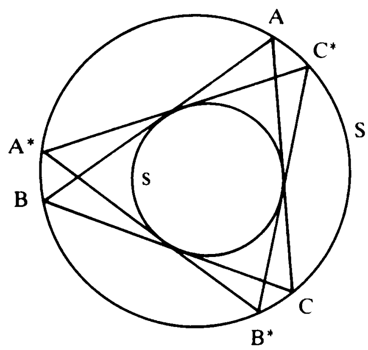
Dans un demi-cercle c, vous fixez le diamètre d. Une corde MN de longueur constante l, se déplace avec ses deux extrémités M, N sur le cercle. Démontrez que si P est le milieu de MN, et H et J sont les projections orthogonales sur d de M et N respectivement, le triangle PHJ est isocèle et ne change pas de forme, c'est-à-dire qu'il reste égal à lui-même quelle que soit la position de MN. 4b.



Trois cercles de même rayon passent par un point P. Démontrez que les trois autres points d'intersection des cercles, pris deux à deux, sont sur un cercle de même rayon que les trois premiers. 4c.



4d. Deux cercles s et S se trouvent dans la situation suivante: s est situé à l'intérieur de S; de plus, ils sont placés de telle façon qu'il existe un point A sur S tel que, si de A on trace une tangente à s qui recoupe S en B, de B on trace une autre tangente à s qui recoupe S en C et de C on trace une autre tangente à s, *cette dernière passe par* A (regardez la figure).



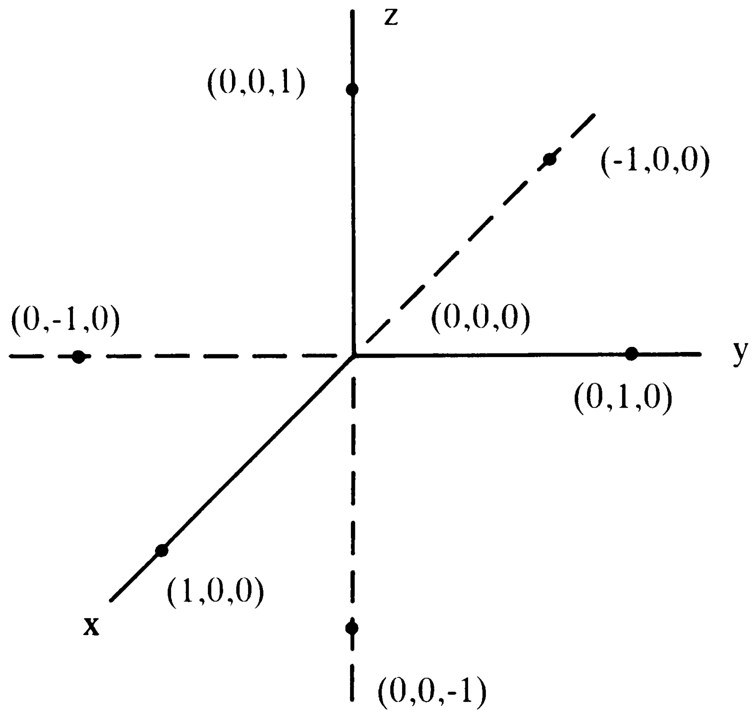
Essayez de démontrer que, les deux cercles étant situés ainsi, alors, si au lieu de partir du point A, vous partez d'un autre point A^* sur S, vous tracez une tangente, etc, comme vous l'avez fait pour A, la troisième tangente *elle aussi* repassera par le point A^*, comme l'indique la figure. (Piste: essayez d'utiliser le résultat du problème précédent 4c).

4e. Quel est le lieu géométrique des points à partir desquels on voit une ellipse E sous un angle droit? C'est-à-dire, quel est l'ensemble de tous les points P du plan d'une ellipse E, tels que les deux tangentes, issues de P, à l'ellipse sont perpendiculaires?

LES CAS RÉSOLUS

1. Pour commencer, nous allons utiliser la symétrie du cube et essayer de trouver une bonne notation. Prenons trois axes perpendiculaires, parallèles aux arêtes du cube, et passant par le

centre du cube, comme sur la figure. Si nous prenons comme unité, la longueur du côté de chacun des 27 petits cubes, alors le centre du petit cube central est le point (0, 0, 0) et chacun des centres des autres petits cubes a la forme (a, b, c), a étant égal à -1, 0 ou $+1$, de même que b et c.



Le problème proposé revient à ceci: la termite part d'un des six points, (0, 0, 1), (0, 0, –1), (0, 1, 0), (0,–1,0), (1, 0, 0), (–1, 0, 0), et se dirige vers l'un des points adjacents, en direction parallèle à l'un quelconque des axes, de là, à un autre non parcouru, etc. Elle veut les parcourir tous et terminer au centre. Pourra-t-elle?

Par symétrie, nous pouvons supposer qu'elle part de (0, 0, 1). Où peut-elle aller à partir de (0, 0, 1)? Soit à (1, 0, 1), ou bien à (–1, 0, 1), ou bien à (0, 1 , 1), ou encore à (0, –1, 1). Elle cherche à éviter le point (0, 0, 0) jusqu'à ce qu'elle ait parcouru tous les autres points. En général, de (a, b, c) elle peut passer à $(a\pm1, b, c)$, ou bien à $(a, b\pm1, c)$, ou bien à $(a, b, c\pm1)$, à condition que tous les nombres résultants soient –1, 0, ou +1, que le point correspondant n'ait pas encore été occupé, et que ce ne soient pas les trois zéros, sauf si tous les autres points ont déjà été parcourus.

Ainsi la termite prétend faire un chemin du genre

(0, 0, 1)	(0, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 1, 0)	...	(0, 0, 0)
1^er^	2^e^	3^e^	4^e^	...	27^e^

Mais observez que la somme des coordonnées de chaque point dans un lieu impair est impaire et la somme des coordonnées de chaque point dans un lieu pair est paire *(du fait même de la loi de* *formation de ces coordonnées indiquée plus haut).* Il est, par conséquent, tout à fait impossible que le $27^{\text{ème}}$ lieu soit précisément le point (0, 0, 0). La promenade, que la termite veut faire, est impossible avec les restrictions imposées.

Voyons ce que cela donnerait en changeant de lieu de départ. Il est évident qu'elle ne peut non plus partir d'un point comme (1, 1, 1) (somme impaire des coordonnées, comme auparavant) ou comme (–1, –1, 1). Mais l'entrave rencontrée disparaît, si le point de départ est, par exemple, (1, 1, 0).

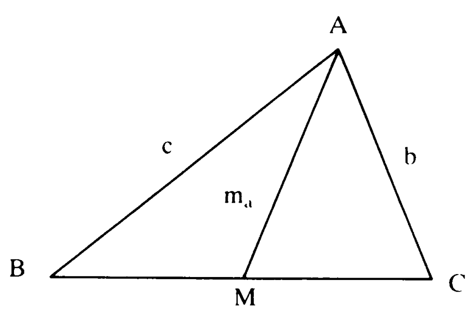
Maintenant, dans un enchaînement possible de mouvements

(1, 1, 0)	(0, 1, 0)	(0, 1, 1)	(–1, 1, 1)	...	(0, 0, 0)
1^{er}	2^{e}	3^{e}	4^{e}	...	27^{e}

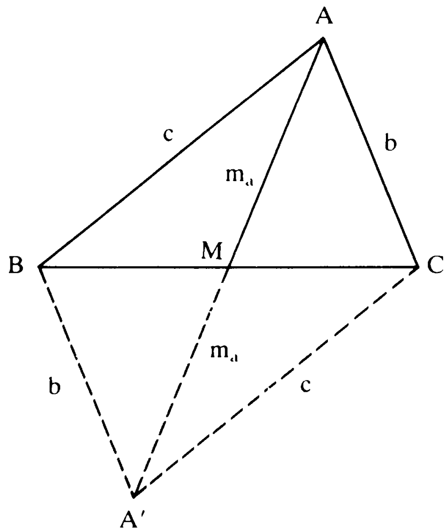
les points dans un lieu impair ont une somme paire de coordonnées et ainsi la difficulté semble disparaître. Pourriez-vous démontrer, en construisant effectivement et en traçant ainsi l'itinéraire de la termite, que la promenade est possible?

2. Ce problème est curieux car la réponse est totalement différente en dimension 2 et en dimension 3. Un carré peut être divisé en 24 carrés tous inégaux. En revanche, un cube ne peut pas être divisé en un nombre fini de cubes inégaux. Comment peut-on le voir? Supposez que c'est possible. Vous avez alors votre cube divisé en un nombre fini de cubes inégaux. Considérez ceux qui s'appuient sur la base. Sur la base carrée du grand cube, ils déterminent une division en carrés inégaux. Considérez le plus petit d'entre eux. Sur lui, se trouve un petit cube K. Celui-ci est encastré entre les cubes construits sur les carrés adjacents à la base. Les parois des autres cubes débordent du dessus du petit cube K. Le trou qui reste doit être rempli de petits cubes tous inégaux. Sur le dessus de K s'appuient quelques cubes et y déterminent une division en petits cubes inégaux. Considérons le plus petit et le cube K^* qui lui correspond ... Comme vous voyez, ce processus est sans fin et ceci démontre que le nombre de cubes inégaux ne peut être fini.

3a. Vous avez dû résoudre facilement ce problème. En jouant un peu avec la figure que vous cherchez



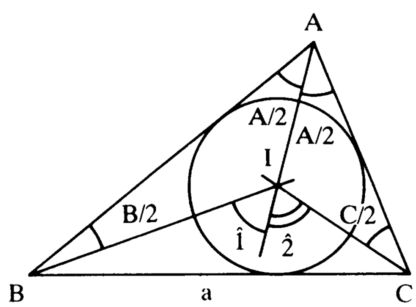
vous avez dû penser que si vous prolongez d'autant la médiane et vous unissez A' à B et C ..., il en résulte un parallélogramme, du fait qu'une simple égalité des triangles MAB et $MA'C$, ainsi que de MAC et MBA'. Or, dans ce parallélogramme, AA' est $2m_a$, $AC = b$, $A'C = c$ et ainsi $AA'C$ se construit facilement, puis grâce à lui, le parallélogramme $ABA'C$. L'on obtient ainsi ABC.

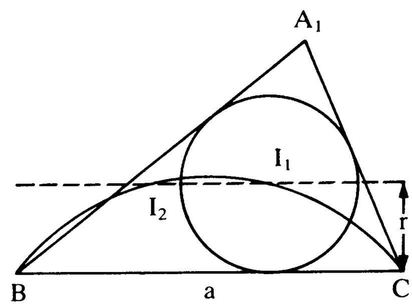


Jouez un peu avec la figure et les éléments qu'on vous donne. 3b.
Le centre I se trouve sur la bissectrice de A, de B et de C. Ainsi, l'angle $\hat{1}$, angle extérieur dans le triangle IAB vaut $A/2 + B/2$ et l'angle , $\hat{2}$ pareillement, vaut $A/2 + C/2$. Donc, l'angle BIC vaut

$$A + \frac{B + C}{2} = A + \frac{180° - A}{2} = 90° + \frac{A}{2}$$

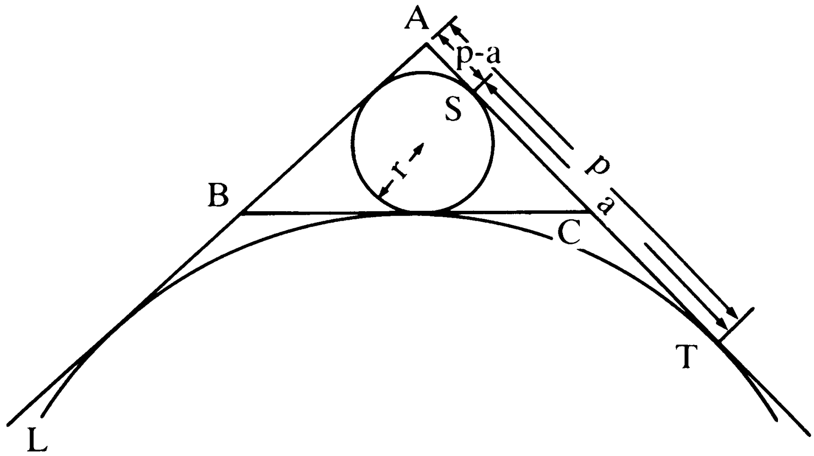
et se construit aisément si l'on connaît A. Il en résulte que I se trouve sur l'arc de cercle à partir duquel on voit $BC=a$ sous un angle de 90° + $A/2$. Comme la distance de I à BC est r, qui est donné, nous avons alors la solution: nous construisons sur a, l'arc capable de 90° + $A/2$ Une parallèle à a, à distance r, coupe l'arc donnant les deux possibles solutions symétriques, distinctes pour I. Nous traçons un cercle de centre en I_1 et de rayon r,





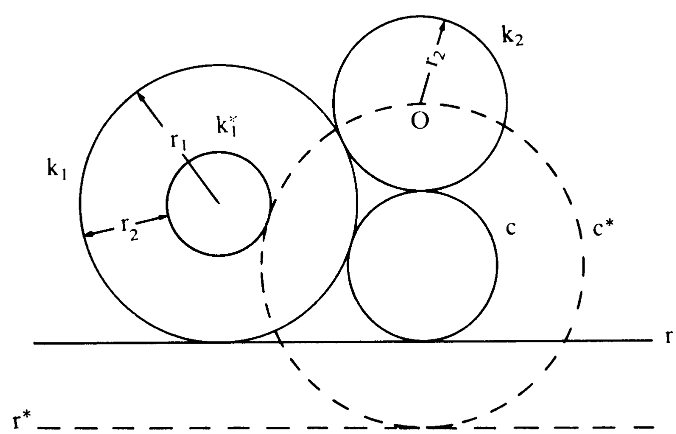
et ensuite ses tangentes issues de B et de C, qui se coupent en A_1. Nous procédons de façon analogue avec I_2 et nous obtenons ainsi les deux solutions symétriques A_1BC, A_2BC.

Si vous connaissez assez bien la géométrie du triangle, c'est encore plus facile.

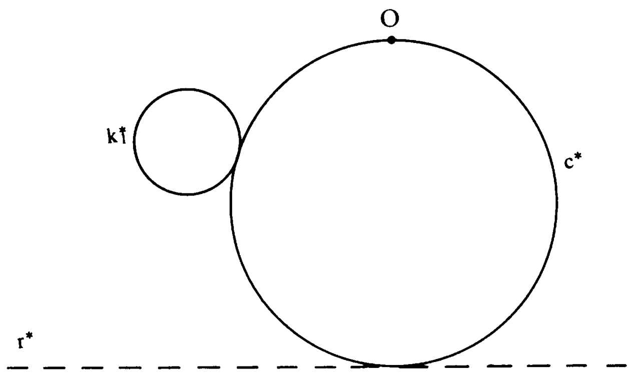


Dans un triangle ABC, comme celui de la figure, il n'est pas difficile de voir que AS est $p-a$, p étant le demi-périmètre du triangle, et $AT=p$. Ainsi, $ST=a$. Vous avez alors presque tout résolu. Vous tracez l'angle A et le cercle de rayon r tangent à ses côtés, vous obtenez ainsi S, et en prolongeant d'une longueur a, vous obtenez T. Avec ceci, vous pouvez tracer le cercle L et ensuite la tangente commune (deux solutions) BC, qui détermine déjà le triangle ABC.

3c. Si vous avez pensé aux stratégies générales du chapitre 0, vous avez dû avoir l'idée de supposer le problème et de faire la figure suivante

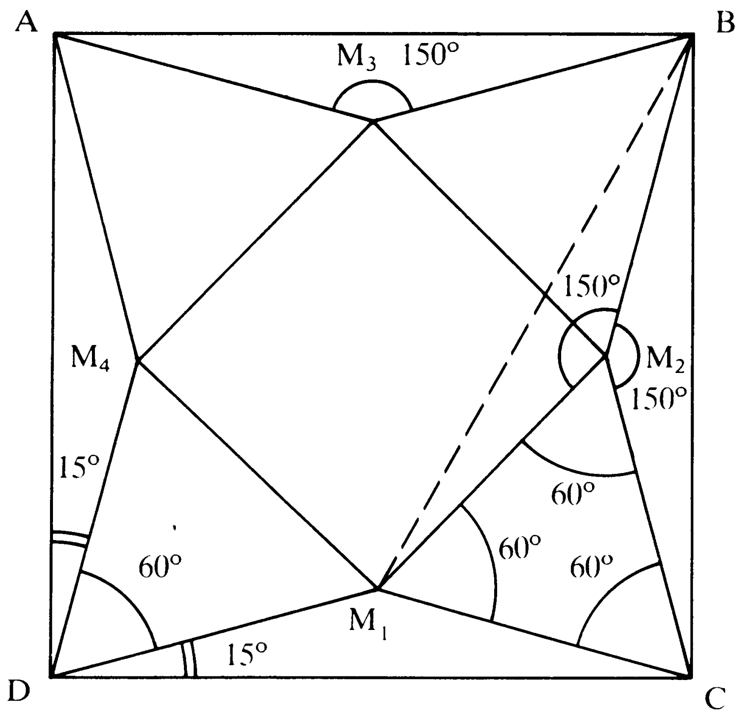


k_1 et k_2 sont donnés, ainsi que r. Vous cherchez c. Si vous saviez que c doit passer par un point, vous pourriez appliquer l'inversion... Or, de c, vous savez qu'il doit être tangent à k_1, k_2, r. Si c est tangent à k_2 et nous traçons c^* ayant le même centre, et dont le rayon est celui de c plus celui de k_2, alors, c^* passe par le centre O connu de k_2, il est tangent à la droite r^*, obtenue en déplaçant r d'une longueur égale à celle du rayon de k_2, et il est aussi tangent à k^*_1, cercle dont le centre est celui de k_1 et le rayon, celui de k_1 moins celui de k_2. La situation est celle-ci:

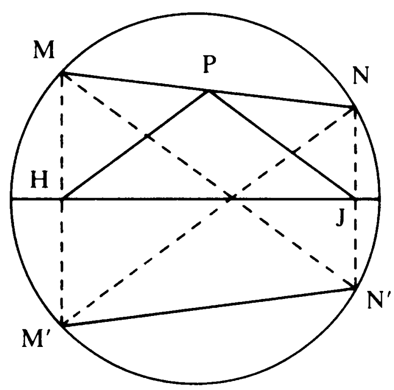


Si nous trouvons c^*, nous avons c. Ainsi, le problème se ramène à: k^*_1, r^* et O étant donnés, tracer c^* passant par O et tangent à r^* et k^*_1.
Si vous appliquez une inversion de centre O et puissance quelconque, alors r^* va être transformé en un cercle r passant par O, k^*_1 se transforme en un cercle s, ne passant pas par O, et c^*, que nous ne connaissons pas encore, se transformera en une droite p tangente à r et à s. Comme r et s se construisent facilement, p peut être une des quatre droites tangentes à la fois à r et à s, qui se construisent facilement. Nous inversons de nouveau et nous obtenons quatre solutions pour c^* qui donnent, en leur ajoutant le rayon de k_1, quatre solutions possibles, en général, pour c.

On peut bien entendu, faire ce problème avec un peu de trigonométrie. Mais les calculs ne sont pas élégants. Pourquoi ne pas utiliser la symétrie du carré et de la construction proposée? Nous complétons la figure symétriquement comme je vous l'indique ici. 4a.
Vous observerez aisément sur ce dessin que AM_3M_4, BM_3M_2, CM_1M_2 et DM_1M_4 sont des triangles équilatéraux et que, par exemple, AM_3B mesurent 150° de même que BM_2M_1. Par conséquent, les triangles AM_3B et BM_2M_1 sont égaux et $AB = BM_1$. Pareillement, $AB = AM_1$ et donc ABM_1 est équilatéral.

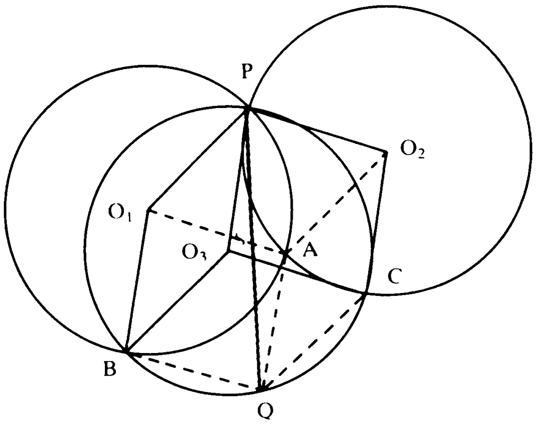


4b. Ici aussi, tout devient facile et transparent, par la symétrie. Complétez la figure comme ci-dessous:

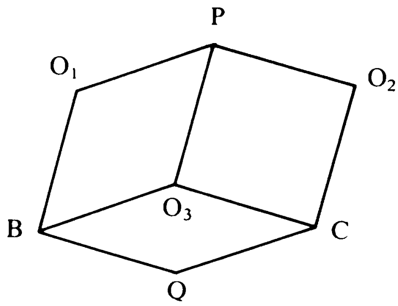


Il est clair que HP est parallèle à NM' et sa longueur est la moitié de celle de NM'. Par analogie, PJ est parallèle à MN' et sa longueur est la moitié de celle de MN'. Or, $MN'=M'N$ et ainsi, PHJ est un triangle isocèle. D'autre part, l'angle HPJ est égal à celui que forment MN' et $M'N$ et celui-ci est égal (angle intérieur dans un cercle) à celui qui correspond à l'arc (constant) déterminé par MN.

4c. Voici un curieux problème de Polya, un des grands maîtres dans l'art de résoudre des problèmes. En jouant avec la figure, nous pouvons la compléter comme ci-dessous, en unissant les centres des cercles donnés aux points d'intersection des cercles.



Qu'avez-vous dessiné ainsi?



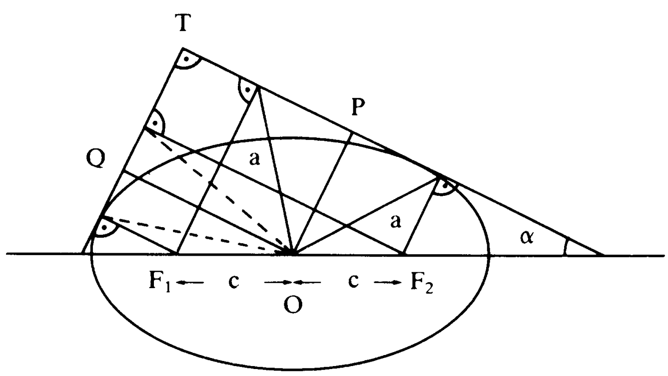
Une projection dans le plan d'un cube. Le cube a un centre S, qui est le milieu PQ. Dans le plan, A est symétrique de O_3 par rapport à S, B l'est de O_2, C de O_1. Nous voulons démontrer que A, B, et C déterminent un cercle de rayon égal à celui des autres cercles donnés. Celui qui passe par A, B, C est symétrique par rapport à S de celui qui passe par O_1, O_2, O_3 et *il est évident qu'il est un cercle de centre P et de rayon égal à celui des cercles donnés initialement.* Ainsi, le cercle qui passe par A, B, C a son centre en Q et son rayon est égal à celui des cercles donnés.

Le problème, avec ses cercles et ses droites, suggère de regarder comment on pourrait utiliser l'inversion. Nous faisons une inversion, dont le centre est le centre O de s et dont la puissance est le carré du rayon de s. s demeure alors invariant, S devient S^*, un cercle intérieur à s et chacune des droites AB, BC, CA devient un cercle qui passe par O et a le même rayon ρ (observez que toutes les trois sont tangentes à s), ρ étant précisément la moitié du rayon de s. Nous sommes en mesure d'appliquer le problème antérieur 4c et ainsi, A', B', C', points inverses de A, B, C, *déterminent* un cercle qui est précisément S^*, ayant ρ pour rayon. Nous allons maintenant considérer A^*,B^*,C^*, le triangle mentionné dans l'énoncé. Vous avez commencé par A^* et vous avez tracé A^*B^* tangente à s, puis B^*C^*, tangente aussi à s. Grâce à l'inversion, 4d.

A^*B^* devient un cercle de rayon ρ, passant par O et coupant S^* en $A^{*\prime}$ et $B^{*\prime}$. De même, B^*C^* devient un cercle de rayon ρ, qui passe aussi par O et coupe S^* en $C^{*\prime}$ et $A^{*\prime}$. Le cercle inverse de C^*A^* passe par O et coupe S^* *en* C^* et A'. Quel est son rayon? Il est évident que, en vertu du résultat de 4c, le cercle qui passe par O, $A^{*\prime}$, de rayon ρ, et qui est différent de celui déterminé par O, $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, doit passer par $C^{*\prime}$. Comme il ne passe qu'un seul cercle par trois points, le rayon est précisément ρ. Ainsi, C^*A^* est tangente à s et, de cette façon, la propriété est démontrée.

Ce résultat est un cas particulier d'un fameux théorème de Poncelet, d'extrême importance dans le développement d'une branche moderne de la géométrie, la géométrie algébrique.

4e. Voici un fameux théorème de Gaspard Monge, ami de Napoléon, qui lui confia de hautes fonctions administratives. Le problème se résout facilement, avec un peu de géométrie analytique. On peut aussi le résoudre plus élégamment, sans géométrie analytique, en utilisant un résultat que vous connaissez peut-être, selon lequel la projection des foyers d'une ellipse sur n'importe quelle tangente, se trouve sur un cercle de même centre que l'ellipse et et de rayon a, c'est-à-dire, le plus grand demi-axe de l'ellipse. (Vous pouvez en voir une petite démonstration au premier chapitre de *Cuentos con cuentas*). Avec cette propriété, il suffit de considérer un point T de la figure et de faire les calculs indiqués ci-dessous



$$\left.\begin{array}{l} OP^2 = a^2 - c^2\cos\alpha \\ \\ OQ^2 = a^2 - c^2\sin^2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow OT^2 = OP^2 + 2a^2 - c^2 = (a^2 - c^2) + a^2 = a^2 + b^2$$

Comme vous le voyez, on obtient $OT = \sqrt{a^2 + b^2}$ et ainsi, le lieu géométrique demandé est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, appelé habituellement *cercle de Monge*.

Il est évident que depuis une vingtaine d'années, la pensée géométrique souffre une profonde dépression dans notre *enseignement mathématique* initial, primaire et secondaire. Quand je parle de la pensée géométrique, je ne fais pas allusion à l'enseignement de la géométrie plus ou moins fondée sur les *Eléments* d'Euclide, mais plutôt à quelque chose de beaucoup plus essentiel et profond, qui est la culture de ces parties de la Mathématique qui proviennent, tout en essayant de la stimuler, de la capacité de l'homme à explorer rationnellement l'espace physique dans lequel il vit, la figure, la forme physique.

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Cette situation, évidente dès que l'on feuillette nos livres de classe et les programmes de notre éducation primaire et secondaire, n'est pas particulière à notre pays. C'est en réalité, un phénomène universel qui, à mon avis, est dû en grande partie, à l'évolution même des mathématiques dès le commencement de ce siècle.

La crise des fondements du début du siècle a poussé le mathématicien vers le formalisme, à l'exagération de la rigueur, à un certain abandon de l'intuition dans la construction de sa science. Ce qui était bon pour les fondements fut considéré par beaucoup comme étant bon aussi pour la transmission des connaissances. Les conséquences pour l'enseignement des mathématiques furent en général mauvaises, mais elles furent spécialement néfastes pour la pensée géométrique. L'emphase sur la théorie des ensembles s'appuie sur l'idée qu'il faut aller aux fondements, peut-être à cause d'une mauvaise interprétation des analyses de certains psycho-pédagogues sur la structure évolutive de la connaissance de l'enfant. Le souci démesuré de rigueur dès l'enfance a poussé beaucoup de gens à s'occuper de structures algébriques simples, où la rigueur est possible, ce qui n'a guère servi qu'à introduire l'enfant à la pédanterie des noms et à l'utilisation de quelques tautologies. A ce niveau, il était difficile de formaliser correctement la géométrie, car il était impossible de l'enseigner avec toute la rigueur voulue. Et par cette même brèche, nous avons perdu la pensée géométrique, l'intuition spatiale et la source la plus importante de véritables problèmes et de résultats intéressants, abordables avec un petit nombre d'outils facilement assimilables, source qui fut durant des siècles l'apanage des mathématiques.

Le XIX^{e} siècle fut le siècle d'or du développement de la géométrie élémentaire, du genre de géométrie auquel se consacrait traditionnellement l'enseignement initial de la Mathématique, qui vivait à l'ombre de créations très intéressantes et très à la mode des mathématiques supérieures, comme la géométrie descriptive, la géométrie projective, la géométrie synthétique, les géométries non euclidiennes ... Ce même sens géométrique, qui a stimulé les développements spectaculaires du XIX^{e} siècle, continue à vivre encore aujourd'hui dans des domaines tels que la théorie des graphes, la théorie des corps convexes, la géométrie combinatoire, quelques chapitres de la théorie de l'optimisation, de la topologie... On peut noter ces traits communs à tous ces développements: une relation intense avec l'intuition spatiale, un certain composant ludique et peut-être, un rejet tacite des développements analytiques excessifs.

L'enseignement élémentaire ne s'est absolument pas fait l'écho de ces matières, dont la profondeur est de plus en plus manifeste. Elles ne sont prises en compte qu'au niveau supérieur, et au niveau des mathématiques récréatives. Or, ces mathématiques récréatives n'ont pas encore trouvé leur voie vers l'école, dans notre pays. Paradoxalement, nous ne permettons pas de jouer à ceux à qui cela plaît le plus, et à ceux qui profiteraient le mieux du jeu mathématique.

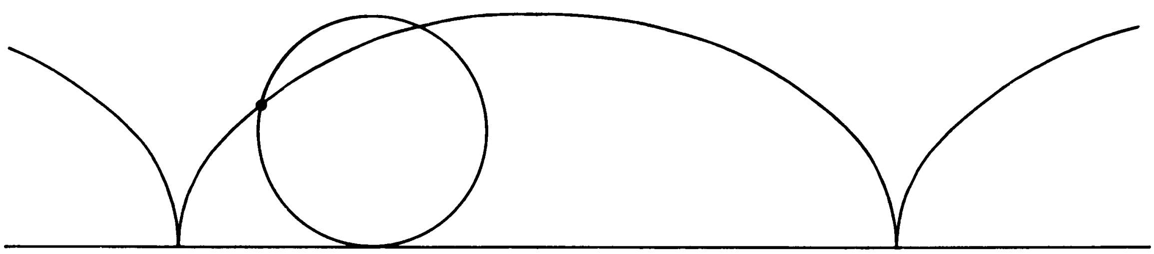
A mon avis, ce genre de géométrie pourrait et devrait être vaillamment introduit dans l'enseignement primaire et secondaire. Et non seulement à titre de jeu ou de récréation, mais aussi en tant que matière d'enseignement à part entière.

Chapitre 12

Une courbe polyvalente

LA CYCLOÏDE

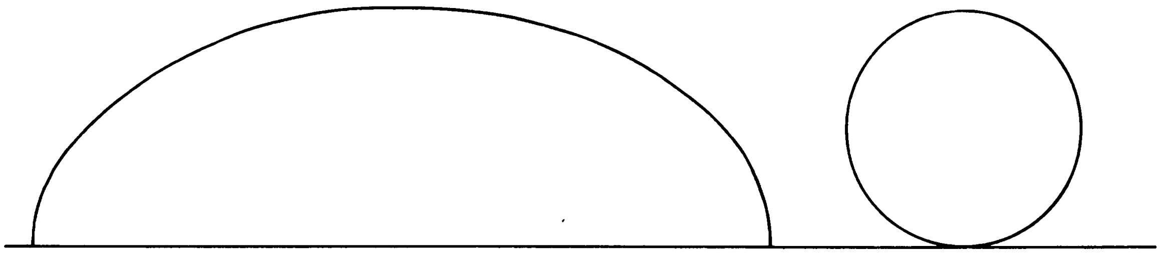
Sur le pneu de la roue de votre bicyclette, marquez à la craie, un point qui soit bien visible. Quelle est la courbe parcourue par ce point, lorsque votre bicyclette roule sur la route? Vous pouvez essayer de tracer cette courbe sur un papier. Ce n'est pas difficile. Personnellement, j'ai découpé un disque en carton, d'environ 3,5 cm de diamètre. Pour éviter qu'il ne glisse sur la règle, j'ai fixé au bord de la règle une bande de papier collant, côté adhésif vers l'extérieur. J'ai posé la règle sur le papier et j'ai ainsi réussi à faire rouler la roue en l'appuyant sur la règle et la couchant sur le papier. Sur le bord de la roue en carton, j'ai fait une petite encoche pour y mettre le crayon. Puis j'ai fait rouler le disque le long du bord de la règle et le crayon mis dans l'encoche a dessiné ceci:



ce qui donne une bonne idée de la courbe. Cette courbe est l'une des plus célèbre de l'histoire des mathématiques. Elle s'appelle *cycloïde*, et possède, comme vous le verrez, un grand nombre de propriétés curieuses.

AIRE SOUS LA CYCLOÏDE

Pour commencer, regardez la région comprise entre un arc de cycloïde et la droite sur laquelle le disque a roulé. A première vue, quelle aire calculez-vous pour cette région? Vous riposterez, avec raison, l'aire... par rapport à quoi? Vraisemblablement, par rapport à l'aire du disque, n'est-ce pas? Voici les deux aires



Comment les comparez-vous? Si vous avez du papier millimétrique, c'est facile. Vous dessinez les figures sur ce papier, vous comptez les petits carrés et vous comparer. Galilée s'est intéressé à ce problème. Il n'avait pas de papier millimétrique, mais il avait une balance. Il a découpé les figures dans du bois, il les a pesées et ... il a trouvé que l'aire sous la cycloïde était à peu près trois fois plus grande que l'aire du disque! Mais il a dû trouver que sa méthode était inexacte et que le rapport entre ces aires ne pouvait pas être 3, un nombre si rond, qui a peu de rapport avec le nombre π, si ce n'est qu'il est proche de 3,141... C'est pourquoi, il a conjecturé que l'aire sous la cycloïde devait être π fois celle du disque.

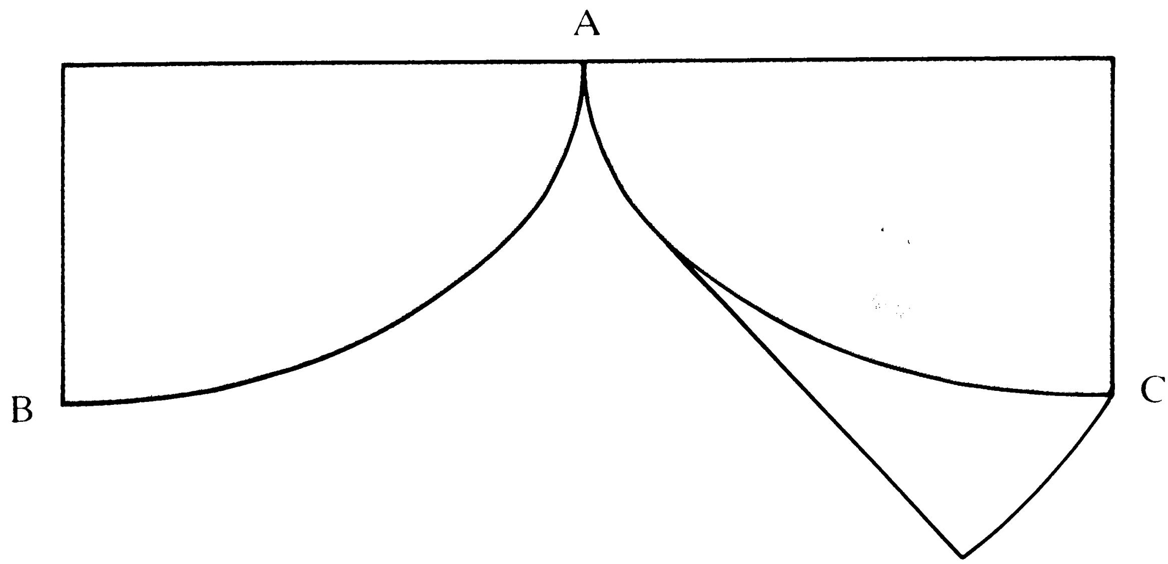
LONGUEUR D'UN ARC DE CYCLOÏDE

Sa surprise a dû être grande, lorsqu'un Français, Roberval, et l'un de ses disciples, l'Italien Torricelli, ont démontré que *l'aire sous la cycloïde est exactement trois fois plus grande que l'aire du disque qui l'engendre!*

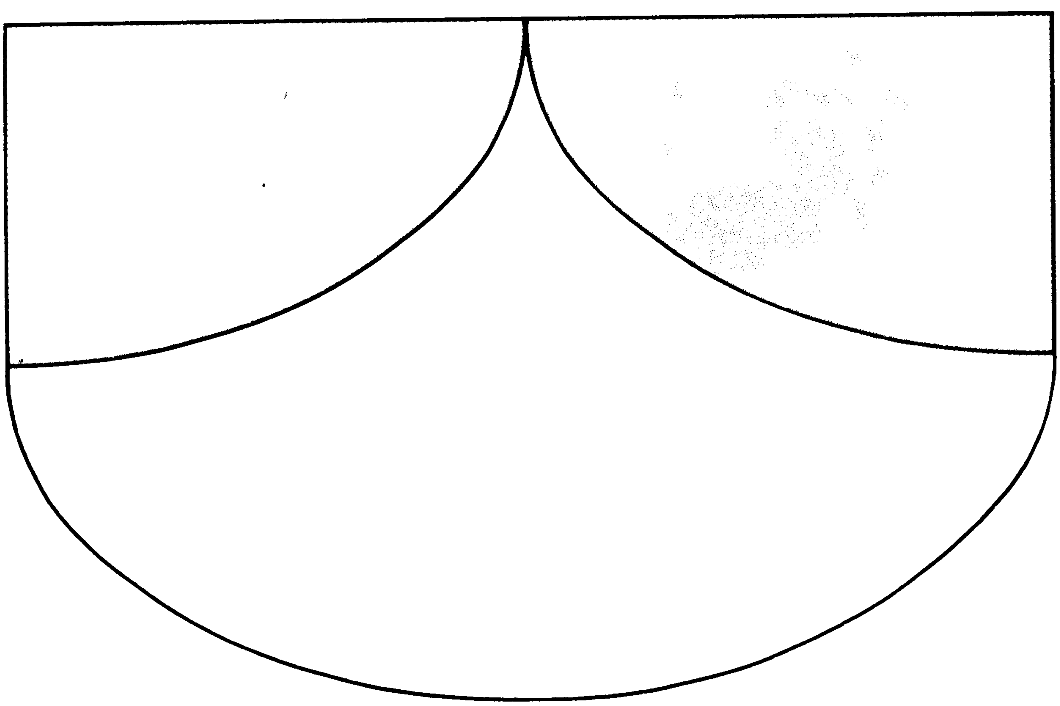
Encore plus frappant, est le calcul de *la longueur d'un arc de cycloïde*. Pourquoi n'essayez-vous pas de le faire expérimentalement? C'est très facile. Découpez une courbe cycloïdale en carton épais, prenez un fil et enroulez-le autour du carton. Puis mesurez-le! Avec la cycloïde engendrée par ma roue de 3,5 cm de diamètre, j'ai obtenu une longueur de fil de 14 cm. Faites l'expérience avec une autre mesure, par exemple avec un diamètre de 4 cm. Qu'obtenez-vous? A peu près, 16 cm. Qu'observez-vous? 14/3,5 = 16/4 = 4. Est-il vrai que la longueur de la cycloïde est 4 fois celle du diamètre? En effet! Et ceci est un autre résultat de Roberval, Torricelli et autres, obtenu il y a environ trois siècles.

La cycloïde possède une telle quantité de propriétés curieuses, que ces messieurs du XVII^{e} siècle ont commencé à l'étudier avec délice, et à organiser de véritables batailles pour savoir qui avait trouvé le premier telle ou telle propriété. En voici une, que l'on doit à Huygens, un Hollandais pas du tout errant, qui vécut à Paris pendant assez longtemps.

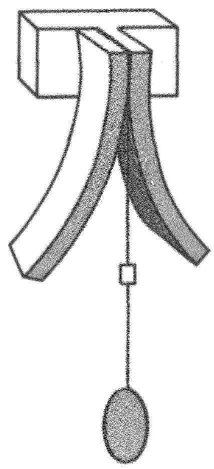
Découpez dans un carton deux demi-cycloïdes comme l'indique la figure



Ajustez un fil à la partie AC et fixez-en une extrémité en A. Maintenez la pointe de votre crayon à l'autre extrémité en C puis, l'extrémité en A étant fixe et le fil tendu, appuyé sur le carton, séparez-le de C en lui faisant décrire une courbe. Quelle courbe? Faites-le d'abord, et devinez ensuite. Il s'agit bien d'une cycloïde, semblable à celles que nous avons vues, mais complète ainsi que l'indique le schéma.

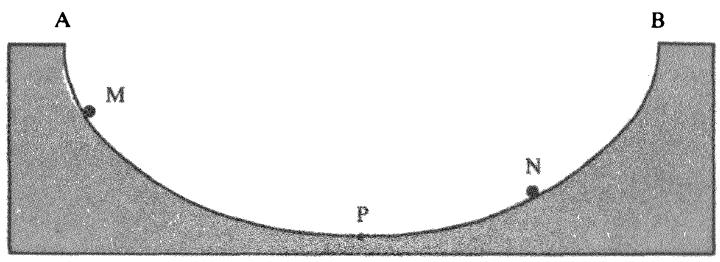


Huygens fut le premier constructeur sérieux d'horloges à balancier, ainsi qu'un mathématicien et un physicien génial du XVII^e siècle. Voici le pendule qu'il se fabriqua



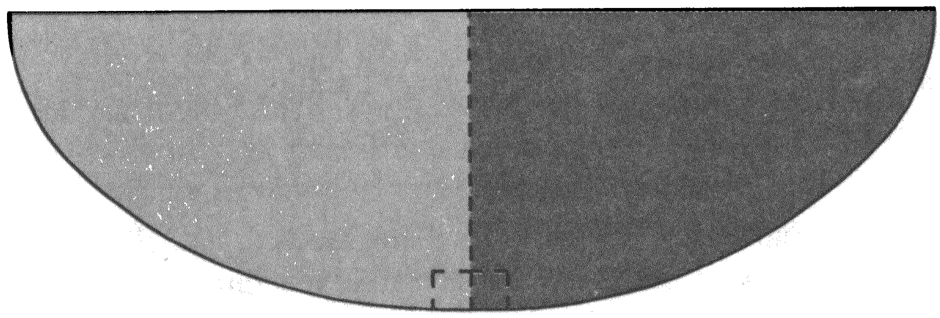
et qui avait la remarquable propriété suivante: même lorsque l'amplitude du mouvement du pendule variait, en grandissant ou en rapetissant, le pendule continuait à marquer parfaitement bien le temps, c'est-à-dire, qu'il avait la même période.

Comment expliquer ce comportement? Huygens découvrit que la cycloïde a la propriété d'être *tautochrone*. Qu'est-ce que cela signifie? Ceci: si vous orientez une cycloïde vers le haut, comme dans le dessin ci-dessous, et que vous y laissez tomber deux billes, l'une du point M et l'autre du point N ..., *toutes les deux arrivent en même temps au point P le plus bas de la cycloïde!* Et ceci, alors que celle qui tombe du point M doit parcourir un chemin plus long.

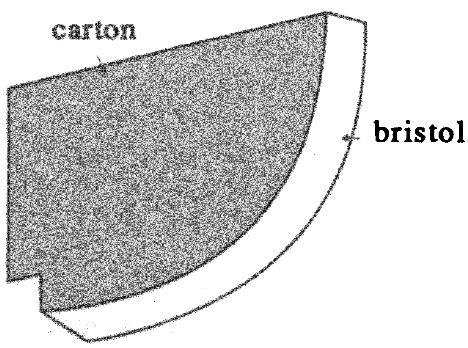


Cette propriété vous explique que, si vous pouvez construire un pendule de façon que la lentille parcoure, non pas un arc de cercle comme dans les horloges à balancier d'aujourd'hui, mais un arc de cycloïde, alors peu importe que l'amplitude soit plus grande ou plus petite. Sa période sera la même. Huygens s'arrangea, grâce à la propriété que nous avons vue avant, pour que la lentille parcourue effectivement une cycloïde. Observez, sur le dessin du pendule de Huygens, que les profils de la gorge où oscille la corde, sont deux arcs de cycloïde.

J'ai réalisé une expérience assez simple pour vérifier la tautochronie de la cycloïde. Pourquoi ne faites-vous pas comme moi? Découpez un carton, de façon que le bord soit une cycloïde la plus grande possible. Coupez-le au milieu, sur la ligne des pointillés du dessin.

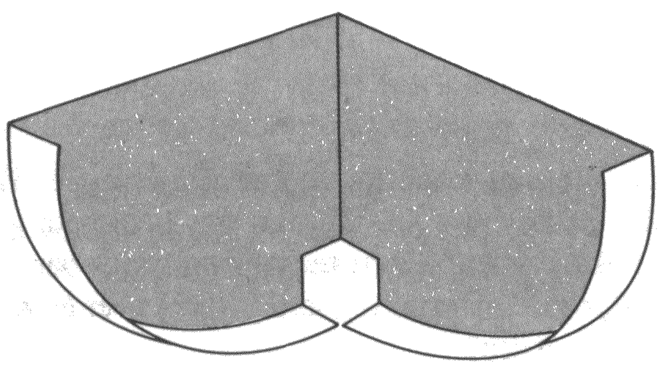


Découpez une petite fenêtre rectangulaire sur le bord du bas, de façon qu'une bille puisse passer par le trou. Collez une bande de bristol sur le bord courbe de chaque moitié, de façon à obtenir à peu près ceci



Faites en sorte que le bord extérieur du bristol soit légèrement surélevé pour qu'une bille puisse, en suivant la ligne de la cycloïde, y glisser sans s'échapper.

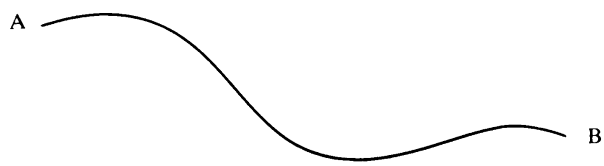
Maintenant, avec du papier collant, unissez en angle droit les deux morceaux de cycloïde que vous avez préparés. Vous devez obtenir un engin comme celui-ci.



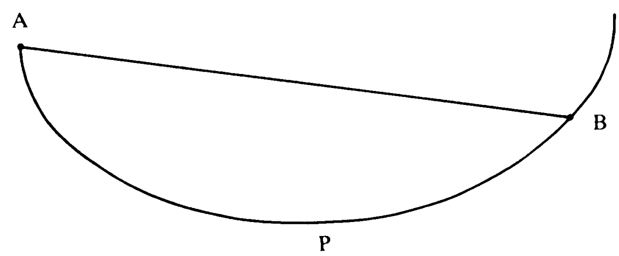
Vous pouvez alors commencer l'expérience. Comme vous aurez besoin de quatre mains, vous pouvez dès maintenant demander l'aide d'un ami. Celui-ci soutiendra votre engin, verticalement. Vous, vous laisserez tomber *au même moment*, deux billes identiques, chacune sur une moitié de la cycloïde, à partir de points de la cycloïde situés à *différentes altitudes*. Si vous avez fait les choses comme il faut, les deux billes se heurteront au point le plus bas, étant donné qu'elles y arrivent *en même temps*. Si vous avez mal fait les choses, l'une arrivera avant l'autre et toutes les deux s'échapperont par les trous, à toute vitesse.

BRACHYSTOCHRONE

La cycloïde ne se contente pas d'être tautochrone, elle est en outre *brachystochrone*. Etre brachystochrone veut dire être la courbe de descente la plus rapide, dans le sens suivant. Marquez deux points A et B sur un plan vertical, à différentes altitudes.



Supposez que vous avez un fil de fer et une perle de collier. Il s'agit d'unir A et B avec le fil de fer, d'enfiler la perle par A et de la faire glisser le long du fil de fer jusqu'à B. Selon la forme de la courbe que vous donnerez au fil de fer, la perle ne mettra pas le même temps à tomber de A à B. Voici la question: quelle forme faut-il donner au fil de fer, pour que la perle mette le moins de temps possible pour arriver en B? Et bien, cette forme est précisément celle de la cycloïde qui part verticalement de A et passe par B, de la façon suivante



C'est curieux, n'est-ce pas? Le segment rectiligne AB est la distance la plus petite entre A et B, mais une boule qui glisse sur le plan incliné AB ... met plus de temps en passant par là, que si elle va par APB, en descendant d'abord jusqu'à P et en remontant ensuite à B! Qui l'eut cru?

Pourquoi n'en faites-vous pas l'expérience, comme avant, avec du carton, du bristol et des billes? C'est facile! Plus votre cycloïde sera grande, mieux vous pourrez observez la différence.

L'HÉLICE

L'hélice est une digne compagne de la cycloïde dans le monde des courbes célèbres; ses spirales ont même une histoire beaucoup plus remarquable que la cycloïde, car l'on sait que Apollonius de Perga lui-même, écrivit au III^{e} siècle avant J.C., un traité sur celle-ci, aujourd'hui perdu.

Si vous prenez une feuille de papier, par exemple DIN A4, que vous y tracez une diagonale et que vous enroulez ensuite la feuille pour former un cylindre, la diagonale tracée deviendra une courbe sur le cylindre. Celle-ci est une hélice.

L'hélice, comme vous le verrez, vous permet d'étudier d'autres courbes. Pour cela, au lieu d'une feuille de papier normale, prenez une feuille d'acétate transparente et retracez-y la diagonale. En enroulant le papier pour former un cylindre, vous pourrez alors beaucoup mieux voir l'hélice dans l'espace.

Placez le cylindre devant un fond blanc, parallèle à ses génératrices. *La projection orthogonale de l'hélice sur le fond est une sinusoïde*, c'est-à-dire que si vous regardez l'hélice de face sur le fond blanc et à une certaine distance, vous verrez une sinusoïde. C'est curieux, n'est-ce pas? Mais, ce n'est pas tout.

Mettez le cylindre vertical sur une table recouverte de blanc. Maintenant, retardez l'hélice à une certaine distance, un mètre par exemple, avec un seul œil et de telle façon que la ligne de votre regard soit tangente à l'hélice, c'est-à-dire que, si vous vous avancez légèrement vers le cylindre, vous voyez comment l'hélice commence à se recouper elle-même. La figure que vous voyez alors est... une cycloïde! En effet, *la projection de l'hélice, sur un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, dans n'importe quelle direction tangente à l'hélice, est une cycloïde.*

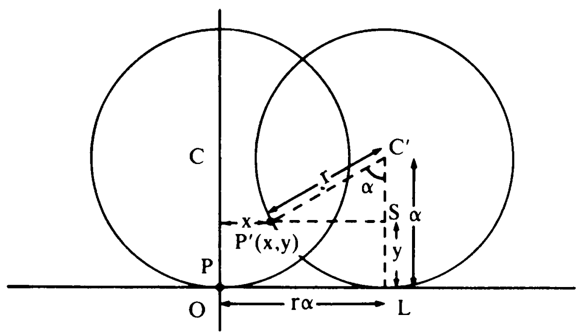
La projection dans une direction non tangente à l'hélice est une *hypocycloïde* (ou une *hypercycloïde*) qui est la courbe que décrit un point intérieur à la roue (ou extérieur à celle-ci) qui se déplace solidairement à la roue, lorsque celle-ci roule sur une droite.

Comme vous voyez, l'hélice, que l'on trouve un peu partout (vis, tiges de certaines plantes, cornes de certaines races de moutons...), fournit des procédés simples pour engendrer des courbes intéressantes. Nous ne les avons pas toutes vues ici. Savez-vous comment obtenir une spirale en regardant et projetant l'hélice d'une façon particulière?

L'ÉQUATION DE LA CYCLOÏDE

Si vous avez quelques connaissances de calcul et de géométrie analytique, il vous sera facile de *démontrer* les propriétés que nous avons énoncées.

Avant tout, voyons si nous pouvons trouver l'équation de la cycloïde, qui sera notre point de départ. Choisissons des axes de coordonnées commodes: la ligne droite où s'appuie la roue va être l'axe x et l'axe y sera la perpendiculaire à cette droite, passant par le point que vous avez indiqué sur la roue, quand celui-ci se trouve par terre.
Laissons rouler un peu la roue et voyons où s'arrête le point P du cercle. Quand le centre du disque, C, est devenu C', le point P est devenu P'. Celui-ci est le point dont nous recherchons l'équation. Appelons ses coordonnées (x,y). Comme la roue ne glisse pas sur le sol, nous savons que la longueur de l'arc LP' sur le cercle est égale à la longueur du segment rectiligne OL.



Si nous appelons α l'angle $LC'P'$ mesuré en radians, alors $OL = LP' = r\alpha$. D'autre part, les coordonnées de P' dans notre système sont

$$x = OL - P'S = r\alpha - r \sin \alpha$$
$$y = SL = C'L - C'S = r - r \cos \alpha$$

Nous obtenons ainsi l'équation en coordonnées paramétriques (paramètre α) de la cycloïde

$$\begin{cases} x = r\alpha - r \sin \alpha \\ y = r - r \cos \alpha \end{cases}$$

N'essayez pas d'éliminer α, cela compliquerait le problème; il vaut mieux le laisser ainsi.

LA LONGUEUR DE LA CYCLOÏDE

Nous allons déduire les propriétés de la cycloïde, que nous avons auparavant observées grâce à nos manipulations. Quelle sera la longueur de la cycloïde? C'est facile.

$$\frac{dx}{d\alpha} = r\ (1 - \cos \alpha), \qquad \frac{dy}{d\alpha} = r\ 1 \sin \alpha,$$

$$\text{Longueur} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos\alpha}\, d\alpha =$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 4r \left[-\cos\frac{\alpha}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r$$

Il en résulte donc que, la longueur de la cycloïde est 8 fois celle du rayon de la roue. Cela n'a rien à voir avec π, comme on aurait pu s'y attendre.

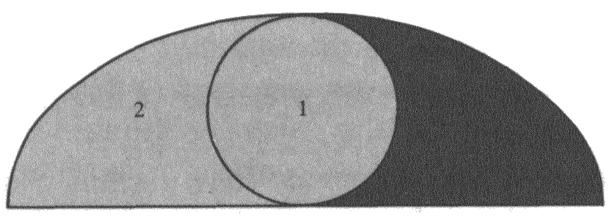
La longueur de l'arc, du point 0 au point correspondant à la valeur β du paramètre, sera

$$2r \int_0^{\beta} \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = 4r \left[-\cos\frac{\alpha}{2}\right]_0^{\beta} = 4r \left(1 - \cos\frac{\beta}{2}\right) = 4r \sin^2\frac{\beta}{4}$$

Quelle sera l'aire sous la cycloïde? On la trouve facilement avec l'équation de la courbe:

$$\int_0^{2\pi r} y\, dx = \int_0^{2\pi} (r - r\cos\alpha)\,(r - r\cos\alpha)\, d\alpha = 3\pi r^2$$

L'aire sous la cycloïde est trois fois celle du disque qui engendre la courbe. Par conséquent, les aires des trois régions indiquées sur la figure suivante sont égales.



Nous allons maintenant déterminer la normale, c'est-à-dire la perpendiculaire à la tangente, en un point (x,y) de la courbe correspondante au paramètre α. Nous avons

$$\frac{dx}{d\alpha} = r - r\cos\alpha, \qquad \frac{dy}{d\alpha} = r - \sin\alpha,$$

La pente de la normale sera

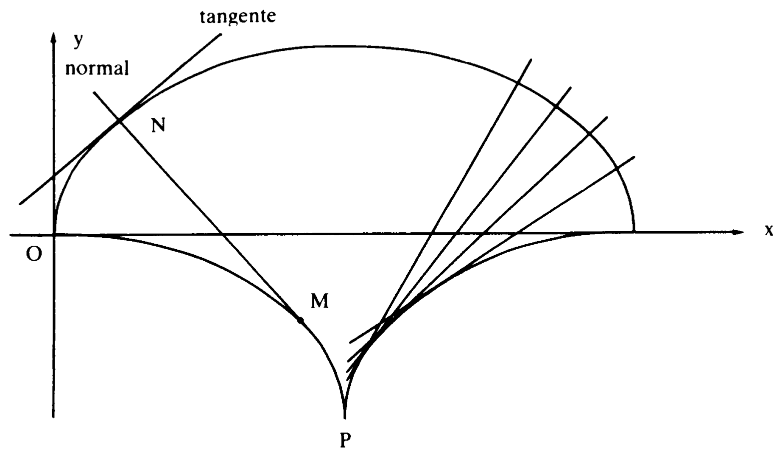
$$\frac{-1}{dy/dx} = -\frac{dx}{dy} = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$$

et donc, l'équation de la normale au point du paramètre α sera

$$\frac{y - (r - r\cos\alpha)}{x - (r\alpha - r\sin\alpha)} = \frac{\cos\alpha - 1}{\sin\alpha}$$

c'est-à-dire, en faisant des opérations

$$x - \cos\alpha - y\sin\alpha - x - r\,\alpha\cos\alpha + r\,\alpha = 0$$



L'ENVELOPPE DES NORMALES

Nous avons ainsi la normale à chaque point de la cycloïde. Nous allons chercher maintenant l'enveloppe de ces droites, c'est-à-dire la courbe qui leur est tangente. Comment le faire? Il n'y a qu'à dériver l'équation des droites par rapport à α et à éliminer α de l'équation résultante et de la première, celle des normales. Il faut éliminer α des deux équations suivantes:

$$x - \cos\alpha - y\sin\alpha - r\,\alpha\cos\alpha + r\,\alpha = 0$$
$$-x\sin\alpha - y\cos\alpha - r\cos\alpha + r\alpha\sin\alpha + r = 0$$

Au lieu d'éliminer α , nous pouvons faire quelque chose de plus simple, dégager x et y en fonction de α.. Nous obtiendrons ainsi les équations paramétriques de l'enveloppe. Les calculs deviennent très faciles, comme par magie. On multiplie la première équation par $\cos\alpha$ et la seconde par $\sin\alpha$, on additionne et on obtient x. On obtient y de façon analogue. Le résultat obtenu est très simple:

$$\begin{cases} x = r\alpha + r\sin\alpha \\ y = -r + r\cos\alpha \end{cases}$$

Quelle est cette courbe? Si vous la représentez, vous remarquerez que par sa forme, elle ressemble à la cycloïde. Est-ce une cycloïde? Nous allons déplacer les axes au point $(r\pi, -2r)$ pour comparer avec l'équation de la cycloïde, trouvée précédemment, par rapport au même genre d'axes. Ainsi, il en résulte l'équation

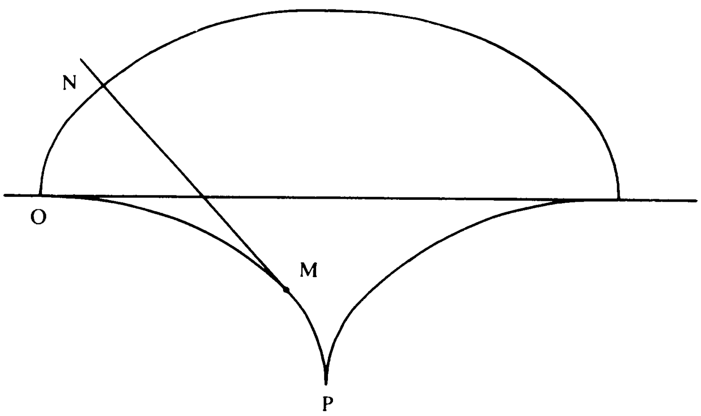
$$x = X + r\pi \qquad X = r(\alpha - n) + r \sin \alpha = r(a - \pi) - r \sin(\alpha - \pi)$$

$$y = Y + 2r \qquad Y = r + r \cos \alpha = r - r \cos(\alpha - \pi)$$

et, si nous appelons $\alpha - \pi = \theta$, nous obtenons

$$\begin{cases} X = r\theta - r \sin \theta \\ Y = r - r \cos \theta \end{cases}$$

si bien que ... l'enveloppe des normales à la cycloïde est la même cycloïde, déplacée de $r\pi$ à droite de $2r$ vers le bas! Peu de courbes ont cette propriété, comme vous pouvez le constater en regardant celles que vous connaissez, cercle, ellipse...



Continuons à faire d'autres calculs. Nous avons l'équation de la cycloïde et celle de l'enveloppe des normales

Cycloïde $\begin{cases} X_c = r\alpha - r \sin \alpha \\ Y_c = r - r \cos \alpha \end{cases}$ Env. norm. $\begin{cases} X_n = r\alpha + r \sin \alpha \\ Y_n = -r + r \cos \alpha \end{cases}$

La normale MN, tangente à l'enveloppe au point M, correspond au point N, de paramètre α sur la cycloïde. Nous connaissons les coordonnées de ces points:

$N\,(r\alpha - r\, r \sin \alpha, r - r \cos \alpha)$, $\quad M\,(r\alpha + r \sin \alpha, r \cos \alpha - r)$

La distance entre eux est :

$$\sqrt{(2r \sin \alpha)^2 + (2r - 2r \cos \alpha)^2} = 4r \sin \frac{\alpha}{2}$$

La longueur de l'arc *MP* se calcule facilement, si on observe que le point *M* correspond au paramètre α et le point *P* au paramètre π. Ainsi

$$Arc\ PM = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dxn}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dyn}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha =$$

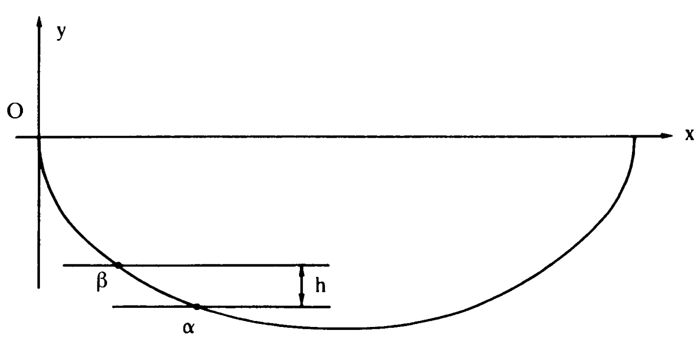
$$= 4r - 4r \sin \frac{\alpha}{2}\,,\ |MN + Arc\ PM = 4r$$

C'est le fait géométrique que Huygens a utilisé dans sa construction d'horloges, comme nous l'avons vu avant, pour obtenir que la lentille de son pendule parcoure une cycloïde.

D'après nos calculs, il résulte que: NM + arc PM sur la cycloïde = constante = $4r$. Ainsi, si vous attachez une ficelle sur le bord de la cycloïde *OP* et que vous déplacez l'extrémité en *O*, en la maintenant tendue, pour que la partie libre soit tangente à la cycloïde *OP, alors cette extrémité qui se déplace, décrit la cycloïde* ci-dessus *ON*.

Et maintenant, avec quelques connaissances de physique, vous pouvez en déduire que la cycloïde est tautochrone comme nous l'avons vérifié expérimentalement avant. Voici l'équation de notre cycloïde inversée

$$\begin{cases} x = r\alpha - r \sin \alpha \\ y = r \cos \alpha - r \end{cases}$$



Si nous laissons tomber une boule du point de paramètre β, alors, selon la loi de la chute libre, elle arrive au point de paramètre α à une vitesse $\sqrt{2gh} = v_\alpha$, h étant la différence d'altitude entre les deux points, c'est-à-dire $h = y_\beta - y_\alpha = r\ (\cos\beta - \cos\alpha)$ et comme

$$\cos\beta = \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$$

il en résulte que

$$v_\alpha = 2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

L'élément de longueur de la courbe en α est

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\, d\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

Comme nous le savons, espace = vitesse × temps et nous pouvons écrire

$$ds = 2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}\, dt = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

si bien que

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{rg}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}\, 2r\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha$$

Par conséquent, le temps que met la boule à tomber le long de la cycloïde du point de paramètre β jusqu'au point le plus bas du bol, de paramètre π, sera:

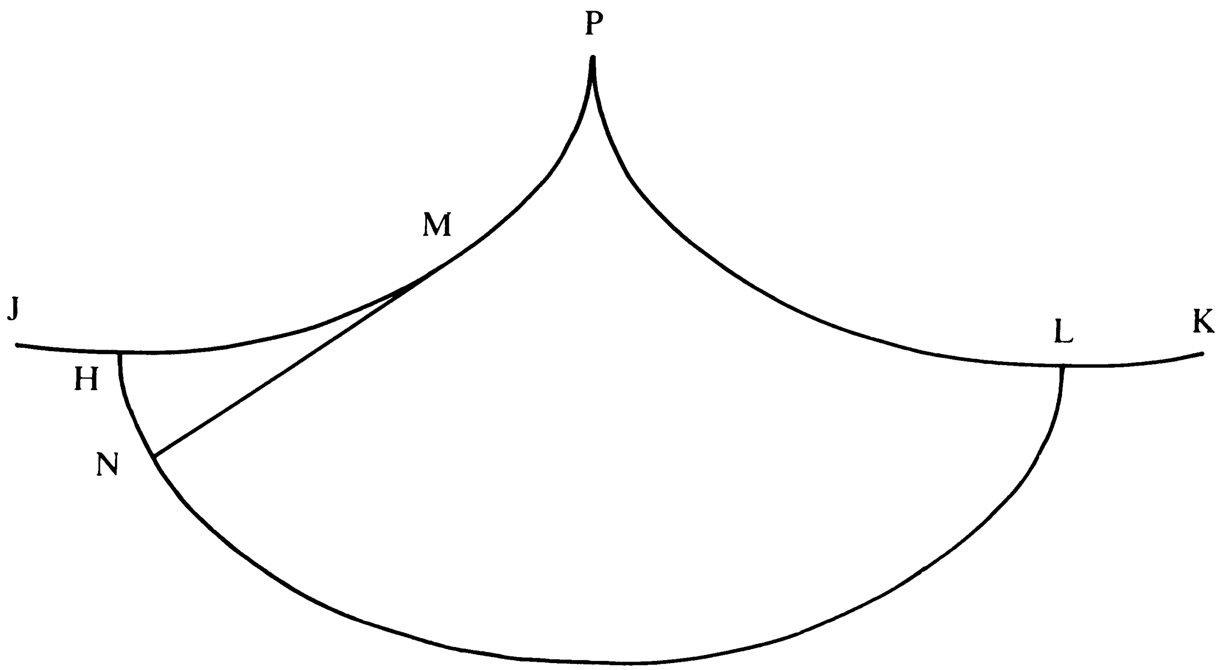
$$\sqrt{\frac{r}{g}}\int_\beta^\pi \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}}\, d\alpha \overset{\cos\frac{\alpha}{2}=u}{=} \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{\cos\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - u^2}} =$$

$$\overset{u=(\cos\frac{\beta}{2})x}{=} \sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$$

Comme vous le voyez, *il est indépendant de β*.

Huygens fut le premier à découvrir cette propriété et à lui donner une application pratique. Il avait étudié à fond les horloges à balancier et il observa que, lorsque l'amplitude de l'oscillation du pendule d'une horloge varie, alors, elle cesse de mesurer correctement le temps. Mais, si la lentille du pendule se déplaçait, non pas sur un cercle comme le fait un pendule normal, mais le long d'une cycloïde, alors, même si l'amplitude variait, la période du pendule serait la même, comme nous l'avons vu dans nos calculs!

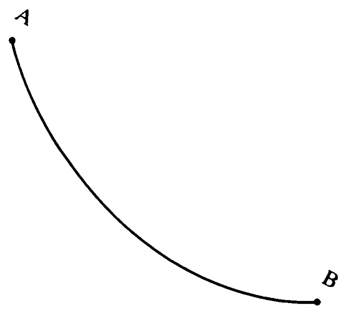
Comment faire décrire une cycloïde à la lentille du pendule? Huygens a utilisé une des propriétés géométriques de la cycloïde, que nous avons vues avant. Regardez la figure suivante, qui est comme celle de la page 149, mais inversée.



Si du point P vous suspendez le pendule avec une corde de longueur $4r$ et que vous placez de chaque côté de P deux arcs de cycloïde PHJ et PLK comme butoirs, comme c'est indiqué, alors vous savez que N décrit une cycloïde identique. Quelle que soit l'amplitude du mouvement pendulaire de N, la période est la même! C'est un pendule qui se compense par lui-même ...

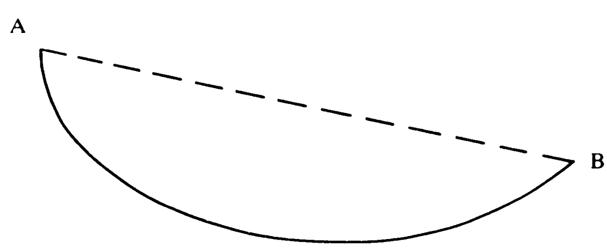
L'histoire de cette propriété de la cycloïde – être brachystochrone – ne manque pas d'intérêt. Vous en trouverez les détails dans les commentaires de la fin du chapitre.

En 1696, Johann Bernoulli a lancé un défi à tous les mathématiciens d'Europe. Il s'agissait de résoudre le problème suivant: On choisit deux points A et B sur un plan vertical, A étant plus haut que B, mais pas sur la même ligne verticale, et on prend un fil de fer sur lequel on enfile une perle. On demande quelle forme il faut donner au fil de fer passant par A et B, pour que la perle mette le moins de temps possible à glisser de A à B.



Plusieurs mathématiciens: Newton, De l'Hospital, Leibniz, Jakob Bernoulli (frère de Johann)... surent résoudre le problème dans le délai établi. Ce dernier trouva une solution, en ayant recours à une méthode des plus originales, qui donna lieu à toute une branche de la Mathématique moderne, le calcul des variations.

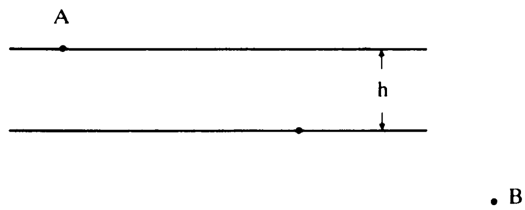
La solution est la cycloïde. Une cycloïde passant par A et B, et partant verticalement de A, comme l'indique la figure... et ceci, même si A et B sont situés de telle façon que la cycloïde doive d'abord descendre avant de remonter! Comme sur cette figure



LA SOLUTION DE JOHANN BERNOULLI

Même ainsi, la perle arrive au point B avant par la cycloïde, que par le fil de fer tendu en ligne droite (pointillés).
la solution de Jakob Bernoulli fut un peu compliquée. Celle de Johann Bernoulli, un mélange de physique et de géométrie, fut géniale, bien que moins féconde et générale que celle de son frère. Voici, en quelques points, un schéma de celle de Johann.

1) Quel que soit le chemin emprunté par la perle,



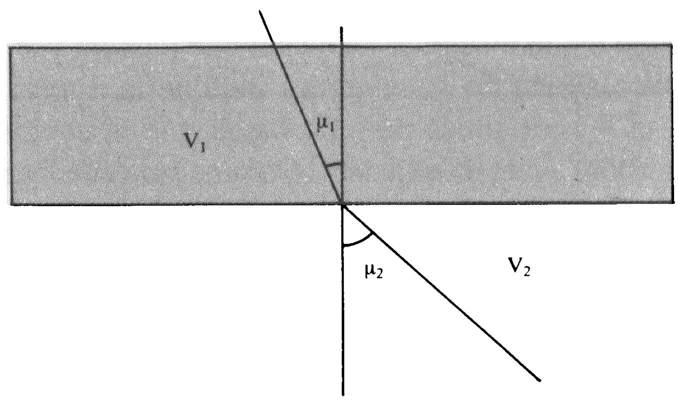
quand elle aura descendu h, sa vitesse sera de $\sqrt{2gh}$ (loi de la chute libre). Mais nous ne savons pas encore quelle direction prendra cette vitesse.

2) Nous savons (principe de Fermat) que la lumière voyage d'un point à un autre dans le temps le plus petit possible.

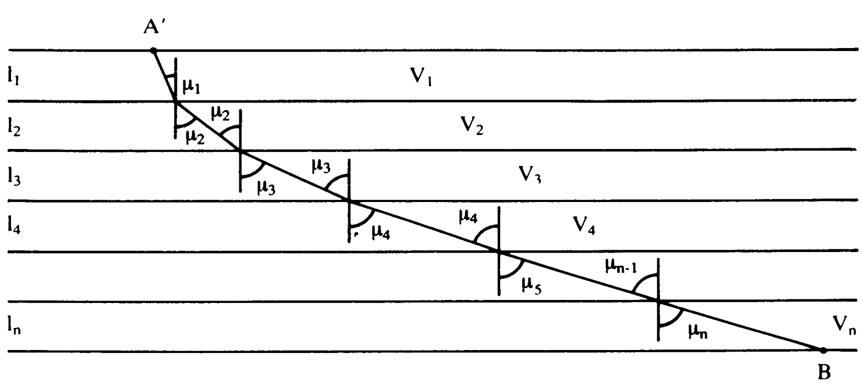
3) Nous savons aussi que la vitesse de la lumière varie, selon le milieu où elle voyage. C'est précisément la raison du phénomène de la réfraction.

Si la lumière voyage à des vitesses v_1 et v_2, dans deux milieux différents, la loi de la réfraction nous dit que

$$\frac{\sin \mu_1}{v_1} = \frac{\sin \mu_2}{v_2} = \text{constante} = k$$



4) Imaginons un milieu optique formé par des couches 1_1, 1_2, 1_3, ..., 1_n, horizontales et fines, tel que la vitesse de la lumière dans chacune d'elles soit v_1, v_2, v_3, ..., v_n comme l'indique la figure.



Alors un rayon, qui partirait de A et arriverait à B, suivrait une trajectoire comme celle de la figure, de façon que

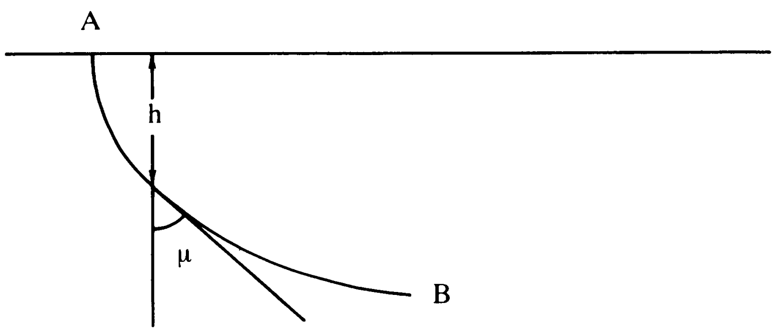
$$\frac{\sin \mu_j}{v_j} = k$$

et ce chemin du rayon de lumière serait le chemin du temps minimal pour aller de A à B aux vitesses indiquées !

Dans notre cas présent, nous savons que la vitesse, en 5)
descendant h, est précisément $\sqrt{2gh}$. Ainsi, le chemin qui donne le temps minimal, sera le chemin que suit un rayon de lumière dans un milieu tel que la vitesse de la lumière varie constamment en descendant h et soit précisément $\sqrt{2gh}$. Or, pour ce chemin, nous savons déjà que l'on peut vérifier

$$\frac{\sin \mu}{\sqrt{2gh}} = k$$

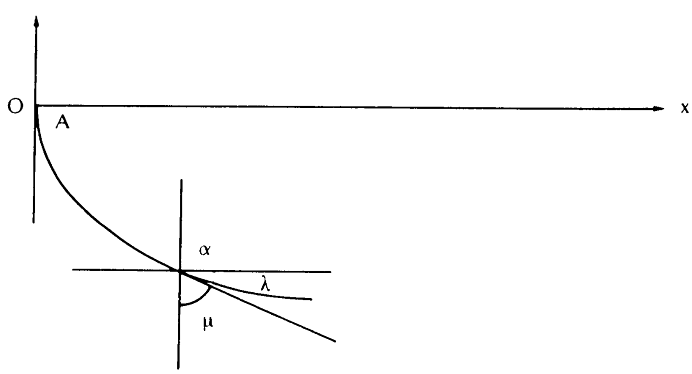
μ étant l'angle que forme ce même chemin avec la verticale.



Ainsi, la courbe qui donne le chemin de temps minimal
compatible avec la vitesse indiquée à chaque hauteur, $v = \sqrt{2gh}$, 6)
est celle qui satisfait

$$\frac{\sin \mu}{\sqrt{2gh}} = k$$

Nous allons voir que la cycloïde est la courbe recherchée 7)



L'équation est:

$$\begin{cases} x = r\alpha - r\sin\alpha \\ y = r\cos\alpha - r \end{cases}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\alpha} = r - r\cos\alpha \\[2mm] \dfrac{dy}{d\alpha} = -\,r\sin\alpha \end{cases}$$

D'autre part,

$$tg\,\mu = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}} = \frac{1-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = tg\,\frac{\alpha}{2}$$

Ainsi, $\mu = \left|\dfrac{\alpha}{2}\right|$. De même,

$$v = \sqrt{2gr\,(1-\cos\alpha)} = 2\sqrt{gr}\,\sin\frac{\alpha}{2}$$

De cette façon, effectivement,

$$\frac{\sin\mu}{v} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\sqrt{gr}\,\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{gr}} = \text{constante, indépendante de } \alpha$$

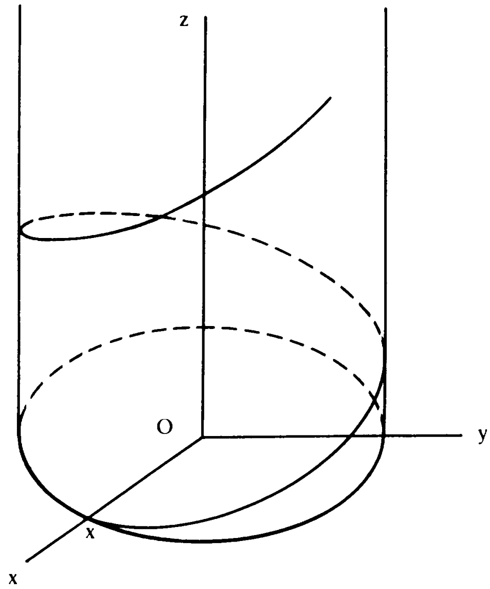
et, donc, la cycloïde possède la propriété que nous cherchons.
De même, on peut facilement trouver avec quelques calculs, les propriétés que nous avons observées auparavant dans l'hélice et ses rapports avec la cycloïde, la sinusoïde, etc.

On voit aisément que l'équation paramétrique (paramètre α) de l'hélice est:

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \\ z = s\alpha \end{cases}$$

r étant le rayon du cylindre et s une constante qui dépend du rayon et de la pente de l'hélice.

Si nous projetons sur le plan yOz en direction parallèle à l'axe Ox, on obtient la courbe



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = r \sin \alpha \\ z = s\alpha \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = r \sin \dfrac{z}{s} \end{cases}$$

qui est clairement une sinusoïde sur le plan $x = 0$.

On trouve facilement la tangente à l'hélice au point de paramètre $\alpha = 0$.

$$\begin{cases} x' = -r \sin \alpha \\ y' = r \cos \alpha \\ z' = s \end{cases} \qquad \text{En posant } \alpha = 0 \begin{cases} x' = 0 \\ y' = r \\ z' = s \end{cases}$$

Ainsi, la tangente au point au point de l'hélice $\alpha = 0$, c'est-à- dire au point $(r, 0, 0)$, a la direction du vecteur $(0, r, s)$. Donc, la droite, qui passe par le point générique de l'hélice

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = s\alpha \end{cases}$$

a pour équation, dans cette direction

$$\frac{x - r\cos \alpha}{0} = \frac{y - r \sin \alpha}{r} = \frac{z - s\alpha}{s}$$

(cette division par 0 est bien entendu symbolique). L'intersection avec le plan $z = 0$ nous donne la courbe de coordonnées paramétriques (paramètre α)

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha - r\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$

qui, comme on le voit, est une cycloïde.

LES MATHÉMATICIENS SONT INVITÉS À RÉSOUDRE UN NOUVEAU PROBLÈME

Si deux points A et B sont donnés sur un plan vertical, trouver le chemin AMB par lequel un point mobile M, soumis à la pesanteur, glisse du point A au point B en un temps minimal.

Pour stimuler, chez les amateurs de telles tâches, le désir de chercher la solution de ce problème, on signale qu'il ne s'agit pas, comme on pourrait le croire, d'une simple spéculation sans aucune utilité. Contrairement à ce que l'on pourrait penser à première vue, ce problème est d'une grande utilité dans d'autres branches de la science, comme par exemple la mécanique. En attendant, pour éviter tout jugement prématuré, on fera remarquer que, bien que la ligne droite AB soit sans aucun doute la plus courte entre les points A et B, elle n'est pas le chemin parcouru en un temps minimal. Pourtant, la courbe AMB, dont je donnerai le nom, si personne ne l'a découvert avant la fin de l'année, est une courbe bien connue des géomètres.

LE CALCUL DES VARIATIONS

C'est avec ces mots, parus en juin 1696 dans la première revue mathématique, *Acta Eruditorum*, fondée par Leibniz, que Johann Bernoulli proposait à ses contemporains le problème de la brachystochrone.

A la fin de l'année 1696, probablement à cause, entre autres, d'une mauvaise distribution de la revue, aucune solution au problème n'avait été présentée, sauf celle du propre Leibniz, éditeur de la revue, qui avait résolu le problème le jour même où il l'avait reçu. Leibniz persuada Johann Bernoulli de prolonger le délai de six mois en relançant le défi, cette fois à travers une note qu'il devait envoyer par courrier *«acutissimis qui toto orbe florent mathematicis»* (aux mathématiciens les plus éminents qui fleurissent dans le monde entier). Leibniz prédit que le problème serait résolu par Jakob Bernoulli, frère aîné de Johann, Newton, le marquis de De l'Hospital et Huygens, s'il avait vécu (il était mort en 1695). La prophétie de Leibniz se réalisa. Il semble que Newton aussi résolut le problème le jour même où il le reçut.

La solution de Johann Bernoulli fut la plus ingénieuse, mais celle de Jakob la plus profonde et constitua le germe d'une nouvelle branche de l'analyse mathématique, le calcul des variations, qui a donné naissance de nos jours à la théorie du contrôle, d'importance capitale dans la technologie actuelle. Ainsi est devenue réalité la remarque de Johann Bernoulli, affirmant que des questions apparemment futiles peuvent, en mathématiques, donner lieu à des développements d'une envergure tout à fait insoupçonnée.

Chapitre 13

Facile à comprendre, difficile à résoudre

Il y a un grand nombre de mystères mathématiques, énigmes anciennes et modernes, très simples dans leur énoncé, sur lesquelles beaucoup de grands mathématiciens ont travaillé... et qui sont encore à résoudre. Pourquoi n'essayez-vous pas de vous pencher un peu dessus? En réalité, il n'est probablement pas nécessaire d'avoir de grandes connaissances, mais plutôt d'avoir une idée originale, de prendre un chemin que personne n'a encore eu l'idée d'emprunter jusque là. Très souvent, en savoir trop est un handicap, alors qu'il faudrait un nouveau savoir.

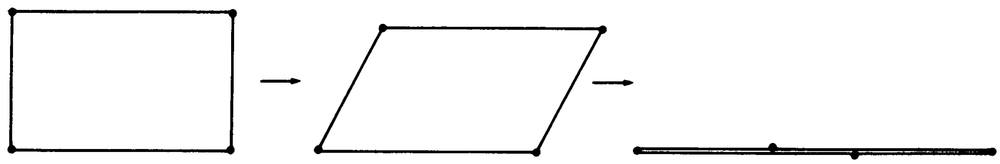
Je vous laisse maintenant, à la fin de ces pages que nous avons parcourues ensemble, avec quelques-unes de ces questions qui attendent peut-être vos brillantes idées. La plupart d'entre elles ont été tirées d'un magnifique livre de Ogilvy (référence dans la bibliographie de ce livre). Vous pourrez de même y trouver de nombreuses autres questions tout aussi intéressantes. Je me réjouirais sincèrement, si je recevais un jour une lettre de vous, me donnant la solution de quelques-unes de ces énigmes. Courage!

Beaucoup de ces problèmes donnent l'impression d'être futiles. Peut-être certains le sont-ils réellement, le temps seul dira lesquels ont des répercussions profondes sur le développement de la Mathématique ou d'une autre science. Mais nous sommes maintenant certains que d'autres, qui semblent aussi futiles, ont des solutions qui permettront des progrès importants dans certains domaines, comme la biologie moléculaire, la mécanique quantique et d'autres non négligeables.

1. LE PROBLÈME DU CONTAINER

Imaginez que vous vivez dans un monde plat. Si vous vous occupez de transport, vous avez de la chance, car vous pouvez vous fabriquer un container aux parois rigides, qui peut, lorsqu'il est vide, être stocké et occuper très peu de place. En effet, un rectangle aux côtés parfaitement rigides et ayant des articulations aux sommets, devient un segment.

Or, vous ne vivez pas dans un monde plat, mais dans un monde tridimensionnel. Voici la question: pouvez-vous construire un container aux parois rigides, métalliques, articulées sur les bords les unes avec les autres, de façon que, en utilisant ces articulations, il devienne une figure plane? On ne sait pas encore si c'est possible ou impossible.



Vous pourriez penser que les sacs en papier, utilisés partois par les commerçants, forment des containers du genre de celui que nous cherchons. Or, c'est faux. Pour les ouvrir, on se sert de la flexibilité des parois en papier. Si ces sacs avaient des parois métalliques et articulées seulement aux plis, ou bien, on ne pourrait pas les fermer et aplanir, ou bien, on ne pourrait pas les ouvrir.

2. LE PROBLÈME DU COMMIS VOYAGEUR

Un commis voyageur voudrait partir de Barcelone avec sa marchandise, parcourir les 50 villes les plus importantes d'Espagne et revenir à Barcelone. Il connaît le prix de son déplacement de chaque ville à une autre, et il désire se préparer l'itinéraire le meilleur marché possible. Existe-t-il une démarche réaliste pour le faire? Je dis réaliste pour la raison suivante. Vous pourriez dire: on fait tous les itinéraires possibles, on calcule le prix de chacun et on choisit le meilleur marché. Mais quand on se trouve face à un nombre d'itinéraires de l'ordre de $50! = 50 \times 49 \times 48 \times 2 \ldots \times 1$, alors même un ordinateur s'y perdrait!

3. LE PARADOXE DU CONTRÔLE SURPRISE

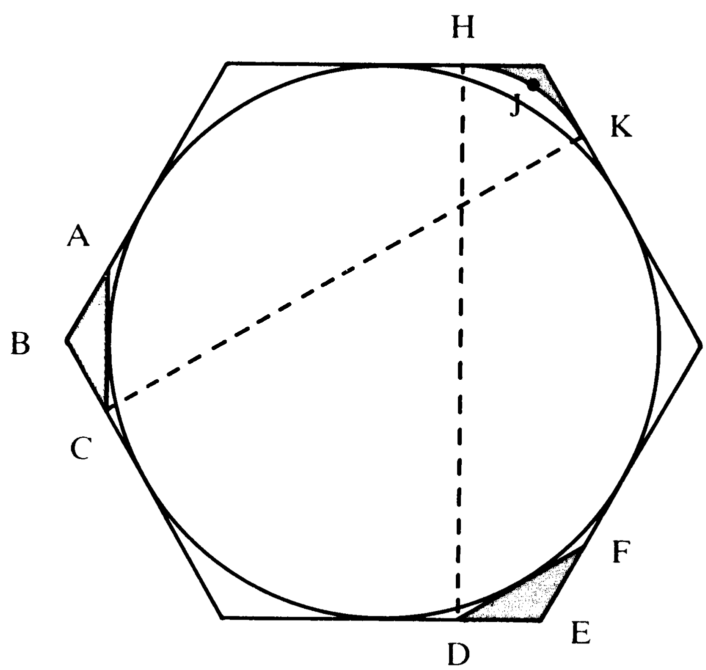
«La semaine prochaine vous aurez un contrôle très difficile comme punition, parce que vous avez été insupportables – dit le terrible professeur –. Il aura lieu un après-midi, un jour quelconque du lundi au vendredi, et en plus il sera inattendu, de telle sorte que si quelqu'un, avant le contrôle, me donne une raison pour laquelle il peut avoir la certitude que le contrôle va être ou ne va pas être tel ou tel jour, alors, il ne se fera pas ce jour-là». Le lundi matin, Jacques, un brillant élève, s'approche du terrible professeur et lui dit: «Monsieur le Professeur, ce contrôle si difficile ne pourra jamais avoir lieu. En effet, d'après ce que vous avez dit, il ne pourra pas se faire le vendredi après-midi, car le matin, nous serions tous sûrs que la seule possibilité serait cet après-midi-là. Or, si ce n'est pas le vendredi, les jours possibles ne sont plus que de lundi à jeudi. Mais alors, pour la même raison, il ne peut pas avoir lieu le jeudi. Il ne reste ainsi que de lundi à mercredi... A quoi bon continuer? Il ne pourra avoir aucun jour». Comment déjouez-vous ce paradoxe? Il semble que le terrible professeur aurait pu décider en secret que le contrôle aurait lieu le mercredi. Ceci pourrait-il ne pas être une surprise pour ses étudiants?

Vous avez une balance qui vous dit seulement que ce qu'il y a dans un plateau est plus lourd que ce qu'il y a dans l'autre plateau. Vous avez n boules. Elles ont toutes un poids différent. Il s'agit de les ranger de la plus légère à la plus lourde. Quel est le minimum de pesées à faire en fonction de n? Pourriez-vous indiquer un procédé pour atteindre ce but en un minimum de pesées?

4. LE PROBLÈME DES n BOULES DIFFÉRENTES

Pour un ensemble A de points dans le plan qui est borné (c'est-à-dire qu'il n'a pas de point arbitrairement éloignés) et fermé (A inclut tous les points de son bord), le diamètre de A est la distance maximale possible entre deux points de A. Voici la question de Lebesgue: comment est, et quelle est l'aire d'une figure plane d'aire minimale (si elle existe), qui puisse recouvrir n'importe quelle figure plane de diamètre 1? On considère la figure recouvrante comme un morceau découpé du plan, pouvant se déplacer à sa guise dans le plan, pour essayer de recouvrir une autre figure. Que la plus petite des aires de toutes les figures qui recouvrent n'importe quelle figure de diamètre 1 existe, est certain, bien qu'on n'en connaisse pas le nombre. En revanche, il n'est pas si évident qu'il existe une figure recouvrante ayant cette aire, et on est encore très loin de savoir quelle forme elle peut avoir, si elle existe. Jusqu'à maintenant, le meilleur recouvrement universel est le suivant, que nous devons à R. Sprague. Nous commençons par un hexagone circonscrit à un disque de diamètre 1.

5. LE PROBLÈME DE LEBESGUE SUR LE RECOUVREMENT UNIVERSEL MINIMAL



Nous lui enlevons les triangles ABC et DEF, AC et DF étant tangentes au cercle inscrit dans l'hexagone. Ensuite, en prenant le centre en D et le rayon 1, nous traçons un arc HJ et pareillement

KJ de centre *C*, puis nous ôtons le morceau *HKJ*. Ce qui reste, est le recouvrement universel le plus petit connu jusqu'à présent. Voulez-vous essayer de l'améliorer?

6. LA COUVERTURE POUR LE PETIT VER

Maman ver est soucieuse. La nuit, son petit ver se découvre très facilement. Elle voudrait une couverture, ayant la plus petite aire possible et de telle façon que, quelle que soit la position du petit ver pendant la nuit, celui-ci puisse être toujours couvert. Quelles doivent être la forme et l'aire de cette couverture?

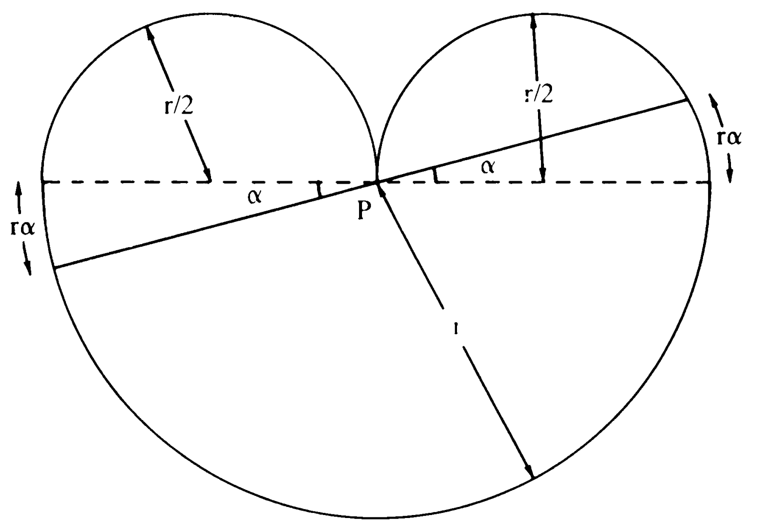
En d'autres termes, quelle est l'aire minimale et la figure qui lui correspond (si elle existe), qui soit capable de recouvrir n'importe quel segment curviligne plan de longueur 1? Un demi cercle de diamètre 1 permet de les recouvrir complètement, mais son aire n'est pas minimale.

7. LA FIGURE PLANE

Quelle est *la figure plane* convexe de moindre aire, si le périmètre et le diamètre sont donnés?

8. EST-CE UNE COURBE AYANT UN CENTRE ?

D'une courbe fermée *C* dans le plan, on vous dit qu'il existe un point *P* du plan, tel que toutes les cordes de cette courbe passant par *P*, divisent le périmètre de la courbe *C* en deux parties de longueur égale. Est-ce que c'est la courbe symétrique par rapport à un point, c'est-à-dire, est-ce que c'est une courbe ayant un centre? La réponse est: pas nécessairement. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la figure suivante et de faire quelques calculs.



Voici la question, qui n'a pas encore de réponse: Si en outre, on vous dit que *C* est le périmètre d'une figure convexe, a-t-elle alors nécessairement un centre, c'est-à-dire, est-elle symétrique par rapport à un point?

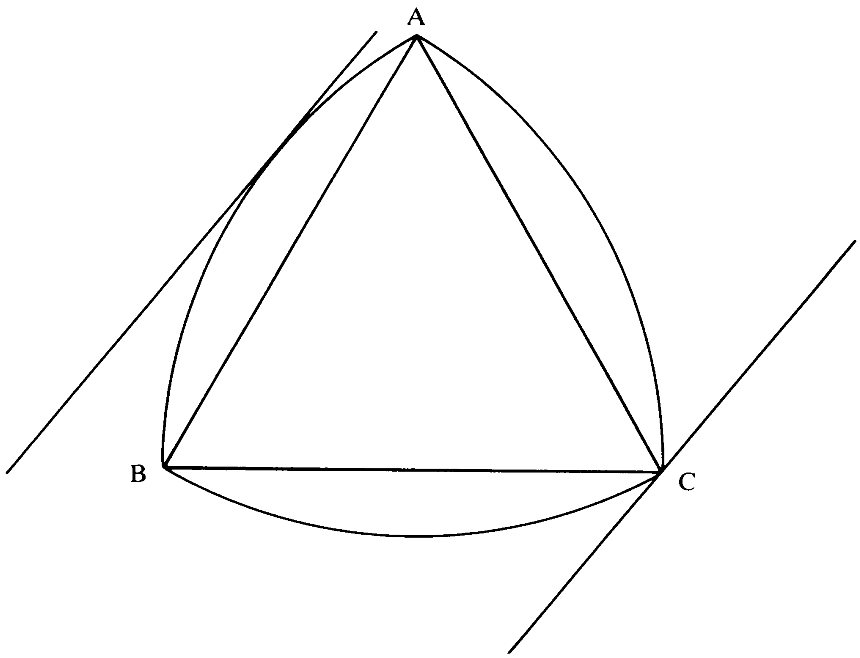
Un solide homogène est tel qu'il flotte en équilibre en restant dans la position où on le met. Ceci implique-t-il qu'il s'agit d'une sphère? On ne sait pas.

9. EST-CE UNE SPHÈRE, S'IL RESTE EN ÉQUILIBRE ?

Est-ce une sphère? Existe-t-il une figure solide tridimensionnelle non sphérique, qui puisse tourner dans toutes les directions, tout en restant tangente aux trois faces d'un prisme triangulaire fixe?

10. ... ET SI ELLE TOURNE TANGENTE À UN PRISME TRIANGULAIRE FIXE

Dans le plan, il existe des figures non circulaires qui peuvent tourner en restant tangentes à deux droites parallèles fixes. En voici une



ABC est un triangle équilatéral, l'arc AB est tracé avec son centre en C, l'arc AC a son centre en B et l'arc BC a son centre en A. Il s'agit d'une des nombreuses figures, de largeur constante, qui existent dans le plan.

Est-il vrai qu'un pentaèdre homogène quelconque est stable, au moins sur deux de ses faces? C'est-à-dire y a-t-il toujours au moins deux faces telles que, si on pose le pentaèdre en appui sur chacune d'elles, sur la table, il y reste sans bouger?

11. LE PROBLÈME DU PENTAÈDRE

On donne six points dans le plan. On nous dit que chaque groupe de cinq d'entre eux détermine une conique et que les six coniques ainsi déterminées sont congruentes, c'est-à-dire qu'on peut les faire coïncider moyennant un mouvement. S'agit-il de la même conique?

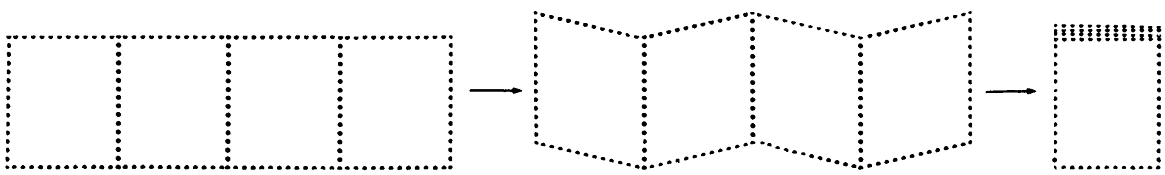
12. SIX CONIQUES OU UNE SEULE ?

13. COMBIEN DE TUBES TANGENTS ?

Voici un problème de Littelwood, un célèbre analyste de notre siècle. Quel est le nombre maximal de droites que l'on peut placer dans l'espace, de telle façon que deux quelconques d'entre elles soient à une distance 1? En d'autres termes, combien de tubes égaux infiniment longs, peut-on placer dans l'espace, de façon que chacun soit tangent à tous les autres? Peut-on en placer 7? 7 est-il le nombre maximal?

14. LA SÉRIE DES TIMBRES

Vous avez dû vous rendre compte que c'est facile de s'embrouiller, lorsque l'on veut replier une carte routière et la remettre exactement telle qu'elle était? Ce problème est semblable. Vous avez une bande longitudinale de n timbres. De combien de façons différentes peut-on la plier en un paquet de la largeur d'un timbre.



Plus difficile encore: de combien de façons différentes peut-on plier une carte avec $m \times n$ plis?

15. INTERSECTIONS DE CHEMINS

On donne n points dans le plan. On unit chacun d'eux à tous les autres par des courbes continues. Quel est le plus petit nombre X_n d'intersections de ces courbes? On sait que $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, $X_5 = 1$. On conjecture que $X_6 = 3$, bien que personne n'äit encore pu le démontrer. Et pour n plus grand, on ne sait plus rien.

LES PROBLÈMES DE HILBERT

Un des indices les plus significatifs pour mesurer le degré d'activité présente et prévisible dans le futur d'un domaine scientifique déterminé consiste à répertorier ses problèmes ouverts.

En mathématiques, les problèmes ouverts intéressants et provocateurs foisonnent. Certains sont des problèmes centenaires, comme ceux qui apparaissent en théorie des nombres (conjecture de Fermat, conjecture de Goldbach...), d'autres sont des problèmes profonds qui surgissent au fur et à mesure du développement des théories mathématiques de chaque époque. Plus que tout autre facteur, ce sont eux qui, en réalité, déterminent les lignes du développement de la Mathématique.

Au Congrès International de Mathématique de 1900, à Paris, David *Hilbert* s'exprimait de la façon suivante, dans une célèbre conférence intitulée *Problèmes mathématiques*.

«Qui d'entre nous n'aimerait pas lever le voile, sous lequel se cache le futur, pour jeter un coup d'œil sur les progrès à venir de notre science et sur les secrets de son développement dans les prochains siècles? Quels seront les objectifs spéciaux auxquels les esprits mathématiques les plus influents des générations futures se consacreront? Quelles nouvelles méthodes et quels résultats seront découverts par les prochains siècles, dans le vaste et riche domaine de la pensée mathématique? ... La grande importance de certains problèmes dans le progrès de la science mathématique en général et le rôle décisif qu'ils jouent dans le travail de chaque chercheur est indéniable. Tant qu'une branche de la science abonde en problèmes, elle demeure vivante. L'absence de problèmes signifie la décadence ou l'arrêt du développement indépendant. De la même façon que toute entreprise humaine poursuit ses objectifs, la recherche mathématique aussi a besoin de ses problèmes. C'est par la résolution de problèmes que la force du chercheur s'endurcit, qu'il trouve de nouvelles méthodes et de nouveaux panoramas et qu'il atteint un horizon plus étendu et plus libre».

Dans sa conférence, Hilbert lui-même proposa une série de 23 problèmes ouverts qui, en fait, ont orienté de façon décisive le cours du développement mathématique, dans notre siècle.

Bibliographie

Voici une bibliographie très complète qui vous donnera une bonne idée de la riche histoire des jeux et récréations mathématiques et de l'extrême intérêt qu'on leur porte actuellement:

SCHAAF, W.L.: *A Bibliography of Mathematical Recreations*, 4 vol., Washington D.C., National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

Voici maintenant les œuvres classiques de notre siècle, qui peuvent presque toutes être trouvées dans des éditions bon marché:

BALL, X.W.R. y H.S.M. COXETER: *Mathematical recreations and Essays*, Toronto, University of Toronto Press, 1974 (1re ed., 1892).
DUDENEY, H.E.: *Amusements in Mathematics*, Londres, Nelson, 1943.
DUDENEY, H.E.: *The Canterbury Puzzles*, New York, Dover, 1958.
LOYD, S.: *Mathematical Puzzles of Sam Loyd*, selected and edited by Martin Gardner, New York, Dover, vol.1, 1959; vol.2, 1960.
LUCAS, E.: *Récréations mathématiques*, 4 vol., Paris, Gauthiers-Villars, 1882 (réédité par Blanchard, Paris, 1960).
O'BEIRNE, T.H.: *Puzzles and Paradoxes*, Londres, Oxford University Press, 1965.
SCHUH, F.: *The Master Book of Mathematical Recreations*, New York, Dover, 1968.

J'ai cité plusieurs fois le livre suivant, très intéressant, dans lequel vous pourrez apprécier de nombreux problèmes «élémentaires» des mathématiques, qui sont encore à résoudre:

OGILVY, C. STANLEY: *Tomorrow's Math*, New York, Oxford University Press, 1972.

Parmi les auteurs contemporains, je distinguerai surtout Martin Gardner, qui a, dès les années cinquante, écrit les colonnes de *Scientific American*, consacrées aux jeux mathématiques. Il a publié de nombreux livres sur ce sujet. En voici les principaux:

The Scientific American Book of mathematical Puzzles and Diversions, New York, Simon and Schuster, 1959.
The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, New York, Simon and Schuster, 1961.

New Mathematical Diversions from Scientific American, New York, Simon and Schuster, 1966.
Circo matematico, Madrid, Alianza, 1983.
Further mathematical Diversions: The Paradox of the Unexpected Hanging and Others, Londres, Allen and Unwin, 1970.
The Sixth Book of mathematical Games from Scientific American, San Fransciso, Freeman and Co., 1971.
Carnaval matemático, Madrid, Alianza, 1983.
Festival magico-matematico, Madrid, Alianza, 1984.
Ruedas, Vida y otras diversiones matemáticas, Barcelona, Labor, 1985.
¡Aja! 3e éd., Barcelona, Labor, 1985.
Paradojas ¡Aja! 3e éd., Barcelona, Labor, 1986.

En ce qui concerne les récréations logiques, l'auteur le plus intéressant est R. Smullyan. Du point de vue mathématique, l'œuvre la plus profonde consacrée aux récréations mathématiques classiques et modernes, est le travail encyclopédique de E.R.Berlekamp, J.H.Conway et R.K.Guy, intitulé *Winning Ways for your Mathematical Plays*, 2 vol., Londres, Academic Press, 1982.

Dans le domaine de l'heurisitque ou méthodes de résolution de problèmes mathématiques, le grand maître est Georges Polya, avec ses nombreuses œuvres consacrées à essayer d'améliorer l'enseignement des mathématiques par la résolution de problèmes.

Voici finalement, une sélection d'œuvres en espagnol consacrées à des jeux et récréations mathématiques:

ALEM, J-P.: *Juegos de ingenio y entretenimiento matemático*, vol. 1 et 2, Barcelona, Gedisa, 1984.
DIENES, Z P.: *Lógica y juegos lógicos*, Madrid, Teide, 1980.
DONAVAN, J.: *Matemáticas más fáciles con manualidades de papel*, Madrid, Distein, 1975.
ELFFERS, J.: *El Tangram*. Barcelona, Labor, 1981.
FRABETTI, C.: Problemas de ingenio, Barcelona, Bruguera, 1982.
GUZMAN, M. de: *Mirar y ver*, Madrid, Alhambra, 1977.
GUZMAN, M. de: *Cuentos con cuentas*, Barcelona, Labor, 1984.
HOGBEN, L.: El Universo e los números, Madrid, Destini, 1966.
LEWIS, B.: Matmáticas modernas. Aspectos recreativos, Madrid, Alhambra, 1983.
MATAIX, M.: *Divertimientos lógicos y matemáticos*, Barcelona, Marcombo, 1979.
MATAIX, M.: *Cajón de sastre matemático*, Barcelona Marcombo, 1981.
MATAIX, M.: *Fácil, menos fácil y dificil*, Barcelona, Marcombo, 1981.

MATAIX, M.: *El discreto encato de las matemáticas*, Barcelona, Marcombo, 1979.

PEDOE, D.: *La geometría en el arte*, Barcelona, G. Gili, 1979.

PERELMAN, Y.: *Problemas y experimentos recreativos*, Moscú, Mir, 1975.

PERELMAN, Y.: *Matemáticas recreativas*, Barcelona, Martínez Roca, 1968.

PERELMAN, Y.: *Álgebra recreativa*, Moscú, Mir, 1978.

PERELMAN, Y.: *El divertido juego de las matemáticas*, Madrid, Círculo de Lectores, 1970.

RADEMACHER, H. et TOEPLITZ O.: *Números y figuras*, Madrid, Alianza, 1970.

SMULLYAN, R.: *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos*, Madrid, Cátedra, 1983.

SMULLYAN, R.: *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Dracula y otros pasatiempos lógicos*, Madrid, Cátedra, 1981.

TAHAN, MALBA, (pseudonyme de J. C. de MELHO): *El hombre que calculaba*, Madrid, Losada, 1980.

THIO DE POL, S.: *Primos y algunos dislates sobre números*, Madrid, Alhambra, 1975.

UNICEF: *Juegos de todo el mundo*, Zurich, UNICEF, 1978.

VANNIER, E et CHAUVEU, P.: *Cómo jugar y divertirse con su calculadora de bolsillo*, Madrid, Altalena, 1978.

VASILIEV, N. B. et GUTENMAJER, V. L.: *Rectas y curvas*, Moscú, Mir, 1980.

VIVES, P.: *Juegos de ingenio*, Madrid, Circulo de Lectores, 1983.

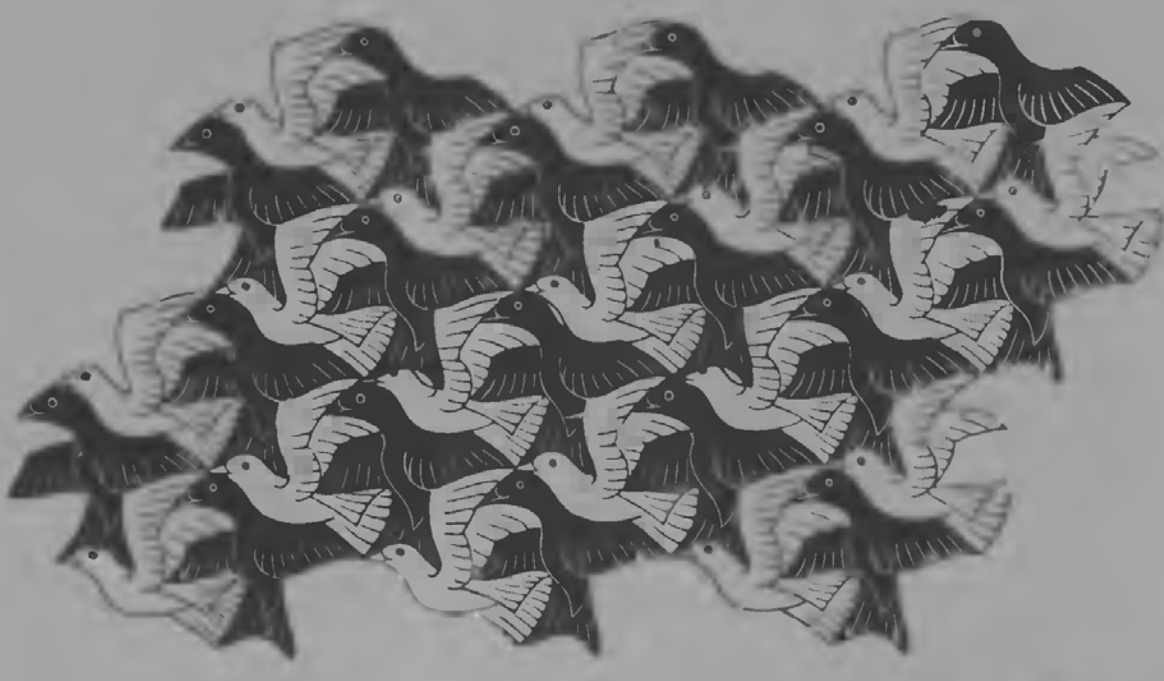
WARUSFEL: *Los números y su misterios*, Barcelona, Martínez Roca, 1972.

Index des noms

AVENTURES MATHÉMATIQUES

Miguel de Guzmán

Les jeux ont de tout temps été un centre d'intérêt pour les mathématiciens — célèbres ou non — qu'ils les aient conçus ou qu'ils s'en soient amusés. Et nombre de leurs élucubrations, précisément de par cet enchevêtrement singulier du jeu et des mathématiques qui les rend parfois indiscernables, ont donné lieu à de nouveaux modes de penser que nous considérons aujourd'hui comme de la science.
Les essais que ce livre présente mettent en relief la veine ludique des mathématiques. Il s'agit en fait de montrer quelques notions très simples et intuitives. Ce n'est pas à proprement parler un livre de divertissement bien qu'il procède d'un esprit amusant. L'auteur a voulu avant tout faire participer le lecteur pour stimuler son intuition mathématique, pour lui permettre de concevoir des stratégies de pensée modernes et efficaces servant à la résolution de problèmes, qu'ils soient mathématiques ou non.



9 782880 741716

PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES