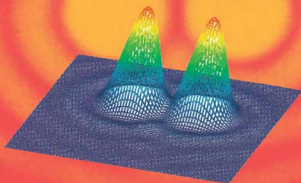


Karl Dieter Möller  
Claude Bélorgeot

# Cours d'optique

Simulations et exercices résolus  
avec Maple®, Matlab®, Mathematica®, Mathcad®



 Springer



## Cours d'optique

**Springer**

*Paris*

*Berlin*

*Heidelberg*

*New York*

*Hong Kong*

*London*

*Milan*

*Tokyo*

Karl D. Möller et Claude Bélorgeot

# Cours d'optique

Simulations et exercices résolus avec  
Maple<sup>®</sup>, Matlab<sup>®</sup>, Mathematica<sup>®</sup>, Mathcad<sup>®</sup>





Karl D. Möller  
Department of Electrical Engineering  
New Jersey Institute of Technology  
Newark, NJ 07102 - USA

Claude Bélorgeot  
20, rue du Chastaing  
45110 Châteauneuf-sur-Loire

ISBN-10 : 2-287-25199-5 Springer Paris Berlin Heidelberg New York  
ISBN-13 : 978-2-287-25199-3 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France, Paris, 2007  
Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques de données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant le paiement de droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc. même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas, il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

SPIN : 11403 470

*Maquette de couverture : Jean-François Montmarché*

# Préface

Ce livre implique l'utilisation d'un ordinateur ; il exploite l'informatique pour apprendre les bases de l'optique. L'étude des formules que nous démontrons est approfondie par ce que nous appelons des « exemples » écrits avec les logiciels Maple, Matlab, Mathematica et Mathcad. Il est possible de changer un ou plusieurs paramètres, de retracer aussitôt les courbes sur l'écran d'un ordinateur, de constater immédiatement les modifications du phénomène physique étudié. Cette approche peut aussi bien être faite lors d'un cours magistral par projection vidéo, que lors d'un travail personnel à domicile. Chaque exemple est suivi d'applications. De plus, chaque chapitre est accompagné de problèmes classiques écrits sur le CD joint.

Je souhaiterais remercier d'une part Oren Sternberg et Assaf Sternberg : ils ont adapté les exemples aux logiciels Maple, Matlab, Mathematica, Mathcad- mais aussi M. Nicolas Puech et Madame Nathalie Huilleret (Springer-Verlag France) ; tous deux ont apporté leurs conseils professionnels, leur support et leur intérêt afin que soit publié ce livre d'optique écrit selon une nouvelle approche pédagogique.

New York, le 4 juillet 2006

K.D. Möller

Le cours d'optique en France est enseigné sur plusieurs années et ce livre comprend donc plusieurs niveaux d'étude. Nous étudions : l'optique géométrique, l'optique ondulatoire, les cohérences spatiales et temporelles, la transformée de Fourier et l'interférométrie par transformée de Fourier, la formation des images par la théorie de propagation des ondes électromagnétiques, l'holographie. Les étudiants scientifiques reçoivent en première année un enseignement d'optique géométrique (chapitre 1), tandis que l'optique ondulatoire est traitée en deuxième et troisième années (chapitres 2, 3 et 4). Nous développons (chapitre 5) les applications de la transformée de Fourier. L'interférométrie par transformée de Fourier permet l'obtention d'un spectre à haute résolution dans l'infrarouge lointain avec une bande passante étroite et nous étudions les questions connexes : filtrage, pas d'échantillonnage, apodisation. Ce chapitre et

le chapitre 6, où nous abordons le filtrage spatial de la formation des images selon la théorie de propagation des ondes électromagnétiques, s'adressent essentiellement aux chercheurs et ingénieurs.

Ce livre permet d'étudier des projets particuliers, mais il peut être facilement adapté à l'étude d'autres situations. **La construction du livre en trois éléments (texte, programmes informatiques d'exemples représentatifs, applications et problèmes classiques)** en fait un ouvrage qui permet à un étudiant, de cycle universitaire ou ingénieur, de travailler seul. Il peut ainsi soit apprendre, soit compléter sa connaissance en optique. Le cours est accompagné par 120 exemples informatiques et applications. Un CD est joint à cet ouvrage. Il comporte des exercices traités respectivement avec les logiciels Maple, Mathematica, Mathcad et Matlab<sup>1</sup>, ce qui permet à l'étudiant de choisir le logiciel qui lui convient. Nous y avons ajouté 91 problèmes classiques à résoudre sans l'aide de logiciel.

Le lecteur pourra approfondir les études, les développements mathématiques et les expériences physiques. Considérons les exemples I.3 et I.4, l'enseignant, en amphithéâtre, projettera à partir de son ordinateur portable les courbes de superpositions des ondes qui interfèrent, il en modifiera les paramètres et l'étudiant aura une vision concrète du phénomène étudié. Ces exemples et applications peuvent être traités en travaux dirigés ou travaux pratiques, ils présentent donc un grand intérêt pédagogique.

J'adresse mes remerciements à Madame Michèle Huet, Messieurs Jackie Langlais, Damien Pallant, Yann Rolland. Ils n'ont pas ménagé leurs nombreux conseils, et surtout leur aide informatique. Enfin je fais un clin d'œil à mes amis : Jean Claude Delacour, Gérard Bouilly pour leur intérêt et suggestions, sans oublier une pensée affectueuse à mes filles Ellen et Élise.

Châteauneuf, le 14 juillet 2006

C. Bélorgeot

---

<sup>1</sup>Les produits et logiciels mentionnés dans cet ouvrage peuvent être des marques déposées. Toutes ces marques sont reconnues. En particulier :

- Maple<sup>®</sup> est une marque déposée de Maplesoft,
- Mathematica<sup>®</sup> est une marque déposée de Wolfram Research Inc.,
- Mathcad<sup>®</sup> est une marque déposée de Mathsoft Engineering & Education, Inc.,
- Matlab<sup>®</sup> est une marque déposée de Math Works Inc.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Optique géométrique</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.2	Principe de Fermat et loi de la réfraction . . . . .	2
1.3	Étude du prisme . . . . .	6
1.3.1	Angle de déviation . . . . .	6
1.4	Dioptré sphérique convexe . . . . .	8
1.4.1	Mécanisme de formation d'une image formée par le dioptré sphérique. Points conjugués : relation de conjugaison . . . . .	9
1.4.2	Convention de signe . . . . .	10
1.4.3	Distance objet, distance image, distance focale objet, distance focale image, objet réel ou virtuel, points singuliers . . . . .	11
1.4.4	Objet réel construction géométrique d'une image réelle, d'une image virtuelle . . . . .	12
1.4.5	Construction géométrique, objet virtuel et image correspondante virtuelle	15
1.5	Dioptré sphérique concave . . . . .	16
1.6	Équation des lentilles minces . . . . .	19
1.6.1	Équation d'une lentille mince . . . . .	19
1.6.2	Distance focale objet et distance focale image . . . . .	20
1.6.3	Grandissement . . . . .	21
1.6.4	Lentille positive, construction géométrique des images . . . . .	21
1.6.5	Lentille négative, construction géométrique des images . . . . .	25
1.6.6	Lentille mince placée dans deux milieux différents . . . . .	28
1.7	Instruments optiques . . . . .	29
1.7.1	Système formé par l'association de deux lentilles minces . . . . .	30
1.7.2	Montage grossissant loupe-œil . . . . .	31
1.7.3	Microscope . . . . .	35
1.7.4	Lunette astronomique . . . . .	38
1.8	Formulation matricielle de la réfraction par les dioptrés sphériques . . . . .	41
1.8.1	Matrice de réfraction,matrice de translation . . . . .	41
1.8.2	Matrice de deux surfaces sphériques distantes de $d$ : matrice d'une len- tille épaisse et plans principaux . . . . .	44
1.8.3	Montage optique formé par un système de lentilles . . . . .	50
1.9	Miroirs plans et miroirs sphériques . . . . .	53
1.9.1	Miroir plan, image virtuelle . . . . .	53
1.9.2	Équation d'un miroir sphérique . . . . .	54
1.9.3	Convention de signe . . . . .	55

1.9.4	Grandissement . . . . .	55
1.9.5	Méthode graphique et variations de $x_i$ en fonction de $x_o$ . . . . .	56
1.10	Matrices d'une cavité réfléchissante, calcul des valeurs propres . . . . .	58
<b>2</b>	<b>Interférence</b> . . . . .	<b>65</b>
2.1	Introduction . . . . .	65
2.2	Ondes harmoniques . . . . .	66
2.3	Superposition des ondes harmoniques . . . . .	68
2.3.1	Superposition dépendant des coordonnées d'espace et de temps . . . . .	68
2.3.2	Étude des intensités . . . . .	70
2.3.3	Normalisation . . . . .	72
2.4	Interférométrie par division du front d'onde en deux faisceaux . . . . .	73
2.4.1	Interférence par division du front d'onde . . . . .	73
2.4.2	Expérience d'Young (fig. 2.5a) . . . . .	75
2.5	Interférométrie : division par deux de l'amplitude du faisceau . . . . .	80
2.5.1	Description d'un modèle diviseur d'amplitude . . . . .	80
2.5.2	Lame à faces parallèles . . . . .	81
2.5.3	Interféromètre de Michelson, franges d'Heidinger, franges de Fizeau . . . . .	88
2.6	Interférométrie par faisceaux multiples . . . . .	92
2.6.1	Lame à faces parallèles . . . . .	92
2.6.2	Étalon Fabry-Pérot . . . . .	98
2.6.3	Résolution du spectromètre Fabry-Pérot . . . . .	100
2.6.4	Sources ponctuelles alignées régulièrement sur une ligne . . . . .	103
2.7	Sources ponctuelles réparties au hasard . . . . .	107
<b>3</b>	<b>Diffraction</b> . . . . .	<b>113</b>
3.1	Introduction . . . . .	113
3.2	Intégrale de Kirchhoff-Fresnel . . . . .	115
3.2.1	Intégrale . . . . .	115
3.2.2	Diffraction par un diaphragme circulaire, observation sur l'axe de symétrie . . . . .	116
3.2.3	Diffraction par un disque, observation sur l'axe de symétrie . . . . .	118
3.3	Diffraction de Fresnel, approximation de la diffraction à grande distance, diffraction de Fraunhofer . . . . .	119
3.3.1	Approximation des petits angles, étude en coordonnées cartésiennes . . . . .	120
3.3.2	Diffraction de Fresnel, approximation de la grande distance, diffraction de Fraunhofer . . . . .	122
3.4	Diffraction à l'infini, diffraction de Fraunhofer . . . . .	123
3.4.1	Diffraction par une fente . . . . .	124
3.4.2	Diffraction par une fente et transformée de Fourier . . . . .	127
3.4.3	Diffraction par une ouverture rectangulaire . . . . .	128
3.4.4	Diffraction par une ouverture circulaire . . . . .	130
3.4.5	Réseaux . . . . .	134
3.4.6	Résolution . . . . .	143
3.5	Théorème de Babinet . . . . .	146
3.6	Diaphragmes répartis au hasard . . . . .	149
3.7	Diffraction de Fresnel . . . . .	152
3.7.1	Diffraction par une fente et intégrales de Fresnel . . . . .	152

3.7.2	Diffraction de Fresnel par une fente . . . . .	153
3.7.3	Diffraction de Fresnel par le bord d'un écran . . . . .	154
A3.1.1	Réseau lamellaire . . . . .	156
A3.2.1	Spirale de Cornu . . . . .	159
A3.2.2	Principe de Babinet et spirale de Cornu . . . . .	160
<b>4</b>	<b>Cohérence</b> . . . . .	<b>163</b>
4.1	Cohérence spatiale . . . . .	163
4.1.1	Introduction . . . . .	163
4.1.2	Cohérence spatiale : exemple de deux sources ponctuelles . . . . .	163
4.1.3	Conditions de cohérence . . . . .	167
4.1.4	Cohérence spatiale d'une source étendue . . . . .	168
4.1.5	Visibilité, contraste des franges . . . . .	171
4.1.6	Interféromètre de Michelson . . . . .	174
4.2	Cohérence temporelle . . . . .	175
4.2.1	Trains d'onde et lumière quasiment monochromatique . . . . .	175
4.2.2	Superposition des trains d'onde . . . . .	177
4.2.3	Longueur d'un train d'onde . . . . .	177
A4.1.1	Spectroscopie par transformée de Fourier et émission du corps noir . . . . .	179
<b>5</b>	<b>Spectroscopie par transformée de Fourier</b> . . . . .	<b>181</b>
5.1	Transformée de Fourier . . . . .	181
5.1.1	Introduction . . . . .	181
5.1.2	Intégrales de Fourier . . . . .	181
5.1.3	Exemples de transformations de Fourier avec des fonctions analytiques . . . . .	182
5.1.4	Transformée de Fourier de valeurs numériques . . . . .	183
5.1.5	Transformée de Fourier du produit de deux fonctions, intégrale de convolution . . . . .	188
5.2	Spectroscopie par transformée de Fourier . . . . .	190
5.2.1	Interférogramme, transformation de Fourier. Superposition d'ondes sinusoidales en cosinus . . . . .	190
5.2.2	Interféromètre de Michelson et interférogrammes . . . . .	191
5.2.3	Intégrale de la transformation de Fourier . . . . .	193
5.2.4	Variation discrète des coordonnées et des fréquences . . . . .	194
5.2.5	Échantillonnage . . . . .	195
5.2.6	Spectroscopie de haute résolution . . . . .	199
5.2.7	Apodisation . . . . .	202
A5.1.1	Spectroscopie par transformée de Fourier asymétrique . . . . .	206
<b>6</b>	<b>Formation des images</b> . . . . .	<b>211</b>
6.1	Introduction . . . . .	211
6.2	Ondes et fréquences spatiales, transformée de Fourier . . . . .	212
6.3	Objet, image et transformée de Fourier . . . . .	216
6.3.1	Ondes issues de l'objet, d'une ouverture plane, d'une lentille . . . . .	216
6.3.2	Processus de sommation des ondes formant l'image . . . . .	216
6.3.3	Transformée de Fourier de la transformée de Fourier . . . . .	218
6.4	Formation d'image quand la lumière est incohérente . . . . .	219

6.4.1	Fonction de distribution . . . . .	219
6.4.2	Intégrale de convolution . . . . .	220
6.4.3	Impulsion de réponse, distribution d'intensité . . . . .	220
6.4.4	Exemples de convolution par une fonction de distribution . . . . .	221
6.4.5	Fonction de transfert . . . . .	224
6.4.6	Étude de la résolution . . . . .	227
6.5	Formation d'une image en lumière cohérente . . . . .	228
6.5.1	Fonction de distribution en lumière cohérente . . . . .	228
6.5.2	Résolution en lumière cohérente . . . . .	229
6.5.3	Fonction de transfert . . . . .	231
6.6	Holographie . . . . .	233
6.6.1	Introduction . . . . .	233
6.6.2	Enregistrement de l'interférogramme . . . . .	233
6.6.3	Reconstruction de l'image par la même onde plane utilisée lors de l'en- registrement . . . . .	234
6.6.4	Reconstitution de l'image par un plan d'onde différent . . . . .	235
6.6.5	Création d'une image réelle et virtuelle sous une certaine incidence . . .	236
6.6.6	Dimension d'un hologramme . . . . .	236
<b>Bibliographie</b>		<b>245</b>
<b>Index</b>		<b>247</b>

# Chapitre 1

## Optique géométrique

### 1.1 Introduction

L'optique géométrique étudie, à l'aide des faisceaux et rayons lumineux, la formation des images par les surfaces sphériques réfringentes ou réfléchissantes : lentilles minces ou épaisses, miroirs, instruments d'optique. Chaque point d'un objet réel émet un cône de lumière qui devient, après transformation par le montage optique, un faisceau convergent vers l'image quand elle est réelle.

Considérons le mécanisme de formation de l'image d'un objet par une lentille mince. L'objet de dimension finie est formé par une suite de points objets. L'image d'un point objet est sur le rayon passant par le point objet et le centre de la lentille. Nous établirons la relation mathématique qui permet de calculer l'abscisse de l'image en fonction de l'abscisse de l'objet et de la distance focale de la lentille. Cette formule suppose que les rayons incidents ont une incidence faible par rapport à l'axe de symétrie, ils forment des angles petits par rapport à l'axe : nous sommes dans les conditions de la théorie paraxiale. Supposons que l'objet et la lentille soient dans l'air, une formule mathématique simple du type

$$\frac{1}{-x_0} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \quad (1.1)$$

sera établie. Nous indiquons par l'indice  $i$  les paramètres relatifs à l'image, par l'indice  $o$  les paramètres se rapportant à l'objet. Cette relation permet de calculer la position de l'image connaissant celle de l'objet, elle représente un modèle simple pour la description du processus de formation image et peut s'appeler *équation d'une lentille mince*.

Ce modèle sera employé pour la formation d'images par : les surfaces sphériques, les lentilles minces, les systèmes de lentilles minces, les lentilles épaisses, les systèmes de lentilles épaisses et les systèmes de miroirs sphériques. Nous avons besoin des trois formules fondamentales ci-dessous pour décrire le processus de formation d'une image.

1. Principe de propagation en ligne droite des rayons lumineux dans un milieu homogène.
2. Loi de la réfraction :

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.2)$$

La lumière vient du milieu d'indice  $n_1$  sous incidence  $\theta_1$  par rapport à la normale à la



surface de séparation. Le rayon lumineux après traversée de l'interface fait un angle  $\theta_2$  dans le milieu d'indice  $n_2$ .

### 3. Loi de la réflexion

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (1.3)$$

La loi de la réflexion correspond au cas limite : les deux milieux ont le même indice de réfraction, nous réalisons une réflexion sur la surface.

### Indice de réfraction

L'indice de réfraction dans un milieu diélectrique est défini en tant que  $n = c/v$ , où  $v$  est la vitesse de la lumière dans le milieu et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

La vitesse de la lumière n'est plus définie comme étant le rapport de l'unité de longueur standard par l'unité de temps, sa valeur exacte dans le vide est :  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$  il est très souvent plus pratique de retenir  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , nous utiliserons cette valeur de  $c$  dans nos applications numériques ; dans l'air la vitesse  $v$  de la lumière est presque identique à  $c$ . La vitesse  $v$  est plus petite que  $c$  dans les matériaux diélectriques, donc l'indice de réfraction est plus grand que l'unité :  $n > 1$ .

Notre œil fonctionne comme une lentille mais sa distance focale ne reste pas constante. Il n'est pas au point de vue physiologique une lentille mince. L'œil forme l'image d'objets placés à des distances très variables ; il fait donc varier sa distance focale de façon que l'image soit toujours formée sur le détecteur placé sur le fond de l'œil appelé la rétine.

Les instruments d'optique : loupe, microscope, télescope, peuvent être réglés pour que l'œil observe l'image avec une distance focale fixe. De plus, notre cerveau inverse le sens des images qu'il reçoit. ainsi une image dirigée vers le bas sur la rétine nous apparaîtra dirigée vers le haut.

## 1.2 Principe de Fermat et loi de la réfraction

Au XVII<sup>e</sup> siècle, les philosophes pensaient que la nature agissait toujours d'une façon optimum. Considérons le chemin suivi par la lumière à travers plusieurs milieux homogènes n'ayant pas le même indice de réfraction, la lumière se déplacera dans ces milieux avec différentes vitesses. Dans le cas où toutes les sections auraient le même indice de réfraction, le trajet suivi par la lumière, entre le point de départ et le point final, sera une ligne droite. Cependant, si chaque milieu a un indice différent, la lumière ne se propage pas selon une ligne droite à travers les milieux différents ; elle est déviée lors du passage à travers l'interface séparant deux milieux différents : il y a *réfraction*. La lumière se propage donc en ligne droite dans un milieu homogène, elle est déviée lors de la traversée de deux milieux différents c'est-à-dire deux milieux homogènes n'ayant pas le même indice de réfraction  $n$ . Le mathématicien Fermat a formulé le calcul du chemin optimum comme l'intégrale suivante du chemin optique

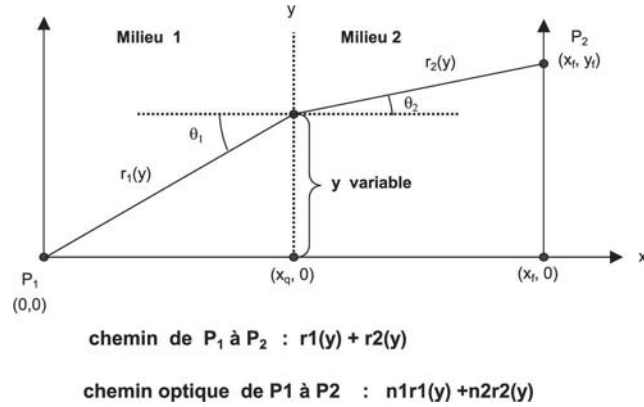
$$\int_{P_1}^{P_2} n ds \quad (1.4)$$

### Chemin optique

Par définition : le *chemin optique* est le produit du chemin géométrique d'un rayon dans un milieu par l'indice de réfraction de ce milieu.

La valeur optimum de l'intégrale décrit le chemin optique le plus court de  $P_1$  à  $P_2$  dans un

milieu dans lequel la lumière ne se déplace pas avec une vitesse uniforme ; ce qui est important est de comparer seulement des passages dans le même voisinage.



**Fig. 1.1** – Système de coordonnées pour étudier le trajet d'un rayon issu de  $P_1$  dans le milieu 1 se dirigeant vers  $P_2$  dans le milieu 2.

$$r_1(y) + r_2(y) \quad (1.5)$$

*Étude de la figure 1.1*

La distance parcourue par le rayon lumineux de  $P_1$  à  $P_2$ , est

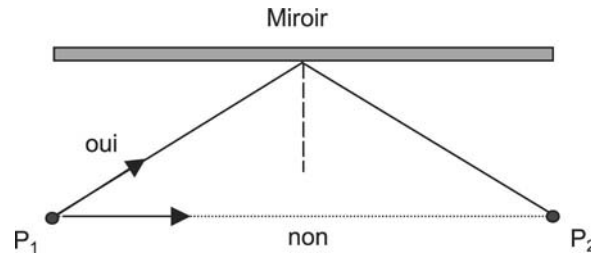
$$r_1(y) + r_2(y) \quad (1.6)$$

Le chemin optique correspondant devient

$$n_1 r_1(y) + n_2 r_2(y) \quad (1.7)$$

$n_1$  = indice du milieu initial       $n_2$  = indice du milieu final.

Le rayon lumineux se déplace avec la vitesse  $v_1$ , il est incident sur l'interface selon l'angle  $\theta_1$  par rapport à la normale au point de contact. Après pénétration dans le milieu où sa nouvelle



**Fig. 1.2** – Trajet des rayons. application du principe de Fermat à la réflexion, sur un miroir plan. Nous considérons seulement les rayons réfléchis par le miroir.

vitesse est  $v_2$ , l'angle par rapport à la normale à la surface change de  $\theta_1$  à  $\theta_2$ .

La valeur optimale de l'intégrale (équation 1.4) décrit le chemin optique le plus court de  $P_1$  à  $P_2$  selon un parcours à travers des milieux différents où le rayon n'a pas la même vitesse. Nous représentons sur la figure (1.2) un exemple de réflexion par un miroir et nous indiquons le chemin qu'il ne faut pas considérer.

Considérons un exemple populaire, une nageuse située en  $P_2$  appelle à l'aide un maître-nageur qui est situé sur la plage en  $P_1$ . Celui-ci court sur le sable avec la vitesse  $v_1$  plus rapidement qu'il peut nager dans l'eau avec la vitesse  $v_2$ . S'il désire arriver auprès de la nageuse dans le minimum de temps, il ne devra pas choisir la ligne droite entre son point de départ et la nageuse placée dans l'eau. Il devra courir une partie beaucoup plus grande sur le sable puis il entrera dans l'eau. Tandis que toute la longueur de ce chemin est plus grande que la ligne droite, le temps total mis pour parcourir ce chemin est plus petit. Le problème se réduit à déterminer les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport à la normale de l'interface.

Nous verrons que ces deux angles sont déterminés par la loi de la réfraction en supposant que les vitesses soient connues. La lumière issue du point  $P_1$  se dirige vers le point  $P_2$  et passe par le point Q à la frontière des deux milieux dont les indices respectifs sont  $n_1$  et  $n_2$ . La vitesse de  $P_1$  à Q est  $v_1 = c/n_1$ , la vitesse pour aller de Q à  $P_2$  est  $v_2 = c/n_2$ .

À partir de l'équation (1.4) et à l'aide de la figure (1.1) le chemin optique parcouru est

$$n_1 r_1(y) + n_2 r_2(y)$$

mais nous avons

$$\begin{aligned} r_1(y) &= \sqrt{\{x_q^2 + y^2\}} \\ r_2(y) &= \sqrt{\{(x_f - x_q)^2 + (y_f - y)^2\}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

compte tenu que  $r_1(y) = v_1 \cdot t_1(y)$  et  $r_2(y) = v_2 \cdot t_2(y)$ , le temps total  $T(y)$  pour aller de  $P_1$  vers  $P_2$  est

$$T(y) = \frac{r_1(y)}{v_1} + \frac{r_2(y)}{v_2} \quad (1.9)$$

#### *Cas particulier*

Si  $v_1 = v_2$  les indices de réfraction sont identiques, la lumière se propage en ligne droite.

#### *Cas général*

Les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  sont différentes, le temps total mis pour aller de  $P_1$  à  $P_2$  doit être un optimum. Nous montrons (exemple OG.1) les variations de  $T(y)$  et voyons qu'elles passent par un minimum pour une valeur spécifique de  $y$ . Nous étudions (exemple OG.2) le cas où la lumière traverse trois milieux différents. Nous déterminons les conditions de l'optimum en prenant

$$\frac{dT(y)}{dy} = 0 \quad (1.10)$$

ce qui est fait dans l'exemple (OG.3) où nous considérons deux milieux et prenons les expressions  $r_1(y)$  et  $r_2(y)$  de la figure(1.1). Nous devons donc calculer la différentielle de l'expression.

$$n_1 r_1(y) + n_2 r_2(y) \quad (1.11)$$

Nous obtenons

$$\frac{dT(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \left\{ \left( \frac{c}{v_1} \right) \sqrt{x_q^2 + y^2} + \left( \frac{c}{v_2} \right) \sqrt{(x_f - x_q)^2 + (y_f - y)^2} \right\} \quad (1.12)$$

Cette dérivée est nulle (exemple OG.3), nous avons,

$$\frac{y}{(r_1(y)v_1)} + \frac{(y - y_f)}{(r_2(y)v_2)} = 0 \quad (1.13)$$

avec

$$\sin \theta_1 = \frac{y}{r_1(y)} \quad \text{et} \quad \sin \theta_2 = \frac{(y - y_f)}{r_2(y)} \quad (1.14)$$

d'où

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \quad (1.15)$$

Multiplions cette relation par  $c$ , introduisons les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$  correspondants aux vitesses  $v_1$ ,  $v_2$ , nous obtenons la loi de la réfraction ou loi de Descartes.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (1.16)$$

**Exemple OG.1. Principe de Fermat.** Traçons la courbe de variation du temps total mis par la lumière pour se rendre de  $P_1$  à  $P_2$  en passant du milieu 1 : vitesse  $v_1$ , dans le milieu 2 : vitesse  $v_2$ .

La lumière ne se propage pas en ligne droite entre  $P_1$  et  $P_2$  et le temps nécessaire est le temps minimum. Si nous changeons les valeurs numériques des vitesses, nous modifions les longueurs de parcours dans chaque milieu mais le temps total reste minimum.

Paramètres

$$xq = 20 \quad xf = 40 \quad yf = 40 \quad y = 0, 0.1 \dots 40 \quad v1 = 1 \quad v2 = 2, 5$$

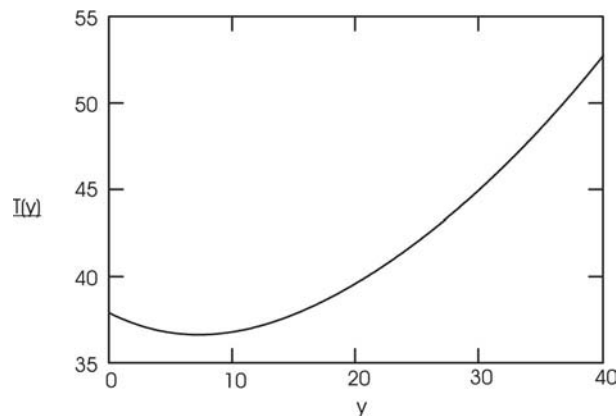
Temps dans le milieu 1

Temps dans le milieu 2

$$t1(y) = \frac{1}{v_1} \cdot \sqrt{(xq)^2 + y^2} \quad t2(y) = \frac{1}{v_2} \cdot \sqrt{(xf - xq)^2 + (yf - y)^2} \quad T(y) = t1(y) + t2(y)$$

*Théorie paraxiale*

*Courbe du temps total en fonction de  $y$*



**Application OG.1**

1. Comparer les trois choix suivants :

- $v_1 < v_2$
- $v_1 = v_2$
- $v_1 > v_2$

et observer comment les minima varient.

2. *Détermination graphique du minimum de temps.*

La lumière se propage dans un milieu (1) pendant une durée  $t_1$ , puis, dans un milieu (2) pendant le temps  $t_2$ , ces temps dépendent du paramètre  $y$ . Tracer les variations de  $t_1$  et  $t_2$ , puis, lire les valeurs de ces temps quand  $y$  correspond au minimum de temps  $T$ .

---

**Exemple OG.2. Principe de Fermat, lumière traversant trois milieux.**

Nous traçons la courbe de variation du temps total. Le temps total dépend de deux variables  $y_1$  et  $y_2$  quand la lumière traverse trois milieux.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application OG.2**

À chaque vitesse différente correspond un temps minimum différent. Donner des valeurs différentes aux vitesses et observer les localisations du minimum.

---

**Exemple OG.3. Établissons la loi de la réfraction à partir du principe de Fermat.**

Nous écrivons l'équation du temps total de parcours de la lumière, calculons la dérivée puis écrivons que la dérivée doit s'annuler. Nous remplaçons les vitesses par  $c/n$ , et nous obtenons la relation demandée.

Cette étude est faite sur le CD.

---

## 1.3 Étude du prisme

Un prisme disperse la lumière polychromatique. Éclairons-le par un faisceau de lumière blanche. Le faisceau est réfracté lors du passage de la face d'entrée puis de la face de sortie. Il est décomposé en différentes couleurs, les angles de déviation sont différents selon la couleur : il y a dispersion de la lumière en ses composantes. La dispersion est fonction de l'indice du prisme.

Cette expérience a été réalisée par Newton qui utilisait deux prismes. Le premier dispersait la lumière, le second, disposé à  $90^\circ$  du premier, était utilisé pour montrer que chaque couleur ne pouvait plus être à nouveau dispersée et constituait donc une couleur fondamentale.

### 1.3.1 Angle de déviation

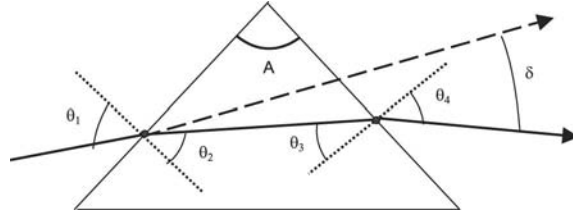
Nous désirons étudier le trajet d'un rayon lumineux à travers un prisme d'angle au sommet  $A$ . Le rayon est dans le plan principal du prisme (fig. 1.3), celui-ci est le plan de section perpendiculaire à l'arête du prisme.

Nous désirons étudier le chemin du rayon à travers le prisme supposé être placé dans l'air. Nous désignons par :

- $A$  = angle au sommet du prisme ;
- $n$  = indice du prisme ;
- $\delta$  = déviation du rayon lors de la traversée du prisme ;
- $\theta_1$  = angle d'incidence du rayon par rapport à la normale au point de contact avec la face d'entrée.

Nous avons les relations suivantes

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 + \theta_4 - \theta_3 \quad A = \theta_2 + \theta_3 \quad (1.17)$$



**Fig. 1.3** – Prisme d'angle au sommet  $A$ . Nous désignons par  $\delta$  l'angle de déviation du rayon. Le rayon incident fait l'angle  $\theta$  par rapport à la normale à la face d'entrée.

utilisons les lois de la réfraction

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \quad n \sin \theta_3 = \sin \theta_4 \quad (1.18)$$

Nous obtenons l'expression de la déviation du rayon. Nous utilisons l'écriture arcsin pour désigner  $\sin^{-1}$

$$\delta = \theta_1 + \arcsin \left[ \left( \sqrt{[n^2 - \sin^2(\theta_1)]} \right) \cdot \sin(A) - \sin(\theta_1) \cdot \cos(A) \right] - a \quad (1.19)$$

Nous traçons (exemple OG.4) le graphe des variations de  $\delta$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_1$ .

*Formule du prisme au minimum de déviation  $\theta_m$ .*

À partir des relations 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, nous écrivons

$$\delta = \theta_1 - \theta_2 + \theta_4 - \theta_3, \quad A = \theta_2 + \theta_3 \quad (1.20)$$

sachant que

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2, \quad n \sin \theta_3 = \sin \theta_4 \quad (1.21)$$

Nous éliminons  $\theta_2$  et  $\theta_4$  et obtenons deux équations en  $\theta_1$  et  $\theta_3$ .

$$\sin \theta_1 = n \sin(A - \theta_3) \quad (1.22)$$

$$n \sin \theta_3 = \sin(\delta + A - \theta_1) \quad (1.23)$$

La déviation passe par un maximum, ou un minimum, quand la différentielle de chacune de ces deux équations s'annule.

$$\cos \theta_1 d\theta_1 + n \cos(A - \theta_3) d\theta_3 = 0 \quad (1.24)$$

$$n \cos \theta_3 d\theta_3 + \cos(\delta + A - \theta_1) d\theta_1 = 0 \quad (1.25)$$

Nous obtenons deux équations linéaires du premier ordre en fonction de  $d\theta_1$  et  $d\theta_3$ . Il y a des solutions non triviales quand le déterminant s'annule (exemple OG.5). La relation obtenue est

$$\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \cos(A - \theta_3) \cos(\delta + A - \theta_1) = 0$$

Le minimum de déviation  $\delta_m$ , dépend seulement de  $n$  et  $A$

$$\delta_m = 2 \arcsin \left[ n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \right] - A \quad (1.26)$$

Au minimum de déviation le montage est symétrique : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réfraction, nous utilisons cette situation pour mesurer l'indice du prisme.

---

**Exemple OG.4. Étudions la courbe de déviation du prisme.**

Nous traçons les variations de  $\delta$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_1$ ,  $A$  et  $n$  sont connus. Nous voyons que  $\delta$  passe par un minimum désigné par  $\theta_m$ .

Paramètres retenus

$\theta_1$  = angle d'incidence par rapport à la normale au plan de la face d'entrée

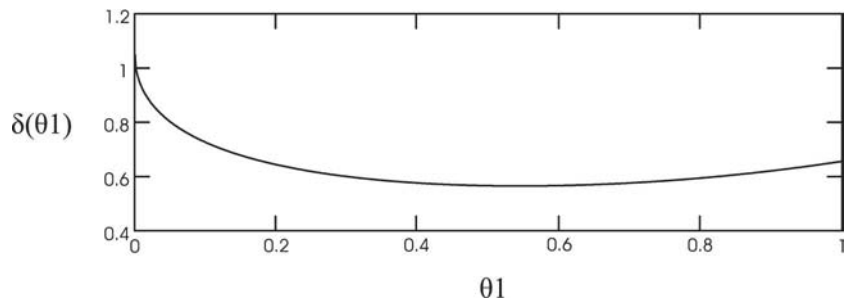
$\delta_1$  = angle de déviation du rayon incident après passage à travers le prisme

$n$  = indice du prisme

$\theta_1 = 0, 0, 0,001, \dots, 1, \quad n = 2, \quad A = \frac{2\pi}{360}30$

$$\delta(\theta_1) = \theta_1 + \arcsin(\sqrt{n^2 - \sin(\theta_1)^2} \cdot \sin(a) - \sin(\theta_1) \cdot \cos(A)) - A$$

Courbe de déviation



**Application OG.4**

- Changer la valeur de  $A$  ou  $n$  et constater que le minimum  $\delta_m$  change.
  - Détermination numérique de  $\theta_m$  minimum déviation. Calculer la différentielle de l'expression  $\delta = f(\theta_1)$ , écrire que la relation obtenue s'annule. Séparer la relation en deux expressions dont on représentera chaque variation sur un même graphe. Lire la valeur obtenue au point d'intersection des deux courbes de déviation en fonction de  $\delta_m$ ,  $A$ .
- 

**Exemple OG.5. Calculons l'indice du prisme.**

Nous établissons, sur le CD, l'expression littérale de l'indice de réfraction au minimum de déviation en fonction de  $\delta_m$  et  $a$ .

---

## 1.4 Dioptre sphérique convexe

Un dioptre sphérique convexe désigne une surface sphérique convexe séparant deux milieux ayant des indices de réfraction différents. Un dioptre sphérique peut être utilisé pour former l'image d'un objet, le faisceau incident est réfracté lors de la traversée de l'interface et forme l'image de l'objet. Le faisceau après réfraction peut être divergent ou convergent.

- Quand il est convergent, l'image obtenue est une image réelle.
- Quand il devient divergent l'image obtenue est virtuelle.

### 1.4.1 Mécanisme de formation d'une image formée par le dioptré sphérique. Points conjugués : relation de conjugaison

Soit le dioptré sphérique constitué par une surface sphérique séparant deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  (fig. 1.4).

**Convention :** la lumière se propage de la *gauche vers la droite* du milieu 1 vers le milieu 2.

#### Hypothèses

- Nous considérons que les rayons, issus d'un point appelé  $P_1$ , forment un cône divergent, ils se dirigent vers l'interface convexe. Nous choisissons l'exemple où, après passage à travers l'interface, le cône converge vers un point image  $P_2$  qui est donc *une image réelle*.
- $P_1$  est placé dans le milieu 1 d'indice  $n_1$ ,  $P_2$  dans le milieu d'indice  $n_2$ .
- La surface réfractante est convexe, en conséquence, son rayon de courbure  $r$  est positif :  $r > 0$ .
- Nous nous plaçons dans les conditions de la théorie paraxiale et les rayons sont faiblement inclinés par rapport à l'axe, les angles sont petits.

*Exercice : comprendre ce que nous désignons par petit.*

Jusqu'à quelle valeur de l'angle  $\theta$  pouvons-nous faire l'approximation  $\sin \theta \cong \theta$  ?

L'étudiant regardera dans un formulaire les valeurs de  $y_1 = \sin \theta$  et les angles correspondants à  $y_2 = \theta$  exprimés en radians. Il en déduira les valeurs de  $y_1$  et  $y_2$ , exprimées en degrés, pour lesquelles cette approximation est acceptable.

- Nous désignons par  $\alpha_1$  l'angle, par rapport à l'axe du système, que fait le rayon supérieur définissant le cône de lumière issu de  $P$ . Lors du passage à travers l'interface, il est réfracté, le rayon sortant fait l'angle  $\alpha_2$  par rapport à l'axe (fig. 1.4).
- Nous posons  $x_o$  = distance objet = distance du point  $P_1$  au sommet  $S$  de la surface sphérique.
- La distance  $x_i$  est la distance du point image  $P_2$  au sommet de la surface.
- $\theta_1$  = angle d'incidence, il est compris entre le rayon incident et la normale à l'interface au point de contact du rayon et de la surface. La normale passe par le centre de courbure  $C$ .
- $\theta_2$  = angle réfracté au point d'incidence.

*Remarque : les angles et les distances peuvent être positifs ou négatifs.*

#### Formule de conjugaison

Nous appelons formule de conjugaison la relation qui relie  $x_o$  et  $x_i$  en fonction des caractéristiques du système optique.

La relation des petits angles de la théorie paraxiale permet d'écrire la loi de la réfraction sous la forme

$$\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \theta_1 \quad (1.27)$$

De plus, à partir de la figure (1.4) nous écrivons les relations suivantes

$$\alpha_1 + \beta = \theta_1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 + \theta_2 = \beta \quad (1.28)$$

Nous en déduisons le rapport

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{(\alpha_1 + \beta)}{(\beta - \alpha_2)} \quad (1.29)$$

La dernière égalité s'écrit

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 = (n_2 - n_1) \beta \quad (1.30)$$

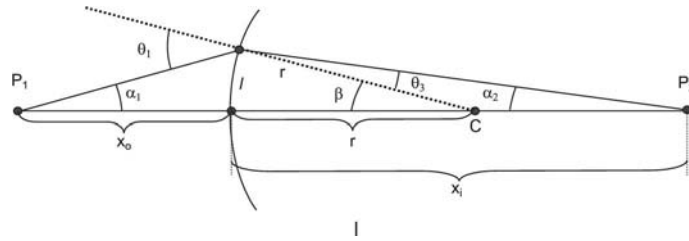


Soit  $l$  la hauteur du rayon au point d'incidence, nous pouvons exprimer  $l$  respectivement en fonction de  $x_o$  et  $x_i$ , d'où

$$\tan \alpha_1 = \frac{l}{x_o}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{l}{x_i}, \quad \text{et} \quad \tan \beta = \frac{l}{r} \quad (1.31)$$

Faisons l'approximation  $\tan \alpha = \alpha$  puis substituons (1.31) dans l'équation (1.30), il vient

$$\frac{n_1 \cdot l}{x_o} + \frac{n_2 \cdot l}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1) \cdot l}{r} \quad (1.32)$$



**Fig. 1.4** – Choix des coordonnées pour établir l'équation de conjugaison dans l'approximation paraxiale.

Les distances  $l$  disparaissent, nous obtenons la relation de conjugaison du dioptré sphérique, c'est-à-dire l'équation reliant  $x_o$  et  $x_i$  pour un système optique constitué par une surface sphérique séparant deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$  et ce, pour tous les rayons de sommet  $P_1$  dont l'image est  $P_2$ .

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.33)$$

### 1.4.2 Convention de signe

Nous désirons maintenant faire la distinction entre surface concave et surface convexe par rapport à la lumière incidente qui se déplace toujours de la gauche vers la droite. Cette hypothèse reste valable pour toute la suite du cours.

- L'origine des coordonnées cartésiennes est le sommet S de la surface sphérique.
- Une surface sphérique *concave* a un rayon de courbure  $r$  négatif.
- Une surface sphérique *convexe* a un rayon de courbure  $r$  positif.
- $x_o$  est positif quand l'objet est placé à droite du sommet, négatif quand le point objet est à gauche du sommet.
- $x_i$  est positif quand l'image est à droite du sommet, négatif quand l'image est à gauche du sommet.

À partir de cette convention l'équation (1.33) est modifiée,  $x_o$  devient  $-x_o$ , nous introduisons un signe négatif. La relation de conjugaison du dioptré sphérique est :

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (1.34)$$

Nous appelons points conjugués le point objet et son image le point image.  
autre expression de la relation (1.34)

Nous posons  $\zeta_o = \frac{x_o}{n_1}$   $\zeta_i = \frac{x_i}{n_2}$   $\rho = \frac{r}{(n_2 - n_1)}$

La relation (1.34) devient

$$\frac{-1}{\zeta_o} + \frac{1}{\zeta_i} = \frac{1}{\rho} \quad (1.35)$$

Cette simplification peut être très utile pour dériver d'autres équations relatives à la formation des images.

### 1.4.3 Distance objet, distance image, distance focale objet, distance focale image, objet réel ou virtuel, points singuliers

#### Objet réel, objet virtuel

- Quand le point objet, ou l'objet de dimension fini, est placé à gauche de l'interface, nous l'appelons objet réel.
- Quand l'objet est placé à droite de l'interface, nous l'appelons objet virtuel. Un objet virtuel est généralement créé par un montage optique précédant le dioptré sphérique, ce montage forme une image virtuelle située à droite de l'interface et cette image joue le rôle d'objet virtuel pour le dioptré sphérique.

Pour comprendre toutes les possibilités que nous pouvons déduire de l'équation des surfaces sphériques, nous traçons (exemple OG.6) les variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ . Rappelons l'équation du dioptré sphérique.

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.36)$$

où :  $x_i = \left[ \frac{n_2}{\left( \frac{n_2 - n_1}{r} \right) + \frac{n_1}{x_o}} \right]$

Nous considérons le cas d'un point objet placé dans l'air  $n_1 = 1$ , l'interface est convexe, son rayon de courbure est  $r_1 = 10$ , le deuxième milieu a l'indice  $n_2 = 1,5$

#### Remarque

Nous ne préciserons jamais les unités des distances ou des rayons de courbure. Il est évident que les chiffres d'un exemple sont tous dans le même système métrique.

Nous traçons (exemple OG.6) les variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$  connaissant le rayon de courbure  $r$ , les indices  $n_1, n_2$ , la distance focale image.

Quand le point objet a une abscisse infinie négative, c'est-à-dire qu'il est situé à gauche de la surface et à l'infini, l'abscisse image est finie, égale à  $x_{if}$ . Le point image est situé au Foyer image  $F_i$ .

$$x_{if} = \frac{n_2 r}{(n_2 - n_1)} \quad (1.37)$$

#### Distance focale objet et foyer objet.

Le foyer objet  $F_o$  est le point de l'axe tel que son image est située à l'infini. Son abscisse  $x_{of}$  est définie par

$$x_{of} = \frac{-n_1 r}{(n_2 - n_1)} \quad (1.38)$$

- Quand l'objet est situé à gauche du foyer objet toutes les valeurs de  $x_i$  sont positives.
- Quand l'objet est situé à droite du foyer objet, les valeurs de  $x_i$  sont d'abord négatives quand le point objet est situé entre le foyer objet et l'interface, puis positives quand l'objet est placé à droite de l'interface.

*Singularité*

Nous voyons, *Singularité*, à partir du graphe de l'exemple (OG.6), qu'il y a une singularité au point focal objet d'abscisse  $x_{of} = -20$ .

D'autre part les singularités des situations suivantes :

- $x_o = 0$ , objet sur l'interface  $\Rightarrow x_i = 0$ , l'image est aussi sur l'interface,
- $x_o = -\infty$ ,  $\Rightarrow x_i = x_{if}$ , l'image est au foyer image  $F_i$ ,

sont des complications sérieuses lors d'un calcul sur ordinateur. Nous pouvons éviter cette difficulté en prenant des valeurs numériques de  $x_o$  qui sont grandes mais pas infinies dans un cas, petites mais pas nulles dans l'autre cas.

Nous calculons (exemple OG.7) la position de l'image pour quatre valeurs de  $x_o$ .

---

**Exemple OG.6. Étudions les propriétés d'une surface réfractante convexe et traçons la courbe de variation de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ .**

*Nous calculons d'abord les distances focales objet et image puis les positions de l'image pour quatre exemples de position de l'objet.*

*Cette étude est faite sur le CD.*

---

**Exemple OG.7. Calculons les distances focales objet et image d'une surface sphérique convexe.**

*Nous calculons des distances focales objet et image, puis nous calculons la position de l'image pour quatre abscisses successives de l'objet.*

*Cette étude est faite sur le CD.*

---

#### 1.4.4 Objet réel construction géométrique d'une image réelle, d'une image virtuelle

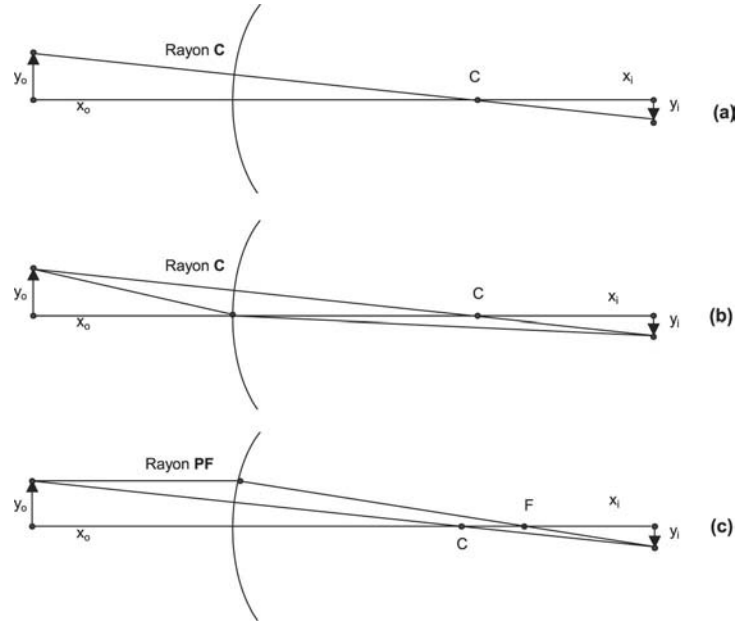
**Objet réel placé à gauche du foyer objet, construction géométrique de l'image**

Un objet de dimension finie est constitué par un grand nombre de points. À chaque point correspond une image. Un cône de lumière est issu de chaque point et converge vers le point image conjugué. Représentons l'objet par une flèche dirigée selon l'axe  $y$ , l'image sera aussi parallèle à cet axe, (fig. 1.5). La position de l'image et sa grandeur peuvent être déterminées par construction graphique : c'est la méthode de la construction géométrique. Nous en déduisons simplement la nature de cette image : image réelle ou image virtuelle.

La droite reliant le point objet et le point image (fig. 1.5a), passe par le centre de courbure de la surface sphérique. Le rayon lumineux correspondant à cette droite est appelé rayon central, en abrégé nous l'appelons rayon  $C$ . Un second rayon parallèle à l'axe et passant par le sommet de la flèche objet est appelé rayon  $PF$  (fig. 1.5c). Il est réfracté lors du passage à travers l'interface puis passe par le foyer image. La théorie paraxiale exige que tous les rayons  $C$  soient peu inclinés sur l'axe de symétrie, en conséquence, le rayon  $C$  est peu incliné par rapport à l'axe. Le rayon  $PF$  réfracté est lui aussi peu incliné par rapport à l'axe. Après réfraction, le rayon  $PF$  et le rayon  $C$  se coupent au point image du sommet de la flèche.

**Construction géométrique de l'image virtuelle quand l'objet réel est placé à droite du foyer objet**

Nous plaçons la flèche objet entre le foyer objet et l'interface (fig. 1.6.b). À partir de l'exemple (OG.7) et des paramètres utilisés précédemment, nous trouvons l'image située à  $-30$  quand



**Fig. 1.5** – Objet et image de dimensions finies. (a) Rayon central C et points conjugués, calcul du grandissement latéral. (b) Le rayon C et le rayon passant par le sommet de la flèche objet de hauteur  $y_o$ , après réfraction, passent par le point image qui est le sommet de  $y_i$ . (c) Construction géométrique de l'image à l'aide du rayon C et du rayon PF.

l'objet est placé à l'abscisse  $-10$ . Nous utilisons la méthode de la construction géométrique de la figure (1.6), après réfraction par l'interface, les deux rayons : rayon C et rayon PF, divergent (figs. 1.6.b et 1.7.b). Cependant, si nous prolongeons vers la gauche, en arrière ces deux rayons réfractés (nous le faisons en traits pointillés), ils se coupent en un point situé à gauche de la surface sphérique, ce point est le sommet de la flèche image, flèche située à  $x_i = -30$ , valeur trouvée soit par le calcul, soit par construction géométrique. Nous disons que cette image est *virtuelle*. Elle peut servir d'objet pour un deuxième mécanisme de formation d'image par un système optique placé après notre surface sphérique, à droite de l'interface, dans le milieu  $n_2$ .

Nous avons calculé (tableau 1.1) les positions images, les grandissements, déduit la nature de l'image pour quatre positions de l'objet réel ou virtuel.

#### Grandissement latéral

Le grandissement latéral  $m$  est par définition égal au rapport

$$m = \frac{y_i}{y_o} \quad (1.39)$$

Écrivons le rapport d'homothétie de triangles appropriés en tenant compte de notre convention de signe : le système de coordonnées cartésiennes est centré au sommet S de l'interface.

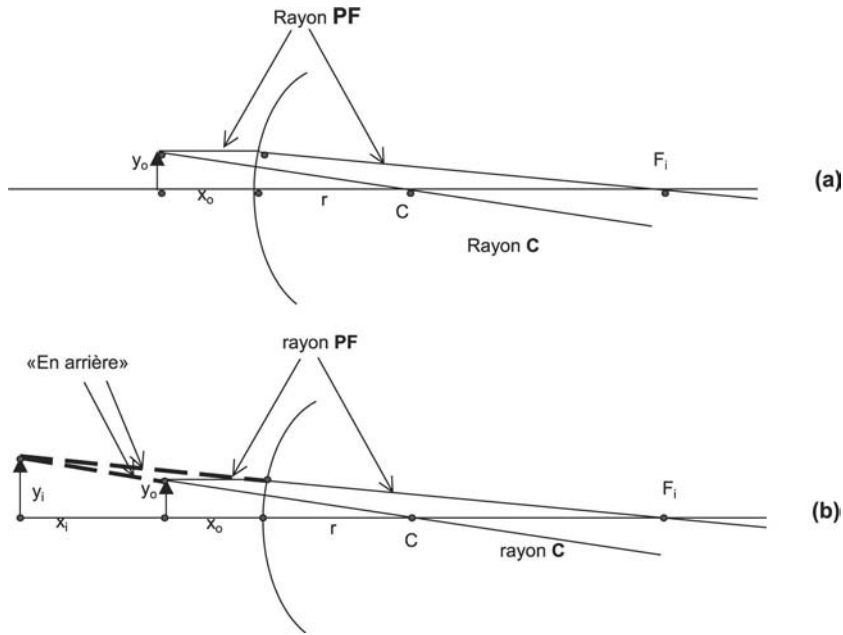
$$\frac{-y_i}{(x_i - r)} = \frac{y_o}{(-x_o + r)} \quad (1.40)$$

Nous avons

$$m = -\frac{(x_i - r)}{(-x_o + r)} \quad (1.41)$$

**Tableau 1.1** – Caractéristique des images formées par un dioptré sphérique convexe  $r = 10$ ,  $x_{if} = 30$ ,  $x_{of} = -20$ , ré = réel(le), vi = virtuel(le).

$x_o$	$x_i$	$m$	Image	Objet
-100	37,5	-0,25	ré	ré
-10	-30	2	vi	ré
20	15	0,5	ré	vi
100	25	0,0167	ré	vi



**Fig. 1.6** – (a) Le rayon  $C$  et le rayon  $PF$  divergent. (b) Après traversée du dioptré, leur prolongement vers la gauche donne une image virtuelle.

Éliminons le rayon de courbure en tenant compte de la relation (1.36).

$$m = \frac{y_i}{y_o} = \left(\frac{x_i}{x_o}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad (1.42)$$

La position de l'image et sa taille peuvent être déterminées directement par une construction géométrique. Nous avons besoin pour trouver l'image d'un point de deux rayons particuliers (figs. 1.5c et 1.7a).

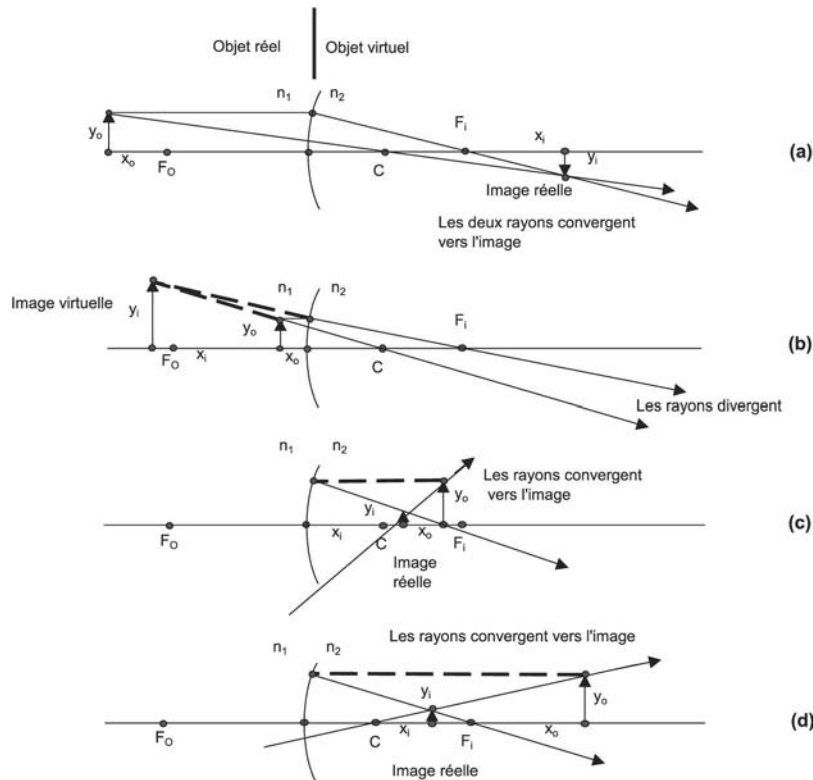
1. Le rayon central  $C$ .
2. Le rayon parallèle à l'axe venant d'un objet situé à  $-\infty$  passe, après réfraction, par le foyer image : nous l'appelons rayon  $PF$ .

Le rayon central  $C$  passe successivement par le sommet de la flèche objet, le centre de courbure  $C$  et le sommet de la flèche image. Ce rayon n'est pas dévié lors de la réfraction puisque son angle d'incidence sur la surface sphérique est nul.

Le rayon parallèle à l'axe passant par le sommet de la flèche objet est réfracté par l'interface,

il passe par le foyer image et par le sommet de la flèche image. Le point d'intersection de ces deux rayons transformés est le point image, c'est-à-dire le sommet de la flèche image. Le point objet est à l'intersection de deux rayons : rayon  $C$  et le rayon parallèle à l'axe. Le point image, sommet de la flèche image, est à l'intersection de la transformée de ces deux rayons.

#### 1.4.5 Construction géométrique, objet virtuel et image correspondante virtuelle



**Fig. 1.7** – Surface convexe sphérique. Construction géométrique des images. (a) Objet réel. La lumière converge à droite de la surface réfractante et forme une image réelle. (b) La lumière diverge après traversée de la surface, l'image est virtuelle, elle est obtenue en traçant le prolongement des rayons en sens inverse de la propagation de la lumière. (c) et (d) Objet virtuel placé à droite de l'interface. Pour les deux cas : c et d, le faisceau après avoir traversé l'interface converge vers une image réelle.

Nous avons tracé (fig. 1.7), la position de l'image pour quatre exemples de position de l'objet. Les calculs sont faits dans l'exemple (OG.7). Les objets sont d'abord réels, donc placés avant ou après le foyer objet, mais avant l'interface. Les objets virtuels sont placés à droite de l'interface, que ce soit à gauche ou à droite du foyer image.

Nous indiquons dans le tableau (1.1) la position des images, le grandissement correspondant pour les quatre positions de l'objet. Nous précisons la nature de l'objet et de son image, à savoir réelle ou virtuelle.

*Étude de la figure 1.7*

*Objet réel placé à gauche du foyer objet (fig. 1.7a).*

La construction géométrique est faite avec deux rayons particuliers :

- le rayon central  $C$
- le rayon incident parallèle à l'axe qui passe ensuite par le foyer image : rayon  $PF$ . Les deux rayons transmis convergent au point image : l'image est *réelle*.

*Objet réel placé entre le foyer objet et la surface sphérique (fig. 1.7b).*

La construction géométrique est faite à l'aide du rayon  $C$  et du rayon  $PF$  image : nous constatons que les rayons transmis divergent, nous les prolongeons vers la gauche, en arrière. Ils se coupent en un point qui est l'image cherchée : *l'image est virtuelle*.

*Objets virtuels (figs. 1.7c et 1.7d).*

Objet *virtuel* placé à droite de l'interface que ce soit à gauche ou à droite du foyer image.

*Construction géométrique.*

Le rayon central  $C$  est tracé vers la droite à partir de la surface. Le rayon  $PF$ , parallèle à l'axe, est tracé en pointillé vers la gauche, c'est-à-dire dans le sens inverse de propagation de la lumière ; son prolongement, en pointillés, passe par le sommet de la flèche. après réfraction sur la surface, nous le traçons dans le sens de propagation de la lumière, vers la droite, il passe par le foyer image. Ces deux rayons réfractés se coupent en un point qui est le point image cherché : ces rayons *convergent* vers une image. *L'image est réelle* et ce pour ces deux positions de l'objet, qui lui, est *virtuel*.

*Remarque.*

Dans les paragraphes précédents, nous avons étudié l'équation (1.36) qui correspond aux conditions  $n_1 < n_2$ ,  $r$  positif. Le cas où  $n_1 > n_2$ ,  $r$  négatif se déduit par une approche similaire.

## 1.5 Dioptré sphérique concave

Nous avons choisi une convention de propagation de la lumière. Elle se propage de la gauche vers la droite, une surface est **concave** quand son rayon de courbure est négatif. Nous désignons par :

- $n_1$  l'indice du milieu initial situé à gauche de l'interface ;
- $n_2$  l'indice du milieu final situé à droite de l'interface. Nous choisissons  $n_1 < n_2$ .

Le mécanisme de la formation des images d'objets de dimensions étendues, des grossissements, de la méthode de construction géométrique, est similaire à celui que nous avons abordés lors de l'étude des surfaces sphériques convexes.

Nous choisissons (exemple OG.8) quatre positions de  $x_o$  telles que l'objet soit réel ou virtuel et nous traçons les variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ . Nous calculons les caractéristiques de l'image : position, grossissement. Nous résumons les résultats sur le tableau (1.2) en précisant, à chaque fois, la nature de l'objet et de son image, réelle ou virtuelle.

---

**Exemple OG.8. Étudions la courbe de variation des coordonnées de l'image en fonction de celles de l'objet, pour une surface sphérique.**

Nous choisissons  $r = -10$ ,  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1,5$  et nous effectuons cette étude sur le CD.

**Application OG.8**

1. Observer la singularité du point focal objet qui se trouve à droite de l'interface, alors que le foyer objet d'une surface convexe est à gauche de l'interface.
2. Tracer deux graphes de variations correspondants à l'objet placé à gauche, puis à droite du foyer objet.

**Tableau 1.2** – Caractéristiques des images formées par un dioptré concave  $r = -10$ ,  $x_{if} = -30$ ,  $x_{of} = 20$ , ré = réel(le), vi = virtuel(le).

$x_o$	$x_i$	$m$	Image	Objet
-100	-25	0,167	vi	ré
-20	-15	0,5	vi	ré
10	30	0,2	ré	vi
100	-37,5	-0,25	vi	vi

(a) *Objet placé à gauche du foyer objet  $F_o$ . L'abscisse  $x_i$  est négative et à gauche de l'interface.  $x_i$  est positive quand l'image est à droite de l'interface.*

(b) *Objet placé à droite du foyer objet,  $x_i$  est négative.*

3. *Changer les valeurs d'indice et refaire les courbes.*

4. *Changer le rayon de courbure, refaire la question b.*

**Exemple OG.9.** *Maintenant nous étudions les caractéristiques d'une surface sphérique concave.*

*Nous calculons la distance focale objet et l'abscisse image pour quatre positions successives de l'objet, nous effectuons l'étude sur le CD.*

**Application OG.9**

- *Calculer à nouveau les éléments du tableau (1.2), c'est-à-dire  $x_i$  et le grandissement quand :  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 2,4$  (indice du diamant).*
- *Calculer à nouveau les éléments du tableau (1.2), c'est-à-dire  $x_i$  et le grandissement quand :  $n_1 = 2,4$  et  $n_2 = 1$ .*

Les constructions géométriques des quatre situations étudiées sont représentées sur les figures (1.8).

**Étude de la figure 1.8**

1. *Objet réel.*

L'objet réel est placé à gauche de l'interface. Le rayon central et le rayon  $PF$  divergent vers la gauche. Nous traçons vers la gauche de l'interface le rayon  $PF$ ; il passe par le foyer image situé à gauche de la surface. Le rayon  $C$  et le rayon  $PF$  se croisent en un point qui est l'image du point objet, c'est une image virtuelle.

2. *Objet virtuel placé entre l'interface et le foyer objet.*

Nous traçons les rayons  $C$  et  $PF$ , celui-ci est tracé en arrière de l'interface, vers la gauche. Il passe, après réfraction, par le foyer image; nous le prolongeons à droite dans la direction de propagation. Les deux rayons  $C$  et  $PF$ , après réfraction, convergent à droite de l'interface, dans le sens de propagation de la lumière, en un point qui est l'image du point objet : c'est une image réelle.

3. *Objet virtuel à droite du foyer objet.*

Nous traçons le rayon  $C$  vers la gauche vers l'interface. Le rayon  $PF$  après réfraction passe par le foyer image. Les deux rayons réfractés se coupent vers la gauche de la surface sphérique : l'image est virtuelle.

*Remarque.*

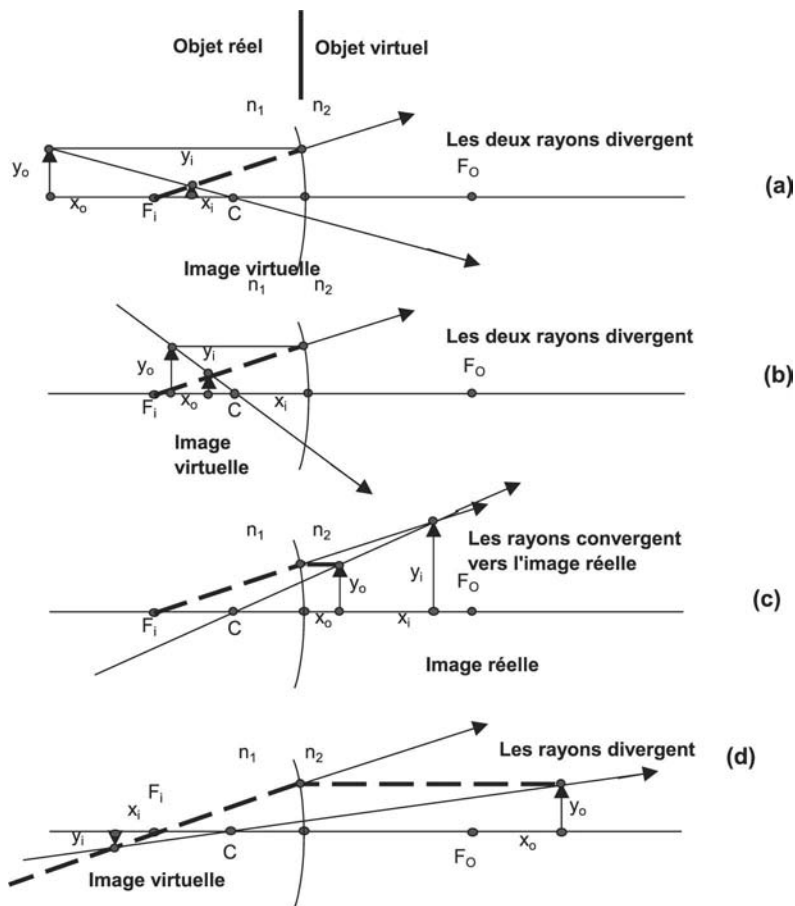
La comparaison des figures (1.7) et (1.8) montre que les images sont réelles ou virtuelles



en fonction de certaines singularités, d'une part quand l'abscisse  $x_o$  de l'objet est égale à la distance focale, d'autre part quand la distance de l'objet est nulle.

Nous trouvons toujours une image virtuelle quand le rayon central  $C$  et le rayon  $PF$  divergent après passage à travers la surface sphérique. Nous traçons en pointillés en arrière, vers la gauche, le rayon  $PF$  réfracté. Si nous plaçons un écran à la position de l'image virtuelle, nous ne pourrions pas détecter l'image, car les rayons qui la forment divergent vers l'avant après traversée.

Le cas  $n_1 > n_2$  et  $r$  positif est très similaire ; il est étudié en application de l'exemple (OG.9).



**Fig. 1.8** – Surface sphérique concave. (a) et (b) Construction géométrique de l'image d'un objet réel. (c) et (d) Objet virtuel il est placé à droite de l'interface. (8c) Le faisceau après traversée du dioptre converge vers une image réelle. Sur les figures (a), (b), (d) la lumière diverge après traversée de la surface. L'image est virtuelle, nous l'obtenons en traçant le prolongement des rayons en sens inverse du sens de propagation de la lumière.

Le cas  $n_1 > n_2$  et  $r$  positif est très similaire ; il est étudié en application de l'exemple (OG.9).

## 1.6 Équation des lentilles minces

### 1.6.1 Équation d'une lentille mince

Une lentille mince est formée par l'association de deux dioptries sphériques. La distance entre ces deux dioptries est négligeable. L'équation de conjugaison des lentilles minces est obtenue par la combinaison des équations des dioptries sphériques où nous négligeons la distance comprise entre les deux interfaces.

Nous voulons établir l'équation de conjugaison d'une lentille mince, c'est-à-dire trouver la relation mathématique entre l'abscisse de l'objet et l'abscisse de son image. La lentille a l'indice  $n_2$ , l'indice du milieu initial est  $n_1$ , l'indice du milieu placé à droite de la lentille est  $n_3$ . Un objet réel est placé dans le milieu  $n_1$ , à gauche de la lentille. Un objet virtuel est placé dans le milieu  $n_3$ , à droite de la lentille. Nous prenons l'exemple d'une lentille formée par l'association d'une surface sphérique convexe et d'une surface sphérique concave. La distance entre les sommets de ces deux surfaces est nulle : elles sont accolées.

Nous partons de l'équation de conjugaison d'une surface sphérique (relation 1.35).

$$\frac{-1}{\zeta_o} + \frac{1}{\zeta_i} = \frac{1}{\rho_1} \quad (1.43)$$

avec :  $\zeta_o = \frac{x_o}{n_1}$ ,  $\zeta_i = \frac{x_i}{n_2}$ ,  $\rho_1 = \frac{r_1}{(n_2 - n_1)}$

Toutes les distances sont mesurées à partir du centre de la première surface. L'équation de la deuxième surface est

$$-\frac{1}{\zeta'_o} + \frac{1}{\zeta'_i} = \frac{1}{\rho_2} \quad (1.44)$$

avec :  $\zeta'_o = \frac{x'_o}{n_2}$ ,  $\zeta'_i = \frac{x'_i}{n_3}$ ,  $\rho_2 = \frac{r_2}{(n_3 - n_2)}$

Toutes les distances sont mesurées à partir du centre de la deuxième lentille. La distance  $a$  entre les deux surfaces est mesurée à partir du sommet de la première surface sphérique, c'est-à-dire la surface qui reçoit le rayon incident. L'indice entre ces deux surfaces est  $n_2$  (fig. 1.9). L'image formée par la face d'entrée sert d'objet pour la face de sortie et son abscisse  $\zeta'_o$  mesurée par rapport à la face de sortie (fig. 1.9) est

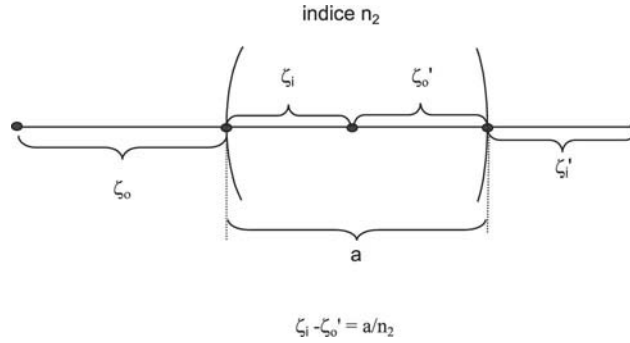
$$-\zeta'_o + \zeta_i = \frac{a}{n_2} \quad (1.45)$$

Remplaçons  $\zeta'_o$  de l'équation (1.44) par cette expression et nous obtenons

$$-\frac{1}{\left(\frac{-a}{n_2} + \zeta_i\right)} + \frac{1}{\zeta'_i} = \frac{1}{\rho_2} \quad (1.46)$$

additionnons les équations (1.43) et (1.46)

$$\frac{-1}{\zeta_o} + \frac{1}{\zeta_i} - \frac{1}{\left(\frac{-a}{n_2} + \zeta_i\right)} + \frac{1}{\zeta'_i} = \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \quad (1.47)$$



**Fig. 1.9** – Système de coordonnées pour l'étude d'une lentille mince.

Écrivons que l'épaisseur de la lentille est nulle et faisons dans cette équation  $a = 0$ , en conséquence les deux termes  $\frac{1}{\zeta_i}$  et  $-\frac{1}{(-\frac{a}{n_2} + \zeta_i)}$  s'annulent, et nous obtenons

$$\frac{-1}{\zeta_o} + \frac{-1}{\zeta_{i'}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad (1.48)$$

Réécrivons cette relation en introduisant les définitions des paramètres utilisés :

$\zeta_o = \frac{x_o}{n_1}$ ,  $\zeta_{i'} = \frac{x_{i'}}{n_3}$ ,  $\rho_1 = \frac{r_1}{(n_2 - n_1)}$ ,  $\rho_2 = \frac{r_2}{(n_3 - n_2)}$ , nous écrivons  $x_{i'} = x_i$ , et obtenons

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_3}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} + \frac{n_3 - n_2}{r_2} \quad (1.49)$$

### Distance focale d'une lentille mince

la distance focale  $f$  d'une lentille mince est donnée par la relation

$$\frac{1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} + \frac{(n_3 - n_2)}{r_2} \quad (1.50)$$

### Distance focale d'une lentille mince placée dans l'air

Dans cet exemple,  $n_1 = n_3 = 1$ , nous désignons par  $n$  l'indice de la lentille  $n = n_2$ . L'équation (1.50) devient :  $\frac{1}{f} = \frac{(n-1)}{r} + \frac{(1-n)}{r'}$ .

Quand la lentille est symétrique, cette équation est  $\frac{1}{f} = \frac{2(n-1)}{r}$ .

*Équation de conjugaison d'une lentille mince placée dans l'air.*

Remplaçons  $f$  dans l'expression (1.49), il vient

$$\frac{-1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{1}{f} \quad (1.51)$$

- Quand  $f$  est positif, la lentille est appelée lentille positive, ou lentille convergente.
- Quand  $f$  est négatif, la lentille est appelée lentille négative, donc lentille divergente.

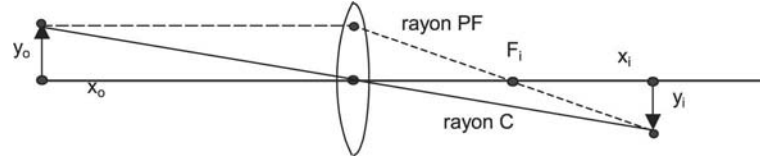
### 1.6.2 Distance focale objet et distance focale image

- **Lentille positive** :  $x_{if} = f > 0$

Le foyer objet est à gauche de la lentille, le foyer image est à droite de la lentille.

La coordonnée du foyer image est  $f \Rightarrow x_{if} = f$ , la distance focale est positive :  $f > 0$ .

La coordonnée du foyer objet est  $x_{of} = -|f|$ .



**Fig. 1.10** – Construction géométrique de l'image réelle d'un objet réel et grandissement. Trajet du rayon central C reliant le point objet et le point image du sommet d'une flèche.  $y_o$  = hauteur de l'objet,  $y_i$  = hauteur de l'image,  $x_o$  = abscisse de l'objet,  $x_i$  = abscisse de l'image.

– **Lentille négative** :  $x_{if} = f < 0$

Le foyer objet est à droite de la lentille, le foyer image est à gauche de la lentille.

La distance focale est négative :  $f < 0 \Rightarrow x_{if} = f = -|f|$  et  $x_{of} = |f|$ .

### 1.6.3 Grandissement

Nous calculons le grandissement  $m$  (fig. 1.10), dans le cas où l'objet est réel et son image est réelle.

Nous traçons le rayon reliant le sommet de la flèche objet et le sommet de l'image. Il passe par le centre de la lentille et n'est pas réfracté. Nous l'appelons rayon principal ou, par analogie, rayon central C. À partir des deux triangles semblables (fig. 1.10), nous définissons le grandissement  $m$  par le rapport

$$m = \frac{y_i}{y_o} = \frac{x_i}{x_o} \quad (1.52)$$

### 1.6.4 Lentille positive, construction géométrique des images

Nous représentons (exemple OG.10) le graphe déduit de l'équation de conjugaison d'une lentille mince. Nous traçons les variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$  pour une distance focale  $f$  positive. Il y a un point singulier quand  $x_o = -f$ .

*Remarques.*

Quand :

- l'objet est situé à gauche du foyer objet  $\Rightarrow x_i$  est positive  $\Rightarrow$  image réelle ;
- l'objet est situé entre le foyer objet et la lentille  $\Rightarrow x_i$  est négative  $\Rightarrow$  image virtuelle ;
- l'objet est situé à droite de la lentille  $\Rightarrow x_i$  est positive  $\Rightarrow$  image réelle.

Nous avons donc trois régions :

- dans la première et la troisième l'image est réelle ;
- dans la deuxième l'image est virtuelle ;

Dans l'exemple (\*) nous avons choisi quatre valeurs spécifiques de  $x_o$  et calculons les valeurs correspondantes de l'abscisse objet ainsi que le grandissement correspondant.

---

**Exemple OG.10.** Étudions les caractéristiques d'une lentille mince et traçons le graphe des variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$  avec  $f = 10$ .

La distance focale d'un système n'est autre que la distance focale image. La distance focale objet a même valeur absolue que la distance focale image, mais elle est de signe contraire. La distance focale objet est négative, la distance focale image est positive. Noter le rôle différent qu'elles jouent pour la construction géométrique.

### Lentille positive

Calcul des valeurs du graphe  $x_i = f(x_o)$  sur l'ensemble des variations continues des abscisses :  $-\infty < x_o < +\infty$ .

Nous traçons trois graphes :

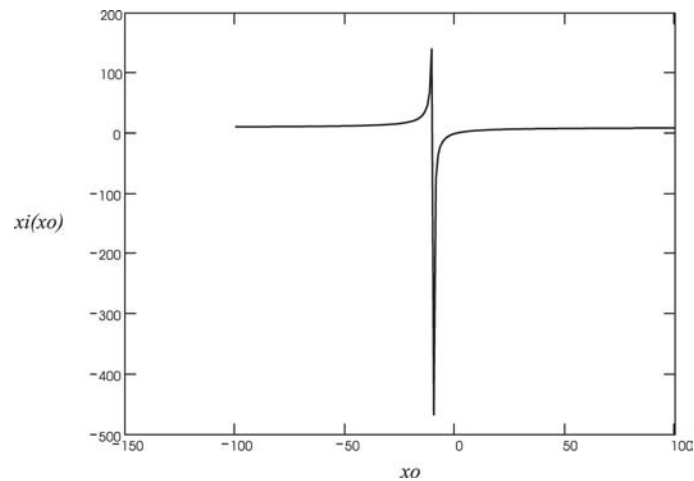
- premier graphe :  $-\infty < x_o < +\infty$
- deuxième graphe :  $-\infty < x_o < x_{of}$
- troisième graphe :  $x_{of} < x_o < +\infty$

Paramètres

$f = 10$  distance focale image :  $x_i f = f$  distance focale objet :  $x_o f = -f$ .

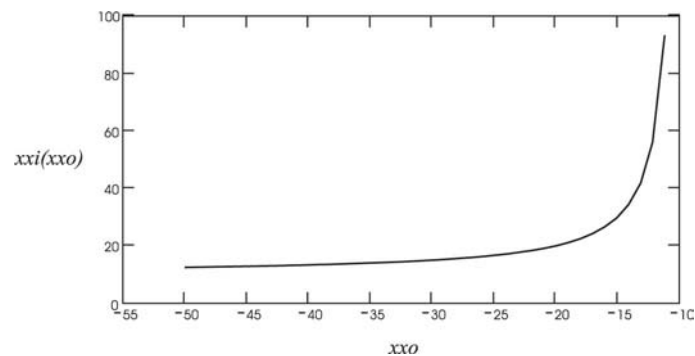
premier graphe :  $x_o$  varie sur toute l'échelle des abscisses

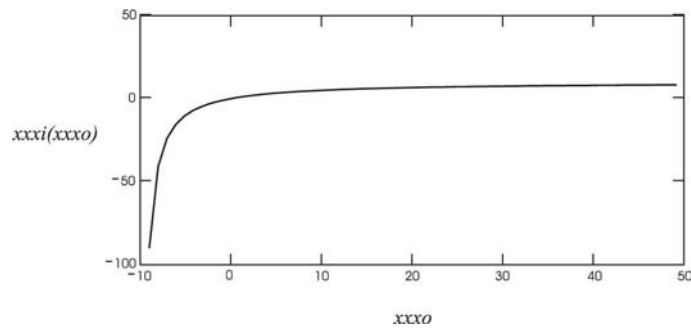
$$x_o = -100,001, -99,031 \dots 100 \quad x_i(x_o) = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{x_o}}$$



$$x_{xo} = -50,001, -49,031 \dots -11 \quad x_{xi}(x_{xo}) = \frac{1}{(\frac{1}{f}) + \frac{1}{x_{xo}}}$$

deuxième graphe :  $x_o$  à gauche du foyer objet





troisième graphe :  $x_o$  à droite du foyer objet

$$xxo = -9,001, -8,031 \dots 50 \quad xxi(xxo) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f}\right) + \frac{1}{xxo}}.$$

#### Application OG.10

La distance focale d'un système n'est autre que la distance focale image.

1. La distance focale objet a même valeur absolue que la distance focale image, mais elle est de signe contraire. La distance focale objet est négative, la distance focale image est positive. Noter le rôle différent qu'elles jouent pour la construction géométrique.
2. Changer la valeur de la distance focale, même question.

**Exemple OG.11.** Calculons plusieurs valeurs  $x_i$  ainsi que le grandissement de l'image obtenues par une lentille mince positive, nous choisissons quatre valeurs de  $x_o$ .

Une lentille positive a une distance focale  $f$  positive. La lumière se propage de la gauche vers la droite. La lentille d'indice  $n$  est placée dans l'air, indice égal à 1. Quand l'objet est placé à gauche de la lentille  $x_o$  est négatif.

- Première étude : objet réel placé à gauche du foyer objet d'abscisse  $x_{of} \Rightarrow$  image réelle.
- Deuxième étude : objet virtuel placé entre le foyer objet et la lentille  $\Rightarrow$  image virtuelle.
- Troisième étude : objet placé entre la lentille et le foyer image d'abscisse  $x_{if} \Rightarrow$  image réelle.
- Quatrième étude : objet virtuel placé à droite du foyer image  $\Rightarrow$  image réelle.

Nous calculons la distance focale  $x_{of} = f$ ,  $x_i$ , le grandissement  $mm$  ;

application numérique :  $n1 = 1$        $n2 = 1,5$

1.  $x_{o1} = -30$  objet réel placé à gauche du foyer objet d'abscisse  $x_{of} \Rightarrow$  image réelle.

$$x_{i1} = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{x_{o1}}} \quad x_{i1} = 15 \quad mm1 = \frac{x_{i1}}{x_{o1}} \quad mm1 = -0,5$$

2.  $x_{o2} = -5$  objet virtuel placé entre le foyer objet et la lentille  $\Rightarrow$  image virtuelle.

$$x_{i2} = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{x_{o2}}} \quad x_{i2} = -10 \quad mm2 = \frac{x_{i2}}{x_{o2}} \quad mm2 = 2$$

3.  $x_{o3} = 5$  objet placé entre la lentille et le foyer image d'abscisse  $x_{if} \Rightarrow$  image réelle.

$$x_{i3} = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{x_{o3}}} \quad x_{i3} = 3,333 \quad mm3 = \frac{x_{i3}}{x_{o3}} \quad mm3 = 0,667$$

4.  $x_{o4} = 30$  objet virtuel placé au delà du foyer image  $\Rightarrow$  image réelle.

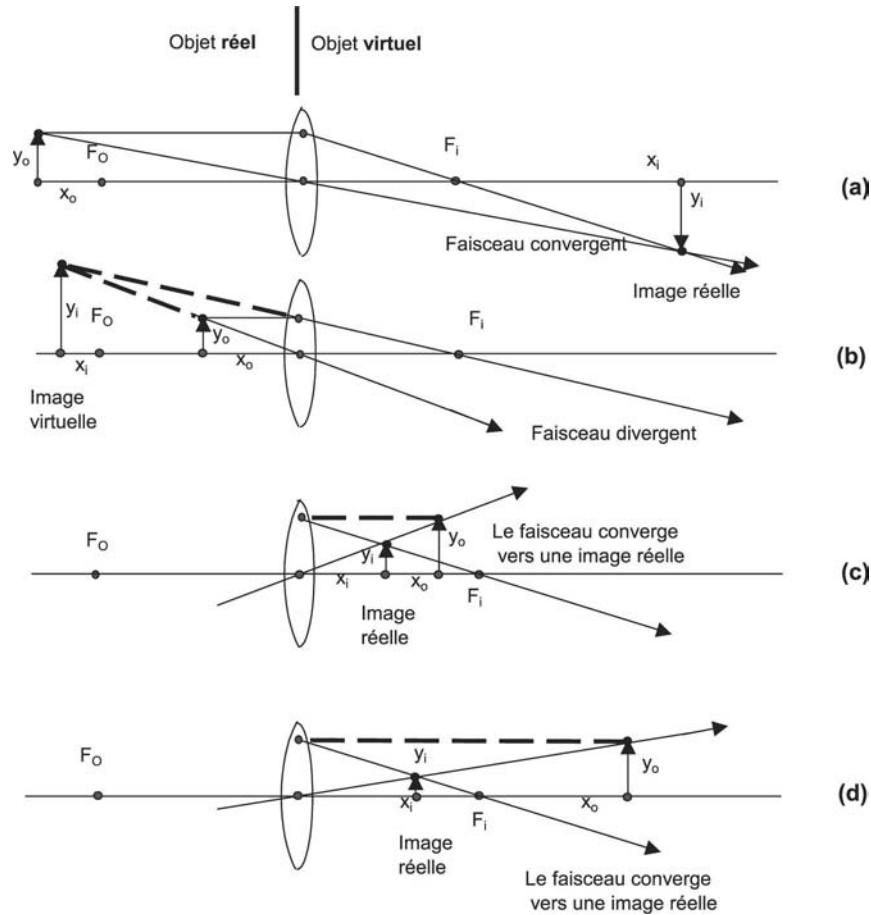
$$x_{i4} = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{x_{o4}}} \quad x_{i4} = 7,5 \quad mm4 = \frac{x_{i4}}{x_{o4}} \quad mm4 = 0,25$$

**Application OG.11**

La distance comprise entre l'objet et l'image change avec le choix de l'abscisse objet.

1. Trouver la position de l'objet afin d'obtenir la distance la plus courte.
2. Tracer les variations de  $y = -x_o + x_i$  et déterminer son minimum.
3. Construction géométrique.

Nous représentons (figs 1.11), les constructions géométriques des images dont la position a été calculée dans l'exemple (OG.11).



**Fig. 1.11** – Lentille convergente, construction géométrique a et b  $\Rightarrow$  Objet réel. (a)  $\Rightarrow$  La lumière converge à droite de la surface réfractante et forme une image réelle. (b)  $\Rightarrow$  la lumière diverge après traversée de la surface, l'image est virtuelle, elle est obtenue en traçant le prolongement des rayons en sens inverse de la propagation de la lumière. (c) et (d)  $\Rightarrow$  Objet virtuel, il est placé à droite de l'interface. Pour les deux cas (c) et (d), le faisceau, après la traversée de l'interface, converge vers une image réelle.

1. *Objet réel et image réelle (fig 1.11a).*

L'objet, une flèche de hauteur  $y_o$ , est placé à l'abscisse  $x_o$ . La position de l'image et la hauteur de la flèche image peuvent être déterminées géométriquement. Le rayon central  $C$  passe par le sommet de la flèche objet, par le centre  $O$  de la lentille, par le sommet

**Tableau 1.3** – Caractéristique des images formées par une lentille positive, distance focale image 10, distance focale objet  $-10$ , ré = réel(le), vi = virtuel(le).

$x_o$	$x_i$	$m$	Image	Objet
$-30$	$15$	$-0,5$	ré	ré
$-5$	$-10$	$2$	vi	ré
$5$	$3,3$	$0,67$	ré	vi
$30$	$7,5$	$0,25$	ré	vi

de la flèche image. Le rayon  $PF$ , rayon incident parallèle à l'axe, passe par le sommet de la flèche objet puis, après réfraction, par le foyer image. Ces deux rayons se coupent au sommet de la flèche image (fig. 1.11a), l'image de l'objet réel est une image réelle.

2. *Objet réel et image virtuelle (fig 1.11b).*

L'objet réel est placé entre le foyer objet et la lentille (fig. 1.11b). Ces deux rayons divergent vers l'avant, nous les prolongeons vers la gauche, en arrière du sens de propagation, et ils se croisent en un point qui est l'image virtuelle du point objet.

Nous obtenons toujours une image virtuelle quand, après traversée du système optique, les rayons divergent vers la direction de propagation. Si nous plaçons un écran à la place de l'image, nous n'y verrions pas d'image car l'écran se trouve dans une région de divergence des rayons, de divergence de l'énergie lumineuse.

3. *Objet virtuel et image réelle (fig 1.11c et d).*

Nous plaçons l'objet à droite de la lentille, il joue le rôle d'un objet virtuel. Un objet virtuel est créé par un système optique placé avant notre lentille, c'est l'image formée par le système optique précédant la lentille. Un objet est virtuel quand il est placé à droite de la lentille, soit entre la lentille et le foyer image, soit après le foyer image. Nous prolongeons le rayon  $C$  en avant, vers la droite, dans le sens de la propagation de la lumière. Le rayon  $PF$  est tracé à partir du sommet de la flèche objet vers la gauche (donc en arrière), puis, à partir du point de contact sur la lentille nous le traçons vers l'avant, à droite, en le faisant passer par le foyer image. Le rayon  $C$  et ce rayon  $PF$  convergent en un point image. L'image est réelle pour toutes les positions citées de l'objet.

Les résultats de ces quatre calculs sont résumés dans le tableau (1.3).

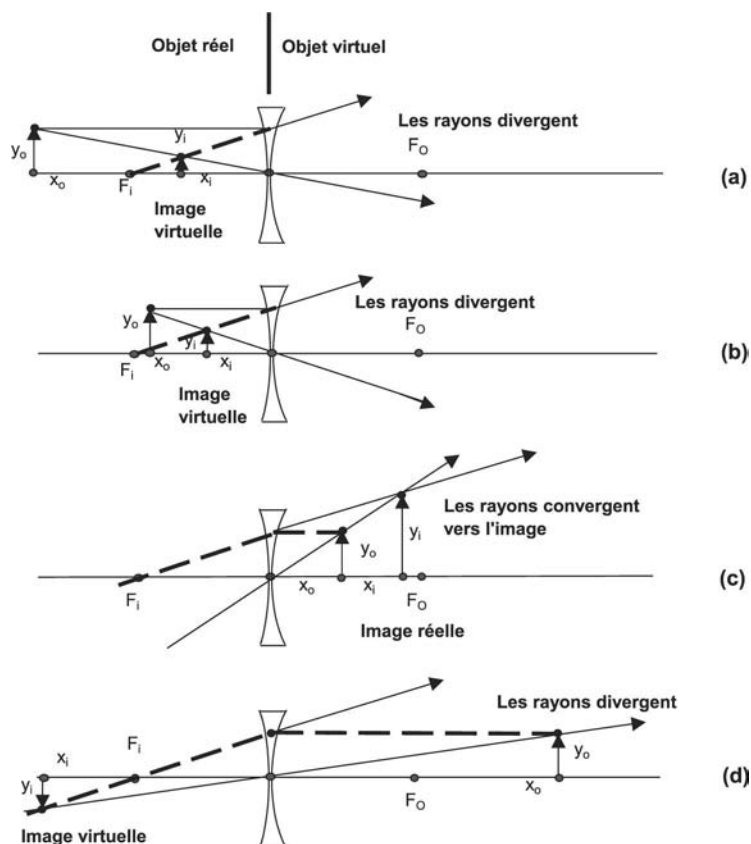
### 1.6.5 Lentille négative, construction géométrique des images

Nous représentons les variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$  (exemple OG.12) la distance focale  $f$  étant négative. Nous voyons la singularité au point focal objet  $f$  qui, maintenant, est placé à droite de la lentille. Le point focal image a une abscisse négative, il est placé à gauche de la lentille.

L'abscisse  $x_i$  est soit négative, soit positive, selon sa position par rapport à la lentille. Nous avons maintenant trois régions.

Nous choisissons (exemple OG.12) quatre positions successives de l'objet dont nous calculons la position de l'image ainsi que le grandissement correspondant. Nous traçons géométriquement (fig. 1.12), les images avec les valeurs numériques de l'exemple (OG.13).





**Fig. 1.12** – Construction géométrique. Lentille divergente : distance focale  $f$  négative,  $f = -10$ . (a) et (b)  $\Rightarrow$  objet réel, (c) et (d)  $\Rightarrow$  objet virtuel. Image réelle : en (c), le faisceau, après traversée de la lentille, converge vers une image réelle. Image virtuelle : en (a), (b), (d) le faisceau, après traversée de la lentille, diverge  $\Rightarrow$  l'image virtuelle est obtenue en prolongeant les rayons vers la gauche.

**Exemple OG.12.** Maintenant nous effectuons l'étude, sur le CD, d'une lentille mince négative et traçons le graphe des variations de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ .

L'étude est analogue à celle de l'exemple OG.10 qui s'appliquait à une lentille positive. Nous avons choisi  $f = -10$ .

1. Observer la singularité au point focal objet, il a une abscisse positive.
2. Changer la valeur de l'indice  $n$  et décrire le changement de caractéristiques de l'image.
3. Changer la valeur de la distance focale, même question.

**Exemple OG.13.** Calculons, sur le CD, plusieurs valeurs  $x_i$  ainsi que le grandissement de l'image obtenue par une lentille mince négative, nous choisissons quatre valeurs de  $x_o$ .

Effectuons le calcul des distances focales image et objet. Les constructions géométriques des images correspondant à ces calculs sont représentées sur la figure (1.12).

#### Application OG.13

La distance entre l'objet et son image varie en fonction de l'abscisse de l'objet.

1. Changer les valeurs numériques de l'application (1.11) afin de trouver la condition pour que cette distance soit la plus petite possible.

**Tableau 1.4** – Lentille négative : distance focale  $f = -10$ . Distance focale objet = 10, ré = réel(le), vi = virtuel(le).

$x_o$	$x_i$	$m$	Image	Objet
-30	-7,5	0,25	vi	ré
-5	-3,3	0,67	ré	ré
5	10	2	vi	vi
30	-15	-0,5	vi	vi

## 2. Faire le graphe correspondant.

Les constructions géométriques correspondant aux exemples (OG.13) sont faites sur la figure (1.12) que nous étudions :

### 1. Objet réel situé à gauche de la lentille, image virtuelle (figs. 1.12a et 1.12b).

L'objet, une flèche de hauteur  $y_o$ , est placé à l'abscisse  $x_o$  à gauche de la lentille négative. Un point image d'un point de l'objet et la hauteur totale de l'image, une flèche, peuvent être déterminés par une construction géométrique faisant intervenir le rayon  $C$  et le rayon  $PF$ . Le rayon  $C$  passe par le sommet de la flèche objet, par le centre de la lentille et le sommet de la flèche objet. Rappelons que ce rayon  $C$  n'est pas dévié lors de sa traversée de la lentille. Le rayon  $PF$ , rayon incident parallèle à l'axe, est tracé à partir du sommet de la flèche objet ; lors de la traversée de la lentille il est réfracté et diverge ensuite à droite de la lentille. Nous le prolongeons vers l'arrière, vers la gauche, en le faisant passer par le foyer image qui, rappelons-le, est à gauche de la lentille. Il coupe le rayon  $C$  en un point image du sommet de l'objet, ce qui permet de déterminer la position de la flèche en abaissant une perpendiculaire sur l'axe (figs. 1.12.a et 1.12.b). L'objet réel a une image virtuelle.

Une image virtuelle est obtenue quand le rayon  $C$  et le rayon  $PF$ , après traversée de la lentille, divergent à droite de la lentille.

### 2. Objet virtuel placé entre la lentille et le foyer objet (fig. 1.12c).

Nous plaçons l'objet virtuel entre le foyer objet et la lentille et nous traçons le rayon  $C$ . Le rayon  $PF$  est tracé en arrière du sens de la propagation vers la gauche. après le point de contact avec la lentille, il est dévié et passe par le foyer image situé à gauche de la lentille. Ces deux rayons convergent en un point image, l'image est réelle.

### 3. Objet virtuel placé à droite du foyer objet (fig. 1.12d).

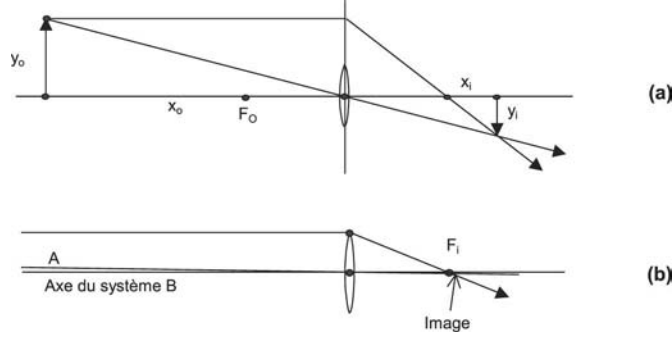
Nous plaçons un objet virtuel à droite du foyer objet, nous traçons le rayon  $C$ . Nous prolongeons vers l'arrière, vers la gauche, le rayon  $PF$ , son rayon réfracté passe par le foyer image. Ces deux rayons se coupent à gauche au-delà du foyer image en un point image : l'image est virtuelle.

Nous résumons ces résultats dans le tableau (1.4), nous avons choisi  $f = -10$ .

#### Remarque.

Dans une construction géométrique, la dimension d'une lentille n'est pas importante, nous la représentons par un plan puisque nous sommes dans l'approximation paraxiale, c'est-à-dire que nous travaillons au voisinage de l'axe, donc du centre de courbure, et que la face d'entrée peut être représentée par un plan suffisamment étendu selon la direction  $y$  (fig. 1.13a). Quand

l'objet est à l'infini nous pouvons, pour le représenter, choisir une grande distance finie, l'image est alors au voisinage du foyer image, c'est une approximation pratique (fig. 1.13b).



**Fig. 1.13** – Construction géométrique. (a) Quand l'objet est plus large que la lentille, nous considérons le plan de la lentille afin de tracer les rayons. (b) Image d'un objet situé à l'infini, les rayons parallèles incidents sont issus du sommet de l'objet.

### 1.6.6 Lentille mince placée dans deux milieux différents

Revenons à l'équation des lentilles minces et considérons le cas général où l'indice du milieu incident  $n_1$  est différent de l'indice du milieu final  $n_3$ . Nous partons de la définition des paramètres suivants

$$\zeta_o = \frac{x_o}{n_1} \quad \zeta'_i = \frac{x_i}{n_3} \quad \rho_1 = \frac{r_1}{(n_2 - n_1)} \quad \rho_2 = \frac{r_2}{(n_3 - n_2)}$$

Nous obtenons

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_3}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} + \frac{(n_3 - n_2)}{r_2} \quad (1.53)$$

Nous appelons distance focale d'une lentille mince l'expression de  $f_n$

$$\frac{1}{f_n} = \frac{(n_2 - n_1)}{r_1} + \frac{(n_3 - n_2)}{r_2} \quad (1.54)$$

La formule de conjugaison, *formule d'une lentille mince*, devient :

$$\frac{-n_1}{x_o} + \frac{n_3}{x_i} = \frac{1}{f_n} \quad (1.55)$$

*Remarque.*

Cette équation ressemble à l'équation de conjugaison d'une surface sphérique. Le dioptre sphérique a été étudié dans la section (1.4), les distances focales objet et image n'ont pas les mêmes expressions littérales, nous avons en effet

– *distance focale objet*

quand l'image est à l'infini, l'objet est placé au foyer dont l'abscisse est  $x_{of}$ .

$$x_{of} = -n_1 f_n \quad (1.56)$$

– *distance focale image*

quand l'objet est placé à l'infini devant la lentille, l'image est au foyer image  $F_i$  point sur l'axe ayant l'abscisse  $x_{if}$ .

$$x_{if} = n_3 f_n \quad (1.57)$$

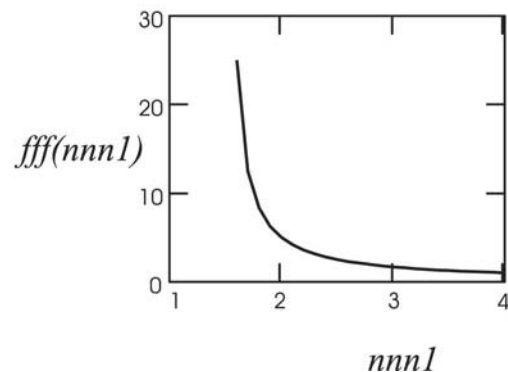
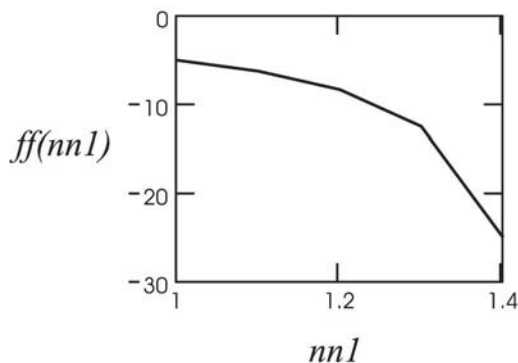
La méthode de construction géométrique des images pour une lentille positive, ou une lentille négative, est similaire à celle que nous avons rencontrée dans l'étude de la surface réfractante sphérique. Nous ne reviendrons donc pas sur cette méthode. Les applications numériques, de calcul de distances focales, peuvent être faites pour différentes valeurs d'indice à partir de l'exemple (OG.14).

**Exemple OG.14.** Nous nous intéressons au cas général, une lentille placée dans deux milieux diélectriques ayant des indices de réfraction différents.

Par exemple le milieu initial est l'air le milieu final est l'eau. Ces milieux sont donc dissymétrique. Étudions les variations des distances focales.

1. Calculons la distance focale d'une lentille mince d'indice  $n_2 = 1$  placée dans l'air, indice  $n_1 = 1$ , rayon de courbure de la première surface  $r_1 = -5$ , de la face de sortie  $r_2 = 5$ ,  $r$  est positif pour une surface convexe, négatif pour une surface concave.
2. Graphe des variations de distance focal  $f = f(n_1)$ ,  $n_2$  reste constant et l'indice  $n_1$  varie. Une singularité apparaît pour  $n_1 = n_2$ , nous l'évitons en étudiant deux cas séparés :
  - quand  $n_1 < n_2 \Rightarrow nn1 = 1, 1.1 \dots n_2 - 0,000\ 01$ .
  - quand  $n_1 > n_2 \Rightarrow nnn1 = n_2 + 0, 1, n_2 + 0, 2 \dots 4, 0$ .

$$ff(nn1) = \frac{1}{\frac{n_2 - nn1}{r_1} + \frac{nn1 - n_2}{r_2}} \quad fff(nnn1) = \frac{1}{\frac{n_2 - nnn1}{r_1} + \frac{nnn1 - n_2}{r_2}}$$



#### Application OG.14

Considérons le cas  $n_2 > n_1$ . Que se passe-t-il quand nous permutons les indices  $n_1$  et  $n_2$ ? L'étudiant étudiera le cas de la lentille positive puis celui de la lentille négative.

## 1.7 Instruments optiques

Les instruments optiques tels que loupe, microscope, lunette et télescope permettent de voir l'image agrandie d'un objet, cette image ayant sensiblement les dimensions de celle que l'on peut observer à l'œil nu. La loupe donne un modeste agrandissement de l'ordre de 10. Le microscope permet de voir des objets de l'ordre de grandeur du micron. Le télescope ou la lunette permet d'agrandir les détails d'objet situés à l'infini. Notre œil est une lentille mince qui peut former d'un objet réel droit, dirigé verticalement vers le haut, une image réelle droite, inversée, donc dirigée vers le bas, comme une lentille positive (fig. 1.11a). Cependant, notre cerveau redresse cette image et nous la voyons de même sens que l'objet, nous devons tenir

compte de cette inversion lors d'une discussion sur un montage optique. Quand nous étudions un microscope, ou un télescope astronomique, le sens de l'image finale n'est souvent pas primordial, peu importe que l'image soit de même sens, ou de sens inverse, que l'objet. Par contre, lors de l'utilisation d'une paire de jumelle, ou d'un périscope, il est impératif que l'image transmise par le cerveau soit de même sens que l'objet.

Nous pouvons déduire, à partir des figures (1.11) et (1.12), une règle simple sur la détermination du sens d'une image : *quand l'image est placée du même côté que l'objet par rapport à l'interface du dioptre ou de la lentille, elle a même sens que l'objet ; quand elle est placée de l'autre côté du système, l'image est inversée.*

### 1.7.1 Système formé par l'association de deux lentilles minces

Soit le montage formé par deux lentilles minces : la première forme une image intermédiaire qui sert d'objet pour la seconde lentille. Il est facile de déduire la position de l'objet intermédiaire par rapport à cette lentille. Nous appliquons donc la relation de conjugaison successivement pour chaque lentille mince (exemple OG.15).

Nous traçons, à partir de l'objet initial, le rayon  $C$  et le rayon  $PF$  pour la première lentille. Nous obtenons donc la position et la grandeur de l'image intermédiaire. Cette image sert d'objet pour la seconde lentille, nous recommençons la construction en ignorant la première lentille : rayon  $C$  et rayon  $PF$ .

#### Grandissement final

Le grandissement du système est le produit du grandissement de chaque lentille mince, c'est-à-dire que nous avons :

grandissement total  $m_t = (\text{grandissement de la première lentille, } m_1) \cdot (\text{grandissement de la seconde lentille, } m_2) \Rightarrow m_t = m_1 m_2$  avec  $m_1 = \frac{x_{i1}}{x_{o1}}$  et  $m_2 = \frac{x_{i2}}{x_{o2}}$

---

#### Exemple OG.15 Étudions un montage de deux lentilles minces et calculons la position de l'image finale.

Les distances focales des lentilles ainsi que la distance comprise entre ces lentilles sont supposées connues.

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application OG.15

##### 1. Distance entre les deux lentilles plus grande que $2f$ .

Un objet est placé à gauche de la première lentille, à la distance  $x_o = -20$ . La distance entre les deux lentilles est  $D = 50$ .

- Calculer la position de l'image finale faite par ce montage.
- Calculer le grandissement du montage.
- Retrouver le résultat par une construction géométrique.

Nous considérons les quatre exemples suivants :

- (a) première lentille  $f_1 = 10$ , seconde lentille  $f_2 = 10$ .
- (b) première lentille  $f_1 = 10$ , seconde lentille  $f_2 = -10$ .
- (c) première lentille  $f_1 = -10$ , seconde lentille  $f_2 = 10$ .
- (d) première lentille  $f_1 = -10$ , seconde lentille  $f_2 = -10$ .

##### 2. Distance comprise entre les deux lentilles plus petite que $2f$ .

Un objet, flèche verticale dirigée vers le haut, est placé à gauche de la première lentille à la distance  $x_o = -20$ , la distance entre les deux lentilles est  $D = 6$ .

- Calculer la position de l'image finale faite par ce montage.
- Calculer le grandissement du montage.
- Retrouver le résultat par une construction géométrique.

Nous considérons les quatre exemples suivants :

1. première lentille  $f_1 = 10$ , seconde lentille  $f_2 = 10$ .
2. première lentille  $f_1 = 10$ , seconde lentille  $f_2 = -10$ .
3. première lentille  $f_1 = -10$ , seconde lentille  $f_2 = 10$ .
4. première lentille  $f_1 = -10$ , seconde lentille  $f_2 = -10$ .

---

### Minimum de vision distincte de l'œil.

Quand nous approchons un objet de plus en plus près de l'œil, son image sur la rétine devient de plus en plus grande. Il existe une distance minimale telle que si l'on approche l'objet en dessous de cette valeur, l'œil ne peut plus accommoder pour former une image sur la rétine car la distance œil-rétine est fixe : nous voyons « *flou* ». Quand l'objet se trouve à cette distance nous disons que nous observons au minimum de vision distincte, la distance correspondante est de  $-25$  cm.

### 1.7.2 Montage grossissant loupe-œil

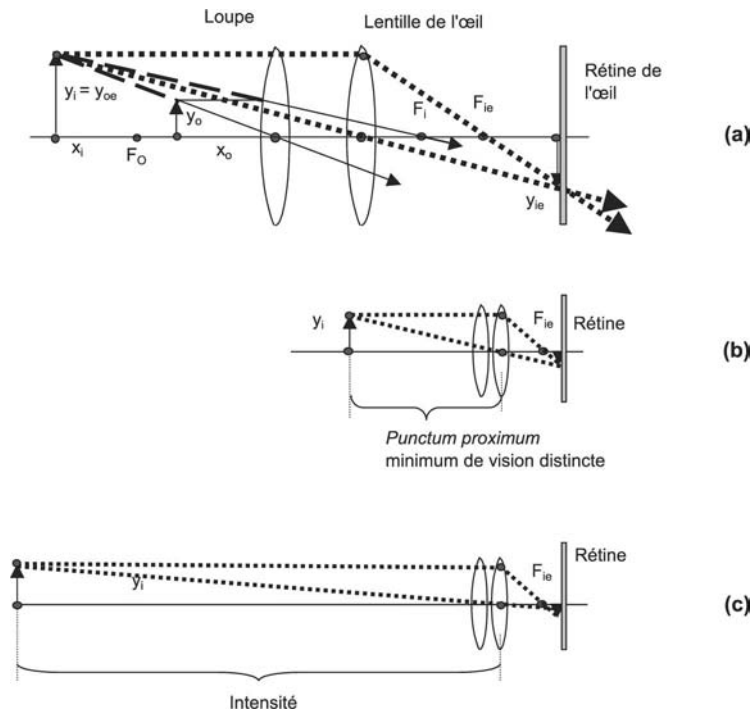
Nous augmentons la taille d'un objet regardé par l'œil par l'utilisation d'une lentille positive : la loupe qui joue le rôle d'agrandisseur. Nous montrons (fig. 1.14) le montage œil-loupe, montage formé par l'association de deux lentilles minces.

#### Étude de la figure 1.14.

Nous voyons que la loupe forme une image virtuelle agrandie de même sens que l'objet. Cette image virtuelle sert d'objet réel pour l'œil qui forme une image réelle sur la rétine et cette image est de sens inverse. Puisque la loupe forme une image intermédiaire de même sens que l'objet initial et que l'image finale est de sens inverse à l'image intermédiaire, l'image finale est donc inversée par rapport à l'objet. Cependant, nous voyons une image droite de même sens que l'objet car le cerveau redresse cette image finale : elle nous paraît donc être de même sens que l'objet. Les limites de vision de l'œil sont comprises entre le minimum de vision distincte et l'infini, en conséquence, nous étudions les deux cas extrêmes suivants :

1. l'image intermédiaire est au *punctum proximum* ;
2. l'image intermédiaire est à l'infini, en fait  $-\infty$ .

Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.16), la distance entre la loupe et l'œil est  $D = 1$  cm. Les valeurs des distances focales sont indiquées.



**Fig. 1.14** – Montage loupe-œil : système grossissant. (a) L'image intermédiaire virtuelle  $y_i$  sert d'objet réel  $Y_o$  pour la lentille de l'œil. L'image finale  $y_{ioe}$ , construite selon les traits pointillés, est reçue inversée sur la rétine, nous la voyons droite de même sens que l'objet (le cerveau inverse le sens des images reçues sur la rétine). (b) L'image intermédiaire est placée au minimum de vision distincte. (c) L'image intermédiaire est placée à  $-\infty$ .

**Exemple OG.16.** Nous utilisons souvent une loupe. Quel est le grossissement du système loupe-œil ?

Commençons par calculer la distance image d'un système formé par une loupe : lentille mince positive et lentille de l'œil, puis nous calculons le grossissement de chaque lentille et le grossissement final.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application OG.16**

Objet situé à une distance de  $x_{o1} = -5$  par rapport à la loupe dont la distance focale est  $f_1 = 6$ . L'œil est placé contre la loupe et nous avons  $D$ , distance comprise entre l'œil et la loupe,  $D = 0$ , distance focale de l'œil :  $f_2 = 1,85$ .

L'étudiant étudiera plusieurs grossissements en prenant successivement plusieurs valeurs de  $x_{o1}$  et de  $f_1$ .

**Image intermédiaire virtuelle et placée au minimum de vision distincte.**

L'image formée par la première lentille est virtuelle mais elle joue le rôle d'un objet réel, droit, de même sens que l'objet initial, pour la seconde lentille, l'œil qui forme l'image finale sur la rétine. Nous supposons que cette image intermédiaire est placée au *punctum proximum* qui est situé à  $-25$  cm.

- Dans une première étape, nous calculons la position de l'objet initial afin d'avoir cette situation : image intermédiaire placée à  $-25$  cm de la lentille de l'œil.
- Dans la seconde étape, nous étudions l'image formée par l'œil.

Le calcul est fait dans l'exemple (OG.17), le grandissement de la loupe est

$$m_1 = \frac{x_{i1}}{x_o} \quad (1.58)$$

et celui de l'œil

$$m_2 = \frac{x_{i2}}{x_{o2}} \quad (1.59)$$

Nous calculons  $m_1$  avec la formule de conjugaison des lentilles minces puisque nous pouvons en déduire  $x_{o1}$  en fonction de  $x_{i1}$  qui est connue :  $x_{i1} = -25$  cm ; dans ce montage  $D = \text{distance œil-loupe} = 0$ , d'où

$$m_1 = \frac{x_{i1}}{x_{o1}} = \frac{x_{i1}}{x_{o1}} = x_{i1}(-1)\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{x_{i1}}\right) = \left(1 - \frac{x_{i1}}{f_1}\right) \quad (1.60)$$

Le grandissement  $m_1$  devient

$$m_1 = 1 + \frac{25}{f_1} \quad (1.61)$$

**Exemple OG.17.** Nous sommes intéressés par une situation limite, celle où l'œil regarde l'image intermédiaire située au minimum de vision distincte ; calculons le grandissement. Nous admettons que  $D = 0$ .

- Première étape :  $f_1 = 12$ , calcul de la position de l'objet initial si nous voulons que l'image soit à  $x_{i1} = -25$ .
- Seconde étape : calcul de  $x_{i2}$  avec  $f_{i2} = 1,85$ .

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application 1.17

Choisir trois valeurs de  $f_1$  et calculer les grandissements.

### Image intermédiaire virtuelle et située à $-\infty$ .

C'est une image virtuelle qui, pourtant, est considérée comme objet réel pour la formation de l'image finale. Nous effectuons le calcul dans l'exemple (OG.18). Nous avons retenu les paramètres suivants :  $f_1 = 12$  et  $x_{i1} = -10^{10}$  qui est une valeur quasi infinie pour notre système.

**Grandissement :** l'application numérique donne  $m_1 = x_{i1}/x_{o1} = 1 - x_{i1}/f_1 = 8,333 \cdot 10^8$ , nombre absurde car nous voyons bien une image de grandeur finie.

Nous devons donc définir un grandissement qui représente *réellement* ce que nous voyons ; au lieu de considérer le grandissement linéaire, nous introduisons le grandissement angulaire appelé grossissement.

**Exemple OG.18.** Maintenant l'image intermédiaire est virtuelle et située à  $-\infty$ . Calculons le grandissement. Nous avons toujours  $D = 0$ .

- Première étape : sachant que l'image formée par la loupe est située à  $-\infty$ , calculons l'abscisse de l'objet initial, nous retenons les paramètres suivants :  $x_{o1} = -10^{10}$ , valeur quasi infinie pour notre système, et  $f_1 = 12$ .  
Résultat : nous trouvons  $x_{o1} = -12$ .



– Seconde étape : nous avons  $x_{o2} = (-\infty)$ ,  $f_2 = 1,85$

Résultat : nous obtenons  $x_{i2} = 1,85$ . Cette valeur est aussi la distance entre la lentille de l'œil et la rétine.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application OG.18**

Choisir trois valeurs de  $f_1$  et calculer les grossissements.

---

**Grandissement linéaire ou grossissement angulaire.**

Nous venons d'avoir un exemple dans lequel le grandissement linéaire est un nombre absurde qui ne correspond pas à la réalité. Nous faisons aussi une approche différente et considérons le grossissement angulaire qui, lui, reste fini. Nous définissons le grossissement angulaire en comparant l'angle sous lequel l'objet est vu à l'œil nu, par rapport à l'angle sous lequel il est vu à travers le système optique (fig. 1.15).

**Convention**

Objet vu à l'œil nu (fig. 1.15a).

Il est convenu de le placer au minimum de vision distincte dont l'abscisse est de  $-25$  cm ; puisque cette distance est la plus petite distance avec laquelle nous pouvons voir un objet, l'angle  $\alpha$  sous lequel cet objet est vu est maximum (fig. 1.15a).

$$\alpha = \frac{y_{o1}}{x_{o1}} = \frac{y_{o1}}{(-25)} \quad (1.62)$$

$$\beta = \frac{y_{i1}}{x_{i1}} = \frac{y_{o1}}{x_{o1}} = y_{o1} \left( \frac{1}{x_{i1}} - \frac{1}{f_1} \right) \quad (1.63)$$

$x_{o1\beta}$  représente la distance de l'objet lors du calcul de l'angle  $\beta$ , nous éliminons  $x_{o1\beta}$  à l'aide de l'équation des lentilles minces.

**Grandissement angulaire ou grossissement.**

Nous le définissons par le rapport  $\beta/\alpha$

$$MP = \frac{\beta}{\alpha} = -25 \left( \frac{1}{x_{i1}} - \frac{1}{f_1} \right) \quad (1.64)$$

Nous étudions deux exemples comme application de cette définition du grossissement :

- celui où l'image intermédiaire est au *punctum proximum* ;
- celui où l'image intermédiaire est à l'infini.

**Image intermédiaire au *punctum proximum*.**

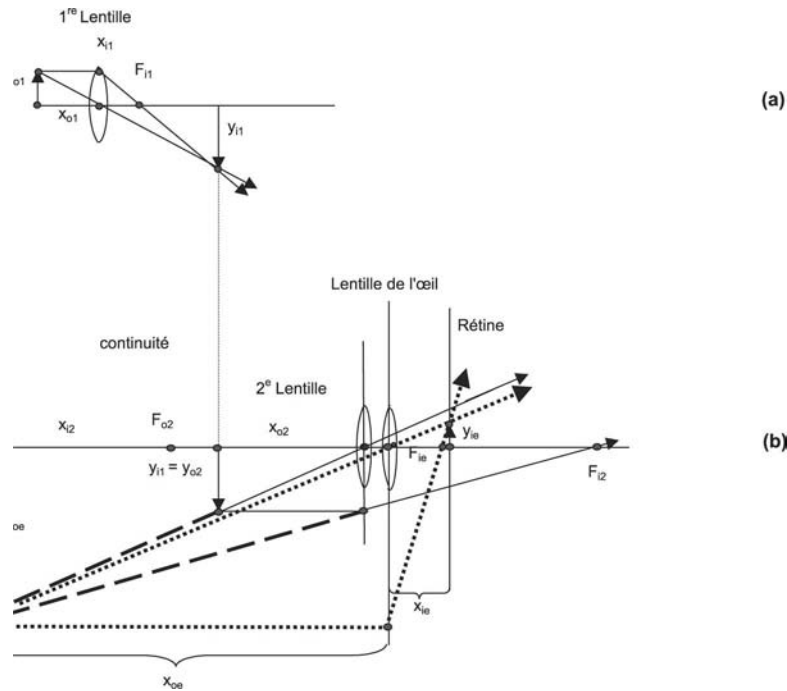
Rappelons que nous avons, dans ce montage  $D = 0$ , l'image intermédiaire joue le rôle d'objet réel pour l'œil :  $x_{o1} = x_{i1} = -25$ . Nous obtenons

$$MP = 1 + \frac{25}{f_1} \quad (1.65)$$

*Remarque*

Cette formule est la même que celle du grandissement calculé précédemment  $m_1 = 1 + \frac{5}{f_1}$  (équation 1.61).





**Fig. 1.16** – Microscope montage formé par trois lentilles : l'objectif, l'oculaire, l'œil. (a) L'objet est placé au voisinage du foyer objet de l'objectif  $L_1$ , son image est  $y_{i1}$ . (b) L'oculaire  $L_2$  et l'œil sont dans une configuration de grandissement sur l'image  $y_{o2}$  produite par  $L_1$ . L'image  $y_{i1}$  sert d'objet pour l'œil qui forme l'image finale  $y_{ie}$  sur la rétine. L'image est droite dirigée vers le haut, en conséquence, nous la voyons dirigée vers le bas.

Notre cerveau redresse les images, l'image finale « vue » sera de même sens que l'objet. Ignorons le rôle de l'œil, la distance comprise entre ces deux lentilles est de 16 cm, c'est une distance standard dans tous les exemples.

Calculons donc les caractéristiques de ce système. La distance comprise entre les deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$ , formant l'objectif et l'oculaire est :  $16 + f_1 - x_{o2}$ .

#### Grandissement.

Le grandissement final est le produit du grandissement  $m_1$  de l'objectif par le grandissement  $m_2$  de l'oculaire. Nous étudions les deux cas extrêmes :

- configuration où l'image intermédiaire est au minimum de vision distincte ;
- configuration où l'image intermédiaire est à l'infini.

*Configuration du minimum de vision distincte :*

*Calcul du grandissement.*

Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.19). Nous avons retenu les valeurs numériques suivantes :  $f_1 = 2\text{cm}$ ,  $x_{i1} = 16 + f_1$ ,  $f_2 = 6\text{ cm}$ , et  $x_{i2} = -25\text{ cm}$ , le grandissement devient

$$m = m_1 m_2 = \left(\frac{x_{i1}}{x_{o1}}\right) \left(\frac{x_{i2}}{x_{o2}}\right) = -41,34 \quad (1.67)$$

Le signe négatif signifie que l'image est de sens inverse de l'objet.

Dans cet exemple, image au minimum de vision distincte, les expressions du grandissement (linéaire) et du grossissement (angulaire) sont identiques.

*Calcul du grossissement.*

Nous calculons le grossissement avec la relation (1.65), nous utilisons l'équation des lentilles minces afin d'éliminer  $x_{o1}$  Nous obtenons

$$\begin{aligned} MP &= m_1 m_2 = x_{i1}(-1)\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{x_{i1}}\right)x_{i2}(-1)\left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{x_{i2}}\right) \\ &= \left(1 - \frac{[16 + f_1]}{f_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{f_2}\right) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Négligeons  $f_1$  par rapport à 16, il vient

$$MP \approx \left(1 - \frac{16}{f_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{25}{f_2}\right) = -36,17 \quad (1.69)$$

Le signe (-) nous indique que nous voyons une image inversée par rapport à l'objet.

**Exemple OG.19. Étudions le microscope quand l'image intermédiaire est au minimum de vision distincte, calculons le grossissement angulaire.**

Nous constatons que l'objet est placé au voisinage du foyer objet de l'objectif quand l'image fournie par  $L_1$  est à -25 cm de l'œil.

Objectif :  $f_1 = 2$  cm,  $x_{i1} = +16$  cm, nous obtenons  $x_{o1} = -2,25$  cm.

Oculaire : il est placé dans la configuration minimum de vision distincte

$f_2 = 6$  cm,  $x_{i2} = -25,008$  cm,  $x_{o2} = -4,839$  cm.

Nous calculons le grandissement puis le grossissement angulaire.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application 1.19**

Calculer le grandissement et le grossissement pour différentes valeurs de  $f_1$  et  $f_2$ .

**Configuration de l'image finale virtuelle située à  $(-\infty)$ , calcul du grandissement, calcul du grossissement.**

*Calcul du grandissement.*

L'image intermédiaire est virtuelle et placée au foyer image de l'oculaire, mais elle sert d'objet réel pour l'oculaire et  $x_{i2} = -\infty$  (exemple OG.20). Les paramètres retenus sont :

$f_1 = 2$  cm,  $x_{i1} = 16 + f_1$ ,  $f_2 = 6$  cm, et  $x_{i2} = -10^{10}$  cm.

Le grandissement  $m = \left(\frac{x_{i1}}{x_{o1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{i2}}{x_{o2}}\right) = -1,333 \cdot 10^{10}$  est un nombre qui ne correspond pas à la réalité.

*Calcul du grossissement.*

Quand l'image intermédiaire est au minimum de vision distincte, le grossissement a pour expression  $MP = \left(1 - \frac{[16+f_1]}{f_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{25}{f_2}\right)$ . Le deuxième facteur change d'expression quand cette image intermédiaire est à l'infini  $(-\infty)$ , nous obtenons

$$MP = \left(1 - \frac{[16 + f_1]}{f_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{25}{f_2}\right) = -33,333 \quad (1.70)$$

Nous pouvons négliger 1 devant  $\frac{16}{f_1}$  d'où

$$MP = -\left(\frac{16}{f_1}\right) \cdot \left(\frac{25}{f_2}\right) = -29,167 \quad (1.71)$$

**Exemple OG.20. Étude du microscope, configuration infinie : calcul du grandissement.**

L'image finale, formée par le système objectif et oculaire, est virtuelle et à l'infini, c'est-à-dire que  $x_{2i} = -\infty$ .

Objectif  $f_1 = 2 \text{ cm}$ ,  $x_{i1} = +16 \text{ cm}$

Résultat  $x_{o1} = -2,25 \text{ cm}$

Oculaire :  $f_2 = 6 \text{ cm}$ ,  $x_{i2} = -10^{10} \text{ cm}$

Résultat  $x_{o2} = -6 \text{ cm}$

Nous calculons le grandissement puis le grossissement en négligeant  $f_1$  devant les autres paramètres.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application 1.20**

Calculer le grandissement et le grossissement pour différentes valeurs de  $f_1$  et  $f_2$ .

---

**Grossissement commercial des microscopes**

Le grossissement de l'objectif d'un microscope est indiqué, dans le commerce, sous la forme  $Gx$ , grossissement multiplié par  $x$  comme il était indiqué lors de l'étude de la loupe.

Prenons l'exemple précédent, le grossissement est donné par la relation  $G = (\frac{16}{f_1}).(\frac{25}{f_2})$ . Si nous choisissons  $f_1 = 2$ ,  $f_2 = 6$ , l'inscription  $8x$  sera gravée sur l'objectif, et  $4x$  sur l'oculaire, le grossissement final est donc  $32x$ .

**1.7.4 Lunette astronomique****Lunette astronomique de Képler**

L'objectif, la première lentille  $L_1$ , forme d'un objet situé à grande distance une image réelle inversée et située au voisinage du foyer image (fig. 1.17), l'oculaire qui est la deuxième lentille  $L_2$ , lentille grossissante, joue le rôle d'une loupe. Cette image intermédiaire est placée au voisinage du foyer objet de la deuxième lentille qui en forme une image virtuelle à  $-\infty$ . Nous sommes donc dans la configuration où l'œil regarde à l'infini et forme l'image finale sur la rétine. Cette image est droite, de même sens que l'objet, mais puisque notre cerveau inverse les images, nous la voyons de sens contraire à l'objet (exemple OG.21).

*Grandissement.*

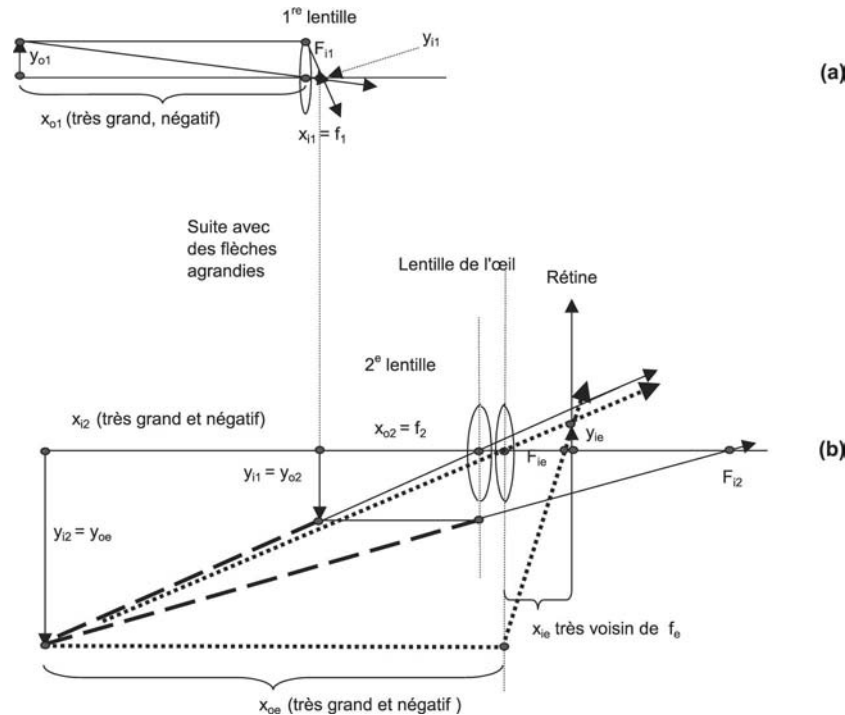
$$m = \left(\frac{x_{i1}}{x_{o1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{i2}}{x_{o2}}\right) \quad (1.72)$$

$m_1 = \frac{x_{i1}}{x_{o1}}$  valeur voisine de  $\frac{f_1}{x_{o1}}$ , car l'image intermédiaire est située au voisinage du foyer image de  $L_1$ .

$m_2 = \frac{x_{i2}}{x_{o2}}$  valeur voisine de  $\frac{-x_{i2}}{f_2}$ , car l'objet est situé pour  $L_2$  au voisinage du foyer objet.

Puisque  $x_{o1}$  et  $x_{i2}$  sont tous les deux à une distance très grande ou à l'infini, le rapport  $\frac{x_{i2}}{x_{o1}}$  est égal à l'unité  $\frac{x_{o1}}{x_{i2}} = 1$ , le grandissement devient

$$m = m_1 m_2 = -\frac{f_1}{f_2} \quad (1.73)$$



**Fig. 1.17** – Lunette de Képler. L'objet est quasiment à l'infini,  $L1$  en forme l'image  $y_{i1}$  au voisinage du foyer  $F_{i1}$  et  $x_{i1} = f_1$ . (a) l'image  $y_{i1}$  joue le rôle d'objet pour l'oculaire  $L2$  qui sert de loupe à l'œil, *configuration de grandissement*, l'image virtuelle formée par l'oculaire est à  $y_{i2} = y_{oe}$  et  $x_{oe} = -\infty$ . (b) L'image finale formée par l'œil est placée sur la rétine, elle est droite, nous la voyons dirigée vers le bas. La longueur de la lunette est approximativement  $L = f_1 + f_2$ .

*Remarque.*

Nous obtenons donc une grande valeur du grandissement en choisissant un objectif de grande distance focale  $f_1$ , et un oculaire de très petite distance focale  $f_2$ . La première condition fait qu'un télescope ou une lunette a des dimensions très longues.

Puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont positives, le signe  $-$  montre que le grandissement est négatif : nous voyons une image de sens inverse à l'objet. Si l'objet est dirigé vers le haut, l'image est dirigée vers le bas.

**Exemple OG.21. Lunette de Képler, système de deux lentilles positives, calcul du grandissement.**

L'objet  $x_{o1}$  et l'image finale  $x_{i2}$  sont à grande distance, voir à  $-\infty$ . Le grandissement calculé à partir de la formule classique des lentilles minces :  $m = (\frac{x_{i1}}{x_{o1}}) \cdot (\frac{x_{i2}}{x_{o2}})$  donne le même résultat que celui calculé à partir de :  $m = (m_1) \cdot (m_2) = (\frac{-f_1}{f_2})$ .

Lentille  $L_1$  :  $f_1 = 30$ ,  $x_{o1} = -10^{10}$ ,  $x_{i2} = 30$ .

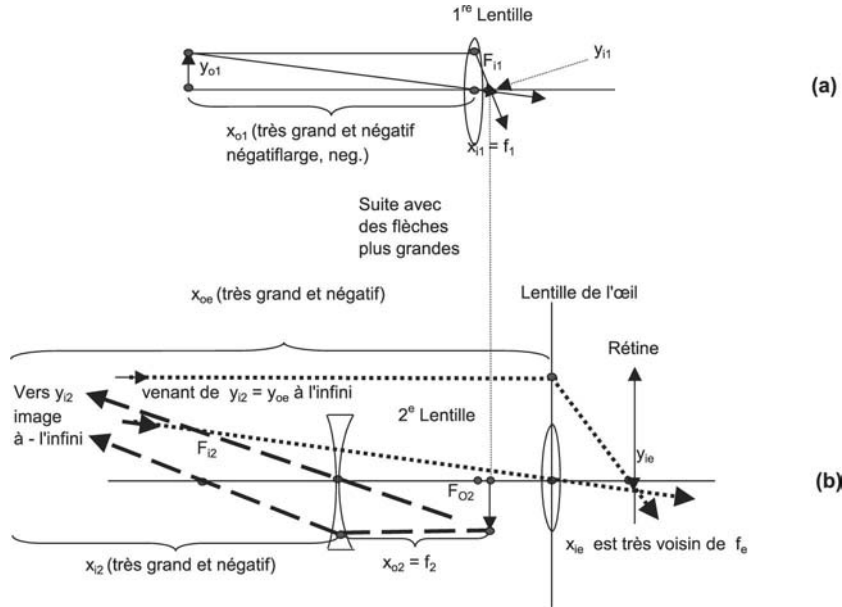
Lentille  $L_2$  :  $f_2 = 6$ , distance  $a = f_1 + f_2$ ,  $x_{i2} = -10^{10}$ ,  $x_{o2} = -6$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**application OG.21**

Étudier le grandissement pour différentes valeurs de  $f_1$  et  $f_2$  choisies afin que ces grandissements aient les valeurs 2 puis 4. Faire un schéma.

## Lunette astronomique de Galilée.



**Fig. 1.18** – Lunette de Galilée. L'objet est à quasi  $-\infty$ ,  $L_1$  en forme l'image  $y_{i1}$  au voisinage du foyer  $F_{i1}$  et  $x_{i1} = f_1$ . L'image  $y_{o1}$  virtuelle, inverse, sert d'objet pour l'oculaire  $L_2$  qui joue le rôle de loupe pour l'œil, « configuration de grandissement », l'image virtuelle droite, formée par l'oculaire est à  $x_{i2} = -\infty = x_{oe}$ . L'image finale formée par l'œil est placée sur la rétine. Elle est inversée, dirigée vers le bas, nous la voyons donc dirigée vers le haut, dans le même sens que l'objet.

L'objectif  $L_1$  est une lentille positive, l'oculaire  $L_2$  est une lentille négative. La lunette forme l'image d'un objet réel situé à grande distance, quasi-infini (fig. 1.18a). L'objectif forme, de l'objet réel, une image inverse réelle placée au voisinage du foyer image. Cette image intermédiaire sert d'objet virtuel pour l'oculaire qui forme une image finale virtuelle de même sens que l'objet initial (fig. 1.18b). Cette image finale virtuelle est droite, c'est un objet réel pour l'œil qui forme une image réelle sur la rétine. Cette image est inversée par rapport à l'objet initial, cependant, puisque le cerveau redresse les images, nous la percevons droite, de même sens que l'objet initial. Les calculs figurent dans l'exemple (OG.22).

**Grandissement**

$$m = \left(\frac{x_{i1}}{x_{o1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{i2}}{x_{o2}}\right) \quad (1.74)$$

- $m_1 = \frac{x_{i1}}{x_{o1}}$  valeur voisine de  $\frac{f_1}{x_{o1}}$  car l'image formée par l'objectif est située au voisinage du foyer image.
- $m_2 = \frac{x_{i2}}{x_{o2}}$ , valeur voisine de  $\frac{-x_{i2}}{f_2}$ , l'objet est situé au voisinage du foyer objet de cette deuxième lentille (l'oculaire), lequel est (dans une lentille négative) situé à droite de la lentille,  $f_2$  est négatif.

Puisque  $y_{o1}$  et  $y_{i2}$  sont tous les deux à une distance très grande, ou à l'infini, le rapport  $\frac{x_{i2}}{x_{o1}}$  est égal à l'unité  $\frac{x_{o1}}{x_{i2}} = 1$ ; le grandissement devient

$$m = m_1 m_2 = -\frac{f_1}{f_2} \quad (1.75)$$

*Remarque.*

Le grandissement est positif, de même sens que l'objet initial, car  $f_2$  est négatif. ainsi, l'image finale est vue dans le même sens que l'objet, elle est droite. La lunette de Galilée est utilisée dans beaucoup d'applications terrestres : au théâtre, à la montagne, sur un navire...

**Exemple OG.22. Lunette de Galilée, montage formé par deux lentilles, la première est positive de grande distance focale, la seconde est négative.**

$x_{o1}$  et  $x_{i2}$  ont des grandes valeurs négatives, en conséquence, nous les prenons égales :  $x_{o1} = x_{i2}$ . Le grandissement est calculé à l'aide de la formule classique  $m = (\frac{x_{i1}}{x_{o1}})(\frac{x_{i2}}{x_{o2}})$ , ce qui donne  $m = m_1 m_2 = -\frac{f_1}{f_2}$ . (Remarquons que le grandissement ici est positif.)

Lentille  $L_1$  :  $f_1 = 30$ ,  $x_{o1} = -10^{10}$ ,  $x_{i1} = 30$ .

Lentille  $L_2$  :  $f_2 = -29,99$ ,  $x_{i2} = -9 \cdot 10^4$ ,  $x_{o2} = 30$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application OG.22**

Calculer le grandissement et le grossissement pour différentes valeurs de  $f_1$  et  $f_2$ .

## 1.8 Formulation matricielle de la réfraction par les dioptries sphériques

### 1.8.1 Matrice de réfraction, matrice de translation

Une lentille épaisse est constituée par deux surfaces sphériques séparées par un milieu diélectrique. Dans l'étude d'une lentille mince, nous négligeons la distance entre les deux dioptries sphériques. Maintenant, nous devons tenir compte de cette distance. Établissons les caractéristiques de l'image finale, nous calculons l'abscisse de l'image établie par la première surface, cette image sert d'objet pour la seconde surface. Nous appliquons une deuxième fois la formule des dioptries sphériques et nous obtenons le résultat cherché. Nous pouvons appliquer cette méthode à l'étude d'un montage formé par plusieurs lentilles minces ou épaisses. Nous représentons (fig. 1.19) un tel montage. Cependant, nous allons montrer que nous pouvons appliquer, simplement, l'équation des lentilles minces, mais dans ce cas, l'abscisse de l'objet et celle de l'image ne sont plus mesurées par rapport aux faces d'entrée et de sortie du système. Les abscisses sont mesurées à partir des plans principaux dont nous déterminerons la position. Pour cela, nous nous intéressons, d'abord, à l'étude de la réfraction par un dioptre sphérique (fig. 1.20).

Nous désirons décrire la réfraction par une opération transformant le système de coordonnées de l'objet en système de coordonnées de l'image. Nous verrons que cette transformation peut être réalisée par une matrice carrée d'ordre deux, appelée *matrice de réfraction*.

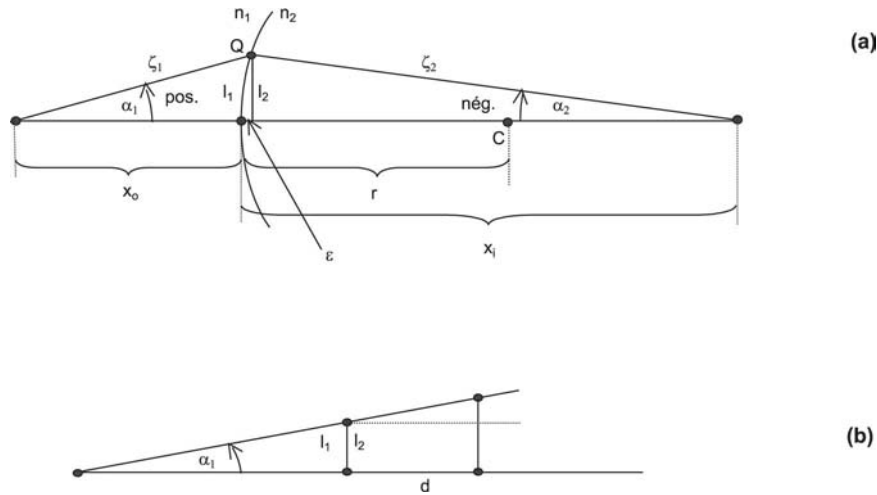
Puis nous définirons la matrice de translation caractérisant la transformation du rayon lors de son déplacement de la première surface vers la seconde surface d'un montage. Dans le cas où cette seconde surface est à nouveau un dioptre sphérique, nous définirons la nouvelle matrice de réfraction. Cette méthode est générale, nous pouvons définir la matrice de réfraction ou de réflexion de toute surface réfractante ou réfléchissante. Nous verrons que cette méthode est applicable à l'étude des lentilles épaisses ou à un système de lentilles épaisses. Nous utiliserons des matrices carrées d'ordre deux : deux lignes et deux colonnes, pour décrire tous les processus de réfraction, de translation, de réflexion. Nous dérivons ces matrices à partir de la théorie



paraxiale, nous écrivons les coordonnées de deux paramètres : la hauteur du rayon incident sur la surface réfractante et l'angle que fait ce rayon par rapport à l'axe de symétrie (fig. 1.20a).



**Fig. 1.19** – Montage optique, les lentilles ont différents rayons de courbure, elles peuvent aussi avoir des indices différents.



**Fig. 1.20** – Coordonnées pour le calcul matriciel. (a) Les coordonnées  $\alpha_1, l_1$  définissent le vecteur  $I_1(l_1, \alpha_1)$ , de même  $\alpha_2, l_2$  caractérise  $I_2(l_2, \alpha_2)$ . (b) Définition de la translation en fonction de  $d, \alpha_1, l_1, l_2$ .

Construisons maintenant la matrice de réfraction  $R$ , et la matrice de translation  $T$ . Écrivons la transformation en vecteur, dans le plan de l'objet, des coordonnées initiales de l'objet, (index 1), écrivons l'opération conduisant au vecteur représentant les coordonnées de l'image, dans le plan image, (index 2). Nous partons de l'équation de réfraction d'une surface réfractante

$$-\frac{n_1}{x_o} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.76)$$

Nous introduisons les angles  $\alpha$  et les hauteurs  $l$  ( fig. 1.20a).

Pour l'objet ( index 1)

$\alpha_1$  = angle que fait le rayon incident par rapport à l'axe.

$l_1$  = hauteur du rayon incident sur la surface initiale du système optique.

Pour l'image (index 2)

$\alpha_2$  = angle que fait le rayon final par rapport à l'axe.

$l_2$  = hauteur du rayon incident sur la surface de sortie du système optique.

L'équation précédente s'écrit

$$n_1\left(\frac{\alpha_1}{l_1}\right) + n_2\left(-\frac{\alpha_2}{l_2}\right) = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.77)$$

Nous avons de plus

$$l_1 = l_2 \quad (1.78)$$

Les coordonnées de l'objet deviennent les composantes d'un vecteur  $I_1$ , il en est de même pour les coordonnées de l'image, vecteur  $I_2$ .

$$I_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Nous écrivons les équations (1.77) et (1.78) en notation matricielle

$$\begin{pmatrix} l_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\frac{1}{r})\frac{(n_2-n_1)}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en effectuant ce produit matriciel, nous retrouvons les équations (1.76) et (1.78). En notation symbolique, nous écrivons la matrice précédente sous la forme

$$I_2 = R_{12}I_1$$

La matrice  $R_{12}$  est appelée : matrice de réfraction d'une surface sphérique ou matrice de réfraction du dioptré sphérique. Son expression est

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\frac{1}{r})\frac{(n_2-n_1)}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

### Matrice de réfraction d'une surface plane : matrice du dioptré plan.

Il suffit de faire tendre le rayon de courbure vers l'infini, et nous obtenons la matrice de réfraction  $R_P$  du dioptré plan.

$$R_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

### Matrice de translation T.

Soit un rayon allant du point a au point B dans un milieu homogène. L'angle que fait ce rayon par rapport à l'axe de symétrie est  $\alpha$ . Nous désignons par  $d$  la distance comprise entre deux plans verticaux perpendiculaires à l'axe et passant par a et B (fig. 1.20b). La matrice de translation représente la translation d'un plan vertical passant par a au plan vertical passant par B sur une distance  $d$ , nous écrivons que la hauteur ( $l_2$ ) de B par rapport à l'axe est égale à la hauteur ( $l_1$ ) du point a plus  $\alpha_1 d \Rightarrow l_2 = l_1 + \alpha_1 d$ .

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

### 1.8.2 Matrice de deux surfaces sphériques distantes de $d$ : matrice d'une lentille épaisse et plans principaux

#### Matrice d'une lentille épaisse.

Nous obtenons la matrice d'une lentille épaisse à partir de deux matrices ayant différentes caractéristiques : celle d'une surface sphérique et la matrice de translation. Nous écrivons que la matrice finale est le produit de trois matrices : matrice de la première surface sphérique multipliée par la matrice de translation correspondant à l'épaisseur de la lentille, multipliée par la matrice de la deuxième surface sphérique.

Bien entendu, nous supposons toujours que la lumière vient de la gauche et se dirige vers la droite. *La multiplication des matrices se fait de la droite vers la gauche, dans le sens inverse de la succession des réfractions et translations.*

Résumons les opérations à effectuer successivement.

- Première transformation : réfraction sur la première surface  $\Rightarrow$  *matrice de droite*.
- Deuxième transformation : translation entre les deux surfaces  $\Rightarrow$  *matrice du milieu*.
- Troisième transformation : réfraction sur la deuxième surface  $\Rightarrow$  *matrice de gauche*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_2} \frac{(n_2 - n_3)}{n_3} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} \frac{(n_2 - n_1)}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

La matrice d'une lentille épaisse d'épaisseur  $d$ , dont les faces n'ont pas le même rayon de courbure, est le produit de trois matrices : nous étudions ce produit dans l'exemple (OG.23). Le produit de ces trois matrices donne la matrice caractéristique d'une lentille épaisse. Il est utile d'introduire quelques abréviations symboliques.

*Puissance d'un système optique* : nous posons  $P = -\frac{1}{f}$ ,  $f$  étant la distance focale et  $P$  la puissance réfractante du système.

La puissance du premier dioptré sphérique sera  $P_{12} = -\frac{1}{f_1}$ ,  $f_1$  désigne la distance focale de cette première surface sphérique.

La puissance du deuxième dioptré sphérique sera  $P_{23} = -\frac{1}{f_2}$ ,  $f_2$  désigne la distance focale de cette deuxième surface. Le produit des trois matrices est une matrice carrée, d'ordre deux, qui est la matrice de la lentille épaisse, nous désignons par  $f$  sa distance focale. Les puissances réfractantes sont définies par

$$P_{12} = -\left(\frac{1}{r_1}\right) \frac{(n_2 - n_1)}{n_2} \quad (1.85)$$

$$P_{23} = -\left(\frac{1}{r_2}\right) \frac{(n_3 - n_2)}{n_3} \quad \text{et} \quad (1.86)$$

$$P = -\frac{1}{f} = P_{23} + dP_{12}P_{23} + \left(\frac{n_2}{n_3}\right)P_{12} \quad (1.87)$$

La matrice d'une lentille épaisse s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 + dP_{12} & d\frac{n_1}{n_2} \\ P & d\left(\frac{n_1}{n_2}\right)P_{23} + \left(\frac{n_1}{n_3}\right) \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

---

**Exemple OG.23. Calcul du produit des trois matrices définissant une lentille épaisse.**  
Soit  $d$  l'épaisseur de la lentille. La lumière est issue d'un milieu d'indice  $n_1$ , la lentille a l'indice  $n_2$  et

le milieu final a l'indice  $n_3$ .

Établissons la matrice d'une lentille mince à partir des matrices de deux dioptries sphériques séparés par une distance  $d$ .

Nous utilisons la notation  $P12 = \left(\frac{-1}{r1}\right)\frac{(n2-n1)}{n2}$   $P23 = \left(\frac{-1}{r2}\right)\frac{(n3-n2)}{n3}$

Matrices successives définissant une lentille épaisse.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P23 & \frac{n2}{n3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P12 & \frac{n1}{n2} \end{bmatrix}$$

Effectuons ce produit, nous obtenons la matrice  $\begin{bmatrix} 1 + d \cdot P12 & d \cdot \frac{n1}{n2} \\ (P23 \cdot n3 + P12 \cdot P23 \cdot d \cdot n3 + P12 \cdot \frac{n2}{n3}) & \frac{(P23 \cdot d \cdot n3 + n2)}{n3} \cdot \frac{n1}{n2} \end{bmatrix}$   
matrice d'une lentille mince : nous prenons  $d = 0$  d'où

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P23 & \frac{n2}{n3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ P12 & \frac{n1}{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(P23 \cdot n3 + P12 \cdot n2)}{n3} & \frac{1}{n3} \cdot n1 \end{bmatrix}$$

Puisque la lentille est placée dans l'air :  $n3 = 1 = n1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (P23 + P12 \cdot n2) & 1 \end{bmatrix}$$

Posons :  $P = (P23 + P12 \cdot n2)$  et  $P = \frac{-1}{f}$  ;  $f$  est la distance focale de la lentille

$$\frac{1}{f} = - \left[ \left(\frac{-1}{r2}\right)(1 - n2) + \left(\frac{-1}{r1}\right)(n2 - 1) \right]$$

la matrice d'une lentille mince placée dans l'air s'écrit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

## Étude des matrices des lentilles minces placées dans l'air

La matrice d'une lentille mince est dérivée de la matrice d'une lentille épaisse en faisant simplement  $D = 0$ . Le cas où la lentille est placée dans un milieu symétrique s'obtient en faisant  $n_1 = n_3$ .

Matrice d'une lentille épaisse, ou mince, placée dans l'air.

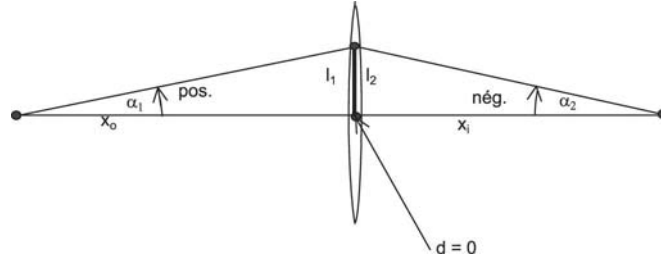
Il suffit d'écrire  $n_1 = n_3 = 1$ , nous posons  $n = n_2 =$  indice de la lentille. Partons de la matrice d'une lentille épaisse et faisons  $d = 0$ , ce que nous représentons sur la figure (1.21). L'équation (1.88) se réduit à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{23} + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)P_{12} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

La lentille est placée dans l'air (fig. 1.21), et  $n_1 = n_3 = 1$ . Nous avons  $P_{23} + \left(\frac{n_1}{n_3}\right)P_{12} = -\frac{(1-n_2)}{r_2} - \frac{(n_2-1)}{r_1} = -\frac{1}{f}$ . Introduisons ces relations dans l'équation (1.89), puis écrivons la matrice des coordonnées vectorielles similaires à l'équation (1.80), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

Nous désignons les composantes de cette matrice par  $M_{0,0}, M_{0,1}, M_{1,0}$  et  $M_{1,1}$ . Revenons aux coordonnées similaires à celles des équations (1.77) et (1.78), nous trouvons que l'équation



**Fig. 1.21** – Matrice d’une lentille mince. Choix des coordonnées.

(1.90) est une autre représentation de l’équation de conjugaison des lentilles minces. En effet, développons la matrice, effectuons la multiplication matricielle. Nous obtenons

$$\begin{aligned} l_2 &= l_1 \\ \alpha_2 &= -\frac{l_1}{f} + \alpha_1 \end{aligned} \quad (1.91)$$

Selon la figure (1.21), nous avons les relations :  $\alpha_2 = -\frac{l_1}{x_i}$ , et  $\alpha_1 = -\frac{l_1}{x_o}$ . La relation (1.91) devient

$$\frac{l_1}{(-x_o)} + \frac{l_1}{x_i} = \frac{l_1}{f} \quad (1.92)$$

qui est l’équation de conjugaison d’une lentille mince (placée dans l’air).

#### Distance focale.

Quand, dans une matrice, les éléments (0,0) et (1,1) sont respectivement égaux à 1 et que l’élément (0,1) est égal à 0, l’élément (1,0) est :  $-\frac{1}{f} = P_{23} + (n_2/n_1)P_{12}$  d’où la distance focale d’une lentille mince placée dans l’air  $-\frac{1}{f} = -\frac{(1-n_2)}{r_2} - \frac{(n_2-1)}{r_1}$ .

#### Conclusion.

Nous avons montré, par cet exemple, comment la matrice du système permet de déduire la relation entre la position de l’objet et la position de son image. Cette méthode permet d’obtenir la relation objet  $\Rightarrow$  image :  $x_o$  et  $x_i$  sont mesurés à partir des surfaces des lentilles minces et la distance focale de l’équation de conjugaison est l’élément (1,0) de la matrice caractéristique.

#### Matrice d’une lentille épaisse, définition des plans principaux.

La matrice d’une lentille épaisse (équation 1.88) est très différente de celle d’une lentille mince car les éléments (0,0) et (1,1) ne sont pas égaux à 1 et l’élément (0,1) n’est pas nul. Il est donc nécessaire d’effectuer, sur ces éléments, une transformation afin d’obtenir une matrice analogue à celle d’une lentille mince de la forme (1.90).

Nous effectuons un changement de coordonnées et deux translations. Les coordonnées de l’objet avaient pour origine le plan tangent au sommet de la première surface sphérique, les coordonnées des images avaient comme origine des coordonnées la surface sphérique de sortie. Maintenant, le centre de coordonnées du système objet est translaté d’une distance «  $-h$  » par rapport à la face d’entrée de la lentille. Le plan de référence des images est translaté à partir de la face de sortie de «  $+h$  ». Nous repérons donc  $x_o$  à partir du plan d’abscisse

«  $-h$  » et  $x_i$  à partir du plan d'abscisse «  $+hh$  ». Nous introduisons donc deux matrices de translation. L'entrée symbolique de notre système est le point d'abscisse «  $-h$  ». La sortie symbolique est le point d'abscisse «  $+hh$  » par rapport à la face droite de la lentille. Nous avons déplacé l'origine des abscisses d'entrée et de sortie à partir desquelles nous mesurons  $x_{01}$  et  $x_{i1}$ . L'équation (1.88) est la matrice centrale du produit des trois matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + dP_{12} & d(\frac{n_1}{n_2}) \\ P & d(\frac{n_1}{n_2})P_{23} + \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

Nous réécrivons la matrice centrale avec les conventions ci-dessous

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

La multiplication est détaillée dans l'exemple (OG.24). Le résultat est

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} + hhM_{1,0} & -M_{0,0}h + M_{0,1} + hh(-M_{1,0}h + M_{1,1}) \\ M_{1,0} & -M_{1,0}h + M_{1,1} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

### Plans principaux.

Nous posons

$$\begin{aligned} M_{0,0} + hhM_{1,0} &= 1 \\ -M_{1,0}h + M_{1,1} &= 1 \end{aligned}$$

ce qui permet de calculer  $h$  et  $hh$ . Nous reportons ces expressions de  $h$  et  $hh$  dans l'élément (0,1) de la matrice 1.95 afin de vérifier que l'élément (0,1) de la matrice est nul. Nous obtenons

$$[-M_{0,0}h + M_{0,1} + hh(-M_{1,0}h + M_{1,1})] = 0$$

Nous retrouvons ce résultat dans l'exemple (OG.24).

La matrice finale est donc identique à celle de l'équation (1.89) (exemple OG.24). De plus nous avons :  $P = -1/f = M_{1,0}$ .

*Remarques.*

- Dans cette transformation translation de changement de coordonnées, l'élément  $M_{10}$  reste inchangé.
- Le plan P passant par le point  $-h$  est appelé plan principal objet.
- Le plan P' passant par le point  $hh$  est le plan principal image. Ces deux plans sont conjugués, c'est-à-dire, l'un est l'image de l'autre.
- La distance focale de la lentille épaisse est donnée par l'élément (1,0).

*Résumé des résultats.*

$$hh = \frac{(1 - M_{0,0})}{M_{1,0}} \quad (1.96)$$

$$-h = \frac{(1 - M_{11})}{M_{1,0}} \quad (1.97)$$

$$P = \frac{-1}{f} = M_{1,0} \quad (1.98)$$

---

**Exemple OG.24.** Calcul matriciel : déterminons la position des plans principaux d'une lentille épaisse.

*Transformation symbolique sur les deux surfaces sphériques et nouveaux systèmes de coordonnées  $-h$  et  $hh$ , matrice finale.*

*application numérique. Nous choisissons :*

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 1,5 \quad n_3 = 1 \quad r_1 = 10 \quad r_2 = -10 \quad d = 10.$$

*Cette étude est faite sur le CD.*

---

Nous avons introduit, dans l'étude d'une lentille épaisse, les deux matrices de translation

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

$x_o$  est mesuré à partir de la position du plan principal objet distant de «  $-h$  » à partir de la face d'entrée de la lentille. L'abscisse  $x_i$  est mesurée à partir du plan principal image situé à la distance  $hh$  de la face de sortie de la lentille. Donc les abscisses  $x_o$  et  $x_i$  ne sont pas mesurées à partir des sommets des faces de la lentille.

*Remarque.*

Une lentille mince est caractérisée par les propriétés  $h = hh = 0$ . Les plans principaux sont confondus avec les plans tangents aux faces de la lentille mince. Cette lentille a une épaisseur nulle et les plans principaux se réduisent au plan tangent à la lentille.

Désignons par  $V_1$  l'intersection de la première surface avec l'axe de symétrie, c'est-à-dire le sommet, par  $V_2$  celui de la seconde surface. Nous avons la convention suivante :

- si  $h > 0$ , le point d'origine de l'abscisse objet pour mesurer  $x_o$  est à droite de  $V_1$ ;
- si  $h < 0$ , le point d'origine de l'abscisse objet pour mesurer  $x_o$  est à gauche de  $V_1$ ;
- si  $hh > 0$ , le point d'origine de l'abscisse image pour mesurer  $x_i$  est à droite de  $V_2$ ;
- si  $hh < 0$ , le point d'origine de l'abscisse image pour mesurer  $x_i$  est à gauche de  $V_2$ .

Nous effectuons le calcul dans l'exemple (G.25).

### Conclusions.

Nous partons de la matrice d'une lentille mince, puis calculons la position des plans principaux  $hh = \frac{(1-M_{0,0})}{M_{1,0}}$  et  $-h = \frac{(1-M_{11})}{M_{1,0}}$ .

La distance focale est donnée par l'élément  $P = -\frac{1}{f} = M_{1,0}$ , d'où :  $f = -\frac{1}{M_{1,0}}$ .

L'abscisse objet  $x_o$  est mesurée à partir de  $h$ .

L'abscisse image  $x_i$  est mesurée à partir de  $hh$ .

---

### Exemple OG.25. Calcul symbolique : position des plans principaux.

*Transformation symbolique sur les deux surfaces sphériques et nouveaux systèmes de coordonnées  $-h$  et  $hh$ , matrice finale.*

*application numérique : nous choisissons  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,5$ ,  $n_3 = 1,3$ ,  $r_1 = 120$ ,  $r_2 = -10$ .*

*Cette étude est faite sur le CD.*

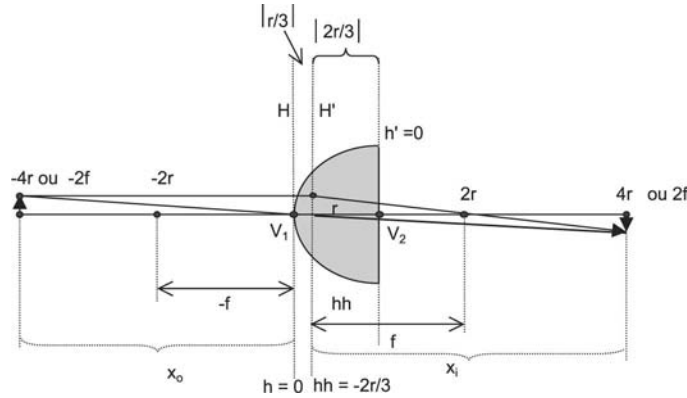
---

### Hémisphère, lentille épaisse.

L'hémisphère est représenté figure (1.22) et nous effectuons les calculs dans l'exemple (OG.26) avec les paramètres suivants :

$n_2 = 1,5$ ,  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $r_1 = 20$ ,  $r_2 = \infty$ . Si nous choisissons  $n_2 = n = 1,5$ ,  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $r_1 = r = d$ ,  $r_2 = \infty$ , hémisphère en verre placée dans l'air, nous trouvons :

$$P_{12} = -\frac{1}{3r}, \quad P_{23} = 0,0, \quad P = -\frac{1}{2r} \Rightarrow f = 2r, \quad h = 0,0, \quad hh = -2\frac{r}{3}.$$



**Fig. 1.22** – Hémisphère formant une lentille épaisse, nous désignons par H et H' les plans principaux.

Les éléments (0,0) et (1,1) de la matrice sont égaux à zéro et l'élément (0,1) est égal à 1.

**Exemple OG.26. Hémisphère en verre placé dans l'air.**

Nous plaçons la surface sphérique à gauche, la face plane est la face de sortie :  $n_2 = 1,5$ ,  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $r_1 = 10 = d$ ,  $r_2 = \infty$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application OG.26**

Maintenant, nous plaçons l'hémisphère avec sa face sphérique à droite. Refaire les calculs.

**Boule en verre placée dans l'air (fig. 1.23).**

Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.27).

$$n_2 = 1,5 = n \quad n_1 = n_3 = 1 \quad r_1 = -r_2 = 10 \quad \text{ici} \quad d = 2r_1 = 20.$$

Résultat.

$$P_{12} = -\frac{1}{3r}, \quad P_{23} = -\frac{1}{2r}, \quad P = \frac{2}{3r}, \quad f = \frac{3r}{2}, \quad h = r, \quad hh = -r.$$

Application numérique : plans principaux.

$r_1 = 10$  d'où :  $h = 10$ ,  $hh = -10$  nous trouvons que les éléments (0,0) et (1,1) sont égaux à zéro, l'élément (0,1) est égal à 1.

Remarques.

- Les plans principaux objet et image sont confondus au centre de la boule.
- L'origine des abscisses objet et image est au centre de la boule, tout se passe comme si nous avions une lentille mince de distance focale  $f = \frac{3r}{2}$ .

**Exemple OG.27. Matrice d'une lentille boule en verre.**

Nous calculons les éléments caractéristiques de cette lentille : distance focale, position des plans principaux.

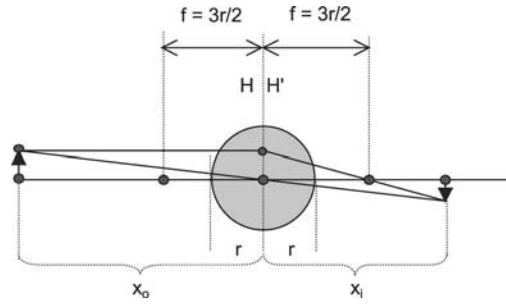
$$n_2 = 1,5, \quad n_1 = n_3 = 1, \quad r_1 = 10, \quad r_2 = -10, \quad d = 20$$

Cette étude est faite sur le CD.

**application OG.27**

Refaire les calculs avec des valeurs numériques différentes





**Fig. 1.23** – Lentille épaisse sphérique : boule en verre.

### 1.8.3 Montage optique formé par un système de lentilles

#### Système de deux lentilles placées dans l'air.

Nous désirons utiliser la méthode matricielle afin de déterminer la position de l'image finale formée par un système optique de deux lentilles placées dans l'air. Tout d'abord nous étudions les caractéristiques du montage formé par deux lentilles minces ayant les distances focales  $f_1$  et  $f_2$ . Soit «  $a$  » la distance comprise entre ces lentilles. La matrice de ce système est le produit de trois matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

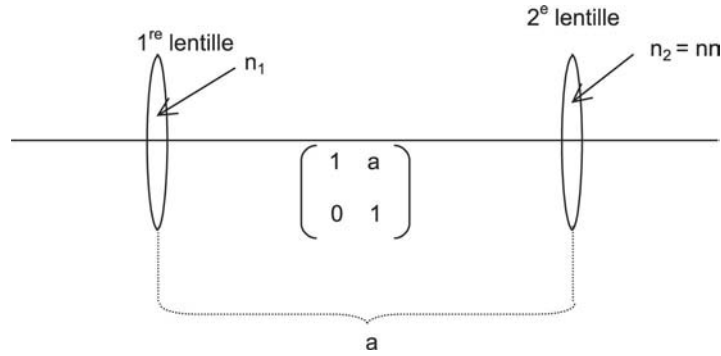
Le produit devient

$$\begin{pmatrix} \frac{(f_1 - a)}{f_1} & a \\ \frac{-(f_1 - a + f_2)}{f_1 f_2} & -\frac{(a - f_2)}{f_2} \end{pmatrix} \quad (1.101)$$

Les éléments  $(0,0)$  et  $(1,1)$  ne sont pas égaux à zéro. L'élément  $(0,1)$  n'est pas égal à 1. Nous devons donc changer de système de référence et introduire les plans principaux.

Nous définissons une nouvelle matrice par le produit des trois matrices suivantes (fig. 1.24).

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{(f_1 - a)}{f_1} & a \\ \frac{-(f_1 - a + f_2)}{f_1 f_2} & -\frac{(a - f_2)}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$



$$\begin{pmatrix} l_3' \\ \alpha_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & hh' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - a/f_1 & a \\ P & 1 - a/f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1' \\ \alpha_1' \end{pmatrix}$$

**Fig. 1.24** – Étude de deux lentilles minces placées dans l'air. Calcul matriciel.

Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.28), le résultat est

$$\begin{aligned} h &= -\frac{a}{Pf_2} \\ hh &= \frac{a}{Pf_1} \\ P &= \left(-\frac{1}{f_2}\right)\left(1 - \frac{a}{f_1}\right) - \frac{1}{f_1} \end{aligned}$$

---

**Exemple OG.28. Matrice d'un système de deux lentilles minces placées dans l'air.**  
*application numérique.* Nous prenons :  $f_1 = 10$ ,  $f_2 = 10$ ,  $a = 100$ , nous calculons la position des plans principaux et la distance focale.  
 Cette étude est faite sur le CD.

---

### Système de deux lentilles épaisses.

Nous désignons par  $n$  l'indice de la première lentille, par  $nn$  l'indice de la seconde. La matrice caractéristique de ce montage est le produit de trois matrices (fig. 1.25).

- À droite, la matrice de la première lentille épaisse.
- Au centre, la matrice de translation. Nous désignons par «  $a$  » la distance entre les faces en regard des deux lentilles.
- À gauche, la matrice de la seconde lentille épaisse, puisque le produit des matrices se fait de droite à gauche.

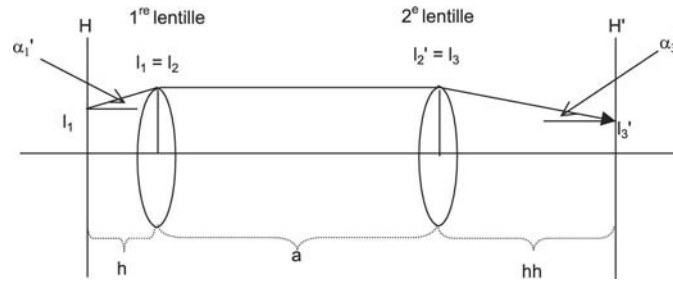
Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.29). Nous obtenons

$$\begin{pmatrix} 1 + d_2 P_{34} & \frac{d_2}{nn} \\ P_2 & d_2 \left( \frac{P_{45}}{nn} \right) + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + d_1 P_{12} & \frac{d_1}{n} \\ P_1 & d_1 \left( \frac{P_{23}}{n} \right) + 1 \end{pmatrix} \quad (1.103)$$

avec

$$\begin{aligned}
 P_{12} &= -\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{(n-1)}{n} \\
 P_{23} &= -\left(\frac{1}{r_2}\right)(1-n) \\
 P_{34} &= -\left(\frac{1}{r_3}\right)\frac{(nn-1)}{nn} \\
 P_{45} &= -\left(\frac{1}{r_4}\right)(1-nn) \\
 P_1 &= P_{23} + P_{12}P_{23}d_1 + P_{12}n \\
 P_2 &= P_{45} + P_{34}P_{45}d_2 + P_{34}nn
 \end{aligned}$$

$r_1, r_2, r_3, r_4$  sont les rayons de courbures des surfaces sphériques.



**Fig. 1.25** – Matrices de deux lentilles épaisses placées dans l'air

### Plans principaux.

Nous désignons par  $M$  la matrice précédente. Nous multiplions cette matrice par deux matrices de translation en respectant la séquence successive de transformation (1.102), les calculs sont indiqués dans l'exemple (OG.29).

$$\begin{pmatrix} 1 & hh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

Nous écrivons que les éléments  $(0,0)$  et  $(1,1)$  sont égaux à 1, d'autre part l'élément  $(0,1)$  est égal à zéro, d'où

$$\begin{aligned}
 h &= -\frac{(1 - M_{1,1})}{M_{1,0}} \\
 hh &= \frac{(1 - M_{0,0})}{M_{1,0}} \\
 \frac{1}{f} &= -M_{1,0}
 \end{aligned}$$

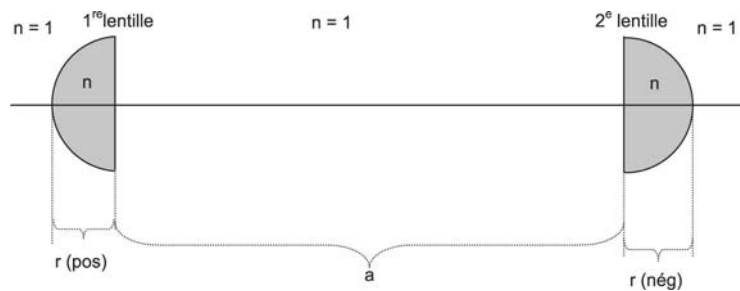
*Calcul de la position de l'image.*

Nous mesurons l'abscisse  $x_o$  à partir de  $h$ , et  $x_i$  à partir de  $hh$ , nous écrivons  $-\frac{1}{f} = P = M_{1,0}$ .

*Cas particulier : la boule en verre.*

Il suffit de considérer, dans l'expression de la matrice finale, que les deux lentilles sont des hémisphères dont les faces planes sont en regard et séparées par une distance  $a = 0$ . Nous représentons (fig. 1.26) les deux hémisphères et nous indiquons leurs matrices respectives ainsi que les puissances réfractantes  $P_{12}$  et  $P_{45}$ . Les calculs sont effectués dans l'exemple (OG.29).

- $a$  = distance entre les deux hémisphères.
- $d = r$  = rayon de courbure = épaisseur d'une lentille.
- $P_{12}$  = puissance réfractante de la première interface sphérique du montage.
- $P_{45}$  = puissance réfractante de la dernière face réfractante sphérique du système.



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{34} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P_{12} & 1/n \end{pmatrix}$$

**Fig. 1.26** – Deux hémisphères placés dans l'air, calcul des matrices de transformation.  $a$  = distance entre les deux hémisphères,  $d = r$  = rayon de courbure = épaisseur d'une lentille,  $P_{12}$  = puissance réfractante de la première interface sphérique du montage,  $P_{45}$  = puissance réfractante de la dernière face réfractante sphérique du système.

**Exemple OG.29.** *Matrice d'un système de deux lentilles épaisses en verre, distantes de  $a$ , et placées dans l'air.*

Valeurs numériques :

$$n = 1,5, \quad nn = 1,5, \quad d_1 = 10, \quad d_2 = 10, \quad a = 100, \quad r_1 = 10, \quad r_2 = -10, \quad r_3 = 10, \quad r_4 = -10.$$

Nous calculons les éléments caractéristiques de ce système.

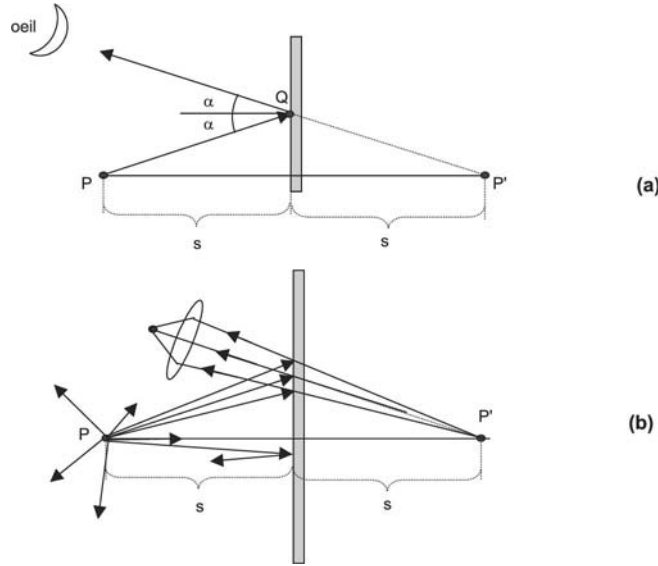
Cette étude est faite sur le CD.

## 1.9 Miroirs plans et miroirs sphériques

### 1.9.1 Miroir plan, image virtuelle

Nous représentons (fig. 1.27a), la réflexion d'un rayon par un miroir plan. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion au signe près. Sur la figure 1.27b nous représentons la réflexion par un cône de lumière issu d'un point objet source. Notre œil est constitué par une lentille mince positive qui forme une image finale sur la rétine. Quand nous regardons l'image du point source, elle nous semble située derrière le miroir et si nous nous regardons dans la

glace, la main gauche semble être la main droite : il y a inversion **gauche**  $\Rightarrow$  **droite**. De plus, nous sommes bien réels et notre image par le miroir est virtuelle (fig. 1.27b). Cette inversion a des applications pratiques, ainsi sur le capot avant des ambulances il est fréquent de voir écrit le mot «...ludma » et le conducteur de la voiture précédant l'ambulance peut lire dans son rétroviseur le mot inversé c'est-à-dire « ambulance ».



**Fig. 1.27** – Miroir plan. (a) Coordonnées de la loi de réflexion. (b) L'image d'un objet réel est virtuelle, nous l'observons à l'aide d'une lentille qui peut être la lentille de l'œil.

### 1.9.2 Équation d'un miroir sphérique

Les miroirs sphériques de grand diamètre, plusieurs mètres, sont utilisés dans les télescopes astronomiques. Ils remplacent la première lentille des montages étudiés précédemment. Quand nous observons une image réelle formée par un miroir sphérique, l'objet correspondant est réel et l'image inversée, si nous l'observons à l'œil nu nous la verrons de même sens que l'objet.

Rappelons l'équation de conjugaison d'un dioptrique sphérique

$$\frac{n_1}{(-x_o)} + \frac{n_2}{x_i} = \frac{(n_2 - n_1)}{r} \quad (1.105)$$

L'équation de conjugaison d'un miroir sphérique s'établit à partir de l'équation de réfraction d'une surface sphérique (relation 1.105), en effectuant le changement  $n_1 = -n_2$  l'équation (1.104) devient

$$\frac{n_1}{(-x_o)} + \frac{(-n_1)}{x_i} = \frac{(-n_1 - n_1)}{r} \quad (1.106)$$

$$\frac{n_1}{(-x_o)} + \frac{(-n_1)}{x_i} = \frac{(-2n_1)}{r} \quad (1.107)$$

Nous divisons les deux membres de cette égalité par «  $-n_1$  » et nous obtenons l'équation de conjugaison d'un miroir sphérique.

$$\frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} = \frac{2}{r} \quad (1.108)$$

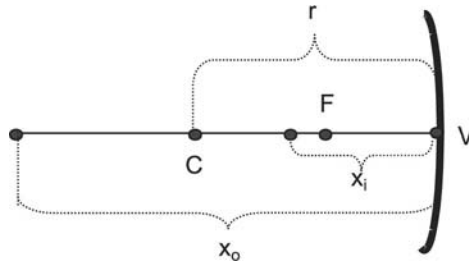
### 1.9.3 Convention de signe

L'objet est toujours situé à **gauche** du miroir concave, en conséquence :  $x_o$  est toujours négatif. Il serait absurde de considérer des valeurs positives de  $x_o$ . Nous indiquons sur la fig. 1.28 les coordonnées retenues.

- Quand  $x_i$  est négatif  $\Rightarrow$  l'image est réelle (fig. 1.30a).
- Quand  $x_i$  est positif  $\Rightarrow$  l'image est virtuelle (fig. 1.30b).

Rappel :

1. Miroir concave  $r$  est positif.
2. Miroir convexe  $r$  est négatif.

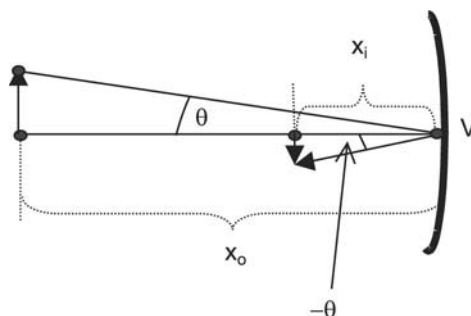


**Fig. 1.28** – Coordonnées de l'étude du miroir sphérique concave. Exemple d'un objet réel dont le miroir forme une image réelle.

### 1.9.4 Grandissement

Nous choisissons sur la figure 1.29 l'exemple d'un objet réel dont le miroir concave forme une image réelle. Le grandissement «  $m$  » est

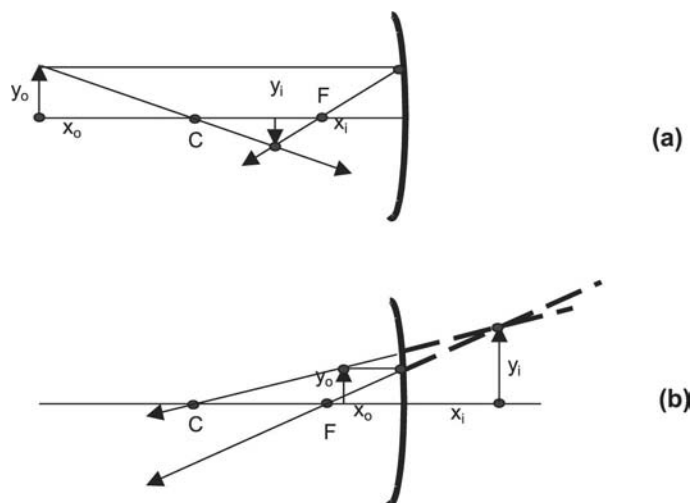
$$m = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{x_i}{x_o} \quad (1.109)$$



**Fig. 1.29** – Grandissement. Exemple d'un objet réel dont le miroir forme une image réelle.

### 1.9.5 Méthode graphique et variations de $x_i$ en fonction de $x_o$

Miroir concave sphérique.



**Fig. 1.30** – Miroir concave sphérique, construction géométrique. (a) L'objet d'abscisse  $x_o$  est placé à gauche du foyer  $\Rightarrow$  image réelle. (b) L'objet est placé entre le foyer et le sommet du miroir  $\Rightarrow$  image virtuelle.

#### Construction géométrique

Nous prenons deux rayons particuliers, le rayon  $PF$  et le rayon  $C$ .

- Choisir un objet de hauteur  $y_o$ , tracer le rayon  $PF$ , rayon incident parallèle à l'axe du miroir. après réflexion, il passe par le foyer  $F$  distant de  $r/2$  du sommet :  $f = r/2$ .
- Le rayon passant par le sommet de la flèche objet et passant par le centre de courbure  $C$ , rayon  $C$ , n'est pas dévié. Il revient sur lui-même (fig. 1.30).

Il est possible que nous soyons obligés de prolonger (en pointillés) ces deux rayons au-delà du miroir pour trouver la position du sommet de l'image : ceci a lieu quand l'objet est placé entre le foyer et le sommet du miroir.

Graphe de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ .

Nous étudions (exemple OG.30) les propriétés d'un miroir concave. Notre convention de propagation de la lumière de la gauche vers la droite fait que le rayon de courbure d'un miroir concave est négatif. La lumière vient de la gauche. Connaissant le rayon de courbure et l'abscisse  $x_o$  de l'objet, nous calculons  $x_i$  et nous faisons varier  $x_o$ . Nous traçons la courbe de variation de l'abscisse  $x_i$ .

Distance focale.

Quand  $x_{if} = -\infty$ , nous avons  $x_{of} = \frac{r}{2}$ , puisque  $r$  est négatif,  $x_{of}$  est à gauche du miroir. C'est le seul foyer  $F$  du miroir, le foyer est à la fois foyer objet et foyer image, les deux foyers sont confondus en  $F$ .

**Image réelle, image virtuelle :** le foyer  $F$  est un point singulier.

- Quand l'objet est à **gauche** de  $F \Rightarrow$  l'image est **réelle**.
- Quand l'objet est à **droite** de  $F \Rightarrow$  l'image est **virtuelle**.

**Exemple OG.30. Miroir concave sphérique. Calcul de  $x_i$  pour différentes positions de l'objet.**

Tracer la courbe de variation de  $x_i$ .

Valeurs numériques :  $r = -50$ , donc  $f = \frac{r}{2} = -25$ . Faire varier  $x_o$  de  $-100$  à  $-0,1$ .

Le rayon de courbure  $r$  d'un miroir concave est négatif; quand  $x_o$  est à gauche du miroir,  $x_o$  est négatif. Nous évitons la singularité à  $-x_o = f$  en prenant des valeurs voisines de  $f$  mais non égales à  $f$ .

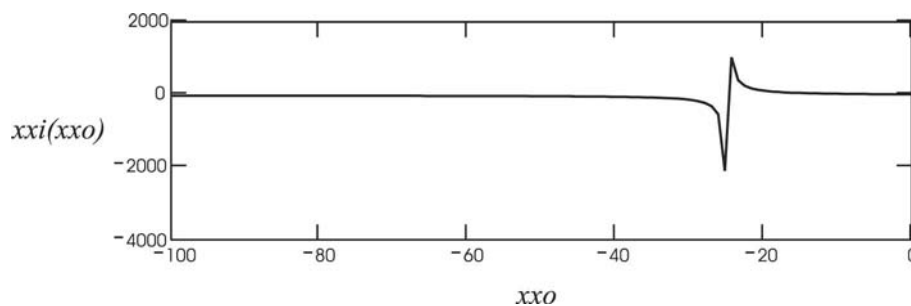
$$r = -50 \quad x_o = -60 \quad x_i = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x_o}} = -42,857$$

$$\text{Grandissement} \quad m = \frac{-x_i}{x_o} = -0,714$$

Graphe

$x_o$  varie de  $-100, 199 \dots 0,1$

$$x_i(x_o) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{x_o}}$$



## Miroir sphérique convexe.

Construction géométrique.

Nous construisons l'image d'un objet : une flèche droite, à l'aide de deux rayons particuliers, le rayon  $PF$  et le rayon  $C$ .

- Choisir la hauteur  $y_o$  de l'objet, tracer le rayon  $PF$ , rayon parallèle à l'axe passant par le sommet de la flèche, le faire ensuite passer par le foyer  $F$ .



	Concave	Concave	Concave	Convexe
Objet $x_o$	À gauche de $f$	Au foyer $f$	À droite de $f$	N'importe quelle place
Image $x_i$	Négative	- l'infini	Positive	Positive
Grandissement	Négatif		Positif	Positif
	Réelle		Virtuelle	Virtuelle
	Inverse		Droite	Droite

**Tableau 1.5** – Comparaison des images formées par un miroir sphérique concave et par un miroir convexe

- Le rayon  $C$  passant par le sommet de la flèche objet et le centre de courbure  $C$  se réfléchit sur lui-même, fig. (1.31).

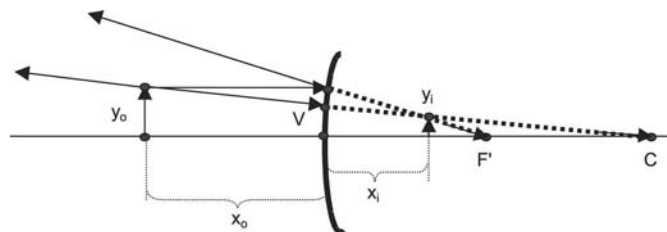
Graphes de  $x_i$  en fonction de  $x_o$ .

Un miroir convexe, avec notre convention de propagation de la lumière, a un rayon de courbure positif. Nous représentons (exemple OG.31) la courbe de variation de  $x_i$  en fonction de  $x_o$  quand ce paramètre varie de  $-100$  à  $-0,1$ . Il n'y a pas de singularité au point  $\frac{r}{2} = x_o$ , et l'image est toujours virtuelle quelle que soit la valeur de  $x_o$ .

**Exemple OG.31. Miroir sphérique convexe.** Nous calculons  $x_i$  en fonction de  $x_o$  et traçons la courbe de variation correspondante.

Valeur numérique :  $r = 50$ , c'est-à-dire que  $f = \frac{r}{2} = 25$ , faire varier  $x_o$  de  $-100$  à  $-0,1$ .

Cette étude est faite sur le CD.



**Fig. 1.31** – Miroir convexe, construction géométrique de l'image d'un objet. L'image  $y_i$ , quelle que soit la distance de l'objet  $y_o$ , est toujours virtuelle et située à droite du miroir.

Nous résumons ces résultats dans le tableau (1.5).

## 1.10 Matrices d'une cavité réfléchissante, calcul des valeurs propres

### Résonance d'une cavité laser.

Le rayonnement laser est produit dans une cavité réfléchissante dans laquelle les conditions de résonance du rayonnement sont réalisées. La première cavité laser He-NE résonnante avait une cavité analogue à celle du Pérot Fabry, elle comprenait deux miroirs plans, parallèles, séparés par une distance  $1m$ . Il était très difficile d'aligner les miroirs, l'alignement fut réalisé tout à fait par... accident : un chercheur cogna la table, les miroirs tremblèrent et l'effet laser

fut observé... Ensuite, il deviendra plus pratique d'utiliser des cavités comprenant des miroirs sphériques, l'alignement étant beaucoup plus facile.

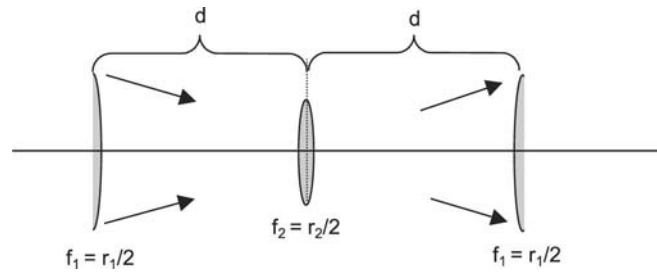
Nous avons vu que la substitution  $n_2 = -n_1$ , dans l'équation de conjugaison d'une surface réfractante sphérique, permet d'obtenir l'équation de conjugaison du miroir sphérique de même rayon de courbure. Cette correspondance entre surfaces réfractantes et surfaces réfléchissantes, sera utilisée pour établir la résonance d'une cavité formée par deux miroirs réfléchissants. Nous ferons l'analogie avec un rayon traversant périodiquement une suite de lentilles minces disposées à égale distance, à égale période spatiale (fig. 1.32).

#### Analogie réflexion, réfraction.

Nous considérons une suite de lentilles en ligne, disposées avec la même période spatiale que la cavité correspondante. La cellule élémentaire de la périodicité est représentée (fig. 1.32). Le trajet du rayon équivalent, en réflexion, sera celui d'un rayon effectuant des allers et retours dans une cavité réfléchissante formée par deux miroirs sphériques. La distance focale commune aux lentilles est celle de chaque miroir de la cavité  $f = \frac{r}{2}$ .

#### Séquence des lentilles.

La transformation représentée (fig. 1.32) est la répétition d'un motif de base. Chaque motif identique comporte, à l'origine, la moitié d'une lentille.



**Fig. 1.32** – Montage périodique de lentilles. Représentation de la périodicité par la cellule de base. La lumière entre de la même façon dans chaque cellule de base avec les mêmes caractéristiques, la disposition périodique des cellules représente la réflexion successive sur les miroirs d'une cavité. La cellule comprend : une demi-lentille + une lentille + une demi-lentille. Nous traçons les trajets des rayons successifs. Le trajet du rayon à travers cette cellule est équivalent, en réflexion, à un aller et retour du rayon dans la cavité.

#### séquence d'une cavité.

La transformation est une répétition de la séquence de base représentée par le produit matriciel suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.110)$$

Puisque nous désirons faire l'analogie matricielle de ces transformations avec la réflexion dans une cavité, nous exprimons les distances focales  $f_1$  et  $f_2$  en fonction des rayons de courbure  $r_1$  et  $r_2$  des cavités :  $f_1 = \frac{r_1}{2}$  et  $f_2 = \frac{r_2}{2}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

Les trois premières matrices décrivent le trajet du rayon du premier au second miroir, les deux derniers le retour de la lumière du second vers le premier. Nous introduisons les paramètres  $g_1$  et  $g_2$  de la cavité résonante.

$$g_1 = 1 - \frac{d}{r_1} \quad \text{et} \quad g_2 = 1 - \frac{d}{r_2} \quad (1.112)$$

Nous calculons le produit de ces cinq matrices dans l'exemple (OG.32).

**Exemple OG.32. Étude d'une cavité, calcul du produit des cinq matrices de la période spatiale.**

- Nous effectuons le produit des cinq matrices de la période spatiale de transformation par la ligne de lentilles correspondant à la réflexion dans la cavité résonnante formée par deux miroirs sphériques.
- Nous calculons les valeurs propres de la matrice de la cavité en utilisant les paramètres  $g_1$ ,  $g_2$  et  $d$ ; représenter le graphe de la relation de stabilité.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{g_1-1}{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2(g_2-1)}{d} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{g_1-1}{d} & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres

$$\begin{bmatrix} -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 & 2 \cdot d \cdot g_2 \\ 2 \cdot g_1 \cdot \frac{(-1+g_1 \cdot g_2)}{d} & -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1, 1, 1) &= -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 + 2 \cdot \sqrt{-g_1 \cdot g_2 + g_1^2 \cdot g_2^2} \\ (1, 1, 2) &= -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 - 2 \cdot \sqrt{-g_1 \cdot g_2 + g_1^2 \cdot g_2^2} \end{aligned}$$

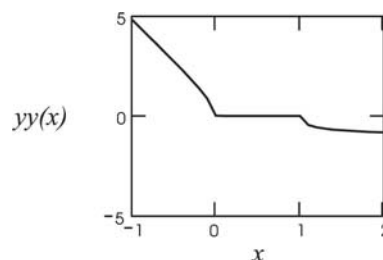
$$\begin{aligned} r_1 &= 1 & r_2 &= 1 & d &= 2 \\ g_1 &= 1 - \frac{d}{r_1} & g_2 &= 1 - \frac{d}{r_2} \end{aligned}$$

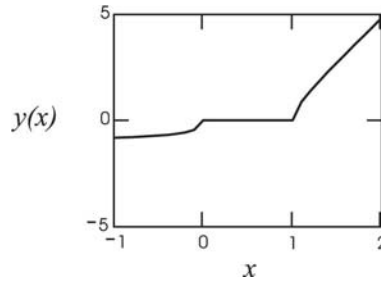
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 + 2 \sqrt{-g_1 \cdot g_2 + g_1^2 \cdot g_2^2} \\ \lambda_2 &= -1 + 2 \cdot g_1 \cdot g_2 - 2 \sqrt{-g_1 \cdot g_2 + g_1^2 \cdot g_2^2} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 1$$

Nous posons :  $g_1 g_2 = x$  et traçons les variations des deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  quand  $x$  varie de  $-1$  à  $2$ .

$$\begin{aligned} x &= -1, -9 \dots 2 \\ y(x) &= |(2 \cdot x - 1) + \sqrt{(2 \cdot x - 1)^2 - 1}| - 1 \\ yy(x) &= |(2 \cdot x - 1) - \sqrt{(2 \cdot x - 1)^2 - 1}| - 1 \end{aligned}$$



*Résultat.*

La matrice résultant du produit de ces cinq matrices de l'équation (1.111) est

$$\begin{pmatrix} -1 + 2g_1g_2 & 2dg_2 \\ 2g_1(-1 + 2g_1g_2)/d & -1 + 2g_1g_2 \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

Un aller et retour dans la cavité est analogue au trajet du rayon dans une cellule de base de la ligne de lentilles. Ceci correspond à un mode d'oscillation dans la cavité. Les valeurs propres de ces oscillations, c'est-à-dire les valeurs propres de la matrice (1.112), sont effectuées dans l'exemple (OG.32). Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = (2g_1g_2 - 1) + [(2g_1g_2 - 1)^2 - 1]^{1/2} \quad (1.114)$$

$$\lambda_2 = (2g_1g_2 - 1) - [(2g_1g_2 - 1)^2 - 1]^{1/2} \quad (1.115)$$

**Condition de résonance ou de stabilité. Changement de coordonnées.**

La matrice décrivant un aller et retour dans la cavité, ou la matrice représentant la séquence fondamentale de l'alignement de lentilles, est carrée d'ordre deux. Si nous effectuons un changement de coordonnées, la matrice devient une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres.

*Matrice unitaire.*

Quand la matrice précédente devient unitaire, cela signifie que le rayon, après un aller et retour, a même direction que le rayon incident ; en conséquence, il fait une multitude d'allers et retours sans changer de direction, il ne sort pas de la cavité : c'est la **résonance**. Le système est stable.

**Résonance, stabilité.**

Les conditions de stabilité de la cavité ont lieu quand les valeurs propres sont égales à l'unité.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1 \quad (1.116)$$

Étudions ces conditions à partir de la relation (1.114).

$$\lambda_1 = (2g_1g_2 - 1) + [(2g_1g_2 - 1)^2 - 1]^{1/2} \quad (1.117)$$

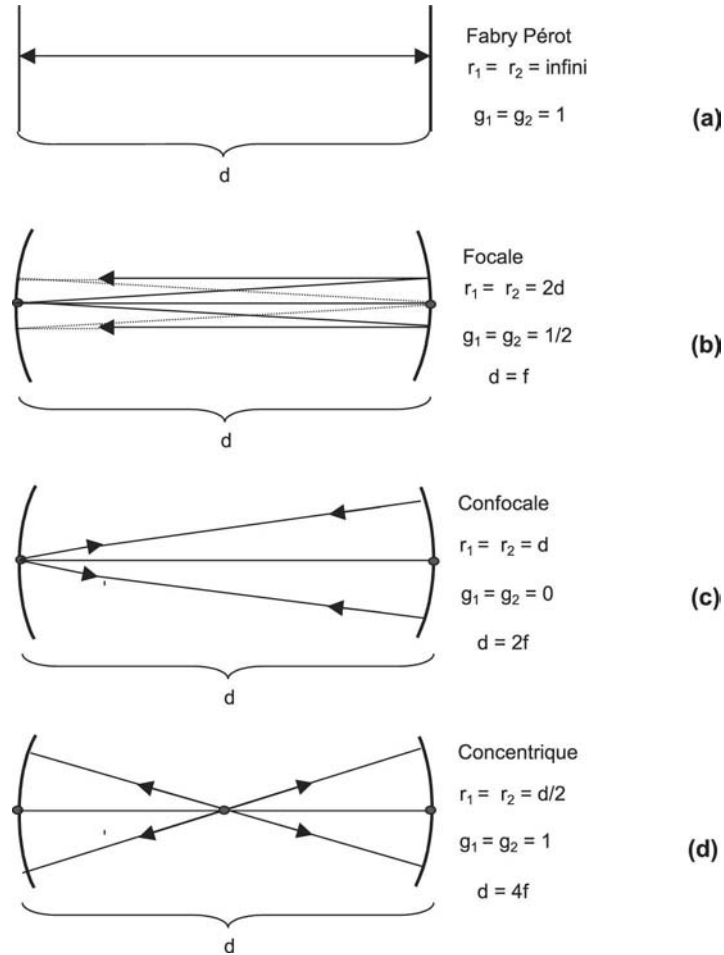
Soit

$$\lambda_1 = (2g_1g_2 - 1) + i[1 - (2g_1g_2 - 1)^2]^{1/2} \quad (1.118)$$

La partie réelle ou imaginaire de cette relation doit être sur un cercle de rayon unitaire.

$$|(2g_1g_2 - 1)| \leq 1, \quad \text{or} \quad 0 \leq g_1g_2 \leq 1 \quad (1.119)$$

Nous traçons ces conditions (exemple OG.32). Nous refaisons ces produits de matrices à partir de la relation (1.110) (exemple OG.33) et nous introduisons les rayons de courbure  $r_1, r_2$ . Nous désignons par  $d$  la longueur de la cavité.



**Fig. 1.33** – Trajet des rayons dans une cavité résonnante. Nous représentons quatre réflexions du rayon, les valeurs de  $g_1$  et  $g_2$  sont indiquées. (a) Cavité du Fabry Péro  $r_1 = r_2 = \infty$ . (b) Cavité focale  $r_1 = r_2 = d/2$ ,  $d = f$ . (c) Cavité confocale  $r_1 = r_2 = d$ ,  $d = 2f$ . (d) Cavité concentrique  $r_1 = r_2 = d/2$ ,  $d = 4f$ .

Nous représentons sur les figures (1.33) un interféromètre Péro-Fabry, une cavité focale, une cavité confocale, une cavité sphérique selon les valeurs des paramètres  $r_1$  et  $r_2$ ,  $d$ , mais aussi de  $g_1$  et  $g_2$ . Pour toutes ces cavités les conditions de résonance sont toujours les mêmes :  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  doivent toujours être égaux à 1.

**Exemple OG.33. Calcul des valeurs propres.**

Nous calculons, sur le CD, les valeurs propres d'une cavité, les paramètres de cette cavité sont :  $r_1$ ,  $r_2$ , et  $d$ .

**Exercices chapitre 1- Optique géométrique, sur le CD**

- PG01- Dioptre sphérique convexe
- PG02- Bâton en plastique placé dans l'eau, calcul de la position de l'image
- PG03- Dioptre sphérique concave
- PG04- Film plastique sur la surface de l'eau, l'interface est considérée comme ayant la forme d'un dioptre sphérique
- PG05- Lentille d'air contenu dans un matériau plastique
- PG06- Lentille mince placée sur l'eau
- PG07- Loupe
- PG08- Microscope (montage de trois lentilles)
- PG09- Microscope, observation au minimum de vision distincte
- PG10- Microscope, observation à l'infini
- PG11- Lunette astronomique de Képler
- PG12- Lunette astronomique de Galilée
- PG13- Extension d'un faisceau laser
- PG14- Exercice de multiplication de matrices
- PG15- Non commutativité du produit matriciel
- PG16- Montage formé par deux lentilles minces
- PG17- Lentille épaisse concave-convexe
- PG18- Lentille épaisse utilisée pour focaliser l'énergie sur un détecteur
- PG19- Montage formé par l'association d'une lentille plan convexe et d'une lentille concave plane
- PG20- Lentille épaisse convexe-concave
- PG21- Lentille plan concave
- PG22- Système optique formé par l'association d'une lentille épaisse plan concave et d'une lentille épaisse convexe plan
- PG23- Étude d'une lentille épaisse convexe-concave
- PG24- Sphère en verre placée dans l'air
- PG25- Lentille de courte distance focale
- PG26- Déformation des faces extrêmes d'un laser cylindrique
- PG27- Inscription thermique d'une image par laser

## Chapitre 2

# Interférence

### 2.1 Introduction

Nous avons étudié, dans le chapitre 1, la formation des images par la lumière et nous utilisons des éléments simples : le principe de propagation de la lumière en ligne droite selon des rayons, les lois de la réflexion et de la réfraction. La structure de la lumière, sa nature, a été seulement étudiée quand Thomas Young fit sa célèbre expérience d'observation de franges d'interférence à l'aide du montage qui porte son nom. L'interprétation de l'expérience fut faite par analogie avec l'expérience des ondes planes sur la surface de l'eau. La superposition des ondes génère des minima et des maxima ; les minima sont fixes dans le temps et l'espace. Les maxima sont fixes dans l'espace mais varient dans le temps. Cependant, la figure d'interférence observée sur l'eau est une figure d'interférence en amplitude, tandis que la distribution de l'interférence par les ondes lumineuses est une figure d'interférence en intensité. Historiquement, Newton associait un flot de particules aux rayons lumineux de la lumière. À cette époque quelques scientifiques reprochaient à Young d'affaiblir l'œuvre de Newton. Maintenant, nous savons que la lumière est une onde électromagnétique, mais certaines expériences complémentaires permettent d'affirmer qu'elle peut aussi être décrite, en mécanique quantique, par un ensemble de particules : les quantas.

Nous décrivons, dans ce chapitre, le phénomène d'interférence à partir d'un modèle. Nous supposons qu'il y a toujours un seul faisceau incident quand nous étudions l'interférence par deux ou plusieurs faisceaux lumineux. Après passage à travers le montage expérimental, les ondes se superposent et donnent une figure d'interférence car elles ont, entre elles, différents chemins optiques.

Le faisceau de lumière incidente est une onde harmonique. L'objet de ce chapitre est de calculer la différence de chemin optique entre les faisceaux et d'interpréter la figure d'interférence avec les franges d'interférence qui en résultent. Le passage des ondes à travers le montage entraîne l'apparition de la diffraction des ondes. Nous étudierons ce phénomène dans le chapitre 3.

Les ondes harmoniques de notre modèle sont solutions de l'équation scalaire de propagation des ondes, équation écrite dans un système de coordonnées cartésiennes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{1}{v}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

$v$  = vitesse de phase de l'onde dans le milieu d'indice  $n$  et  $v = \frac{c}{n}$ ,  $c$  = la vitesse de propagation de l'onde dans le vide.

Cette équation est établie à partir de la théorie de propagation de Maxwell. Les formules de Fresnel permettent d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission des matériaux utilisés. L'une des particularités est qu'il *apparaît un déphasage de  $\pi$  quand les ondes se réfléchissent sur un milieu optique plus dense : l'onde réfléchie a une avance de phase de  $\pi$  par rapport à l'onde incidente.*

*Remarque :* l'équation scalaire de propagation peut aussi être écrite dans un système de coordonnées sphériques.

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.2)$$

$\nabla$  désigne l'opérateur différentiel en coordonnées sphériques et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  est le nombre d'onde correspondant à la longueur d'onde  $\lambda$ .

Une onde sphérique de la forme  $\frac{(e^{ikr})}{r}$  est une solution simple de cette équation. La source est à l'origine des coordonnées et l'onde se propage, avec une symétrie sphérique ;  $r$  est la distance de l'onde par rapport à l'origine. L'intensité de l'onde émise diminue proportionnellement à  $\frac{1}{r^2}$ . Nous sommes à une grande distance de la source et nous faisons, dans nos calculs, l'approximation de l'onde sphérique en onde plane. Nous considérons donc les ondes de propagation comme étant des ondes planes.

L'intensité d'une onde est exprimée soit par le calcul de la valeur moyenne de l'amplitude de l'onde en fonction du paramètre temps, soit par le carré de la valeur absolue de l'amplitude complexe de l'onde.

**Principe de superposition :** l'équation scalaire de propagation est une équation linéaire et l'onde résultant de la superposition de plusieurs ondes solutions de cette équation est aussi une solution : c'est le principe de superposition des ondes.

Nous avons seulement besoin de savoir que l'onde obtenue par la superposition d'ondes monochromatiques, de même fréquence  $\nu$ , est une onde monochromatique de fréquence  $\nu$ .

## 2.2 Ondes harmoniques

Les solutions de l'équation scalaire (2.1) sont des fonctions dépendant de l'espace,  $x, y, z$ , et du temps  $t$ . De plus, il peut y avoir un facteur de phase arbitraire. Nous n'avons pas besoin du paramètre temps. Nous considérons une onde transversale d'amplitude  $u$  se propageant selon  $x$ .

### Hypothèses.

Les ondes harmoniques se propagent soit dans le vide, soit dans un milieu diélectrique isotrope d'indice  $n$ . Les ondes sont transversales, elles vibrent selon la direction  $y$  et se propagent selon la direction  $x$ . Nous désignons par  $\lambda$  la longueur d'onde et par  $T$  la période. L'amplitude  $u$  de l'onde, à l'instant  $t$  selon  $y$ , est

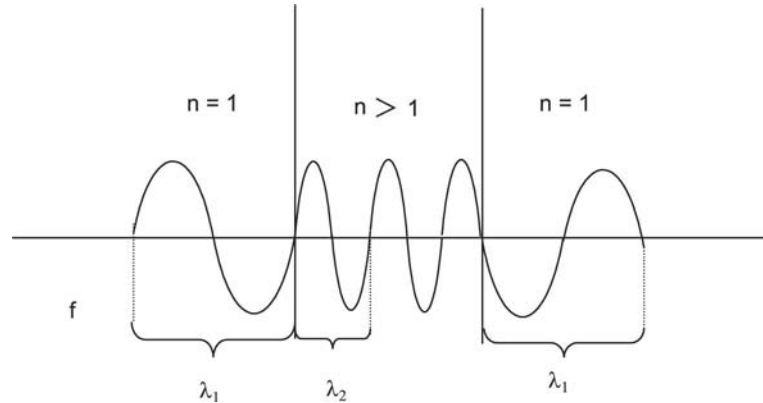
$$u = A \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \phi\right)\right] \quad (2.3)$$

$A$  = amplitude maximum de l'onde,  $\phi$  = phase constante de l'onde.

Nous traçons (exemple I.1) :

1. la courbe de variation de  $u$  pour trois instants  $t$  différents et pour trois constantes de phase  $\phi$  différentes, l'abscisse  $x$  restant constante ;
2. la courbe de variation de  $u$  pour trois valeurs différentes de l'abscisse  $x$ , et trois valeurs différentes de la constante de phase, le paramètre  $t$  reste fixe.





**Fig. 2.1** – Changement de longueur d’onde d’une onde traversant plusieurs milieux diélectriques différents.

Il en est de même pour les amplitudes  $B_1, B_2, B_3$  et les différences de phase  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Nous voyons que la fonction cosinus dépend indifféremment des rapports  $x/\lambda$  et  $t/T$ . Nous faisons varier le domaine de variation de  $x$  ou de  $t$ , les courbes en fonction de l’un, ou l’autre, paramètre sont identiques.

Nous pouvons modifier  $\frac{x}{\lambda}$  et  $\frac{t}{T}$  pour contenir le terme de phase constant. Dans la nouvelle expression de  $\cos[2\pi(x/\lambda - t/T + \phi)]$ , nous ne pouvons pas savoir si  $\phi$  appartient à la coordonnée d’espace ou de temps. Nous verrons, dans notre étude des interférences, que nous n’avons pas besoin de tenir compte de la dépendance en fonction du temps : nous l’éliminons de la discussion.

La vitesse de propagation  $v$  de l’onde, dans un milieu d’indice  $n$ , est le produit de la fréquence par la longueur d’onde :

$\omega = 2\pi\nu$  = fréquence angulaire ou pulsation de l’onde ;

$k = \frac{2\pi n}{\lambda}$  = nombre d’onde, il lui correspond le vecteur d’onde.

La relation (2.3) peut s’écrire

$$u = A \cos(kx - \omega t) \quad (2.4)$$

ou

$$u = A \cos k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) = A \cos k(x - vt)$$

### Vitesse de phase : Propagation dans le vide ou l’espace libre.

La vitesse de phase dans le vide est  $c$ , vitesse de propagation de la lumière. Nous désignons par  $\lambda_o$  la longueur d’onde dans le vide, nous obtenons la relation :  $c = \nu\lambda_o$ .

*Propagation dans un milieu diélectrique isotrope d’indice  $n$ .*

La vitesse de phase  $v$  est plus petite :  $v = \frac{c}{n}$ , la longueur d’onde  $\lambda$ , dans ce milieu, est plus petite que la longueur d’onde  $\lambda_o$  de propagation de la même onde dans le vide, en effet :  $\lambda = \frac{\lambda_o}{n}$  (fig. 2.1).

**Exemple I.1.** Étudions une onde sinusoïdale cosinus dépendant des paramètres espace et temps ainsi que d’une constante de phase supplémentaire.

Dans le système de coordonnées de l’espace, nous représentons la fonction cosinus pour trois valeurs différentes de  $t$ . Cela peut être considéré comme une représentation de cosinus à trois photographies

ou trois flashes différents, puisque  $t$  reste fixe. Si nous faisons un choix analogue, mais dans l'espace temps, pour trois valeurs fixes de l'espace, les deux graphes sont similaires.

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application I.1

- L'étudiant peut changer la valeur de la phase  $\phi$  et celle de l'espace  $x$ , puis il les choisira de telle façon que le graphe ne change pas. Choisir  $\phi = 2, 4, 6$ .
- Changer la valeur de  $\phi$  afin que cosinus glisse vers une variation correspondant à une plus petite valeur de  $x$ .
- Changer la valeur de  $\phi$  de telle façon que la fonction cosinus glisse vers une variation correspondant à une plus grande valeur du temps.

## 2.3 Superposition des ondes harmoniques

### 2.3.1 Superposition dépendant des coordonnées d'espace et de temps

Nous désirons étudier la superposition de deux ondes harmoniques sinusoïdales  $u_1$  et  $u_2$ , de même longueur d'onde, et de même amplitude maximum  $A$ . Ces deux ondes se déplacent selon la direction de l'axe  $x$  et vibrent selon l'axe  $y$ . Nous supposons que ces ondes ont entre elles une différence de chemin optique  $\delta$ .

$$u_1 = A \cos 2\pi \left[ \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right] \quad u_2 = A \cos 2\pi \left[ \frac{(x - \delta)}{\lambda} - \frac{t}{T} \right] \quad (2.5)$$

*Remarque.*

À l'instant  $t = 0$ , le premier maximum de  $u_1$  se trouve à l'origine quand  $x = 0$ , et pour  $u_2$  quand  $x = \delta$  (fig. 2.2). Additionnons  $u_1$  et  $u_2$ .

$$u = u_1 + u_2 = A \cos 2\pi \left[ \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right] + A \cos 2\pi \left[ \frac{(x - \delta)}{\lambda} - \frac{t}{T} \right] \quad (2.6)$$

Utilisons la relation

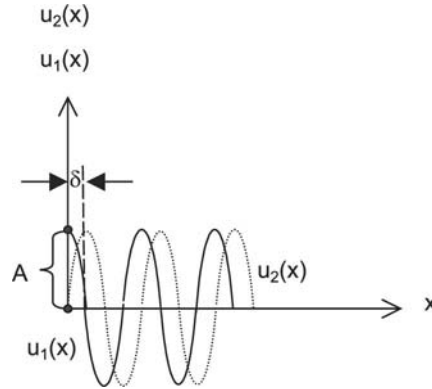
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos \left\{ \frac{(\alpha - \beta)}{2} \right\} \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \quad (2.7)$$

Il vient

$$u = \left[ 2A \cos \left( 2\pi \frac{(\frac{\delta}{2})}{\lambda} \right) \right] \cdot \left[ \cos \left( 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - 2\pi \frac{(\frac{\delta}{2})}{\lambda} \right) \right] \quad (2.8)$$

Nous traçons (fig. 2.2) l'intensité  $u^2$  pour différentes valeurs de chemin optique avec les hypothèses suivantes : le temps  $t$  est fixé  $t = t_1$ , la longueur d'onde reste constante, successivement nous choisissons  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,1$ ,  $\delta_3 = 0,2$ ,  $\delta_4 = 0,3$ ,  $\delta_5 = 0,4$ ,  $\delta_6 = 0,5$ , ce qui correspond à une valeur de  $\delta$  comprise entre 0 et  $\lambda/2$ . Nous observons que la valeur des maxima décroît lorsque nous augmentons  $\delta$  de la valeur  $\delta_1$  à  $\delta_6$ , et il se déplace vers des valeurs de  $x$  plus élevées. Selon la valeur du facteur de phase  $2\pi(\delta/2)/\lambda$ , les maxima et minima sont déplacés par rapport à la valeur correspondant à  $\delta = 0$ . Étudions maintenant les deux facteurs de l'équation (2.8).

Le premier facteur de l'amplitude :  $2A \cos 2\pi \frac{(\frac{\delta}{2})}{\lambda}$  dépend de  $\delta$  et  $\lambda$ , il est indépendant de  $x$  et  $t$ . Il est maximum quand  $\delta = 0$  ou un multiple de  $\lambda$  :  $\delta = m\lambda$ ,  $m =$  nombre entier. Ce facteur



**Fig. 2.2** – Superposition de deux ondes sinusoïdales de même amplitude  $A$ , de même longueur d'onde  $\lambda$ ,  $u_1 = A$  quand  $x = 0$ , de même  $u_2 = A$  quand  $x = \delta$ .

dans l'expression de l'intensité devient  $[2A \cos 2\pi \frac{(\delta)}{\lambda}]^2$  et son maximum a pour valeur

$$\left[ 2A \cos \left( 2\pi \frac{(\delta)}{\lambda} \right) \right]^2 \quad \text{maximum } 4A^2 \quad (2.9)$$

Ce facteur est minimum et égal à zéro quand  $\delta$  est un multiple de demi-longueurs d'onde

$$\left[ 2A \cos \left( 2\pi \frac{(\delta)}{\lambda} \right) \right]^2 \quad \text{Le minimum est } 0 \quad (2.10)$$

Ce premier facteur de l'équation (2.8) peut être appelé *facteur d'amplitude*, il caractérise les maxima ou minima d'interférence

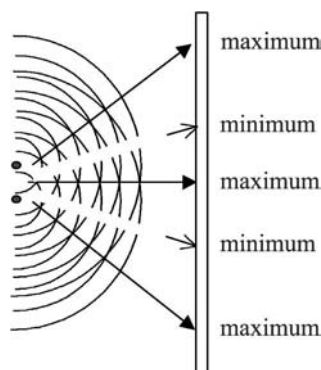
$$\text{maxima quand } \delta = m\lambda, \text{ avec } m = 0 \text{ ou un nombre entier} \quad (2.11)$$

$$\text{minima quand } \delta = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (2.12)$$

$m$  est appelé ordre d'interférence.

Le second facteur de la relation (2.8) dépend du paramètre temps  $t$ . Il contient le terme de phase constante appelé aussi différence de phase. Il est fonction de  $\delta$  et  $\lambda$ . Dans l'observation, des interférences, ce terme intervient par sa valeur moyenne dans le temps, or cette valeur moyenne est une constante qui peut être incluse dans la constante de normalisation.

Nous montrons (fig. 2.3) une photographie des interférences mécaniques de deux ondes sur la surface de l'eau : ces ondes ont une relation de phase constante. Nous voyons des bandes sombres stables ne dépendant pas du temps, elles illustrent les minima sur la surface de l'eau. Nous observons des minima quand le facteur d'interférence est égal à zéro. Les maxima de déplacement oscillent et se déplacent selon une direction fixe où nous les observons. Les minima ont une amplitude égale à zéro, quels que soient le temps et les coordonnées d'espace. Nous traçons (exemple I.3) dans l'espace à trois dimensions les maxima quand  $\delta = \lambda$  et les minima quand  $\delta = \lambda/2$ . Les maxima montrent la dépendance du temps du second facteur pour chaque



**Fig. 2.3** – Figure d'interférence par les ondes issues de deux sources vibrant en phase.

système de coordonnées spatiales. Nous pouvons dire que la valeur moyenne dans le temps de la fonction  $[\cosinus]^2$  est égale à la moitié de sa valeur maximum. Le minimum d'interférence est égal à zéro quels que soient le temps et la valeur de la coordonnée.

**Exemple I.2.** Nous traçons le graphe de la courbe résultant de la superposition de deux ondes sinusoïdales représentées par des cosinus.

Nous choisissons  $\lambda = 1$  et différents  $\delta$  :  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,1$ ,  $\delta_3 = 0,2$ ,  $\delta_4 = 0,3$ ,  $\delta_5 = 0,4$ ,  $\delta_6 = 0,5$ . Dans cet exemple, ces différences de marche optique sont comprises entre 0 et  $\lambda/2$ .

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application I.2

1. Continuer de prendre une différence de marche de plus en plus en grande, par exemple six valeurs comprises entre  $\lambda/2$  et  $\lambda$ . Tracer les six graphes correspondants. Faire une liste des exemples qui ont même valeur et dont les courbes sont identiques.
2. Tracer la courbe de variation de :  $y = \cos\{2\pi(\delta/2)/\lambda\}$ ,  $\lambda$  reste constant, la variable est  $\delta$ . Faire une liste des valeurs de  $\delta$  donnant des minima puis des maxima. Calculer le rapport  $\delta/\lambda$  pour chaque cas, comparer avec la liste précédente.

**Exemple I.3.** Représentons en 3 D la superposition de deux ondes sinusoïdales.

Nous traçons, en trois dimensions, la courbe due à la superposition de deux ondes oscillantes sinusoïdales,  $\delta/\lambda = 1$  ; ceci correspond à un maximum d'intensité. L'amplitude est fonction du paramètre temps pour un point d'abscisse  $x$ . L'intensité varie entre 0 et  $(2A)^2$ .

Cette étude est faite sur le CD.

## 2.3.2 Étude des intensités

*Interférence sur la surface de l'eau.*

Considérons le montage formé par deux stylets vibrant sur la surface de l'eau. Les ondes émises sur la surface de l'eau forment une figure d'interférence. Nous observons une figure d'interférence en amplitude, nous voyons des points noirs en certains endroits de la surface, et un point brillant pour les maxima. Les franges d'interférence « d'amplitude » présentent des amplitudes négatives et des amplitudes positives. Les franges d'interférence « d'intensité »

ont seulement des valeurs positives, ou égales à zéro.

Nous considérons d'abord les franges d'amplitude produites par interférence, nous étudierons ensuite les franges d'intensité, ce qui nous permettra de comparer les observations. Élevons au carré l'expression de l'amplitude d'une onde, relation 2.8.

$$u^2 = \left[ 2A \cos \left( 2\pi \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\lambda} \right) \right] \cdot \left[ \cos \left( 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - 2\pi \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\lambda} \right) \right]^2 \quad (2.13)$$

Dans le paragraphe 1 de ce chapitre, nous avons mentionné que nous appellerons l'intensité soit :

- la valeur moyenne dans le temps de  $u^2$  ;
- le carré de la valeur absolue de l'amplitude exprimée en notation complexe.

Nous comparons maintenant ces deux calculs.

### Notation en réel, valeur moyenne dans le temps d'une fonction cosinus.

Soit  $T$  la période, par définition la valeur moyenne de  $(\cos)^2$  est

$$\left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T [\cos t]^2 dt = \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

Appliquons cette définition au deuxième facteur de l'amplitude  $u$  de l'onde, c'est-à-dire au facteur oscillant de la relation (2.8).

$$a_v^2 = \left(\frac{1}{T}\right) \int_0^T [\cos\{2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}) - 2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})\}]^2 dt = \frac{1}{2} \quad (2.15)$$

L'intensité de l'onde décrite par la relation (2.13) devient

$$I = [2A \cos\{2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})\}]^2 (1/2) \quad (2.16)$$

L'intensité est égale au carré du facteur d'amplitude multiplié par 1/2.

### Notation complexe.

La notation complexe facilite considérablement les calculs, en particulier lorsque nous devons calculer l'amplitude  $z$  de l'onde résultant de la somme d'un grand nombre d'ondes harmoniques ce qui est le cas, par exemple, des interférences par les ondes issues de  $N$  sources. L'intensité  $I$  est donnée par  $I = z \cdot z^*$ , dans ce produit, le terme contenant le temps  $t$  s'élimine. Les fonctions cosinus sont les parties réelles des fonctions complexes associées. Réécrivons la somme des cosinus de l'équation (2.6) en notation complexe.

$$z = z_1 + z_2 = Ae^{i(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T})} + Ae^{i(2\pi\frac{(x-\delta)}{\lambda} - 2\pi\frac{t}{T})} \quad (2.17)$$

### Remarque.

- La partie réelle de  $z$  :  $Re(z)$ , est l'amplitude  $u$  de la relation 2.8.
- Nous pouvons mettre  $z$  sous la forme

$$z = Ae^{(-i2\pi \frac{t}{T} + i(2\pi \frac{x}{\lambda}))} \cdot \left[ 1 + e^{(-i2\pi \frac{\delta}{\lambda})} \right] \quad (2.18)$$

Mettons en facteur  $e^{-i2\pi \frac{\delta}{\lambda}}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} z &= \left[ Ae^{(-i2\pi \frac{t}{T} + i(2\pi \frac{x}{\lambda}))} e^{(-i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} \right] \\ &\times \left[ e^{(+i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} + e^{(-i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Mais

$$e^{(+i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} + e^{(-i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} = 2 \cos \frac{2\pi \delta}{2\lambda} \quad (2.20)$$

D'où

$$z = Ae^{[-i2\pi \frac{t}{T} + i2\pi \frac{x}{\lambda}]} e^{(-i2\pi \frac{\delta}{2\lambda})} \quad (2.21)$$

Simplifions l'écriture, nous justifierons plus tard cette utilité, et posons

$$e^{-i2\pi \frac{t}{T} + i(2\pi \frac{x}{\lambda}) - i2\pi \frac{\delta}{2\lambda}} = e^{i\Psi} \quad (2.22)$$

Ce qui donne

$$z = [2A \cos(2\pi \frac{\delta}{2\lambda})] e^{i\Psi} \quad (2.23)$$

L'intensité, en notation complexe, est égale à  $|z|^2$  et cette relation est exprimée par le produit de  $z$  par sa valeur conjuguée  $z^* \Rightarrow |z|^2 = z \cdot z^*$

$$zz^* = [2A \cos(2\pi \frac{\delta}{2\lambda})] e^{i\Psi} [2A \cos(2\pi \frac{\delta}{2\lambda})] e^{-i\Psi} \quad (2.24)$$

D'où

$$z z^* = [2A \cos(2\pi \frac{\delta}{2\lambda})]^2 \quad (2.25)$$

#### Remarque.

Les deux expressions de l'intensité, équations (2.16) et (2.25), diffèrent d'un facteur 1/2. Cette différence n'est pas importante : la plupart du temps nous normalisons l'intensité, ce terme de 1/2 est compris dans la constante de normalisation.

### 2.3.3 Normalisation

Nous normalisons la figure d'interférence observée et l'intensité calculée afin de faciliter la comparaison. Supposons que l'intensité observée ait son maximum au centre, nous pouvons choisir l'échelle de la courbe de façon à ce que le maximum central soit égal à 1. Nous normalisons l'intensité calculée en divisant toutes les valeurs par la valeur correspondant au centre, le maximum central a donc une intensité égale à 1.

*Exemple de normalisation.*

Supposons que l'intensité d'interférence soit décrite par la fonction  $f(x)$  et que pour  $x = 0$  nous ayons  $f(0) = b$ . Écrivons

$$I(x) = f(x)/f(0) = I_0 f(x) \quad (2.26)$$

avec  $I_0 = 1/b$ , il vient :  $I(x) = 1$  quand  $x = 0$  la fonction est normalisée.

Étudions l'exemple (I.4) :

- nous traçons deux courbes : la partie réelle de  $z$ , c'est-à-dire  $u$ , puis sa moyenne dans le temps, nous faisons la comparaison avec  $I = zz^*$ , qui est indépendant du temps.  $I$  est fonction de la différence de marche  $\delta$ .
- nous traçons les franges d'interférence, c'est-à-dire  $I$ .

---

**Exemple I.4. Traçons le graphe de la partie réelle de l'amplitude complexe  $z$ .**

Nous traçons les graphes suivants :

1. **Notation en réel.**

- Variation de l'amplitude  $u$ .
- Variation du carré de l'amplitude  $u^2$ .
- La valeur moyenne dans le temps du deuxième facteur de  $u$ , la courbe se réduit à une constante.

2. **Étude en notation complexe.**

- Variation de la partie réelle de l'amplitude complexe.
- Variation du carré de l'amplitude réelle de  $z$ .
- Courbe de variation de  $zz^*$  en fonction de  $x$ , elle se réduit à une constante.
- Courbe de variation de  $uu^*$  en fonction de  $\delta$ , c'est la courbe de l'intensité observée : nous voyons des franges d'interférence.

Cet exercice est étudié sur le CD.

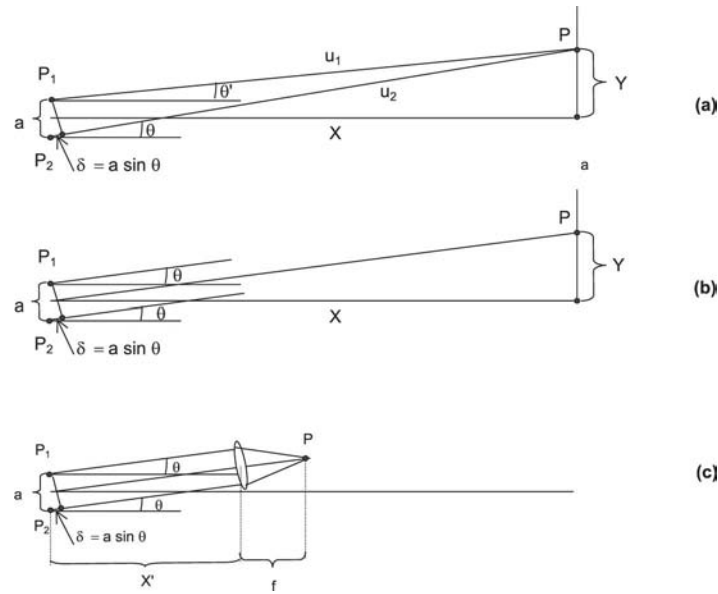
---

## 2.4 Interférométrie par division du front d'onde en deux faisceaux

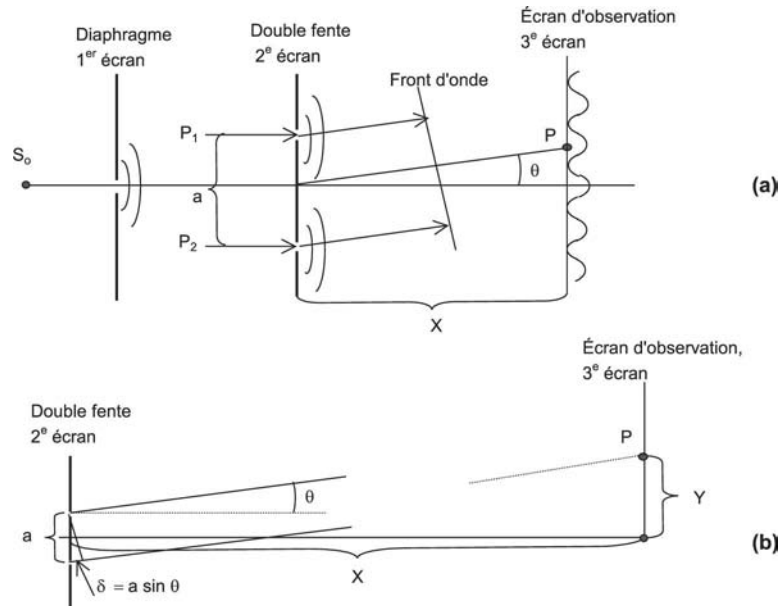
### 2.4.1 Interférence par division du front d'onde

Les ondes se superposent après introduction d'une différence de marche optique  $\delta$ . Nous observons l'intensité résultante qui présente des maxima et minima d'intensité. Cette distribution est appelée *figure d'interférence*.

Nous décrivons le phénomène en considérant que l'onde monochromatique incidente se propage selon la direction  $x$ , vibre selon l'axe  $y$ , et a une grande extension selon  $z$ . Le montage expérimental réalise deux ondes par division du front d'onde. Ces deux ondes sont monochromatiques et font entre elles un angle (fig. 2.4a). Nous observons la figure d'interférence sur un écran situé à grande distance (fig. 2.4b) ou dans le plan focal d'une lentille (fig. 2.4c). Nous pouvons faire l'approximation des faisceaux parallèles et considérer que les angles  $\theta$  et  $\theta'$  sont égaux, (fig. 2.4a et 2.4b). Nous étudions ces ondes dans le même système de coordonnées. Notre œil observe l'intensité résultant de la superposition des ondes, c'est-à-dire  $I = I_0 [A \cos(2\pi\delta/2\lambda)]^2$ . Nous représentons (fig. 2.4c) la figure d'interférence observée dans le plan focal d'une lentille. L'utilisation d'une lentille permet de réduire la longueur du système puisque nous réduisons la distance montage  $\Rightarrow$  écran.



**Fig. 2.4** – Observation de la figure d'interférence obtenue par les ondes issues de deux sources. (a) Géométrie de l'expérience d'interférence sur la surface d'eau (voir fig. 2.3). (b) Observation de la figure d'interférence à grande distance des sources :  $\theta' = \theta$ . (c) Une lentille placée après les sources permet de réduire considérablement la distance d'observation  $X \ll X'$ . Dans ce cas seuls les rayons parallèles forment une image dans le plan focal où se trouve placé l'écran d'observation.



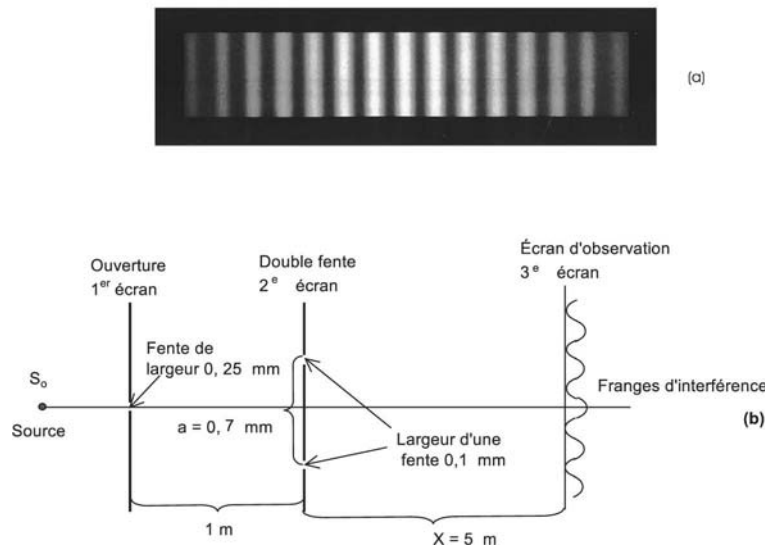
**Fig. 2.5** – Expérience d'Young. (a) Selon le principe de Huygens, les ondes sphériques issues de la source génèrent des ondelettes en  $S_1$  et  $S_2$ . Ces ondelettes sont cohérentes et interfèrent. (b) Système de coordonnées retenues pour étudier la figure d'interférence observée sur l'écran.  $A$  = distance entre les deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$ ,  $X$  = distance comprise entre le plan de  $S_1 S_2$  et l'écran d'observation,  $Y$  = ordonnée sur l'écran.



### 2.4.2 Expérience d'Young (fig. 2.5a)

La lumière issue d'une source  $S_o$  située à grande distance éclaire un écran (1) percé d'un petit trou, qui joue le rôle de source ponctuelle (fig. 2.5a) émettant des ondes sphériques. Ces ondes atteignent un écran (2) placé à grande distance; les ondes sont quasiment planes. Cet écran comprend deux trous qui se comportent comme deux sources ponctuelles éclairées par les mêmes plans d'ondes incidentes. Le plan d'observation est toujours à grande distance. Les plans d'ondes des deux ondes issues des deux sources secondaires forment un petit angle entre eux. Leur superposition donne une figure d'interférence. Soit  $\theta$  l'angle des rayons issus des deux sources, angle mesuré par rapport à l'axe de symétrie (fig. 2.5a). La différence de marche (fig. 2.5b) entre les deux rayons est

$$\delta = a \sin \theta \quad (2.27)$$



**Fig. 2.6** – (a) Photographie de la figure d'interférence observée avec l'expérience d'Young [1]. (b) Données expérimentales pour réaliser l'expérience d'Young [2].

L'approximation des petits angles permet d'écrire :  $\delta = a \frac{Y}{X}$ . Nous calculons l'intensité observée sur l'écran à partir de la relation (2.25). Nous obtenons

$$I(Y) = I_0 [\cos(\pi \frac{aY}{X\lambda})]^2 \quad (2.28)$$

*Interférence constructive.*

L'intensité est maximum et nous observons une frange brillante quand

$$\delta = \frac{Ya}{X} = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \quad (2.29)$$

*Interférence destructive.*

L'intensité est égale à zéro. La frange observée est sombre quand

$$\delta = \frac{Ya}{X} = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots \quad (2.30)$$

Nous représentons (fig. 2.6) un montage expérimental pour réaliser l'expérience d'Young, et observer les franges sur un écran. Nous traçons (exemple I.5) la courbe de variation de l'intensité en fonction de la coordonnée  $Y$  du plan d'observation. Nous traçons la figure d'interférence (équation 2.28).

---

**Exemple I.5. Étudions les franges de l'expérience d'Young.**

$\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,  $a = 0,4\text{ mm}$ ,  $X = 4\,000\text{ mm}$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.5**

Tracer à nouveau la courbe d'interférence pour les valeurs suivantes des paramètres.

- Longueur d'onde  $\lambda/2$  puis  $2\lambda$ .
  - Comparer les modifications de la figure d'interférence selon les valeurs du rapport  $a/\lambda = 1/2$  puis  $a/\lambda = 2$ .
  - Constater que la figure d'interférence ne change pas si nous conservons constant le rapport  $(a/\lambda)(Y/X)$ . Le rapport  $Y/X$  désigne l'angle sous lequel sont observées les franges.
- 

## Miroir de Llyod

Le montage de Llyod ne comprend qu'un seul miroir plan. Une partie du faisceau incident, par exemple la moitié supérieure, atteint directement l'écran d'observation, l'autre partie, la moitié inférieure du faisceau, est réfléchiée par le miroir sous un angle d'incidence faible par rapport au plan du miroir (fig. 2.7). Les deux faisceaux se superposent ensuite. Nous observons la figure d'interférence sur un écran. Pour le calcul de la différence de marche  $\delta$  entre les deux faisceaux, nous faisons intervenir une source  $S'$  fictive, symétrique de  $S$  par rapport au plan du miroir. Si  $a$  désigne la distance entre ces deux sources, la distance de  $S'$  au plan du miroir est  $a/2$ . L'image virtuelle  $S'$  est derrière le miroir. Le calcul est alors le même que celui de l'expérience des fentes d'Young. Nous obtenons :  $\delta = Ya/X$ .

**Déphasage de  $\pi$ .**

La frange centrale d'interférence sur l'écran  $Y = 0$  devrait être brillante et correspondre à un maximum d'intensité. Nous constatons que cette frange est noire : l'intensité est minimum. L'onde réfléchiée a pris une avance de phase de  $\pi$  par rapport à l'onde directe : il y a donc apparition, lors de la réflexion air  $\Rightarrow$  verre, d'une différence de marche supplémentaire de  $\lambda/2$  ce qui introduit un déphasage de  $\pi$  et l'un des termes s'écrit  $\cos\{2\pi(x/\lambda - t/T) + \pi\}$ . Après superposition il apparaît  $\pi/2$  dans l'expression de l'amplitude utilisée pour l'intensité, nous avons

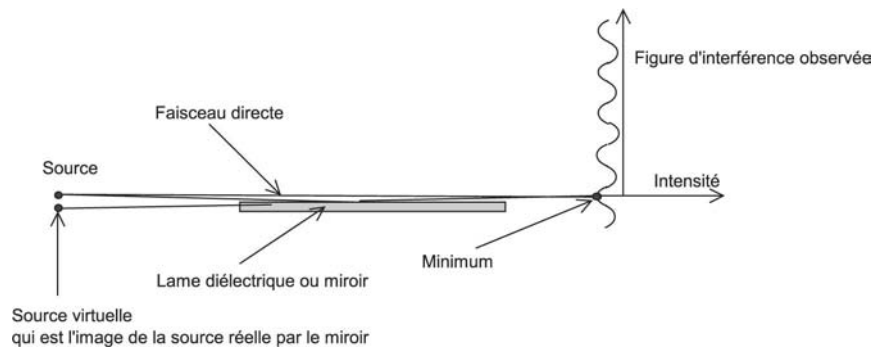
$$I(Y) = I_0 \left[ \cos \pi \left( \frac{aY}{X\lambda} \right) + \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (2.31)$$

Nous observons une *interférence constructive* : c'est-à-dire un maximum, quand

$$\delta = \frac{aY}{X} + \frac{\lambda}{2} = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \quad (2.32)$$

Nous observons une *interférence destructive* : c'est-à-dire un minimum quand

$$\delta = \frac{aY}{X} + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (2.33)$$



**Fig. 2.7** – Miroir de Llyod. Une partie du faisceau incident est directement reçue sur l'écran, l'autre partie est réfléchi par le miroir sous une faible incidence. Nous observons les interférences de ces deux faisceaux dans la région commune à ces deux faisceaux. La source est très voisine du plan du miroir ; la première frange est sensiblement dans le même plan que la surface du miroir. La première frange est sombre, ce qui correspond à un minimum d'interférence car il y a apparition d'un déphasage de  $\pi$  lors de la réflexion air  $\Rightarrow$  verre. Nous avons exagéré, sur le schéma, les valeurs de  $\theta$  angle d'incidence.

jNous traçons (exemple I.6) l'intensité observée en fonction de  $Y$ . Au centre  $Y = 0$ , l'intensité est égale à zéro, elle est minimum. Dans l'expérience d'Young, l'intensité au centre est maximum.

**Exemple I.6. Étudions les franges d'interférence de l'expérience du miroir de Llyod. Traçons le graphe de l'intensité en prenant :**  $\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,  $a = 0,4\text{ mm}$ ,  $X = 4\,000\text{ mm}$ .

La première frange est sombre, il y a donc un minimum quand  $Y = 0$ , car il y a apparition d'un déphasage de  $\pi$  lors de la réflexion air  $\Rightarrow$  verre. La formule de la différence de marche est la même que celle de l'expérience d'Young, au déphasage  $\pi$  près.

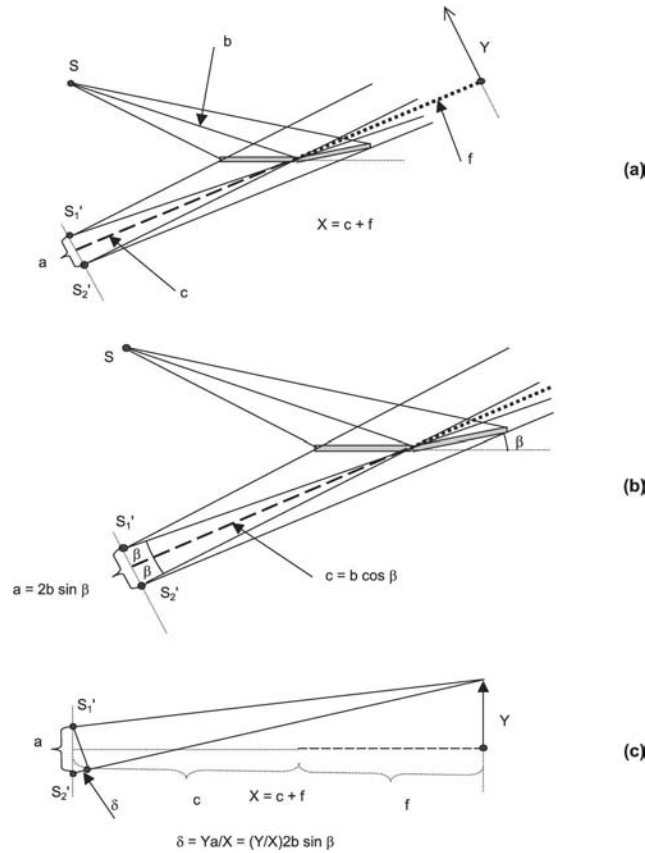
Cette étude est faite sur le CD.

## Miroirs de Fresnel

Historiquement, l'expérience de Fresnel a été réalisée afin de montrer l'aspect ondulatoire de la lumière. Aujourd'hui, cette expérience reste toujours d'actualité car les franges obtenues dépendent de l'angle compris entre les deux miroirs et nous pouvons choisir cet angle afin que le montage soit utilisé pour les courtes longueurs d'onde aussi petites que celles des rayons  $X$ . Deux miroirs plans ont une arête commune. L'un fait un angle  $\beta$  petit par rapport à l'autre (fig. 2.8a). Le front d'onde, d'une onde sphérique créée, est divisé en deux lors de l'incidence sur les deux miroirs. Chaque partie de l'onde se réfléchit sur l'un des miroirs et les deux faisceaux réfléchis se recomposent à grande distance, en conséquence l'onde due à la superposition est quasiment plane. Nous observons, sur un écran, l'intensité de l'onde résultant de la superposition des amplitudes. Les deux fronts d'onde forment un angle  $2\beta$ , leur superposition donne des franges d'interférence.

### Miroirs de Fresnel

1.  $S$  est une source ponctuelle ou fente ;  $S'_1$  et  $S'_2$  sont les images virtuelles de  $S$ . Elles sont vues sous un angle  $\beta$  à partir de l'arête commune aux deux miroirs. La lumière subit



**Fig. 2.8** – Miroirs de Fresnel. (a) et (b)  $S$  est une source ponctuelle ou fente,  $S_1'$  et  $S_2'$  sont les images virtuelles de  $S$ . Elles sont vues sous un angle  $\beta$  à partir de l'arête commune aux deux miroirs. La lumière subit donc une réflexion d'un angle  $2\beta$ . Nous établissons la relation  $c = 2b \sin \beta$ . (c) Le calcul de la différence de marche à partir de  $S_1'$  et  $S_2'$  est similaire au calcul établi dans l'expérience des fentes ou des trous d'Young.

donc une réflexion d'un angle  $2\beta$ . Nous établissons la relation  $c = 2b \sin \beta$ .

2. Le calcul de la différence de marche à partir de  $S_1'$  et  $S_2'$  est similaire au calcul établi dans l'expérience des fentes ou des trous d'Young.

*Calcul de la différence de marche  $\delta$  entre les deux ondes.*

Nous utilisons deux sources virtuelles  $S_1'$  et  $S_2'$  distantes de  $a$  (fig. 2.8a), nous voyons (fig. 2.8b) la similarité avec l'expérience d'Young. La distance comprise entre le plan des sources et l'écran d'observation est  $c + f = X$ . La différence de marche optique devient  $\delta = a(Y/X)$ . La relation précédente s'écrit

$$\delta = \frac{(Y2b \sin \beta)}{(c + f)} \quad (2.34)$$

D'où l'intensité

$$I(Y) = I_0 \left[ \cos \frac{(\pi Y 2b \sin \beta)}{[(c + f)\lambda]} \right]^2 \quad (2.35)$$

**Interférences constructives :** maxima d'intensité, franges brillantes sur l'écran. Elles ont lieu quand

$$\delta = Y2b \frac{\sin \beta}{(c+f)} = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \quad (2.36)$$

**Interférences destructives :** minima nuls, franges sombres observées sur l'écran.

$$\delta = Y2b \frac{\sin \beta}{(c+f)} = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (2.37)$$

*Remarque.*

Nous traçons (exemple I.7) l'intensité obtenue dans l'expérience des miroirs de Fresnel. Nous voyons que, au centre, il y a un maximum d'intensité puisque chaque faisceau, réfléchi sur un miroir, subit une avance de phase de  $\pi$ , puis nous comparons (exemple I.8) les intensités obtenues par chaque expérience : expérience d'Young, expérience du miroir de Lloyd, expérience des miroirs de Fresnel. Nous voyons le rôle du déphasage de  $\pi$  dans le décalage des franges observées.

**Exemple I.7. Étudions les franges d'interférence obtenues dans l'expérience des miroirs de Fresnel et traçons le graphe de l'intensité selon l'équation (2.35).**

$\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,  $b = 1\,000\text{ mm}$ ,  $f = 5\,000\text{ mm}$ ,  $\beta = 0,000\,3$ , puis  $\beta = 0,000\,4$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.7**

Nous appelons *interfrange* la distance comprise entre deux maxima successifs, distance mesurée sur l'écran d'observation.

1. *Modification de la figure d'interférence.*
  - Comment sont modifiées les franges quand nous changeons la valeur de  $\lambda$  ?
  - Quelle doit être la variation de  $\lambda$  afin que l'interfrange ait une largeur deux fois plus grande ?
  - Quelle doit être la variation de  $\lambda$  afin que l'interfrange ait une largeur deux fois plus petite ?
2. *Comment sont modifiées les franges d'interférence quand nous augmentons ou diminuons progressivement  $b$  ?*
  - Quelle doit être la variation de  $b$  pour que l'interfrange ait une largeur deux fois plus grande ?
  - Quelle doit être la variation de  $b$  pour que l'interfrange ait une largeur deux fois plus petite ?
3. *Quelle valeur doit avoir  $b$  pour que l'interfrange soit de 500 microns quand l'expérience est réalisée avec les rayons X de longueur d'onde  $\lambda = 500\text{ Å}$ . ( $1\text{ Å} = 10^{-10}\text{ m}$ .)*

**Exemple I.8. Comparons les intensités des franges d'interférence obtenues dans les expériences d'Young, Lloyd et Fresnel.**

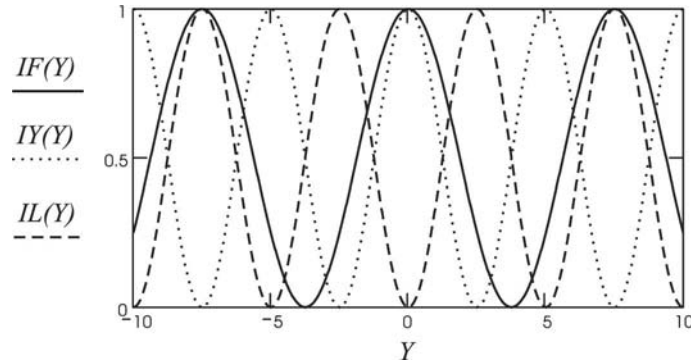
1. *Miroirs de Fresnel.*

$Y$ ,  $c$ ,  $f$ ,  $b$ , et  $\lambda$  sont exprimés en mm,  $\beta$  en rad ; la distance  $c$  est égale à  $b$  dans le calcul de  $X = c + f$ .

$\text{Con} = 1$ ,  $\lambda = 0,000\,5$ ,  $b = 1\,000$ ,  $f = 5\,000$   $c = b \cos(\beta)$   $\beta = 0,000\,2$

$Y = -10, -9,99 \dots 10$ , et  $\text{IF}(Y) = \text{Con} \cdot \cos \left( \pi \cdot \frac{Y \cdot 2 \cdot \frac{b}{c+f} \cdot \sin(\beta)}{\lambda} \right)^2$

2. *Expérience d'Young.*  $a = 0,4$ ,  $X = 4\,000$ ,  $\lambda = 0,000\,5$ ,  $\text{IY}(Y) = \text{Con} \cdot \cos \left( \pi \cdot \frac{Y \cdot a}{\lambda \cdot X} \right)^2$



### 3. Expérience de Lloyd.

Le résultat est similaire à celui de l'expérience d'Young, mais il y a de plus un facteur de phase de  $\pi$ .

$$IL(Y) = \text{Con} \cdot \cos \left( \pi \cdot \frac{Y \cdot a}{\lambda \cdot X} + \frac{\pi}{2} \right)^2$$

Au centre de symétrie, pour  $Y = 0$ , les franges d'Young ont un maximum d'intensité; les franges de Lloyd un minimum. Les franges, dans les expériences d'Young et Lloyd, sont décalées de  $\lambda/2$ .

## 2.5 Interférométrie : division par deux de l'amplitude du faisceau

### 2.5.1 Description d'un modèle diviseur d'amplitude

#### Hypothèses.

- Nous supposons que l'onde incidente monochromatique se propage selon l'axe  $x$ , vibre selon la direction  $y$ , et a une extension suffisamment large selon  $z$ .
- L'onde est divisée en deux parties par une surface semi-réfléchissante, donc elle transmet 50% de l'énergie dans beaucoup de montages optiques, c'est une lame séparatrice. Le faisceau est partiellement réfléchi et partiellement transmis. Ensuite, les faisceaux passent à travers le montage expérimental où ils ne parcourent pas le même trajet. Puis ils sont superposés après réflexion ou transmission, par une deuxième lame séparatrice. Ils se superposent et sont parallèles en quittant l'appareil.

La séparation en deux faisceaux, par division d'amplitude de l'onde, est différente de la séparation par division du front d'onde. Dans ce dernier cas, les deux ondes obtenues par division du front d'onde se déplacent sous un angle, tandis que lors d'une division d'amplitude en deux ondes celles-ci peuvent, selon le montage, être parallèles et se diriger dans la même direction. La différence entre séparation d'une onde par division d'amplitude, ou par division du front, est liée au principe de conservation de l'énergie. Il est impossible de superposer deux faisceaux de telle façon que toute la lumière se propage selon une seule direction.

Nous observons la figure d'interférence, c'est-à-dire les franges d'interférence, sur un écran placé à grande distance. L'intensité théorique, celle de l'équation (2.25), est :

$I = zz^* = I_0[A \cos(2\pi\delta/2\lambda)]^2$ . La figure d'interférence est généralement observée dans le plan focal d'une lentille réduisant ainsi considérablement la distance entre le montage optique et l'écran d'observation.

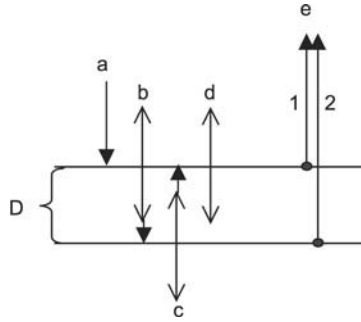
### 2.5.2 lame à faces parallèles

#### Hypothèses.

$D$  = épaisseur de la lame et  $n$  = indice de la lame placée dans l'air dont l'indice est égal à 1, nous avons  $n > 1$ .

*Incidence voisine de la normale aux faces de la lame.*

Le faisceau de lumière incident monochromatique est partiellement réfléchi en  $a$  (fig. 2.9) et partiellement transmis. Nous désignons par (1) ce faisceau réfléchi. En  $c$  sur l'interface de sortie de la lame, ce dernier faisceau est à nouveau réfléchi partiellement et transmis partiellement. Le faisceau réfléchi sur la surface incidente puis transmis par la face de sortie est désigné par  $d$ .



**Fig. 2.9** – lame à faces parallèles d'indice  $n$  d'épaisseur  $D$ . (a) Faisceau de lumière parallèle incident. (b) Division de l'amplitude du faisceau par réflexion partielle sur la face d'entrée. (c) Division partielle du faisceau sur la face de sortie. (d) Nouvelle division sur la face d'entrée dans le sens verre  $\Rightarrow$  air. (e) Les deux ondes (1) et (2) se superposent et forment des franges d'interférence, soit à l'infini, soit dans le plan focal d'une lentille.

Nous ne retenons que le faisceau (1) réfléchi sur la première face de la lame, et le faisceau (2) qui est le faisceau réfléchi sur la face de sortie puis transmis, à nouveau, par la face d'entrée de la lame. Nous justifierons ultérieurement ce choix.

#### Trajet suivi par la lumière.

1. Faisceau de lumière parallèle incident.
2. Division de l'amplitude du faisceau par réflexion partielle sur la face d'entrée.
3. Division partielle du faisceau sur la face de sortie.
4. Nouvelle division sur la face d'entrée dans le sens verre  $\Rightarrow$  air.
5. Les deux ondes (1) et (2) se superposent et forment des franges d'interférence, soit à l'infini, soit dans le plan focal d'une lentille.

La différence de *parcours géométrique* sous incidence normale entre les deux rayons est  $2D$ , mais la *différence de marche optique* entre les rayons (1) et (2) est  $2Dn$ , nous devons multiplier par l'indice  $n$  d'où

$$\delta = 2Dn \quad (2.38)$$

Les ondes (1) et (2) se propagent dans la même direction. L'onde (1) a pris une avance de phase de  $\pi$  par rapport à l'onde (2) lors de sa réflexion air  $\Rightarrow$  verre sur la face supérieure de la lame. L'onde (2) a bien subi aussi une réflexion mais dans le sens verre  $\Rightarrow$  air sur la face de sortie. Cette réflexion n'entraîne pas de déphasage. La différence de chemin géométrique entre les deux rayons est  $2D$ . Compte tenu de l'indice  $n$  de la lame, et de cette avance de phase  $\pi$  à laquelle correspond une différence de marche de  $\lambda/2$ , la différence de marche optique devient

$$\delta = 2Dn + \frac{\lambda}{2} \quad (2.39)$$

$$I = I_0 [\cos\{\pi(\frac{2Dn + \frac{\lambda}{2}}{\lambda})\}]^2 \quad (2.40)$$

soit

$$I = I_0 [\cos \pi(\frac{2Dn}{\lambda}) + \frac{\pi}{2}]^2 \quad (2.41)$$

**Interférence constructive.**

$$\delta = 2Dn + \frac{\lambda}{2} = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \quad (2.42)$$

et

$$2Dn = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (2.43)$$

**Interférence destructive.**

$$\delta = 2Dn + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (2.44)$$

et

$$2Dn = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots \quad (2.45)$$

Les maxima et les minima dépendent de l'épaisseur de la lame et de son indice  $n$ . Les maxima ont lieu quand la différence de marche est un multiple impair de demi-longueurs d'onde ; les minima quand cette différence de marche est un multiple de longueurs d'onde.

Nous observons fréquemment dans la vie quotidienne des franges d'interférence d'une lame à faces parallèles. Ainsi, les bulles de savon faites par les enfants apparaissent multicolores, nous observons sur la bulle les franges d'égale épaisseur de cette lame formant la bulle ; les différentes couleurs viennent du fait que la lumière incidente est la lumière blanche du soleil contenant un grand nombre de longueurs d'onde. Chaque longueur d'onde donne son propre système de franges.

Le premier graphe de l'exemple (I.9) montre la dépendance des franges en fonction de l'épaisseur de la lame quand la longueur d'onde et l'indice restent constants. Le second graphe montre la dépendance en fonction de la longueur d'onde quand l'épaisseur et l'indice restent constants :  $D = 0,05$  et  $n = 1,5$ . Nous observons qu'il n'y a pas d'interférence sur lame mince quand la longueur d'onde devient trop grande. Elle doit être inférieure à la valeur limite :  $\lambda/2 \leq D$ .

---

**Exemple I.9. Lame à faces parallèles, incidence normale. Figure d'interférence par deux faisceaux réfléchis par une lame à faces parallèles.**

Soit  $n_2$  l'indice de la lame placée dans l'air dont l'indice est  $n_1 = 1$ . Nous traçons deux courbes de variation de l'intensité correspondant aux deux études suivantes :



- courbe en fonction des variations de l'épaisseur  $D$ .  
 $\lambda$  et  $n_2$  restent constants :  $\lambda = 0,000\,5$ ,  $n_2 = 1,5$ ,
- courbe en fonction des variations de  $\lambda$ .  
 $D$  et  $n_2$  restent constants :  $D = 0,05$ ,  $n_2 = 1,5$ .

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application I.9

1. Modification de la formule  $I(D) = \{\cos(2\pi \frac{Dn}{\lambda} + \frac{\lambda}{2})\}^2$  quand le milieu extérieur n'est plus l'air :  $n_1 \neq 1$ .
2. Considérer les configurations suivantes.
  - lame d'air comprise dans le verre  $n_1 = 1,5$ ,  $n_2 = 1$
  - Film d'eau sur une vitre lumière se propageant dans le sens air  $\Rightarrow$  film  $n_1 = 1,33$ ,  $n_2 = 1,5$ , milieu incident : l'air  $n = 1$ .
  - Film d'eau sur la vitre : la lumière est dans le sens vitre  $\Rightarrow$  film.
3. Compter cinq maxima et minima sur la courbe d'intensité, lire la distance  $D$  comprise entre ces cinq franges puis recalculer  $\lambda$  connaissant  $n$ .
4. Courbe d'intensité en fonction de  $\lambda$ , incidence normale,  $D$  constant. Quand la longueur d'onde  $\lambda$  devient plus grande que l'épaisseur de la lame, la dernière frange brillante est observée pour une valeur de  $\lambda$  dépendant de  $D$  et  $n$ . Établir l'expression littérale reliant ces trois paramètres pour ce cas particulier.

#### Coin d'air.

Le dispositif comprend deux lames à faces parallèles disposées dans l'air, l'une au-dessus de l'autre ; elles font, entre elles, un angle  $\alpha$  petit. Par exemple nous pouvons choisir deux lamelles superposées de microscope, et nous glissons entre elles un cheveu. Le coin d'air est compris entre les deux lames d'indice  $n_1 = 1$ . Nous calculons, avec la méthode analogue à celle de l'étude de la lame à faces parallèles, la différence de marche entre les faisceaux (1) et (2) (fig. 2.10a).

Le faisceau de lumière a une incidence voisine de la normale à la face supérieure du coin. La différence de marche entre les deux faisceaux (1) et (2) est  $\delta = 2x \tan \alpha$ ,  $\alpha$  = angle du coin,  $x$  = distance sur la lame supérieure à partir de l'arête du coin.

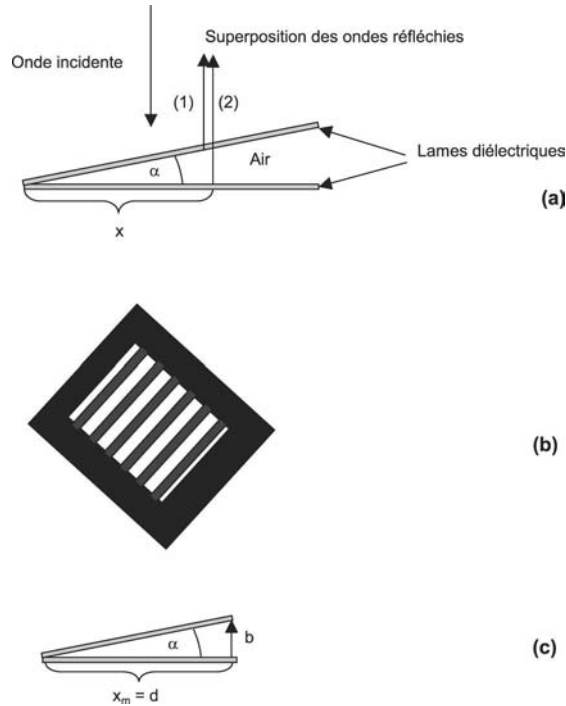
Lors de la réflexion d'une onde sur la face inférieure, dans le sens air  $\Rightarrow$  verre, elle a une différence de phase supplémentaire de  $\pi$  équivalente à une différence de marche de  $\lambda/2$ . En conséquence, la différence de marche optique devient

$$\delta = 2x \tan \alpha + \frac{\lambda}{2} \quad (2.46)$$

Les deux ondes (1) et (2) se superposent ensuite. Nous observons des franges d'interférence au voisinage de la face supérieure. *Ce sont des droites parallèles à l'arête du coin.*

**Interférence constructive : maxima, franges brillantes.**

$$2x \tan \alpha = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots, (2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (2.47)$$



**Fig. 2.10** – Coin d'air. (a) Coin d'air entre deux lames de verre de microscope faisant entre elles un petit angle  $\alpha$ ; quand la distance  $x$  augmente, la différence de marche entre les rayons (1) et (2) augmente et la superposition des deux faisceaux donne des franges d'égale épaisseur localisées sur la lame supérieure. (b) Franges d'interférence observées, les lames ont une épaisseur de  $\lambda/10$ . (c) La hauteur  $b$  à la distance  $d$  de l'arête est donnée par la relation :  $x_m = d \tan \alpha = b/d$ .

### Interférence destructive, franges sombres.

$$2x \tan \alpha = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots, m\lambda \quad (2.48)$$

La hauteur  $D'$  du coin d'air pour le  $m^{\text{ième}}$  maximum,  $m$  nombre entier, est donnée par la relation

$$D' = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (2.49)$$

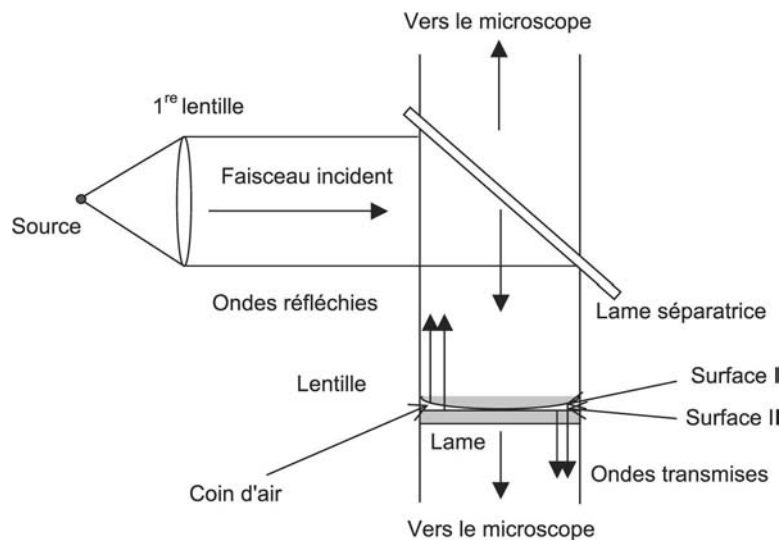
$$D' = m \frac{\lambda}{2} \quad (2.50)$$

Avec  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  l'intensité s'écrit

$$I = I_0 \left[ \cos \frac{(\pi 2x \tan \alpha)}{\lambda} + \frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (2.51)$$

Les interférences obtenues avec le coin d'air ont une application pratique lorsque nous désirons vérifier la planéité d'une surface que l'on polit (Fig. 2.10b). Une lame plane est placée au-dessus de la lame que l'on polit, nous l'éclairons par un faisceau de lumière monochromatique. Les maxima et minima ne sont pas des franges rectilignes au-dessus d'une irrégularité de surface. Si une frange sombre est déformée, nous connaissons l'ordre d'interférence de cette frange, donc la hauteur du coin à cet endroit. Connaissant la longueur d'onde nous pouvons

évaluer la déformation par rapport à l'interfrange d'où, par calcul, la profondeur et la forme de la déformation. Pratiquement, une irrégularité correspondant à une fraction de longueur d'onde peut être détectée. Les franges d'égale épaisseur sont appelées franges de Fizeau.



**Fig. 2.11** – Anneaux de Newton. La lentille 1 forme un faisceau de lumière parallèle. La lame séparatrice permet d'obtenir le faisceau incident sur la face supérieure de la lentille d'expérience. Nous observons les anneaux d'interférence obtenus par la différence de marche entre les deux rayons successifs (1) et (2). L'observation se fait soit au-dessus du montage (observation des franges par réflexion), soit par observation au-dessous du montage (observation des franges par transmission).

Réalisons la petite expérience suivante : plaçons un cheveu entre deux lamelles de microscope, nous formons ainsi un coin d'air, les formules (2.46), (2.47) et (2.48) permettent de calculer le diamètre du cheveu.

**Exemple I.10.** Étudions les franges d'interférence du coin d'air.

1. Nous traçons la courbe d'intensité des franges du coin d'air en fonction de la distance  $x$ . Nous prenons :  $\alpha = 0,002$  Rad et  $\lambda = 0,000\,5$  mm. L'interfrange, distance entre deux maxima successifs, est constante :  $\lambda/(2 \tan \alpha)$ .
2. Puis nous traçons la relation donnant la hauteur en fonction de  $x$ . Quand l'angle  $\alpha$  est fixe nous utilisons un facteur multiplicatif  $a$ . La première frange est sombre, nous avons déjà vu ce résultat avec l'expérience du miroir de Llyod :  $D' = 0$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.10**

1. À partir de l'expression des interférences constructive :  $2x \tan \alpha + \lambda/2 = 0, \lambda, 2\lambda, \dots m\lambda$ , montrer que l'interfrange  $i$ , distance entre deux maxima successifs, est

$$i = \Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \lambda/(2 \tan \alpha)$$

$x_m$  est l'abscisse de la  $m^{\text{ième}}$  frange.

2. Puisque  $\frac{\Delta y_m}{\Delta x_m} = \tan \alpha$ , avec  $\Delta y_m =$  différence de hauteur des lames entre deux franges brillantes successives, ou deux franges sombres successives, montrer que :  $\Delta y_m = \lambda/2$ .
  3. Supposons que nous observions  $M$  franges sombres sur une longueur  $x_m = d$ , déterminer la hauteur  $b$  en ce point (fig. 2.10a). Puisque  $b/d = \tan \alpha = (\lambda/2)/x_m$ , montrer que l'on a :  $b = (\lambda/2)M$ .
  4. Calculer à nouveau l'angle  $\alpha$ .
    - Tracer la courbe d'intensité des franges  $\lambda = 0,000\,54$  et  $\alpha = 0,002\,3$ .
    - Trouver l'abscisse  $x$  à la 23<sup>ème</sup> frange sachant que  $y = (\lambda/2)23$ . Calculer puis comparer avec la valeur indiquée.
  5. Calculer une nouvelle hauteur de  $y$  en choisissant une autre valeur de  $x_m$  pour un coin d'eau, indice  $n = 1,33$ , compris entre deux lames de verre d'indice 1,5.
- 

### Anneaux de Newton.

Une lentille semi-sphérique est posée sur une lame de verre (fig. 2.11). Le rayon de courbure de sa face sphérique est grand, puisqu'elle repose sur la lame, il y a contact du sommet avec la lame, au voisinage de celui-ci il y a un coin d'air mais la symétrie est de révolution. Au centre, la hauteur d'air est égale à zéro (fig. 2.11). Les franges d'interférence d'égale épaisseur sont une succession d'anneaux sombres et brillants appelés *anneaux de Newton*. Cette expérience permet de calculer le rayon d'une surface sphérique.

Soit  $R$  le rayon de courbure de la surface sphérique de la lentille. Plaçons-nous à la distance  $r$  sur la surface plane de la lentille, fig. 2.12. En ce point la hauteur d'air sous la lentille est  $D$  et

$$R^2 = r^2 + (R - D)^2 \quad (2.52)$$

et

$$D(r) = R - \sqrt{(R^2 - r^2)} \quad (2.53)$$

*Intensité transmise.*

$$I(r) = I_0 \cos^2\left(\pi \frac{2D(r)}{\lambda}\right) \quad (2.54)$$

*Intensité réfléchie.*

Nous devons tenir compte d'une différence de marche supplémentaire de  $\lambda/2$ , c'est-à-dire d'un déphasage supplémentaire de  $\pi$  pour l'onde qui se réfléchit sur la face supérieure de la lame de verre dans le sens air  $\Rightarrow$  verre. Dans l'expression de l'intensité réfléchie ce terme devient  $\pi/2$ .

$$I(r) = I_0 \left\{ \cos\left(\pi \frac{2D(r)}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \right\}^2 \quad (2.55)$$

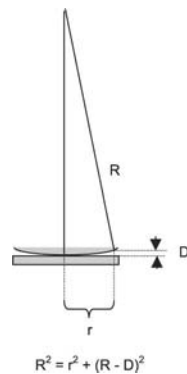
*Interférence constructive, observation des ondes réfléchies.*

la condition pour observer des interférences constructives devient :

$$\delta = D(r) + \frac{\lambda}{2} = 0, \lambda, 2\lambda, \dots \quad (2.56)$$

*Interférence destructive.*

$$\delta = D(r) + \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots \quad (2.57)$$

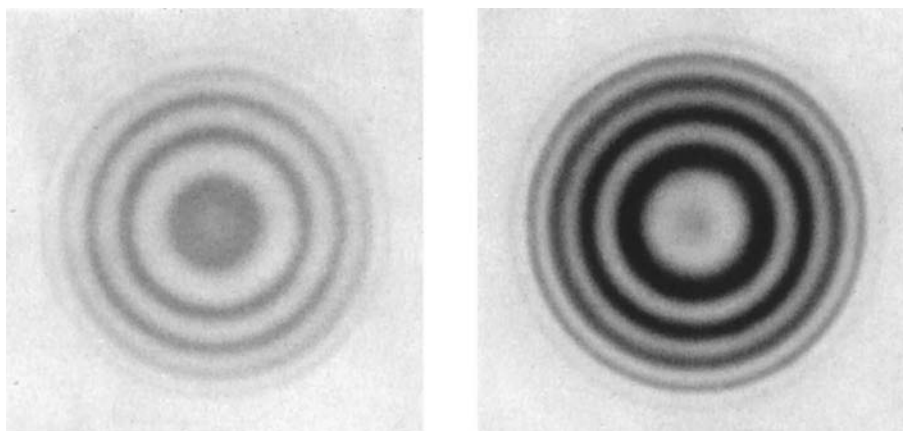


**Fig. 2.12** – Coordonnées retenues pour l'étude des anneaux de Newton.

### Intensité transmise.

Il n'y pas la différence de marche supplémentaire de  $\lambda/2$ . La relation (2.54) prévoit donc, qu'au centre des anneaux observés par transmission, la frange centrale est brillante : nous observons une tache brillante (fig. 2.13b).

Nous représentons (exemple I.11) la courbe de l'intensité réfléchie et la courbe de l'intensité transmise.



**Fig. 2.13** – Anneaux de Newton observés. (a) Par réflexion. (b) Par transmission [1].

### Exemple I.11. Anneaux de Newton.

Nous traçons les courbes d'intensité des anneaux observés par réflexion, puis par transmission. Les courbes sont tracées en fonction du paramètre  $r$  distance du point de calcul sur la lentille par rapport à l'axe de symétrie,  $\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,  $R = 2\,000\text{ mm}$ .

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application I.11

Calcul du rayon  $R$ , observation par réflexion.

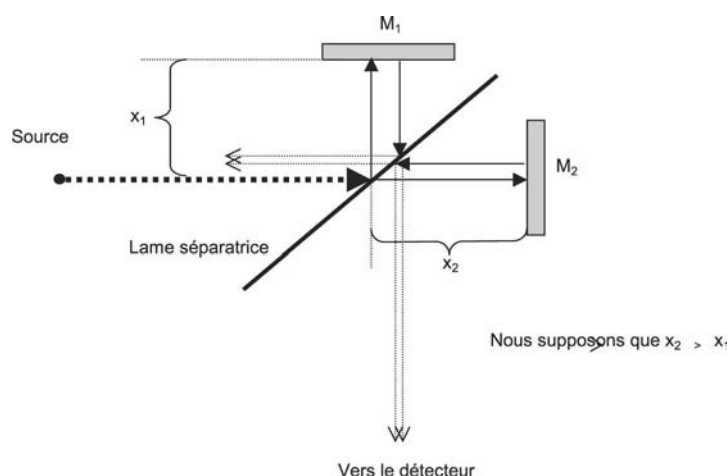
1. Montrer que, sous la  $m^{\text{ième}}$  frange sombre, la hauteur d'air est  $\lambda/2$ .
2. Nous lisons la valeur de  $r_m$  de la  $m^{\text{ième}}$  frange sombre. Montrer que nous calculons  $R$  à partir de la relation :  $(m\lambda/2 - R)^2 = R^2 - r_m^2$ .

### 2.5.3 Interféromètre de Michelson, franges d'Heidinger, franges de Fizeau

Albert Michelson conçut cet interféromètre pour mesurer avec précision des longueurs. Il devint célèbre en montrant, à l'aide de cet interféromètre, l'absence d'éther dans l'univers, et les physiciens, en 1880, donnèrent son nom à cet interféromètre.

Depuis quelques années, l'interféromètre de Michelson est devenu, avec le développement de l'informatique, le spectromètre par transformée de Fourier le plus utilisé. Nous étudierons dans le chapitre 5 la transformée de Fourier puis la spectroscopie par *transformée de Fourier*.

#### Interféromètre de Michelson, incidence normale.



**Fig. 2.14** – Interféromètre de Michelson. Les deux parcours compris entre la lame séparatrice à chaque miroir sont différents, les deux lames ne sont pas ici à égale distance de la lame séparatrice et :  $x_1 \neq x_2$ .

Le principe de l'interféromètre de Michelson est représenté sur la figure 2.14. L'amplitude de l'onde incidente est :

- partiellement réfléchi à 90 deg par la lame séparatrice vers le miroir plan  $M_1$ . Nous désignons cette onde par (1).
- partiellement transmise par la lame séparatrice vers le miroir plan  $M_2$ . Nous désignons cette onde par (2).

#### *Lame séparatrice, incidence normale.*

C'est une lame à faces parallèles. Nous étudierons plus tard ses propriétés de réflexions et transmissions. Nous discuterons les réflexions multiples sur ses faces. Pour l'instant, nous supposons que cette lame est idéale, elle réfléchit 50 % de l'énergie et en transmet 50 %. Nous admettons qu'elle n'introduit pas de déphasage supplémentaire.

L'onde réfléchi par la lame se dirige vers  $M_1$  où elle est à nouveau réfléchi, et revient sur la lame séparatrice pour une nouvelle division de son amplitude. Désignons par  $x_1$  la distance comprise entre la lame et  $M_1$ . La distance parcourue dans le trajet : lame  $\Rightarrow M_1 \Rightarrow$  lame est  $2x_1$ . Nous notons que l'onde à nouveau réfléchi par la lame retourne vers la source.

Quant au faisceau (2) il est réfléchi par  $M_2$ , revient sur la lame séparatrice pour une deuxième division de son amplitude. Désignons par  $x_2$  la distance comprise entre la lame et  $M_2$ . La

distance parcourue dans le trajet : lame  $\Rightarrow M_2 \Rightarrow$  lame est  $2x_2$ . Nous notons que l'onde à nouveau transmise par la lame retourne vers la source. Ensuite les faisceaux (1) et (2) se superposent et se dirigent vers le détecteur.

Quand  $x_2 \neq x_1$  il y a une différence de marche  $\delta$  entre les faisceaux (1) et (2).

$$\delta = 2D = 2(x_2 - x_1) \quad (2.58)$$

$D = (x_2 - x_1)$  = différence de distance des miroirs  $M_1$  et  $M_2$  par rapport à la lame séparatrice. Nous supposons que  $x_1 > x_1$ .

Nous observons une interférence constructive, franges brillantes quand

$$\delta = m\lambda \quad (2.59)$$

Nous observons une interférence destructive, franges sombres quand

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (2.60)$$

$m$  est toujours un nombre entier,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

### Intensité.

L'expression de l'intensité est dérivée de la relation (2.28).

$$I = 4A^2 \cos^2\left(\pi \frac{2D}{\lambda}\right) \quad (2.61)$$

Nous traçons (exemple I.12) les intensités des franges en fonction de  $D$ , puis en fonction de la longueur d'onde.

### Exemple I.12. Interféromètre de Michelson.

Nous traçons successivement :

- le graphe de l'intensité reçue sur le détecteur en fonction de  $D$ . L'un des miroirs est fixe l'autre se déplace parallèlement à lui-même.  $\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,
- le graphe de l'intensité en fonction de  $\lambda$ ,  $D$  reste fixe :  $D = 0,003$ .

Cette étude est faite sur le CD.

### Application I.12

1. Étude de la résolution en fonction du déplacement  $D$ .

- (a) Tracer deux graphes d'intensité : l'un pour la longueur d'onde  $\lambda$ , l'autre pour la longueur d'onde  $\lambda\lambda = \lambda + \Delta\lambda$ , prendre par exemple  $\lambda\lambda = 0,000\,52$  et  $\lambda = 0,000\,5$ .
- (b) Observer que la distance entre deux franges successives s'élargit au fur et à mesure que  $m$  devient de plus en plus grand. Les différences de marche respectives pour les  $m$ (ième) franges brillantes sont  $m\lambda\lambda$  et  $m\lambda$ .  
Ces deux franges brillantes sont résolues quand la différence de marche entre elles devient égale à  $\lambda/2$ . Et nous avons

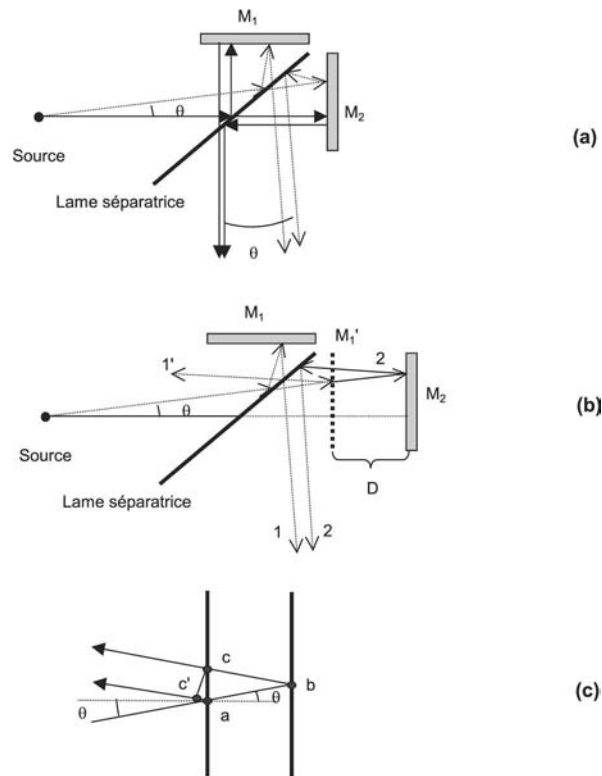
$$m\lambda\lambda - m\lambda = m(\lambda\lambda - \lambda) = \lambda/2, \text{ soit } m\Delta\lambda = \lambda/2 \quad \lambda/\Delta\lambda = 2m$$

- (c) Choisir une frange d'ordre  $m$  et vérifier sur le graphe que cette relation est vérifiée.

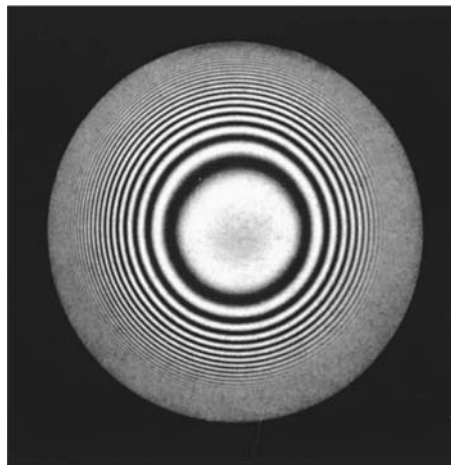
2. Tracer deux graphes d'intensité en fonction du paramètre variable : l'un pour la distance  $D$  l'autre pour une distance  $D'$ .

La phase change quand  $D$  change de valeur,  $\lambda$  restant constant. Choisir  $D_1$  de la première courbe afin que le maximum d'une frange devienne un minimum, de même, choisir  $D'_2$ , de la deuxième courbe, afin que le minimum, correspondant au même ordre, devienne maximum.

Lire les valeurs numériques sur le graphe et les comparer avec les formules donnant les interférences constructives et les interférences destructives.



**Fig. 2.15** – Interféromètre de Michelson sous incidence  $\theta$ . (a) Le faisceau incident éclaire sous incidence  $\theta$ . (b) Trajet symbolique du rayon. La lame séparatrice est à  $45^\circ$  du miroir  $M_1$ , nous faisons une rotation symbolique de  $90^\circ$  de  $M_1$  qui vient en  $M_1'$  et obtenons une lame fictive à faces parallèles et d'épaisseur  $D$ . Calcul de la différence de marche quand les rayons incidents éclairent le montage sous incidence  $\theta$ .

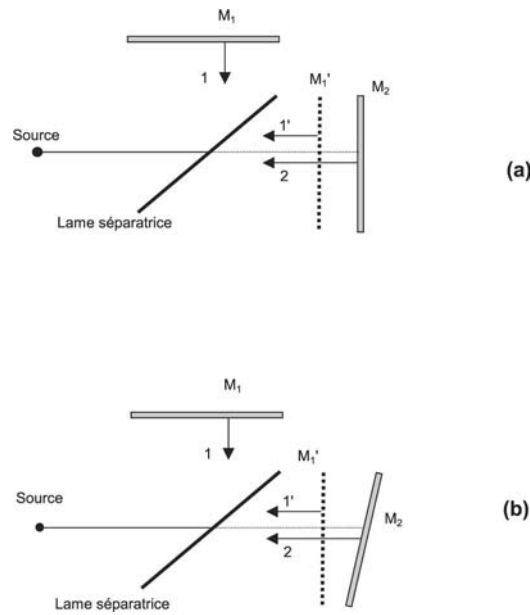


**Fig. 2.16** – Interféromètre de Michelson : anneaux d'égal épaisseur obtenus avec une source étendue [1].



### Interférence sous incidence $\theta$ , franges d'Heidenberg, franges de Fizeau.

La lumière issue d'une source étendue est contenue dans un cône d'angle au sommet  $\Delta\theta$ , la distance  $x_2 - x_1$  est fonction de  $\theta$  et les franges brillantes sont des anneaux d'interférence. Établissons l'expression de la différence de marche des rayons dans l'interféromètre. Nous effectuons une représentation fictive du chemin suivi par les rayons pour calculer la différence de marche, nous replions l'un des rayons sur l'autre, fig. 2.15a.



**Fig. 2.17** – Interféromètre de Michelson. (a) Nous effectuons une rotation fictive de la distance lame miroir  $M_1$ , il apparaît selon la direction du miroir  $M_2$ . (b) Nous effectuons une rotation fictive de la distance lame miroir  $M_2$ , il apparaît selon la direction lame  $\Rightarrow$  miroir  $M_1$ , les deux miroirs forment une lame d'air à faces parallèles.

Nous calculons la différence de marche à partir des figures (2.15b) et (2.15c). Nous avons :  $[ab] = [bc] = D / \cos \theta$ , et  $[ac] = [(2D / \cos \theta)(\sin \theta)] = 2D \tan \theta$ . La différence de marche est

$$\delta = 2[bc] - [ac] \sin \theta = 2D / (\cos \theta) - 2D \tan \theta \sin \theta = 2D \cos \theta \quad (2.62)$$

L'intensité finale résultant de la superposition des deux ondes est

$$I_M(\theta, D) = \cos^2\left(\pi \frac{2D(\cos \theta)}{\lambda}\right) \quad (2.63)$$

Les anneaux brillants et sombres forment les franges d'égale inclinaison ou franges d'Heidinger, les franges correspondent à une même valeur de  $\theta$ . Nous montrons (fig. 2.16) une photographie des anneaux d'interférence obtenus à partir d'une source étendue émettant un cône de lumière. Nous étudions (exemple I.13) la répartition des franges, nous nous plaçons dans un plan de section perpendiculaire au plan des franges et nous traçons la courbe d'intensité des franges en fonction de l'angle  $\theta$ ;  $D$  et  $\lambda$  restant constants.

Nous pouvons aussi tracer les variations d'intensité des franges d'égale épaisseur, le paramètre variable est  $D$ , les angles  $\theta$  ainsi que le paramètre  $\lambda$  restant constants, ce sont les franges de Fizeau. Nous effectuons une rotation de  $90^\circ$  de  $M_1$  (fig. 2.17a) et nous retrouvons le principe d'une lame à faces parallèles. Quand l'un des miroirs, par exemple  $M_1$ , est tourné légèrement par rapport à la position précédente (fig. 2.17b) nous obtenons un coin d'air (fig. 2.17a). En conséquence, les franges d'interférence obtenues dans cette position de  $M_1$  sont celles du coin d'air et nous observons des franges rectilignes.

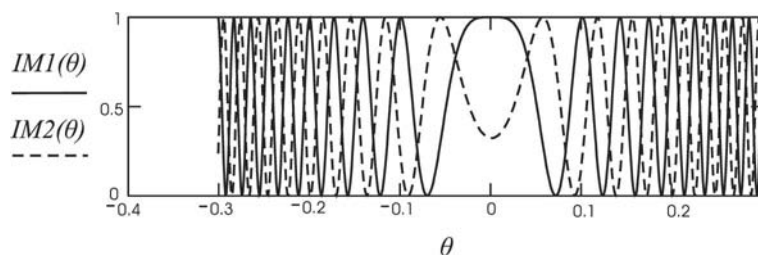
### Exemple I.13. Interféromètre de Michelson.

Anneaux d'interférence obtenus à partir d'une source étendue. Courbes de l'intensité par réflexion en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  des rayons.

Nous traçons la courbe (2) pour une autre valeur  $\lambda\lambda = \lambda + \Delta\lambda$  de la longueur d'onde. La distance  $D$  est la même dans les deux cas.

$$\theta = -301, -300 \dots 3 \quad \lambda = 0,000\ 5 \quad D = 0,05 \quad \lambda\lambda = 0,000\ 52$$

$$IM1(\theta) = \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot D\cdot\cos(\theta)}{\lambda}\right)^2 \quad IM2(\theta) = \cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot D\cdot\cos(\theta)}{\lambda\lambda}\right)^2$$



### Application I.13

1. Constaté que la distance entre les maxima, relatifs au même ordre d'interférence, diminue quand la valeur des angles augmente. Au centre, la courbe (1) due à  $\lambda$  est maximum, ce n'est pas le cas de la courbe (2).
2. Considérons la courbe (1),  $\theta$  reste constant. À chaque maximum correspond un ordre d'interférence qui est un nombre entier  $m$ , il est déterminé par la relation  $m\pi = 2D \cos \theta$ .
  - Poser :  $D/\lambda = x$  et montrer que l'on a :  $m(\theta) = 2x \cos(2\pi\theta/360)$ .
  - Tracer la courbe de variation de  $m(\theta)$  quand  $\theta$  varie de 0 à  $90^\circ$  et déterminer le nombre d'anneaux observés quand  $x = 1, 2, 3, 4$ . La plus grande valeur de  $m$  correspond à la plus petite valeur de  $\theta$ ; ce résultat est différent de celui de l'expérience des deux sources d'Young où l'angle varie dans le même sens que l'ordre d'interférence.

## 2.6 Interférométrie par faisceaux multiples

### 2.6.1 Lame à faces parallèles

Nous supposons que la lame d'indice  $n_2$  est placée dans l'air, indice  $n_1 = 1$ . Nous avons déjà étudié, au paragraphe (2.5.2), les interférences de deux rayons réfléchis par les faces d'une lame à faces parallèles (fig. 2.9), mais cela ne nous permettait pas de savoir où allait la lumière quand nous observions, par réflexion, une frange sombre. Maintenant nous tenons compte de

tous les rayons effectuant des réflexions multiples internes sur les faces de la lame. Calculons l'intensité finale des ondes réfléchies ainsi que l'intensité des ondes transmises (fig. 2.18). Nous verrons que la somme de l'intensité transmise et de l'intensité réfléchie est égale à l'intensité de l'onde incidente. Quand nous observons, par réflexion, une frange sombre, c'est-à-dire une intensité égale à zéro, toute la lumière est transmise et vice versa.

1.  $n_2$  = indice de la lame       $n_1$  = indice du milieu extérieur ; ici l'air.  
 $\theta_1$  = angle d'incidence des rayons       $\theta_2$  = angle de réfraction des rayons. L'application des lois de Descartes successivement pour la face d'entrée, puis pour la face de sortie, montre que le rayon sortant est parallèle au rayon incident.
2. Schéma montrant la différence de marche entre le rayon réfléchi en  $a$ , sur la face d'entrée, et le rayon réfléchi en  $b$ , sur la deuxième face de la lame. La différence de marche est  $ac'$ .

### Hypothèses.

$A$  = amplitude du faisceau incident.

$\theta_1$  = angle d'incidence du faisceau sur la face supérieure de la lame.

$D$  = épaisseur de la lame.

$n_2$  = indice de réfraction de la lame.

$n_1 = 1$  = indice du milieu extérieur entourant les deux faces (nous supposons que la lame est placée dans l'air).

$A_{it}$  = amplitude de l'onde transmise correspondant à l'onde précédente.

$A_{12}$  = amplitude complexe de l'onde réfléchie du milieu 1 vers le milieu 2 : réflexion air  $\Rightarrow$  verre.

$R_{12} = r_{12}.r_{12}^*$  = facteur de réflexion. Il désigne l'intensité de l'onde réfléchie dont l'amplitude est  $r_{12}$ .

$r_{21}$  = amplitude de l'onde du milieu (2) vers le milieu (1) : réflexion verre  $\Rightarrow$  air.

$R_{21} = r_{21}.r_{21}^*$  = facteur de réflexion correspondant à  $r_{21}$ .

$T_{21}$  = intensité transmise par le rayon  $r_{21}$ .

$T_{12}$  = intensité transmise par le rayon  $r_{12}$ .

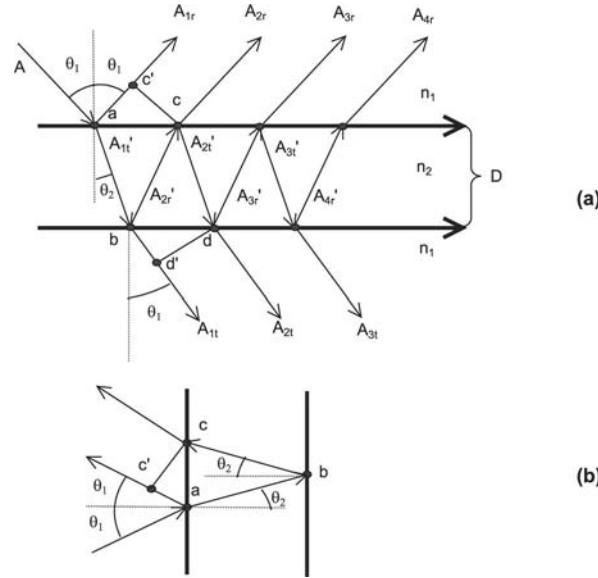
Dans les expressions  $r_{ir}$ ,  $R_{ir}$ ,  $t_{ir}$ ,  $T_{ir}$ , le premier indice indique le milieu d'où vient le rayon, le deuxième indice indique le milieu sur lequel se réfléchit le rayon.

La différence de marche entre deux ondes successives observées par réflexion, l'une réfléchie sur la face supérieure externe, l'autre sur la face inférieure interne, a déjà été calculée. Les deux ondes ont la même direction et se superposent ensuite. Rappelons la figure 2.18b, nous lisons :  $[ab] = [bc] = D/\cos \theta_2$  or  $[ac] = [(2D/\cos \theta_2)(\sin \theta_2)] = 2D \tan \theta_2$ . La différence de marche  $\delta$  entre les deux ondes successives  $A_{1r}$  et  $A_{2r}$  est

$$\delta = 2n_2[bc] - [ac] \sin \theta_1 = \frac{2Dn_2}{\cos \theta_2} - 2D \tan \theta_2 \sin \theta_1 \quad (2.64)$$

Introduisons la relation de Descartes :  $\sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .

$$\delta = \frac{2Dn_2}{\cos \theta_2} - 2D \tan \theta_2 n_2 \sin \theta_2 = 2Dn_2 \cos \theta_2 \quad (2.65)$$



**Fig. 2.18** – Interférence par ondes multiples, lame à faces parallèles. (a)  $n_2$  = indice de la lame,  $n_1$  = indice du milieu extérieur ici l'air,  $\theta_1$  = angle d'incidence des rayons,  $\theta_2$  = angle de réfraction des rayons. L'application des lois de Descartes successivement pour la face d'entrée puis pour la face de sortie montre que l'angle du rayon sortant est égal à l'angle d'incidence  $\theta_1$ . (b) Géométrie pour le calcul de la différence de marche optique correspondant au chemin  $ac'$ .

Nous obtenons la même relation si nous calculons la différence de marche entre deux ondes successives transmises. Nous définissons les paramètres suivants :

$r_{12}$  = coefficient de réflexion d'une onde venant du milieu 1 et se réfléchissant sur le milieu 2, réflexion air  $\Rightarrow$  verre.

$R_{12}$  = intensité de l'onde réfléchie.

$r_{21}$  = coefficient de réflexion de l'amplitude de l'onde venant du milieu 2 et se réfléchissant sur le milieu 1 : réflexion verre  $\Rightarrow$  air.

$R_{21}$  = intensité correspondant à  $r_{21}$ .

$\tau_{12}$  = valeur absolue de l'amplitude de l'onde transmise lors du passage milieu 1  $\Rightarrow$  milieu 2.

$T_{12}$  = intensité transmise dans le sens 1  $\Rightarrow$  2.

$T_{21}$  = intensité transmise dans le sens 2  $\Rightarrow$  1.

Nous écrivons :  $\tau_{12} = \sqrt{T_{12}}$  et  $\tau_{21} = \sqrt{T_{21}}$ .

Le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire

$$R_{12} + T_{12} = 1 \quad \text{et} \quad R_{21} + T_{21} = 1$$

La différence de marche  $\Delta$  entre deux rayons successifs devient

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2D n_2 \cos \theta_2 \quad (2.66)$$

Amplitude des rayons successivement réfléchis

$$\begin{aligned}
 A_{1r} &= A r_{12} \\
 A_{2r} &= A \tau_{12} r_{21} \tau_{21} e^{i\Delta} \\
 A_{3r} &= A \tau_{12} r_{21} r_{21} \tau_{21} e^{i2\Delta} \\
 A_{4r} &= A \tau_{12} r_{21} (r_{21} r_{21})^2 \tau_{21} e^{i3\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Amplitude des rayons successivement transmis

$$\begin{aligned}
 A_{1t} &= A \tau_{12} \tau_{21} \\
 A_{2t} &= A \tau_{12} r_{21} r_{21} \tau_{21} e^{i\Delta} \\
 A_{3t} &= A \tau_{12} (r_{21} r_{21})^2 \tau_{21} e^{i2\Delta} \\
 A_{4t} &= A \tau_{12} (r_{21} r_{21})^3 \tau_{21} e^{i3\Delta}
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

L'amplitude complexe  $A_r$  de l'onde finale réfléchie par la lame est la somme de toutes les ondes réfléchies.

$$A_r = Ar_{12} + A\tau_{12}r_{21}\tau_{21}e^{i\Delta}(1 + r_{21}r_{21}e^{i\Delta} + (r_{21}r_{21}e^{i\Delta})^2 + \dots) \tag{2.69}$$

L'amplitude complexe  $A_t$  de l'onde finale transmise, par la lame, est la somme de toutes les ondes transmises.

$$A_t = A\tau_{12}\tau_{21}(1 + r_{21}r_{21}e^{i\Delta} + (r_{21}r_{21}e^{i\Delta})^2 + \dots) \tag{2.70}$$

Dans chaque cas nous avons une série géométrique de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} x^N = \frac{(1 - x^n)}{(1 - x)} \tag{2.71}$$

C'est une série convergente et le terme  $(r_{21}r_{21}e^{i\Delta})N$  tend vers zéro.  $N$  est un nombre élevé. Puisque le coefficient de réflexion est inférieur à l'unité, nous écrivons

$$(r_{21}r_{21}e^{i\Delta})N = 0$$

L'amplitude des ondes devient

$$A_r = Ar_{12} + A \frac{\tau_{12}r_{21}\tau_{21}e^{i\Delta}}{(1 - r_{21}r_{21}e^{i\Delta})} \tag{2.72}$$

$$A_t = A \frac{\tau_{12}\tau_{21}}{(1 - r_{21}r_{21}e^{i\Delta})} \tag{2.73}$$

### Remarque.

Puisque  $n_2 > n_1$ , les formules de Fresnel permettent d'écrire :  $r_{12} = -r$  et  $r_{21} = r$ , soit en notation complexe  $r_{21} = |r|.e^{i\pi}$ . Il y a bien un déphasage de  $\pi$  lors d'une réflexion air  $\Rightarrow$  verre mais  $R_{12} = R_{21}$ .

D'autre part nous avons

$$A_r = -Ar + A \frac{r(1 - r^2)e^{i\Delta}}{(1 - r^2e^{i\Delta})} \tag{2.74}$$

$$A_t = A \frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2e^{i\Delta})} \tag{2.75}$$

Nous pouvons aussi écrire :  $\tau_{12}\tau_{21} = 1 - r^2$  et  $A_r^*$  et  $A_t^*$  sont les fonctions complexes conjuguées de  $A_r$  et  $A_t$ . Les intensités correspondant aux amplitudes réfléchies et transmises sont respectivement

$$A_t A_t^* = A^2 (1 - r^2)^2 \left[ \frac{1}{(1 - r^2 e^{i\Delta})(1 - r^2 e^{-i\Delta})} \right]$$

$$A_t A_t^* = A^2 \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos \Delta)} \quad (2.76)$$

De même

$$A_r A_r^* = A^2 \frac{2r^2(1 - \cos \Delta)}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos \Delta)} \quad (2.77)$$

Normalisons les intensités par les relations

$$I_r = \left| \frac{A_r A_r^*}{A^2} \right| \quad \text{et} \quad I_t = \left| \frac{A_t A_t^*}{A^2} \right| \quad (2.78)$$

ce qui donne

$$I_r = \frac{2r^2(1 - \cos \Delta)}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos \Delta)} \quad (2.79)$$

$$I_t = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 + r^4 - 2r^2 \cos \Delta)} \quad (2.80)$$

Introduisons la notation

$$g = \frac{2r}{(1 - r^2)} \quad (2.81)$$

$$\cos \Delta = 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right) \quad (2.82)$$

nous obtenons

$$I_r = \frac{g^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)}{[1 + g^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)]} \quad (2.83)$$

et

$$I_t = \frac{1}{[1 + g^2 \sin^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right)]} \quad (2.84)$$

Rappelons que :  $\Delta = (2\pi/\lambda)\delta$ , et  $\delta = 2Dn_2 \cos \theta_2$  = différence de marche entre deux rayons successifs transmis ou réfléchis.

**Remarque.**

Le principe de conservation de l'énergie est vérifié car nous avons

$$I_r + I_t = 1 \quad (2.85)$$

L'intensité incidente se divise en intensité réfléchie et intensité transmise. Si la surface de sortie est parfaitement réfléchissante :  $I_t = 0$  et  $I_r = 1$  quelle que soit l'épaisseur  $D$  ou l'incidence  $\theta_1$ .

Quand  $[\sin \Delta/2]^2 = 0$ ,  $I_r = 0$ , et  $I_t = 1$  toute la lumière est transmise. Nous observons une interférence constructive pour la lumière transmise.

$$\delta = 2Dn_2 \cos \theta_2 = 0, \lambda, 2\lambda, \dots, m_\lambda \quad (2.86)$$

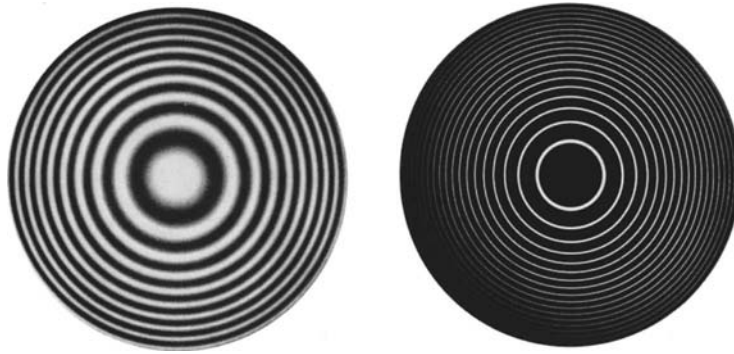
Nous observons par transmission une frange sombre quand

$$\delta = 2Dn_2 \cos \theta_2 = (1/2)\lambda, (3/2)\lambda, \dots, \left(\frac{2m+1}{2}\right)\lambda, \quad m \text{ nombre entier} \quad (2.87)$$

Les maxima des intensités transmises et des intensités réfléchies ont pour expression

$$I_t = \frac{1}{(1+g^2)} \quad \text{et} \quad I_r = \frac{g^2}{(1+g^2)} \quad (2.88)$$

Nous montrons, fig. (2.19), les franges d'interférence observées par réflexion et par transmission. Les anneaux sont fonction de l'incidence  $\theta_1$  des rayons, nous observons les franges d'Heidinger, c'est-à-dire les franges d'égale inclinaison.



**Fig. 2.19** – lame à faces parallèles : interférence par ondes multiples. (a) Observation par réflexion. (b) Observation par transmission [1].

Les intensités, équations (2.83) et (2.84), dépendent de  $g$  donc du coefficient de réflexion  $r$ . Ces coefficients, dérivés de la théorie électromagnétique de Maxwell, sont calculés à partir des formules de Fresnel. Quand l'incidence est normale  $\theta = 0$ , et dans le cas d'une réflexion sur un milieu d'indice plus élevée le coefficient de réflexion, selon les formules de Fresnel, devient

$$r = \frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} \quad (2.89)$$

Nous représentons dans l'exemple (I.15) les courbes de variation des intensités réfléchies et transmises en fonction de la longueur d'onde, l'épaisseur  $D$  de la lame restant constante. Rappel : la lumière est une onde électromagnétique.

**Exemple I.14. Intensités réfléchies et transmises par une lame à faces parallèles, incidence normale.**

L'incidence reste normale, nous traçons les courbes de variation des intensités transmises et réfléchies en fonction de l'épaisseur  $D$  de la lame, la longueur d'onde  $\lambda$  reste constante.

$D = 0,002, \quad \theta = 0,0 \quad n_2 = 1,5 \quad n_1 = n_3 = 1.$

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.14**

Étudier les intensités transmises et réfléchies, sous incidence normale, en fonction de la variation de  $D$ .

1. Choisir plusieurs combinaisons des valeurs des indices :

- (a)  $n_1 < n_2 < n_3$ ;
- (b)  $n_1 < n_2$  et  $n_2 > n_3$ ;
- (c)  $n_1 > n_2 > n_3$ .

Constater l'apparition d'un déphasage lorsque la réflexion se fait sur un milieu plus dense.

2. Choisir une valeur arbitraire de  $r < 1$ , et en déduire comment varie l'intensité.

---

**Exemple I.15. Intensités réfléchies et transmises, par une lame à faces parallèles incidence normale.**

L'incidence reste normale, nous traçons les courbes de variation des intensités transmises et réfléchies, en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ . L'épaisseur  $D$  reste constante.

$D = 0,2 \quad \theta = 0,0 \quad n_2 = 1,5 \quad n_1 = n_3 = 1.$

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.15**

Étudier les intensités transmises et réfléchies, sous incidence normale, en fonction de la variation de  $\lambda$ .

1. Choisir plusieurs combinaisons des valeurs des indices :
  - (a)  $n_1 < n_2 < n_3$ ;
  - (b)  $n_1 < n_2$  et  $n_2 > n_3$ ;
  - (c)  $n_1 > n_2 > n_3$ . Constater l'apparition d'un déphasage lorsque la réflexion se fait sur un milieu plus dense.
2. Trouver l'expression de la longueur d'onde quand nous observons la dernière frange, en fonction de l'épaisseur  $D$ .

---

## 2.6.2 Étalon Fabry-Pérot

### Fonction d'Airy.

Soit une lame à faces parallèles : effectuons un dépôt d'une mince pellicule d'alumine ou d'un film diélectrique sur chaque face, nous réalisons un étalon Fabry-Pérot. Les faces ont un facteur de réflexion  $R$  élevé. Nous verrons que pour une certaine épaisseur de la lame et une certaine longueur d'onde, bien que le facteur de réflexion soit élevé, toute l'énergie lumineuse incidente sera transmise, tandis qu'une seule surface ne transmettrait qu'un faible pourcentage de l'énergie. Nous supposons que nous effectuons le traitement des surfaces de la lame de façon à obtenir un pouvoir de réflexion élevé. Soit  $r$  le coefficient de réflexion. Le milieu compris entre ces réflecteurs est donc l'air d'indice égal à l'unité. Pratiquement, le montage est réalisé en prenant deux lames minces dont les faces en regard sont aluminées ; elles ont donc un facteur de réflexion  $R = r^2$  élevé. Nous restons sous incidence normale.

Réécrivons l'expression (2.81) de  $g$  en fonction de  $R$ .

$$g^2 = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad (2.90)$$

La différence de marche sous incidence normale est  $\delta = 4\pi D/\lambda$

$$\frac{\Delta}{2} = 2\pi \frac{D}{\lambda} \quad (2.91)$$



Nous écrivons les expressions des intensités réfléchies et transmises à partir des relations (2.83) et (2.84).

$$I_r = \frac{g^2 \sin^2(\frac{\Delta}{2})}{(1 + g^2 \sin^2(\frac{\Delta}{2}))} \quad I_t = \frac{1}{(1 + g^2 \sin^2(\frac{\Delta}{2}))} \quad (2.92)$$

$I_t$  est appelée fonction d'Airy.

**Interférence constructive de la fonction  $I_t$  :**

$I_t$  est maximum quand  $[\sin \Delta/2]^2 = 0$  et  $I_r = 0$ , ce qui entraîne la condition

$$\delta = 2D = 0, \lambda, 2\lambda, \dots, m\lambda \quad (2.93)$$

**Interférence destructive de la fonction  $I_t$  :**

$I_t$  est minimum quand  $[\sin \Delta/2]^2 = 1$  et nous avons donc

$$\delta = 2D = (\frac{1}{2})\lambda, (\frac{3}{2})\lambda, \dots, (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (2.94)$$

$m$  = nombre entier = 0, 1, 2, 3 etc.

Nous avons tracé (exemple I.16) trois graphes des intensités transmises pour différentes valeurs élevées du coefficient de réflexion  $r = 0,7$ ,  $0,9$  et  $0,97$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $m = 1$ , le paramètre variable est  $D$ .

**Résonance.**

Nous observons que la transmission est dépendante de  $R = r^2$ . Les pics des maxima deviennent de plus en plus fins au fur et à mesure que la valeur de  $R$  se rapproche de la valeur limite  $R = 1$ .

Lors d'une *interférence constructive*  $2D = m\lambda$  et  $[\sin \frac{\Delta}{2}]^2 = 0$ , l'intensité  $I_t$  devient égale à 1. L'intensité d'un maximum est indépendante de  $r$ . Nous pouvons avoir une valeur de  $r$  si voisine de 1 que la transmission d'une seule lame ou d'un seul réflecteur, soit quasiment égale à zéro, mais la transmission de la paire de lames ou de la paire de réflecteurs, placées à la bonne distance  $D = m\frac{\lambda}{2}$ , sera égale à 1. Quand  $D = m\frac{\lambda}{2}$ , il y a *résonance*, nous sommes dans le mode résonance.

Bien sûr, dans la réalité, les pics de transmission, à cause des pertes d'absorption par les lames, n'auront pas une intensité rigoureusement égale à 1.

L'étalon Pérot-Fabry est utilisé avec des ordres  $m$  élevés afin d'obtenir une résolution très grande nécessaire à l'étude de la structure d'un spectre de bande d'absorption sur un intervalle spectral très petit. L'étude du pic de transmission est faite dans l'exemple (I.17), nous traçons la courbe d'Airy en fonction de la longueur d'onde pour trois valeurs différentes de  $r$ ,  $D$  restant constant.

---

**Exemple I.16. Interféromètre Fabry-Pérot, courbes d'Airy.**

Tracer trois courbes d'Airy, en fonction du paramètre  $D$ , pour trois valeurs différentes de  $r$ , donc de  $g$  : Paramètres :  $m = 1$   $\lambda = 0,1$   $r_1 = 0,7$   $r_2 = 0,9$   $r_3 = 0,97$ .

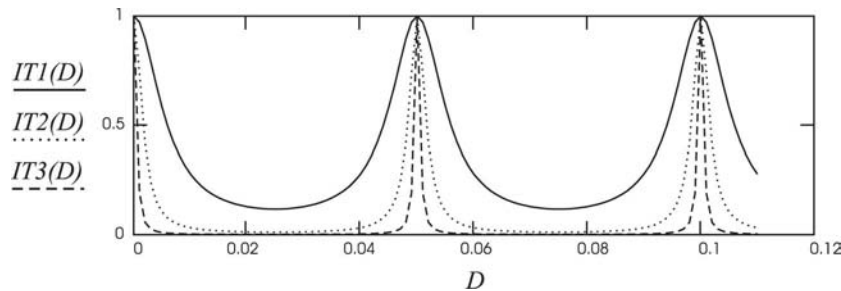
$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) 2D(n_2) \cos \theta_2 \quad D = 0,001 \dots 0,11 \quad n_2 = 1$$

$$g_1 = \frac{2 \cdot r_1}{1 - r_1^2} \quad g_2 = \frac{2 \cdot r_2}{1 - r_2^2} \quad g_3 = \frac{2 \cdot r_3}{1 - r_3^2}$$

$$IT_1(D) = \frac{1}{1 + g_1^2 \cdot \sin^2 \left( 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot D \cdot n_2 \right)}$$

$$IT_2(D) = \frac{1}{1 + g_2^2 \cdot \sin^2 \left( 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot D \cdot n_2 \right)}$$

$$IT_3(D) = \frac{1}{1 + g_3^2 \cdot \sin^2 \left( 2 \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot D \cdot n_2 \right)}$$

**Application I.16**

1. Comment varie la position d'un pic en fonction de  $D$  et  $\lambda$ .
2. Rappeler la formule de résolution d'un pic et vérifier l'application numérique avec le graphe.

**Exemple I.17. Interféromètre Fabry-Pérot.**

Nous traçons la fonction d'Airy en fonction du paramètre  $\lambda$ . Nous choisissons trois valeurs différentes de  $r$  donc de  $g$ .

$$m = 1 \quad D = 0,0025 \quad r_1 = 0,7 \quad r_2 = 0,9 \quad r_3 = 0,97$$

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.17**

La largeur d'un pic à mi-hauteur est donnée par la relation :  $bw = 2\lambda/\pi g$ .

Calculer deux largeurs de pics,  $bw_1$  et  $bw_2$   $bw = 2\lambda/\pi g$ , tracer la courbe d'intensité correspondante.

Vérifier le résultat en le comparant aux valeurs lues sur le graphe.

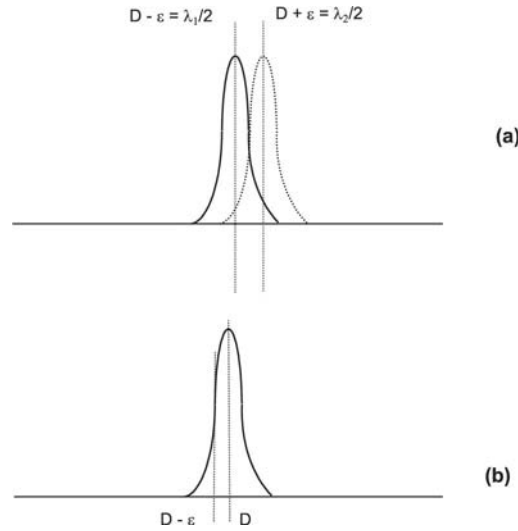
**2.6.3 Résolution du spectromètre Fabry-Pérot**

Nous obtenons un interféromètre Fabry-Pérot quand l'un des miroirs de l'appareil peut se déplacer parallèlement à lui-même sur une courte distance. Le résultat est que nous faisons varier la longueur d'onde du premier ordre  $\lambda_o = 2D_o$  sur un petit intervalle spectral. En conséquence, à chaque valeur de résonance  $D_i$  correspond  $\lambda_i$ . Faisons varier régulièrement  $D$ , nous obtenons un signal fonction de  $\lambda$ , nous enregistrons donc la distribution spectrale de la source de la même façon qu'un enregistrement par un spectromètre à réseau. Deux raies

spectrales peuvent, ou ne peuvent pas, être résolues selon la valeur de la résolution  $\Delta\lambda$  de l'interféromètre. La résolution  $\Delta\lambda$  du Fabry-Pérot a ses limites en fonction de  $\Delta D$ . Calculons la résolution, c'est-à-dire l'intervalle spectral où la différence de longueur d'onde  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  qui permet de séparer deux raies de longueurs d'onde  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$ .

*Calcul de la résolution.*

Nous supposons que la source contient deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous choisissons  $\lambda_2 > \lambda_1$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ , (fig.2.20a).



**Fig. 2.20** – Résolution critère de Rayleigh. (a) Spectre d'un doublet,  $\lambda_2 > \lambda_1$ , le premier a la longueur d'onde  $\lambda_1$ , le maximum est à la distance  $(D - \epsilon)$ , le deuxième de longueur d'onde  $\lambda_2$  a sa résonance à  $(D + \epsilon)$ . (b) Résonance du premier ordre  $D = \lambda/2$ , la demi-hauteur a lieu à la distance  $D + \epsilon$ .

**Définition de la résolution selon le critère de Rayleigh :** Deux maxima sont résolus quand l'intersection des deux maxima se fait à mi-hauteur des maxima.

Si  $D$  est la distance donnant un pic, à l'intersection de la deuxième courbe, cette distance devient  $(D + \epsilon)$ , courbe correspondant à  $\lambda_2$ , et  $(D - \epsilon)$ , courbe correspondant à  $\lambda_1$ . Écrivons que les intensités au point d'intersection sont identiques pour les deux courbes.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 + g^2 \sin^2[(\frac{2\pi}{\lambda_1})(D - \epsilon)])} \\ = & \frac{1}{(1 + g^2 \sin^2[(\frac{2\pi}{\lambda_2})(D + \epsilon)])} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Cette relation permet de déduire que

$$(D + \epsilon)\lambda_1 = (D - \epsilon)\lambda_2 \quad (2.96)$$

Mais  $\lambda_1 = \lambda_2 - \Delta\lambda$ , puis posons  $\lambda_2 = \lambda$ , nous obtenons  $\lambda 2\epsilon = (\epsilon + D)\Delta\lambda$ , or

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{(D + \epsilon)}{2\epsilon} \quad (2.97)$$

Calculons  $\epsilon$  (fig. 2.20b). Considérons la résonance à  $D = \lambda/2$ , nous sommes au 1<sup>er</sup> ordre ; à l'intersection des deux courbes l'intensité est égale à la moitié du maximum du pic, nous écrivons

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(1 + g^2 \sin^2[(\frac{2\pi}{\lambda})(D - \epsilon)])} \quad (2.98)$$

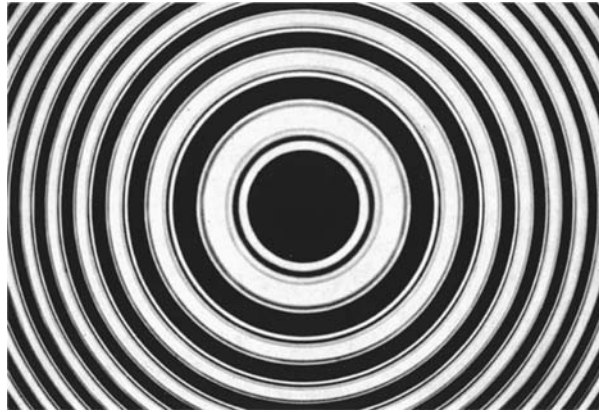
Utilisons la relation  $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$ , nous avons :  $\sin(2\pi D/\lambda) = 0$  et  $\cos(2\pi D/\lambda) = -1$

$$1 + g^2 [\sin(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda})]^2 = 2 \quad (2.99)$$

$$g^2 [(\frac{2\pi\epsilon}{\lambda})]^2 = 1 \quad (2.100)$$

Introduisons cette relation dans (2.97) et (2.100) ; sachant que  $\epsilon \ll D$ , la formule finale est

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \pi g \frac{D}{\lambda} \quad (2.101)$$



**Fig. 2.21** – Interféromètre Pérot-Fabry : anneaux d'interférence [1].

### Finesse $F$ .

Nous appelons finesse  $F$  l'expression précédente :  $F = \lambda/\Delta\lambda = \pi g/2$  d'où la résolution  $\Delta\lambda/\lambda$ . La finesse caractérise le pouvoir de résolution de l'interféromètre Pérot-Fabry, elle dépend seulement du coefficient de réflexion d'une seule face de la lame. Considérons les ordres élevés de résonance  $D = m\lambda/2$ , la finesse devient

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m\pi \frac{g}{2} \quad (2.102)$$

Nous représentons (exemple I.18) l'intensité à la résonance pour deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Nous choisissons différents ordres mais la même finesse. Nous pouvons changer la résolution en changeant la valeur du coefficient  $r$ . Puis dans l'exemple (I.19) nous traçons la courbe d'intensité transmise pour deux longueurs d'onde mais avec une faible incidence des rayons. Nous montrons (fig. 2.21) une photo des anneaux observés, la source est une lampe à vapeur de mercure qui émet une raie verte dans le visible.

**Exemple I.18. Résonance du Fabry-Pérot.**

Nous traçons, en fonction de  $D$ , les deux graphes des intensités transmises pour les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.18**

1. Choisir trois valeurs de longueur d'onde et déterminer les coefficients de réflexion  $r$  de façon à avoir les courbes résolues dans le premier ordre.
2. Choisir deux valeurs de longueur d'onde et déterminer les coefficients de réflexion  $r_2$  de façon à avoir les deux courbes résolues dans le deuxième ordre, choisir  $r = r_3$  pour quelles soient résolues dans le troisième ordre.
3. Introduire  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = \lambda_1(1 + 2/m\pi g)$ , déterminer les valeurs de  $r$  afin d'obtenir les courbes résolues : dans le premier ordre, le deuxième ordre, le troisième ordre.

**Exemple I.19. Courbe d'Airy.**

Anneaux par transmission en fonction du paramètre  $\theta$ , au voisinage de la normale.

$\lambda_1 = 0,000\ 5$      $\lambda_2 = 0,000\ 5025$      $D = 0,01$      $r = 0,9$      $m = 1$ .

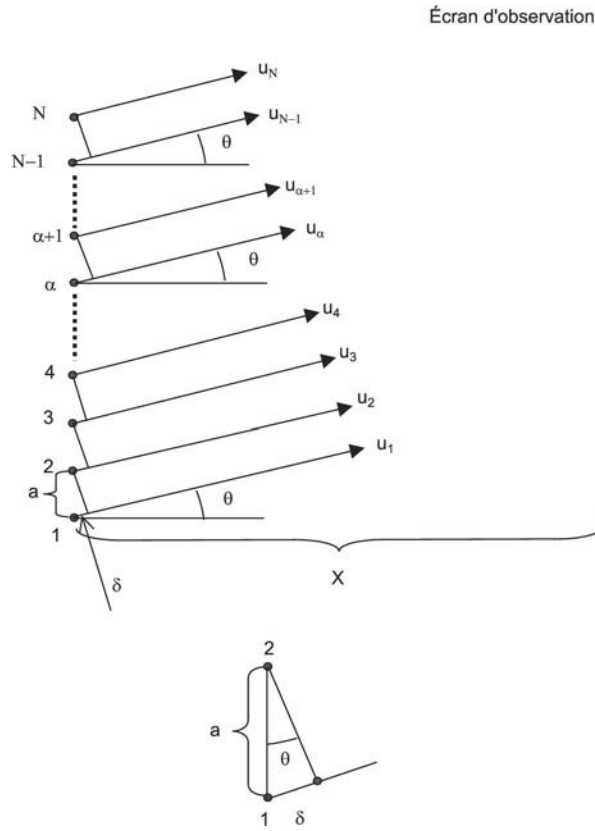
Cette étude est faite sur le CD.

**Application I.19**

1. Observer que la séparation des franges change avec  $m$  et que la  $m^{\text{ième}}$  frange est au centre.
2. La résolution la plus fine correspond à la plus grande valeur de  $m$ . Le rapport  $\Delta\lambda/\lambda$  pour les longueurs d'onde  $\lambda_1 = 0,000\ 5$ ,  $\lambda_2 = 0,000\ 502\ 5$ , lire sur le graphe la différence  $\Delta\theta$  correspondante, établir la formule pour calculer cette différence, comparer avec la valeur trouvée.

## 2.6.4 Sources ponctuelles alignées régulièrement sur une ligne

Nous désirons étudier la figure d'interférence obtenue par les ondes issues d'un grand nombre de sources disposées périodiquement, c'est le cas d'un réseau par transmission. Nous supposons que la distance  $a$  entre deux sources adjacentes est constante. Nous faisons les mêmes hypothèses que dans l'expérience des deux sources d'Young. Nous généralisons cette expérience avec  $N$  sources (fig. 2.22). Nous supposons qu'il y a une seule onde incidente, nous négligeons les effets de la diffraction dans la création de  $N$  ondes à partir de l'onde incidente. Nous regardons selon la direction  $\theta$  par rapport à la normale à la direction d'alignement des sources. Ces sources ponctuelles sont cohérentes entre elles : leurs amplitudes ont les maxima et minima en même temps, la différence de marche entre les ondes adjacentes est la même pour toutes les sources. Cette différence de marche entre deux sources adjacentes est donnée par l'expérience d'Young :  $\delta = a \sin \theta$ , or dans l'approximation des petits angles  $\sin \theta \approx aY/X$  (fig. 2.22).



**Fig. 2.22** – Interférence par les ondes issues de sources régulièrement réparties sur une ligne.

1. Notons par :

- $N$  = nombre de sources ponctuelles ;
- $u_1$  = amplitude de l'onde issue de la première source ;
- $u_N$  = amplitude de l'onde issue de la  $N^{ième}$  source ;
- $a$  = distance fixe entre deux sources consécutives ;
- $x$  = direction de propagation des ondes ;
- $\theta$  = angle d'incidence des ondes par rapport à la normale au plan des sources.

2. La différence de marche entre deux ondes adjacentes est  $\delta = a \sin \theta$ .

Nous avons effectué, dans l'expérience d'Young, la superposition de deux ondes, nous calculons l'amplitude de l'onde résultante

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= A \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T}\right) + A \cos\left[2\pi \frac{(x - \delta)}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T}\right] \end{aligned} \quad (2.103)$$

$\delta = a \sin \theta$ ,  $\delta = aY/X$ . L'angle  $\theta$  est toujours petit et nous faisons l'approximation :  $\tan \theta = \theta = Y/X$  et  $\delta = aY/X$ .

Maintenant nous effectuons la superposition de  $N$  ondes. La différence de marche entre deux

ondes successives est toujours  $\delta = aY/X$ , l'amplitude de l'onde devient

$$u = A \cos(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T}) + A \cos[2\pi \frac{(x - \delta)}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T}] + A \cos \left[ 2\pi \frac{(x - (N - 1)\delta)}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T} \right] \quad (2.104)$$

que l'on représente par

$$u = A \sum_{q=0}^{q=N-1} \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda_1} (x - q\delta) - 2\pi \frac{t}{T} \right] \quad (2.105)$$

Il est plus facile d'utiliser la notation complexe pour effectuer cette somme.

*Notation complexe.*

La relation précédente s'écrit

$$u = A \sum_{q=0}^{q=N-1} e^{i[\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - q\delta) - 2\pi \frac{t}{T}]} \quad (2.106)$$

Soit

$$u = A e^{i[\frac{2\pi}{\lambda_1} x - 2\pi \frac{t}{T}]} \sum_{q=0}^{q=N-1} e^{i[\frac{2\pi}{\lambda_1} (-q\delta)]} \quad (2.107)$$

Cette série est de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} x^n = \frac{(1 - x^N)}{(1 - x)} \quad (2.108)$$

d'où

$$u = A \left[ e^{i[2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T}]} \right] \cdot \left[ \frac{1 - e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{\lambda})]}}{1 - e^{i[2\pi(-\frac{\delta}{\lambda})]}} \right] \quad (2.109)$$

*Numérateur.*

Mettons en facteur le terme  $e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{\lambda})]}$

$$\begin{aligned} & e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{2\lambda})]} \{ e^{i[2\pi(N\frac{\delta}{2\lambda})]} - e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{2\lambda})]} \} \\ & = e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{2\lambda})]} \{ 2i \sin 2\pi(N\frac{\delta}{2\lambda}) \} \end{aligned} \quad (2.110)$$

*Dénominateur.*

$$e^{i[2\pi(-\frac{\delta}{2\lambda})]} \{ e^{i[2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})]} - e^{i[2\pi(-\frac{\delta}{2\lambda})]} \} = e^{i[2\pi(-\frac{\delta}{2\lambda})]} \{ 2i \sin 2\pi(\frac{\delta}{2\lambda}) \} \quad (2.111)$$

L'amplitude finale devient

$$u = \left[ A e^{i(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T})} \right] \cdot \left[ \frac{e^{i2\pi(-N\frac{\delta}{2\lambda})} \cdot \sin 2\pi(N\frac{\delta}{2\lambda})}{e^{i2\pi(-\frac{\delta}{2\lambda})} \cdot \sin 2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})} \right] \quad (2.112)$$

et

$$u = A e^{i\Psi} \left[ \frac{\sin[2\pi(N\frac{\delta}{2\lambda})]}{\sin 2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})} \right] \quad (2.113)$$

avec

$$e^{i\Psi} = \left[ e^{i[2\pi(\frac{x}{\lambda}) - 2\pi(\frac{t}{T})]} \right] \cdot \left[ e^{i[2\pi(-N\frac{\delta}{2\lambda})]} \right] \cdot \left[ e^{i[2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})]} \right] \quad (2.114)$$

**Intensité**  $uu^* = I$ .

$$I = A^2 \left[ \frac{\sin[2\pi(N\frac{\delta}{2\lambda})]}{\sin 2\pi(\frac{\delta}{2\lambda})} \right]^2 \quad (2.115)$$

Substituons  $\delta = a \sin \theta$ , normalisons  $I$  et posons  $A^2 = \frac{1}{N^2}$ .  $I$  s'écrit

$$I = \left[ \frac{\sin(\pi N \frac{a \sin \theta}{\lambda})}{N \sin(\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \quad (2.116)$$

Nous faisons l'approximation des petits angles :  $\delta = a \frac{Y}{X}$  et cette relation devient

$$I = \left[ \frac{\sin(\pi N \frac{aY}{X\lambda})}{N \sin(\pi \frac{aY}{X\lambda})} \right]^2 \quad (2.117)$$

Les relations (2.116) ou (2.117) sont maximales quand le numérateur et le dénominateur sont simultanément égaux à zéro. Ces expressions sont de la forme  $y = \left[ \frac{\sin Nx}{\sin x} \right]^2$ ,  $y$  est maximum quand :  $\sin Nx = \sin x = 0$ , un développement limité montre que  $y = N^2$  quand  $x = m\pi$ . Nous avons successivement tracé (exemple I.20) les courbes de variation du numérateur, du dénominateur puis de  $I_A$ , relatives à l'équation (2.117). Entre deux maxima principaux il y a  $N-2$  maxima secondaires et  $N-1$  minima. À partir de la courbe de variation du numérateur, nous voyons que deux maxima latéraux n'apparaissent pas sur le maximum central. En effet un minimum se trouve à la même place qu'un maximum. Les interférences par les ondes issues de  $N$  sources régulièrement alignées ont beaucoup d'application. Nous les retrouvons dans la discussion sur la diffraction par les rayons X ou dans l'étude de la diffraction par un réseau.

**Exemple I.20. Figure d'interférence par  $N$  sources disposées sur une ligne et à égale distance les unes des autres.**

Nous traçons en fonction de  $\theta = Y/X$ , les trois courbes suivantes :

- courbe variation du numérateur ;
- courbe variation du dénominateur ;
- courbe variation de l'intensité  $I_A$ .

$Y$  = ordonnée du point d'observation dans le plan d'un écran.

$X$  = distance comprise entre les sources et l'écran.

Les maxima principaux apparaissent quand  $I_A = 0/0$ .

Il y a  $N-2$  maxima secondaires de chaque côté d'un maximum principal et  $N-1$  minima.

Paramètres.

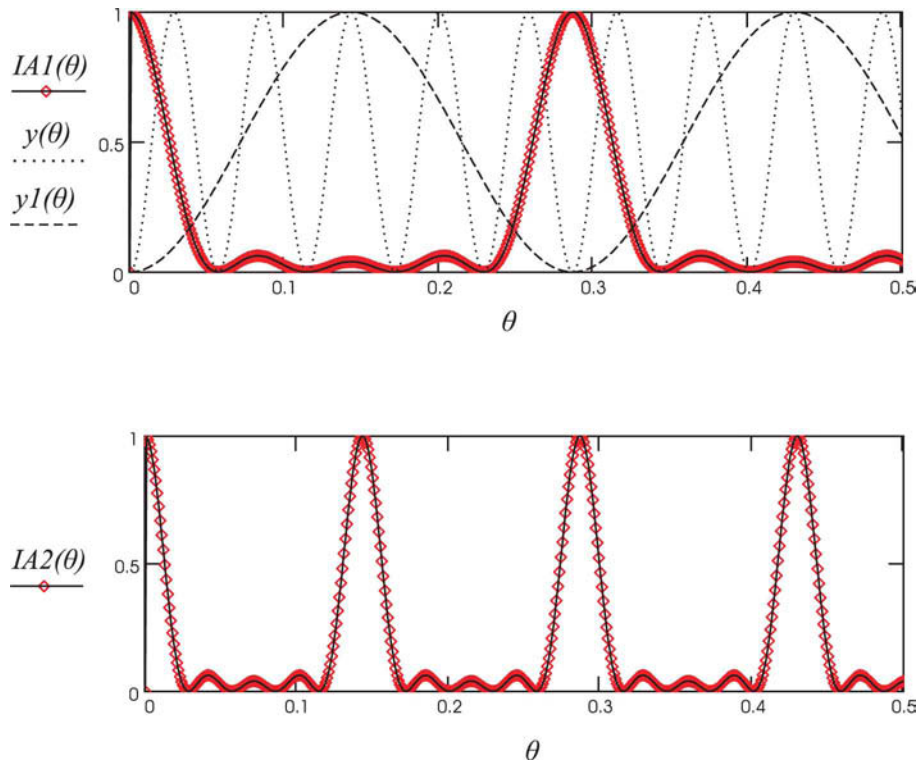
$N = 5$      $\lambda = 0,0005$      $a = 0,1$      $\theta = 0,0001 \dots 5$ ,

$$IA1(\theta) = \left( \frac{\sin\left(\pi \cdot N \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)}{N \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)} \right)^2$$

Nous posons  $y(\theta) = \sin\left(\pi \cdot N \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)^2$  et  $y_1(\theta) = \sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)^2$

$$aa = 0,2 \quad NN = 5 \text{ et } IA2(\theta) = \left( \frac{\sin\left(\pi \cdot NN \cdot \frac{aa}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)}{NN \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{aa}{\lambda} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{360} \cdot \theta\right)\right)} \right)^2$$



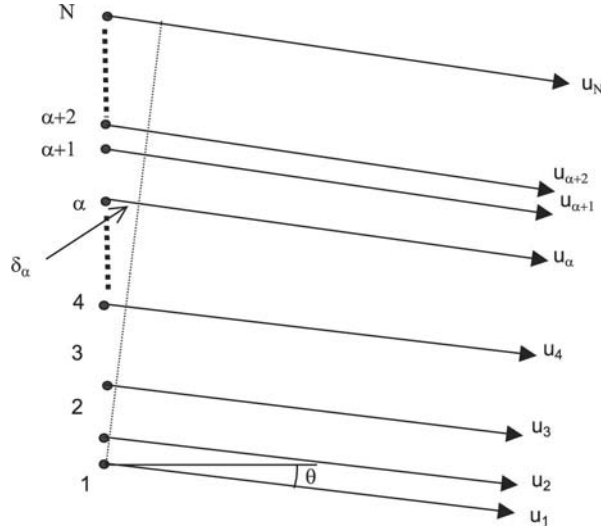


### Application I.20

1. Constater que les maxima principaux ont lieu quand numérateur et dénominateur sont simultanément égaux à zéro.
2. Les  $N - 1$  minima ont lieu quand le numérateur est égal à zéro.
3. Le numérateur a  $N$  maxima mais seulement  $N - 2$  apparaissent.
4. Que deviennent les franges d'interférence quand nous changeons la valeur de  $\lambda$  ?
5. Que deviennent les franges d'interférence quand nous changeons la valeur de  $a$  ?
6. Que deviennent les franges d'interférence quand nous changeons la valeur de  $N$  ?

## 2.7 Sources ponctuelles réparties au hasard

Nous venons d'étudier les figures d'interférence dans le cas où  $N$  sources seraient disposées à égale distance sur une ligne. Maintenant, nous supposons que les sources sont toujours sur une ligne mais de plus nous supposons que les distances entre les sources sont irrégulières, aléatoires. Que devient la figure de diffraction ? Qu'observe-t-on sur un écran ? Calculons l'amplitude de l'onde résultant de la superposition des  $N$  ondes issues des sources (fig. 2.23). Soit  $u_\alpha$  l'amplitude de l'onde issue de la  $\alpha^{\text{ième}}$  source (fig. 2.23). Désignons par  $\delta_\alpha$  au lieu de  $m\delta$ , la différence de marche entre la  $(\alpha - 1)^{\text{ième}}$  source et la  $(\alpha_1)^{\text{ième}}$  source voisine, selon la direction  $\theta$ ,  $\delta_\alpha$  n'est pas constant, car la distance entre deux sources est aléatoire.



**Fig. 2.23** – Interférence par les ondes issues de sources irrégulièrement réparties dans un plan,  $N$  = nombre de sources ponctuelles. La différence de marche entre deux ondes adjacentes n'est pas constante, les sources sont réparties au hasard, la valeur moyenne de la somme de l'amplitude de ces ondes se réduit à une constante.

Soit  $u_\alpha$  l'amplitude de l'onde issue de la  $\alpha^{\text{ième}}$  source (fig. 2.23). Désignons par  $\delta_\alpha$  au lieu de  $m\delta$ , la différence de marche entre la  $(\alpha - 1)^{\text{ième}}$  source et la  $(\alpha_1)^{\text{ième}}$  source voisine, selon la direction  $\theta$ ,  $\delta_\alpha$  n'est pas constant, car la distance entre deux sources est aléatoire.

L'amplitude  $u$  de l'onde finale est la somme des amplitudes des ondes issues de ces sources et

$$u = A e^{i(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T})} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=N-1} e^{i[2\pi(-\frac{\delta_\alpha}{\lambda})]} \quad (2.118)$$

Dans cette expression (2.118) le terme  $\delta_\alpha/\lambda$  peut être plus grand que l'unité. Nous lui soustrayons, autant de fois que nécessaire, un multiple de longueur d'onde jusqu'à ce qu'il soit inférieur à 1. La fonction trigonométrique garde la même valeur avant et après cette soustraction. Nous désignons par  $\gamma_\alpha$  la nouvelle valeur réduite  $\delta_\alpha/\lambda$ . Puisque  $\gamma_\alpha$  prend des valeurs aléatoires entre 0 et 1. Nous reprenons la sommation à son début, nous écrivons  $u$  sous la forme

$$u = A e^{i(2\pi \frac{x}{\lambda} - 2\pi \frac{t}{T})} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=N-1} e^{i[2\pi(-\gamma_\alpha)]} \quad (2.119)$$

L'intensité  $I_R$  est égale à  $uu^*$

$$I = uu^* = A^2 \left( \sum_{\alpha=0}^{\alpha=N-1} e^{i2\pi(-\gamma_\alpha)} \right) \left( \sum_{\beta=0}^{\beta=N-1} e^{i2\pi(\gamma_\alpha)} \right) \quad (2.120)$$

Nous avons une double sommation au cours de laquelle  $\alpha$  est  $N$  fois égal à  $\beta$ . Dans ce cas le produit des imaginaires est égal à 1 car les fonctions deviennent conjuguées. Cette situation particulière se réalise  $N$  fois. Il apparaît donc, dans la sommation,  $N$  fois l'unité. Il reste

une sommation sur les valeurs aléatoires de  $\gamma_\alpha$  avec  $\alpha$  différent de  $\beta$ . Nous posons  $\gamma_\gamma = \gamma_\beta - \gamma_\alpha$ . Si une valeur de  $\gamma_\gamma$  est supérieure à 1 nous la réduisons, par la méthode précédente de soustraction, à un nombre compris entre 0 et 1.

$$I = [1 + 1 + 1 + 1 + \dots \left( \sum e^{i2\pi(\gamma_\gamma)} \right)] A^2 \quad (2.121)$$

La sommation se fait sur un grand nombre de termes. En conséquence, pour une certaine valeur de  $\gamma_\gamma$  il existe toujours un autre terme  $\gamma'_\gamma$  de telle façon que les deux termes  $\exp i2\pi(\gamma_\gamma)$  et  $\exp i2\pi(\gamma'_\gamma)$  s'annulent. La sommation de l'équation (2.121) est égale à zéro.

$$\left( \sum e^{i2\pi(\gamma_\gamma)} \right) = 0 \quad (2.122)$$

L'intensité obtenue à partir d'un grand nombre de sources réparties au hasard se réduit donc à l'expression

$$I_R = A^2 N \quad (2.123)$$

L'intensité est proportionnelle à  $N$ .

Comparons ce résultat avec celui d'un maximum d'interférence de la sommation des ondes issues de  $N$  sources disposées périodiquement, le maximum d'intensité est

$$I_A = A^2 N^2 \quad (2.124)$$

L'intensité des maxima, relation (2.124), est dans ce cas proportionnelle à  $N \cdot N$  et :  $I \propto N^2$ .  
*Remarque.*

Ce résultat est important dans l'étude des deux structures : structure périodique puis structure non périodique. Lorsque la structure n'est pas périodique l'étude des interférences montre que nous effectuons la *sommation d'ondes incohérentes*. *Le résultat donne une valeur moyenne de la distribution de l'intensité  $I \propto N$ , il n'y a pas de figure d'interférence. Dans l'étude de la disposition périodique des sources, les ondes s'additionnent d'une façon cohérente et nous observons une figure d'interférence*, la lumière se répartit entre des maxima et minima. Nous montrons (exemple I.21) une sommation incohérente d'ondes issues de sources disposées non périodiquement. La sommation de l'équation (2.122) est représentée en fonction de  $N_f$ . Cette somme tend vers zéro quand  $N_f$  augmente vers une grande valeur.

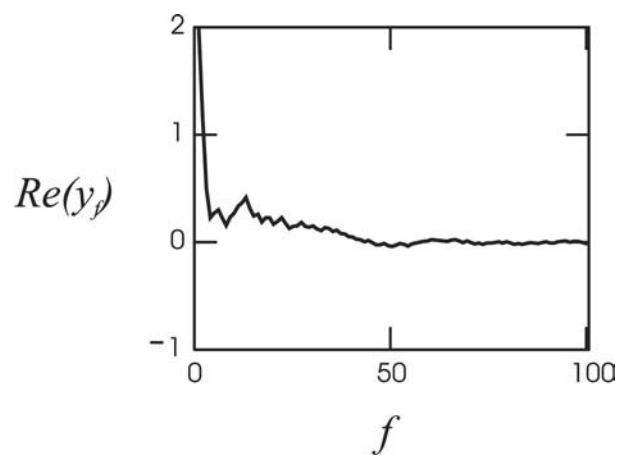
Quand les sources sont réparties au hasard, il y a brouillage des franges, l'intensité devient uniforme et constante. Dans cette situation, formule (2.123), l'intensité est proportionnelle à  $N$  et non pas à  $N^2$ .

**Exemple I.21. Sources réparties au hasard.**

*Addition incohérente de  $N$  facteurs de phase. Choisir  $N$  puis effectuer cette sommation. Nous traçons la partie réelle de la somme des fonctions d'amplitude :  $e^{i \cdot (\theta_k)}$ .*

$$f = 1 \dots 100 \quad N_f = f \quad k = 1, 2, \dots 1\,000, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$\theta_k = \text{rnd}(2 \cdot \pi), \quad y_f = \frac{1}{N_f} \cdot \sum_{k=0}^{N_f} e^{i \cdot (\theta_k)}$$

***Application I.21***

*Retenir une petite valeur de  $N$  puis les valeurs de plus en plus grandes et observer les modifications des sommations.*

---

**Exercices chapitre 2- Interférence, sur le CD**

- I01- Fonction cosinus dépendant des deux variables espace et temps
- I02- Superposition de deux fonctions cosinus ayant entre elles une différence de marche optique fixe
- I03- Représentation dans l'espace à trois dimensions
- I04- Valeur moyenne dans le temps
- I05- Étude des expériences d'Young et de Lloyd
- I06- Miroirs de Fresnel
- I07- lame à faces parallèles placée dans l'interféromètre, le milieu ambiant est asymétrique
- I08- lame à faces parallèles placée dans un interféromètre de Michelson
- I09- Coin d'air : calcul de l'angle du coin d'air
- I10- Anneaux de Newton
- I11- Anneaux d'interférence et interféromètre de Michelson
- I12- lame à faces parallèles
- I13- Interférence en lumière blanche par un film mince
- I14- Coefficient de réflexion, coefficient de transmission
- I15- lame à faces parallèles : étude graphique des variations de l'intensité en fonction de la longueur d'onde
- I16- lame à faces parallèles combinée à un miroir plan
- I17- Interféromètre Fabry-Pérot, étude des intensités réfléchie et transmise
- I18- Interféromètre Fabry-Pérot
- I19- Interférence par N sources disposées périodiquement
- I20- Somme de l'amplitude des ondes issues de N sources disposées aléatoirement

## Chapitre 3

# Diffraction

### 3.1 Introduction

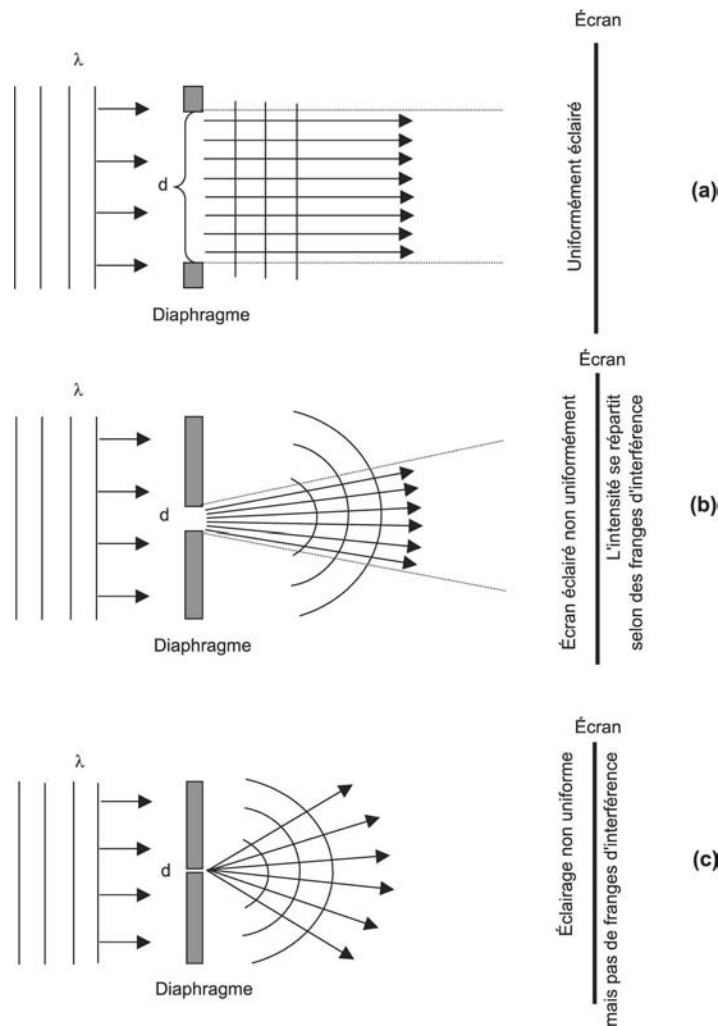
Nous avons étudié dans le chapitre des interférences la superposition d'ondes lumineuses et observé les figures d'interférence. Nous avons négligé les effets de la diffraction. Maintenant nous tenons compte de la diffraction et des interférences lors du passage d'une onde à travers une ouverture. Dans l'étude des interférences, les différences de marche entre deux ondes adjacentes étaient finies. Nous considérons la superposition d'un très grand nombre d'ondes générées par des sources qui sont très voisines les unes des autres. La distance entre ces sources est très petite, nous avons une infinité de très petites différences de marche entre deux sources adjacentes. Notre étude se base sur le principe d'Huygens.

#### Principe d'Huygens.

Le nouveau front d'onde venant d'une onde peut être considéré comme étant l'enveloppe de la multitude d'ondes produites, quelques instants plus tôt, par chaque point du front d'onde initial. Ces ondes fictives sont appelées *ondelettes* d'Huygens ; à l'instant  $t$  chaque point de la surface d'onde émet une ondelette qui se propage selon la symétrie sphérique. L'onde résultante à l'instant  $t + dt$  est la surface enveloppe de toutes ces ondelettes (fig. 3.1). La distance entre ces points sources est infiniment petite. Nous étudions la superposition des ondes émises et nous remplaçons la sommation par l'intégration.



**Fig. 3.1** – Principe d'Huygens. Construction du front d'onde à partir du principe d'Huygens.



**Fig. 3.2** – Conditions pour observer de la diffraction par une fente. (a)  $d \gg \lambda$ , le phénomène de diffraction est secondaire et négligeable. (b)  $d$  de l'ordre de grandeur de  $\lambda$ . Nous observons de la diffraction. (c)  $d \ll \lambda$  : pas de diffraction, la fente se comporte comme une source secondaire, l'écran n'est pas éclairé uniformément.

Appliquons le principe d'Huygens à une ouverture plane éclairée par une surface d'onde plane. Chaque point du front d'onde devient une source secondaire émettant de nouvelles ondes ayant une relation de phase fixe avec l'onde incidente et avec les autres sources secondaires. Nous supposons que toutes ces ondes se propagent seulement dans le sens de propagation de l'onde initiale. La différence de marche entre les ondelettes adjacentes est infiniment petite. Prenons l'exemple de la diffraction par une fente de largeur  $d$  (fig. 3.2). Éclairons ce diaphragme par une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Nous observons ou n'observons pas de diffraction selon les trois conditions suivantes

1.  $d \gg \lambda$

La fente est beaucoup plus large que la longueur d'onde. Nous observons simplement l'ombre de la fente (fig. 3.2a).

2. La fente est plus petite que dans l'exemple précédent, mais plus grande que la longueur

d'onde, de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.

Nous observons sur un écran les franges de diffraction (fig. 3.2b).

### 3. $d \ll \lambda$

Les franges n'existent plus, la fente se comporte comme une source fente, l'intensité est très faible et diminue très vite (fig. 3.2c).

Nous décrivons le phénomène de diffraction à partir de la théorie de la diffraction scalaire des ondes et nous utilisons les intégrales de Kirchhoff-Fresnel. Les ondes optiques sont des ondes électromagnétiques solutions de l'équation scalaire de propagation de la théorie électromagnétique de Maxwell. Les ondes sphériques sont de la forme :  $u = Ae^{ikr}/r$ ,  $A$  désigne l'amplitude maximum de l'onde,  $r$  sa distance par rapport à la source supposée être placée à l'origine des coordonnées,  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde. L'équation de propagation s'écrit

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (3.1)$$

Elle s'exprime en coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$ , et  $\phi$  et devient

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{r^2}\right) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right\} + (\text{termes en } \theta \text{ et } \phi) \quad (3.2)$$

Nous ne précisons pas les termes contenant les paramètres  $\theta$  et  $\phi$ . Dans un milieu homogène il y a symétrie sphérique, les solutions ne dépendent pas des angles, elles sont seulement fonction de  $r$ .

Nous pouvons nous poser la question de savoir pourquoi nous utilisons la méthode de sommation fondée sur le principe d'Huygens de la diffraction et pourquoi nous ne résolvons pas directement les équations de Maxwell, en tenant compte des conditions aux limites. La réponse est que la formulation mathématique du principe d'Huygens a été établie par Gustav Kirchhoff et Augustin Jean Fresnel avant que Maxwell écrive sa théorie. L'utilisation des intégrales de Kirchhoff-Fresnel s'est avérée, pour beaucoup d'applications, très pratique à utiliser. Nous continuons donc cette méthode.

## 3.2 Intégrale de Kirchhoff-Fresnel

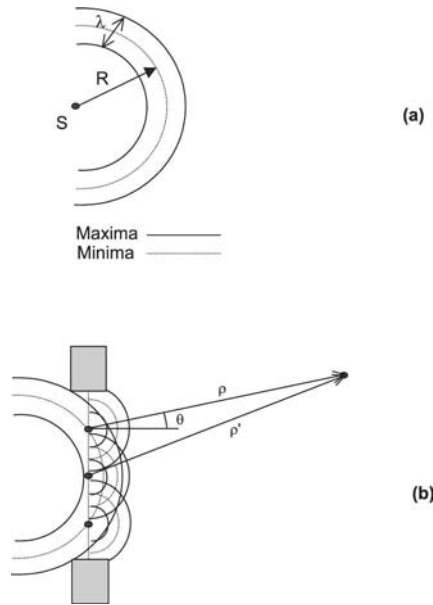
### 3.2.1 Intégrale

L'onde primaire issue de la source  $S$  d'amplitude maximum  $A$  parcourt la distance  $R$  pour atteindre le diaphragme (fig. 3.3). Nous ne tenons pas compte du facteur contenant le temps, en effet nous observons une intensité et dans le calcul des intensités ce terme s'élimine, ce que nous avons déjà constaté dans l'étude des interférences. Chaque point de l'onde, dans l'ouverture du diaphragme, génère de nouvelles ondelettes sphériques de la forme  $[(1/\rho) \exp(ik\rho)]$ . Ce sont les ondelettes d'Huygens de la même forme que l'onde incidente  $\{(A/R) \exp(ikR)\}$ , elles se dirigent seulement dans le sens de la propagation de l'onde initiale. Nous tenons compte du facteur de couplage  $\exp(i\alpha)$  entre l'ondelette et l'onde mère reliée au processus de création. L'amplitude complexe de l'ondelette en un point situé à la distance  $R$  de la source est

$$\left[ \left( \frac{A}{R} \right) e^{(ikR)} \right] \cdot \left[ \frac{1}{\rho} \right] \cdot e^{(ik\rho)} \cdot e^{(i\alpha)} \quad (3.3)$$

Nous prenons le terme de phase  $\exp(i\alpha)$  égal à l'unité. Nous savons par expérience que l'intensité est fonction de l'angle de dispersion  $\theta$  et nous multiplions l'amplitude par  $\cos \theta$ .





**Fig. 3.3** – (a) Maxima et minima de l'onde incidente. (b) Trois points d'une même surface d'onde, du plan de la fente, génèrent des ondelettes.

Le front d'onde incident génère des ondelettes dans le plan de la fente. L'amplitude totale de l'onde après passage à travers le diaphragme est l'intégrale de l'amplitude de toutes ces ondelettes. Cette intégrale a été définie par Kirchhoff-Fresnel et son expression s'écrit

$$\int_{\text{diaphragme}} \left(\frac{A}{R}\right) e^{(ik)(\frac{R}{\rho})} e^{(ik\rho)} \cos \theta d\sigma \quad (3.4)$$

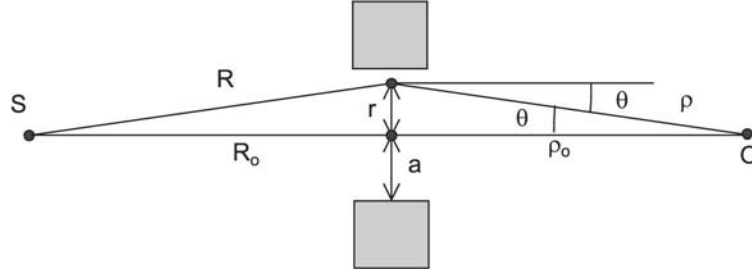
$d\sigma$  = élément de surface de l'onde sur le diaphragme.

Cette intégrale peut être dérivée à partir de l'équation de propagation de Maxwell et du théorème de Green. La formule obtenue contient le terme  $\cos \theta$  et la restriction que la lumière diffractée se propage seulement en avant du diaphragme, dans le sens de propagation de la lumière, et non pas dans le sens inverse. Toutefois il apparaît quelques problèmes avec les conditions aux limites sur les bords. La fonction de Green évite ces difficultés. L'étudiant intéressé par ce problème peut consulter le livre de Goodman (page 42) [3].

Nous ne tiendrons pas compte du terme de phase  $e^{i\alpha}$ . Nous appliquerons la relation (3.4) à des dispositions symétriques de la source et du point d'observation. Tous les deux sont placés à grande distance du diaphragme. La démonstration qui suit est empruntée au livre de Sommerfeld [4].

### 3.2.2 Diffraction par un diaphragme circulaire, observation sur l'axe de symétrie

Nous effectuons les calculs de l'amplitude et de l'intensité de l'onde diffractée par un diaphragme circulaire en un point de l'axe de symétrie.



**Fig. 3.4** – Paramètres géométriques pour le calcul de la diffraction par une ouverture circulaire. La source et le point d'observation sont à égale distance du diaphragme.

*Calcul de l'amplitude.*

Soit  $a$  le rayon du diaphragme situé à égale distance de la source  $S$  et du point d'observation placé sur l'axe de symétrie. Nous lisons (fig. 3.4) :

$$R_0 = \rho_0 \quad R = \rho \quad \cos \theta = \rho_0 / \rho \quad d\sigma = 2\pi r dr = \text{élément de surface.}$$

L'amplitude  $u$  finale est l'intégrale de l'amplitude des ondelettes sur le diaphragme

$$u = A \int_{\text{diaphragme}} \left[ \left( \frac{1}{R\rho} \right) \cdot e^{ik(R+\rho)} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \right] \cdot 2\pi r dr \quad (3.5)$$

Les limites de l'intégrale sont comprises entre  $\rho_0$  et  $\sqrt{a^2 + \rho_0^2}$ . Nous avons :  $r^2 + \rho_0^2 = \rho^2$  ce qui donne  $r dr = \rho d\rho$  d'où

$$u = A 2\pi \rho_0 \int_{\rho_0}^{\sqrt{a^2 + \rho_0^2}} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) e^{ik2\rho} d\rho \quad (3.6)$$

Intégrons par parties, posons  $u = 1/\rho^2$ ,  $dv = e^{ik2\rho}$ , nous en déduisons  $v = (1/2ik)e^{ik2\rho}$ . L'intégrale devient

$$\left[ \left( \frac{1}{\rho^2} \right) \left( \frac{1}{2ik} \right) e^{ik2\rho} \right]_{\rho_0}^{\sqrt{a^2 + \rho_0^2}} + \left( \frac{1}{ik} \right) \int_{\rho_0}^{\sqrt{a^2 + \rho_0^2}} \left( \frac{1}{\rho^3} \right) e^{ik2\rho} d\rho$$

Puisque  $\rho$  est grand, nous ne retenons que le premier terme  $\frac{1}{\rho^2}$ .

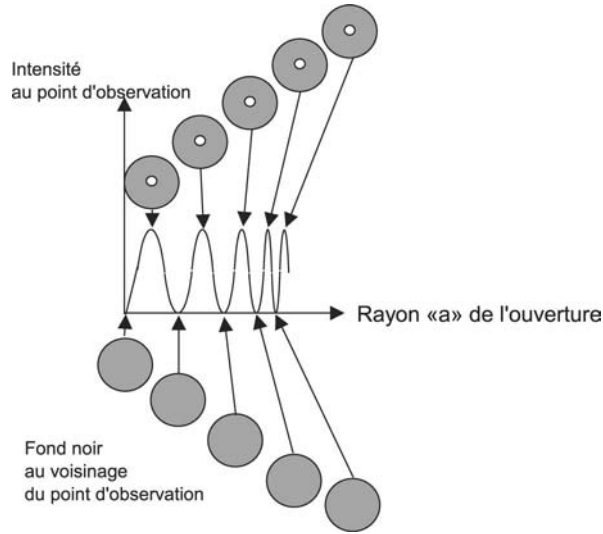
$$u = \left( \frac{2\pi A \rho_0}{2ik} \right) \left( \frac{e^{i2k\sqrt{a^2 + \rho_0^2}}}{(a^2 + \rho_0^2)} - \frac{e^{i2k\rho_0}}{\rho_0^2} \right) \quad (3.7)$$

De plus  $\rho_0 \gg a$ , nous pouvons faire une autre approximation sous forme d'un développement limité

$$\sqrt{a^2 + \rho_0^2} \approx \rho_0 \left( 1 + \frac{a^2}{2\rho_0^2} \right) \quad (3.8)$$

D'où l'expression finale de l'amplitude de l'onde diffractée

$$u = \left( \frac{2\pi A \rho_0}{2ik} \right) \left( e^{i2k\rho_0} \right) \left( \frac{1}{\rho_0^2} \right) \left[ e^{\frac{ika^2}{\rho_0}} - 1 \right] \quad (3.9)$$



**Fig. 3.5** – Figures de diffraction par un diaphragme circulaire. Le centre de la figure de diffraction est soit brillant (ce que nous indiquons par un point blanc sur le fond sombre) soit sombre, intensité égale à zéro, selon la valeur du rayon  $a$  du diaphragme.

*Calcul de l'intensité observée.*

L'intensité a pour expression  $I = uu^*$ , nous introduisons la constante de normalisation  $I_0$ . Nous obtenons

$$I = I_0 \lambda^2 \sin^2\left(\frac{ka^2}{2\rho_0}\right) \quad (3.10)$$

Nous représentons (fig. 3.5) les figures de diffraction par des ouvertures circulaires de rayon  $a$ , figures observées sur un écran. Les centres montrent alternativement des taches brillantes ou sombres selon la valeur du rayon  $a$  du diaphragme, puis nous étudions l'exemple (D.1). Nous pouvons lire sur le graphe les rayons des maxima et des minima.

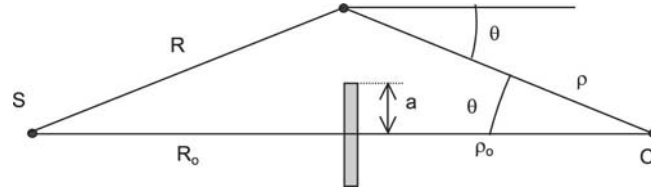
**Exemple D.1.** *Traçons la courbe de l'intensité diffractée sur l'axe.*

$\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ ,  $\rho_0 = 4\,000\text{ mm}$ , le rayon  $a$  varie de  $0,1$  à  $5\text{ mm}$ . Faire varier continûment le rayon  $a$  et constater que le centre de la courbe de diffraction passe par une suite de maxima et de minima.

*Cette étude est faite sur le CD.*

### 3.2.3 Diffraction par un disque, observation sur l'axe de symétrie

Il est intéressant d'étudier deux exemples complémentaires, citons le disque et l'ouverture circulaire. Appliquons l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel (équation 3.4) à l'écran formé par un disque (fig. 3.6).



**Fig. 3.6** – Coordonnées pour l'étude de la diffraction par un écran circulaire. Le point source et le point d'observation sont à égale distance du plan du diaphragme.

Nous devons calculer

$$u = A2\pi\rho_0 \int_{\sqrt{a^2+\rho_0^2}}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho^2}\right) e^{ik2\rho} d\rho \quad (3.11)$$

Nous intégrons par parties

$$\left[ \left(\frac{1}{\rho^2}\right) \left(\frac{1}{2ik}\right) e^{ik2\rho} \right]_{\sqrt{a^2+\rho_0^2}}^{\infty} + \left(\frac{1}{ik}\right) \int_{\sqrt{a^2+\rho_0^2}}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho^3}\right) e^{ik2\rho} d\rho \quad (3.12)$$

Négligeons la dernière intégrale

$$u = \left(\frac{2\pi A\rho_0}{2ik}\right) \left[ -\frac{1}{(a^2 + \rho_0^2)} \right] \left[ e^{i2k\sqrt{a^2+\rho_0^2}} \right] \quad (3.13)$$

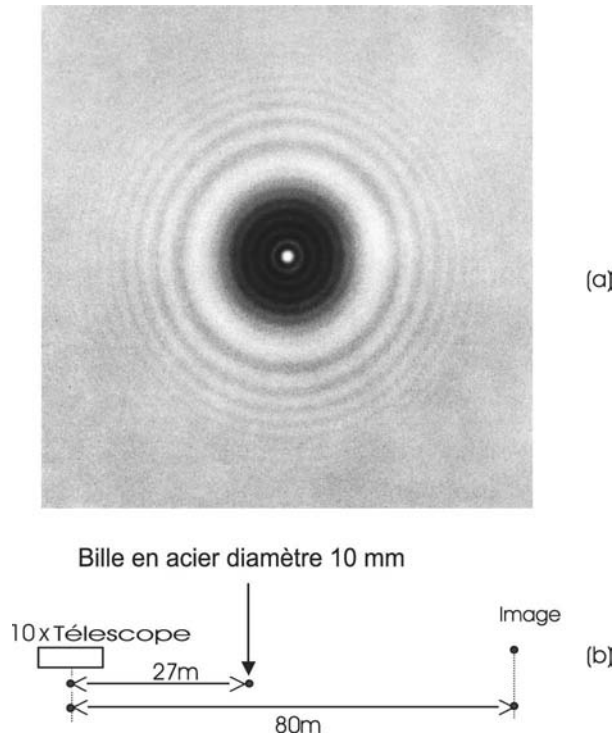
**Intensité :**  $I = uu^*$ , nous posons :  $I_0 = A^2 \frac{\rho_0^2}{(a^2 + \rho_0^2)}$ , l'expression de l'intensité devient

$$I = \frac{I_0 \lambda^2}{4} \quad (3.14)$$

L'intensité selon la relation (3.14) dépend seulement de la longueur d'onde, elle est indépendante du diamètre du disque et indépendante de la distance. Nous observons derrière le disque, dans son ombre et sur l'axe, un point lumineux : c'est le point de Poisson, physicien français. Fresnel était venu présenter devant l'Académie des Sciences sa théorie ondulatoire de propagation des ondes lumineuses, Poisson argumenta que l'on devait observer une tache brillante dans l'ombre d'une sphère éclairée. Arago, membre de l'Académie, fit l'expérience, observa le point brillant et rendit compte à l'Académie des Sciences de sa déduction à partir de la théorie de Fresnel. Toutefois, ce point brillant reste appelé point de Poisson. Nous montrons (fig. 3.7) une photographie illustrant ce résultat, nous indiquons aussi les valeurs expérimentales.

### 3.3 Diffraction de Fresnel, approximation de la diffraction à grande distance, diffraction de Fraunhofer

Nous avons supposé, pour ces deux applications d'intégrales de Kirchhof-Fresnel, que la source de lumière était très éloignée du plan du diaphragme. Nous n'avons pas précisé ce que nous appelons *éloignée* et *grande distance*. Quand nous considérons que la distance est *très grande*, voir infiniment grande, les ondes incidentes sont quasiment planes sur le plan du diaphragme, nous sommes dans les conditions des expériences du chapitre 2. Nous observons



**Fig. 3.7** – Point de Poisson. Diffraction par un écran circulaire. (a) Photographie de la figure de diffraction obtenue. Au centre apparaît le point de Poisson [1]. (b) Paramètres de l'étude du point de Poisson [2].

la figure de diffraction, c'est-à-dire l'intensité diffractée sur un écran placé, lui aussi, à grande distance du diaphragme. Les ondes sont donc aussi planes, et les rayons parallèles entre eux. Les conditions de superposition sont les mêmes que celles des interférences étudiées dans le chapitre précédent. C'est l'approximation des grandes distances : les ondes sont planes et nous sommes dans les conditions de la *diffraction à l'infini*. Dans le cas où nous observons l'intensité dans le plan focal d'une lentille, nous disons que nous sommes dans les *conditions de Fraunhofer*. Le traitement mathématique de la diffraction à l'infini et de son observation dans les conditions de Fraunhofer sont les mêmes. À l'opposé, quand les distances du plan de diffraction au plan d'observation sont grandes mais finies, nous sommes dans les *conditions de la diffraction de Fresnel*.

### 3.3.1 Approximation des petits angles, étude en coordonnées cartésiennes

Nous faisons l'approximation de la diffraction à grande distance ou diffraction à l'infini. La distance comprise entre le plan du diaphragme et le plan d'observation est toujours très supérieure à la valeur de la longueur d'onde. Puisque nous observons au voisinage de l'axe, nous pouvons faire l'approximation des petits angles. Revenons à la relation (3.4) décrivant l'amplitude d'une onde après traversée d'un diaphragme. Elle s'écrit

$$\int_{\text{diaphragme}} \frac{A}{R} \left( e^{ikR} \right) \left( \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) \cos \theta d\sigma \quad (3.15)$$

Nous ne tenons pas compte du facteur  $\cos \theta$ . Le facteur  $(\frac{A}{R})e^{(ikR)}$  varie peu dans le plan du diaphragme ; nous le sortons de l'intégrale. Sachant que nous considérons une approche dans une seule dimension, nous devons prendre seulement en considération les paramètres  $Y$  et  $y$ . L'intégrale finale à étudier est

$$u(Y) = C \int_{\text{diaphragme}} \left( \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) dy \quad (3.16)$$

Nous précisons les coordonnées (fig. 3.8),  $X$  désigne la distance comprise entre le diaphragme et le plan d'observation. Puisque la distance  $X$  est grande, nous pouvons prendre  $\rho$  constant au dénominateur, mais pas dans l'exponentiel. Effectuons le développement limité de  $\rho$  car nous restons au voisinage de l'axe de symétrie et  $Y \ll X$ .

$$\begin{aligned} \rho &= \{(Y - y)^2 + X^2\}^{1/2} \\ &= X + \frac{(Y - y)^2}{2X} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Remplaçons  $\rho$  par cette relation dans l'équation (3.16). Nous plaçons les deux termes  $1/\rho$  et  $e^{ikX}$  dans une constante  $C'$ . Nous obtenons

$$u(Y) = C' \int_{\text{diaphragme}} e^{ik \left( \frac{(Y-y)^2}{2X} \right)} dy \quad (3.18)$$

Nous développons l'expression contenue dans la fonction exponentielle, nous écrivons :  $(Y - y)^2 = Y^2 + y^2 - 2yY$  et la relation (3.18) devient

$$ik \left( +\frac{y^2}{2X} + \frac{Y^2}{2X} - \frac{yY}{X} \right) \quad (3.19)$$

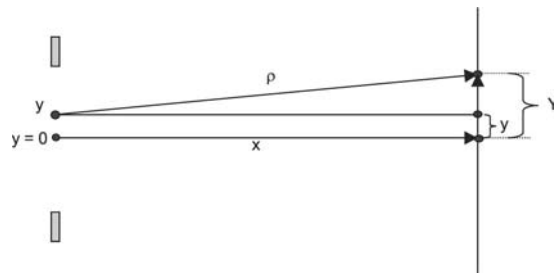
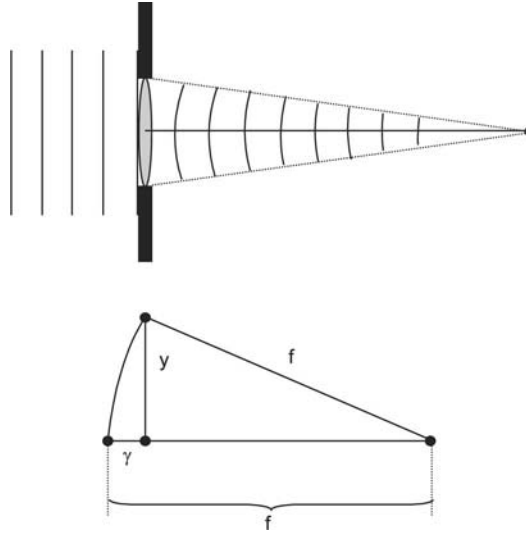


Fig. 3.8 – Coordonnées, approximation des petits angles.

Étudions maintenant l'amplitude de l'onde diffractée dans deux cas : observation à distance finie (diffraction de Fresnel) puis observation à l'infini (diffraction de Fraunhofer). Dans ces deux situations les termes quadratiques de la relation (3.19) sont tour à tour importants ou négligeables.



**Fig. 3.9** – Calcul du changement de phase de la surface d'onde lors de la réfraction par une lentille.

### 3.3.2 Diffraction de Fresnel, approximation de la grande distance, diffraction de Fraunhofer

#### Diffraction de Fresnel.

Nous ne négligeons pas le terme quadratique de l'équation (3.19). Revenons à l'équation (3.18), l'amplitude de l'onde diffractée est

$$u(Y) = C'' \int_{\text{diaphragme}} e^{-ik \left( \frac{(Y-y)^2}{2X} \right)} dy \quad (3.20)$$

Nous sommes dans les conditions de diffraction à distance finie, ce sont les conditions de la diffraction de Fresnel qui peut être exprimée par les intégrales de Fresnel.

#### Diffraction à grande distance et transformée de Fourier.

Nous négligeons les termes quadratiques  $y^2$  et  $Y^2$  de l'équation (3.19) et considérons  $X$ ,  $Y$  constants, donc le terme  $\frac{Y^2}{2X}$  est aussi constant et nous le plaçons dans une constante  $C''$ . Il vient

$$u(Y) = C'' \int_{\text{diaphragme}} e^{-ik \left( \frac{yY}{X} \right)} dy \quad (3.21)$$

C'est l'approximation des grandes distances ou de l'infini. D'un point de vue mathématique cette fonction intégrale est une transformée de Fourier.

### Diffraction de Fraunhofer

L'approximation des calculs est la même que celle de la diffraction à l'infini, il est inutile de recommencer les calculs puisque nous observons les franges dans le plan focal d'une lentille de distance focale  $f$ . Par contre, nous devrions étudier le changement de phase lors de la focalisation par la lentille. L'intégrale obtenue est la même que celle de la diffraction à l'infini.

$$ik\left(+\frac{y^2}{2X} + \frac{Y^2}{2X} - \frac{yY}{X}\right) \quad (3.22)$$

L'intégrale de la diffraction à l'infini est calculée en considérant que nous négligeons les termes quadratiques de la variable  $y$ , tandis que  $X$  et  $Y$  restent sensiblement constants.

Ici, nous ne négligeons plus le terme quadratique en  $y$ , nous verrons qu'il est compensé par les effets de la lentille. Le lecteur intéressé par ce calcul peut consulter le livre de J. W. Goodman p.78 [4]. Le front d'onde converge au point focal image de la lentille (fig. 3.9).

Il apparaît une dérive de phase  $\gamma$  sur la longueur  $y$ ; nous la calculons avec la relation

$$y^2 + (f - \gamma)^2 = f^2 \quad (3.23)$$

Négligeons  $\gamma^2$  dans l'expression développée de cette relation (3.23) :  $(f^2 - 2f\gamma + \gamma^2)$ . Nous obtenons la dérive de phase  $\gamma$

$$\gamma = \frac{y^2}{2f} \quad (3.24)$$

Cette dérive s'ajoute au déphasage contenu dans l'exposant de l'expression (3.22), puisque  $X = f$ , cette expression devient

$$ik\left(+\frac{y^2}{2f} + \frac{Y^2}{2f} - \frac{yY}{f}\right) - ik\frac{y^2}{2f} \quad (3.25)$$

Le nouveau terme quadratique du paramètre  $y$  annule l'ancien terme quadratique que nous avons négligé dans le calcul de la diffraction à l'infini. L'intégrale finale est

$$u(Y) = C'' \int e^{-ik\left(\frac{yY}{f}\right)} dy \quad (3.26)$$

Cette intégrale est la même que celle de la diffraction à l'infini. Nous calculons maintenant les amplitudes des ondes diffractées par différentes formes de diaphragme, nous en déduisons les intensités observées sur un écran placé à l'infini ou dans les conditions de Fraunhofer.

### 3.4 Diffraction à l'infini, diffraction de Fraunhofer

La diffraction à l'infini et la diffraction de Fraunhofer ont la même intégrale de Kirchhoff-Fresnel et donc la même apparence. Dans un cas, la diffraction est observée sur un écran placé à très grande distance. Dans l'autre cas, la diffraction est observée dans le plan focal d'une lentille qui peut être placée à une distance proche du plan du diaphragme.

Nous étudions maintenant la diffraction par différentes formes de diaphragmes. Rappelons l'expression de l'amplitude de l'onde diffractée

$$u(Y) = C \int (e^{ik\rho}) d\sigma \quad (3.27)$$

$d\sigma$  désigne l'élément de surface de l'ouverture et  $1/\rho$  est placé dans la constante d'intégration  $C$ . Nous n'avons pas utilisé dans la relation (3.27) l'approximation des petits angles.



### 3.4.1 Diffraction par une fente

L'étude de la diffraction par une fente à grande distance, appelée aussi diffraction à l'infini, est importante. D'une part c'est un problème à une dimension, d'autre part nous rencontrons ce phénomène dans l'étude des réseaux et dans beaucoup d'autres montages. Les paramètres intervenant dans le calcul de la diffraction par une fente sont représentés sur la figure (3.10). Nous divisons la fente en  $N$  intervalles de largeur  $\Delta y$ . Nous effectuons la sommation de toutes les ondelettes se propageant selon la direction  $\theta$ . Ces ondelettes sont générées sur la fente et sont adjacentes. Elles ont entre elles la même différence de marche  $\delta$ . La discussion est la même que celle rencontrée dans l'étude des interférences par les ondes issues de sources régulièrement réparties selon une droite (chapitre 2, équation 2.107). Les différences de marche des ondelettes se font par rapport à l'ondelette issue du centre de la fente. La différence de marche entre les ondelettes d'ordonnée  $y$  et l'ondelette centrale est  $y \sin \theta$ . Remplaçons  $q\delta$  par  $y \sin \theta$  dans la sommation de l'équation (2.107). L'amplitude  $u$  de la somme des amplitudes des ondelettes est

$$u = \sum e^{-ik(y \sin \theta)} (\Delta y) \quad (3.28)$$

Donnons à  $\Delta y$  une valeur infiniment petite  $dy$ . La sommation devient une intégrale. Désignons par  $u(Y)$  la nouvelle amplitude de l'onde finale et

$$u(Y) = C \int e^{-ik(y \sin \theta)} dy \quad (3.29)$$

$C$  comprend tous les autres termes constants. L'intégration se fait entre  $-d/2$  et  $+d/2$ , et l'intégrale s'écrit

$$u(Y) = C \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-ik(y \sin \theta)} dy \quad (3.30)$$

Faisons l'approximation des petits angles :  $\sin \theta = Y/X$

$$u(Y) = C \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-i(2\pi \frac{yY}{\lambda X})} dy \quad (3.31)$$

Le calcul de cette intégrale donne l'amplitude suivante

$$u = Cd \left( \frac{\sin(\pi \frac{dY}{\lambda X})}{(\pi \frac{dY}{\lambda X})} \right) \quad (3.32)$$

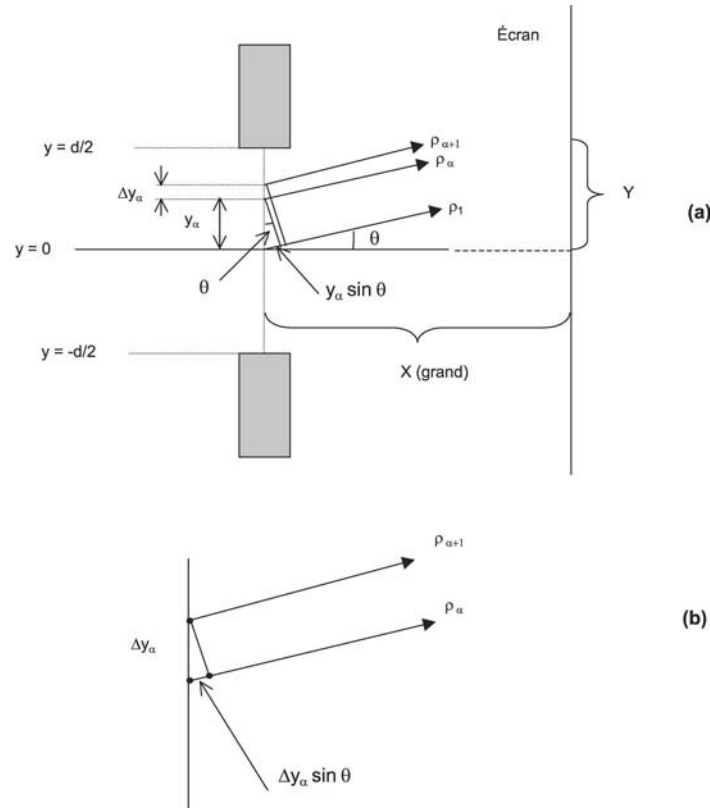
#### Intensité.

Nous désignons par  $I_0$  la constante de normalisation. L'expression de l'intensité  $I = uu^*$  est

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})}{(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \quad (3.33)$$

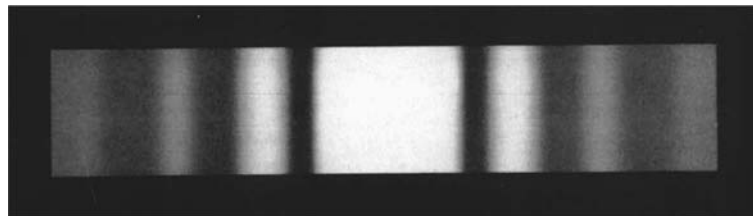
Or, dans l'approximation des petits angles, elle devient

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(\pi \frac{dY}{\lambda X})}{(\pi \frac{dY}{\lambda X})} \right]^2 \quad (3.34)$$



**Fig. 3.10** – Choix des coordonnées, étude de la diffraction par une fente. (a) La différence de phase des ondelettes se fait par rapport à l'ondelette centrale. (b) Différence de phase entre deux ondelettes adjacentes  $\rho_{\alpha}$  et  $\rho_{\alpha+1}$ .

La figure de diffraction d'une fente a une apparence périodique, mais les maxima successifs ont des intensités décroissantes. Nous traçons sur l'exemple (D.2) trois figures de diffraction correspondant à trois fentes. Le maximum central, le plus large, est celui de la fente la plus fine. Nous montrons (fig. 3.11) une photographie de l'intensité diffractée par une fente. Nous complétons cette étude par l'exemple D.2 où nous étudions les variations de la figure de diffraction en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , puis en fonction de la largeur  $d$  de la fente.



**Fig. 3.11** – Photographie de la figure de diffraction par une fente [1].

Le maximum d'intensité a lieu au centre quand  $Y = 0$ , et l'intensité est de la forme  $I_0 \cdot \left(\frac{0}{0}\right) = I_0$ . La discussion est analogue à celle du chapitre 2. L'angle sous lequel le premier

minimum est vu à partir du centre de la fente est appelé *angle de diffraction* (quand le diaphragme est une fente :  $\theta = \frac{\lambda}{d}$ ). Il intervient dans l'étude de la résolution, par exemple dans le nombre de Fresnel il sert à caractériser les pertes d'une cavité laser.

*Minima.*

Les minima ont lieu quand :  $\theta = m \frac{\lambda}{d}$ .

*Maxima.*

Ils sont donnés par la relation  $\frac{Y}{X} = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{d}$ , ils sont sensiblement au milieu des minima. Le calcul exact est fait dans l'exemple (D.3) et son application (D.3).

**Exemple D.2. Traçons le graphe de l'intensité diffractée par une fente.**

Nous faisons varier :

- la largeur de la fente  $\Rightarrow$  nous constatons que la largeur du pic central est inversement proportionnelle à  $d$ , ce qui est une caractéristique générale d'une figure de diffraction ;
  - la longueur d'onde  $\lambda \Rightarrow$  nous constatons que la largeur du pic central est proportionnelle à  $\lambda$ .
- Les minima ont lieu quand  $\theta = m \frac{\lambda}{d}$ .

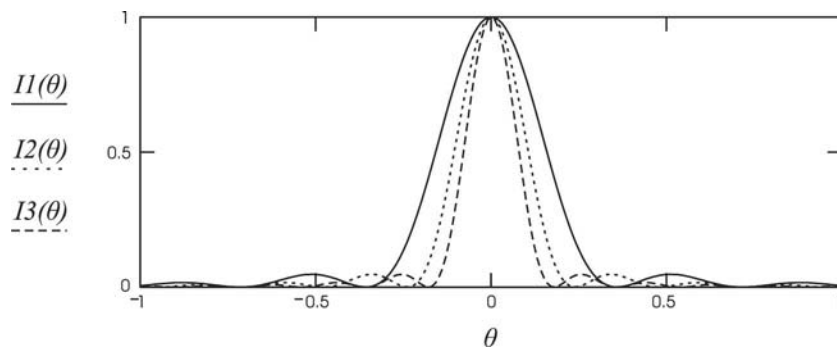
Paramètres : les longueurs sont en millimètres.

$X =$  distance fentes-écran = 4 000       $\lambda = 0,000\ 5$ . Nous étudions successivement la diffraction par trois fentes  $d_1$ ,  $d_2$ , et  $d_3$ . Nous avons :  $d_1 = 0,08$     $d_2 = 0,12$     $d_3 = 0,16$  .

$Y/X$  est proportionnel à l'angle  $\theta$ . Nous sommes dans l'approximation de Gauss. Quand  $Y = 0$ , nous avons une singularité. Nous la contournerons en prenant des valeurs voisines de zéro, mais non égales à zéro et les variations de  $Y$  sont :  $Y = -100,1, -99,1 \dots 100,1$ ,

$$I_1(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \cdot \frac{d_1}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))}{(\pi \cdot \frac{d_1}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))} \right]^2, \quad I_2(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \cdot \frac{d_2}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))}{(\pi \cdot \frac{d_2}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))} \right]^2,$$

$$I_3(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \cdot \frac{d_3}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))}{(\pi \cdot \frac{d_3}{\lambda} \cdot \sin(\frac{2\pi}{360} \cdot \theta))} \right]^2$$



**Application D.2**

Le lecteur peut étudier la dépendance de la largeur du pic central en fonction de  $\lambda$  et  $d$ . Il tracera la courbe de variation de l'intensité et examinera le rapport  $d/\lambda$  en retenant les valeurs suivantes :

- longueur d'onde  $\lambda$  puis  $\lambda/2$  et  $2\lambda$  ;
- largeur de fente  $d$  puis  $d/2$  et  $4d$ .

**Exemple D.3. Étude des lobes latéraux de l'intensité diffractée par une fente.**

Nous traçons les variations de l'intensité diffractée par une fente avec une grande échelle afin de lire facilement la position des maxima secondaires et des minima.

Domaine de variation  $Y = 18, 19, \dots, 150$     $X = 4\ 000$     $\lambda = 0,000\ 05$ . Lire la position des maxima secondaires et des minima, puis répondre aux questions de l'application 3.3.

Cette étude est faite sur le CD.

### Application D.3

1. Donner les positions des cinq premiers minima.

2. Déterminer la position des maxima.

3. Déterminer les positions des maxima secondaires.

Les maxima secondaires sont obtenus par différentiation, par rapport à  $Y$ , de la relation  $I = I_0 [\sin\{\pi dY/X\lambda\} / \{\pi dY/X\lambda\}]^2$  puis nous écrivons que cette différentielle est égale à zéro. Nous obtenons l'équation :  $\pi y d/\lambda = \tan(\pi y d/\lambda)$ , avec  $y = Y/X$ .

Une solution graphique permet de trouver simplement les solutions de cette équation. Traçons les deux courbes  $\pi y d/\lambda$  et  $\tan(\pi y d/\lambda)$  sur un même graphe. Les solutions recherchées sont les intersections des deux courbes. Lire les cinq premières intersections et les comparer avec les valeurs lues sur les courbes de variation de la figure (3.3), les comparer avec la formule approximative permettant de trouver l'ordonnée  $Y$  des maxima :  $Y/X = (m + 1/2)\lambda/d$ .

4. Mesurer les hauteurs des deuxième et troisième maxima et les comparer à la hauteur au maximum central. Comparer les résultats avec les valeurs théoriques calculées à partir de la formule de l'intensité de la diffraction par une fente.

### 3.4.2 Diffraction par une fente et transformée de Fourier

Écrivons l'équation (3.31). Nous nous plaçons dans l'approximation des petits angles, nous introduisons le nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ , l'amplitude de l'onde diffractée est

$$u(Y) = C \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-i2\pi(\frac{y}{\lambda})(\frac{Y}{X})} dy \quad (3.35)$$

Effectuons le changement de paramètre suivant

$$v = (\frac{y}{\lambda}), \quad x = \frac{Y}{X}, \quad a = \frac{d}{2\lambda} \quad (3.36)$$

L'équation précédente devient

$$u(x) = C \int_{z_1}^{a_2} e^{-i2\pi\nu x} d\nu \quad (3.37)$$

L'intégration peut être faite entre les limites  $-\infty$  à  $\infty$  en définissant la fonction rectangle  $Q(\nu)$  par

$$\begin{aligned} Q(\nu) &= 1 \text{ quand } x \text{ compris entre } -a \text{ et } a \\ Q(\nu) &= 0 \text{ pour les autres valeurs de } x \end{aligned} \quad (3.38)$$

et

$$u(x) = C \int_{-\infty}^{\infty} Q(\nu) e^{-i2\pi\nu x} d\nu \quad (3.39)$$

Cette intégrale (3.39)  $u(x)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $Q(\nu)$ . Le résultat du calcul donne

$$u(x) = C' \left( \frac{\sin 2\pi ax}{2\pi ax} \right) \quad (3.40)$$

La transformée de Fourier d'une fonction fente  $Q(\nu)$  est donc la fonction « *sinc* ».

Nous pouvons calculer l'intégrale d'une simple fonction telle que la fonction rectangle appelée aussi fonction *fente* (car représentant la diffraction par une fente). Lorsque la fonction

$Q(\nu)$  est une fonction numérique, ou une fonction analytique compliquée, nous ne pouvons pas obtenir une expression analytique de  $u(x)$ . Toutefois nous pouvons calculer la transformée de Fourier. Nous étudions l'exemple (D.4) et nous traçons une fonction d'Heaviside. Le paramètre  $i$  varie de 0 à 255, avec  $x_i = 1$  de 0 à  $d$ , et  $x = 0$  pour les autres valeurs. Nous traçons  $x_i$  en fonction de  $i/255$ . Ici, nous représentons la moitié de la fonction et faisons la transformée de Fourier  $c_j$  que nous traçons comme un graphe en fonction de  $j/225$ , tracé de 0 à 0,5. Puisque nous n'avons retenu que la moitié de la fonction rectangle, nous obtenons la moitié de la figure de diffraction. La transformée de Fourier est une fonction réelle, nous avons utilisé la transformée de Fourier rapide (FFT), la transformée  $c_j$  a seulement 128 valeurs. La transformée de Fourier inverse utilise à nouveau 256 points. L'étudiant intéressé par la FFT peut consulter notre chapitre 5 se rapportant à l'interférométrie moderne.

---

**Exemple D.4. Effectuons la transformée de Fourier de la fonction marche.**

Nous choisissons :  $d = 20$  et nous devons prendre  $n - 1$  valeurs pour la calculer.

- Nous traçons la partie réelle et la partie imaginaire de la transformation.
- Nous calculons la transformée de Fourier inverse.
- La partie réelle est la fonction initiale : la fonction rectangle dont nous représentons le graphe.
- La transformée de Fourier inverse de la partie imaginaire est égale à zéro.

**Application D.4**

Choisir successivement plusieurs valeurs  $d$  et lire la première valeur pour laquelle la transformée s'annule. Établir la formule qui permettra de trouver cette valeur. L'étudiant partira de la relation (3.40). Comparer cette valeur à celle lue sur le graphe de la transformée et la comparer au résultat de l'application (D.3).

---

### 3.4.3 Diffraction par une ouverture rectangulaire

L'intensité de l'onde diffractée par une ouverture rectangulaire (fig. 3.12) est facile à calculer, c'est une extension du calcul à une dimension. Le calcul est effectué dans l'approximation des angles petits, nous observons la figure au voisinage de l'axe et à grande distance. Soit une ouverture rectangulaire de largeur  $d$  selon  $y$ , de longueur  $a$  selon  $z$ . Rappelons l'équation (3.31)

$$u(Y) = \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-ik(y\frac{Y}{X})} dy$$

L'intégration selon  $y$  va être étendue aussi sur la direction  $z$  puisque le diaphragme est rectangulaire (fig. 3.12). En fait, la diffraction est le produit de deux intégrales identiques à celles de la relation (3.31). La largeur  $d$  est selon l'axe  $y$ , l'autre côté de dimension  $a$  est selon la direction  $z$ .

$$u(Y, Z) = \left[ \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-i2\pi(\frac{y}{\lambda})(\frac{Y}{X})} dy \right] \cdot \left[ \int_{z_1=-a/2}^{z_2=a/2} e^{-i2\pi(\frac{z}{\lambda})(\frac{Z}{X})} dz \right] \quad (3.41)$$

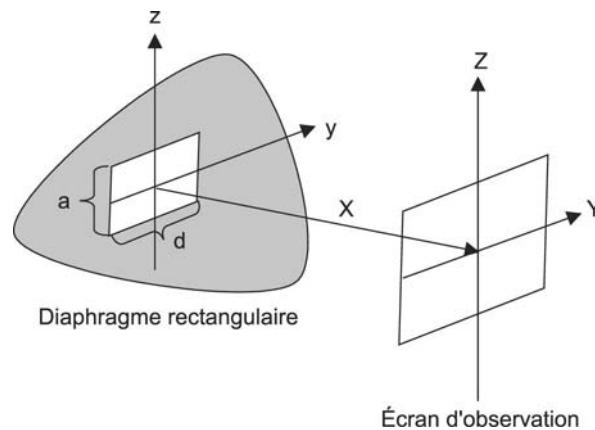
Nous obtenons

$$u(Y, Z) = C \left[ \frac{\sin(\pi \frac{dY}{\lambda X})}{\pi \frac{dY}{\lambda X}} \right] \cdot \left[ \frac{\sin(\pi \frac{aZ}{\lambda X})}{\pi \frac{aZ}{\lambda X}} \right] \quad (3.42)$$

*Intensité.*

L'intensité normalisée est

$$I = I_o \left[ \frac{\sin(\pi \frac{dY}{\lambda X})}{\pi \frac{dY}{\lambda X}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi \frac{aZ}{\lambda X})}{\pi \frac{aZ}{\lambda X}} \right]^2 \quad (3.43)$$



**Fig. 3.12** – Coordonnées retenues dans l'étude de la diffraction par une ouverture rectangulaire.

Nous représentons (exemple D.5) la figure de diffraction en trois dimensions. Les maxima et minima sont selon les directions  $y$  et  $z$ . L'angle de diffraction selon  $y$  est  $\theta = Y/X = \lambda/d$ , selon  $z$  il devient  $Z/X = \lambda/d$ . Nous montrons (figure 3.13) une photographie de la figure de diffraction observée.

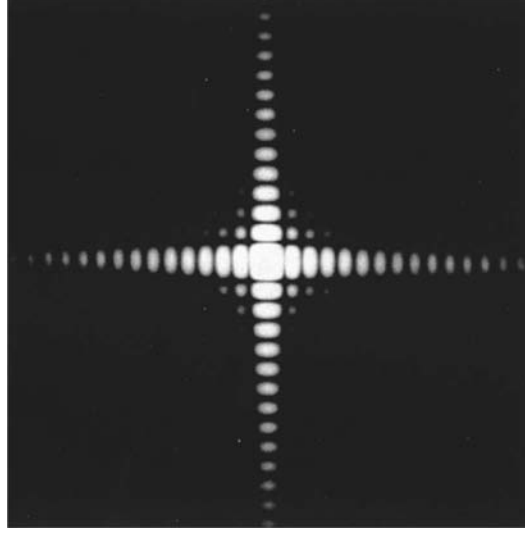
**Exemple D.5.** Nous traçons en 3 D la figure de diffraction d'un diaphragme rectangulaire.

1. Nous changeons la valeur inférieure de  $x$  ainsi que celle de  $y$  et nous faisons croître  $N$ . Nous obtenons une figure avec des lignes plus denses.
2. Changeons  $d$  et  $a$ . Constatons que, si nous augmentons ces valeurs, la diffraction devient plus étroite.
3. Constatons que si  $d = a$ , la diffraction est comprise dans une enveloppe carrée.

Cette étude est faite sur le CD.

#### **Application D.5**

1. Dessiner une représentation graphique en trois dimensions puis changer les valeurs des paramètres  $d$  et  $a$  afin d'étudier les diffractions par les ouvertures suivantes :
  - ouverture de forme carrée ;
  - ouverture ayant la forme d'un long ruban : la figure de diffraction est celle obtenue par une fente.
2. Changer les valeurs des rapports  $d/\lambda$  et  $a/\lambda$  et observer l'élargissement ou le rétrécissement de la courbe de diffraction.



**Fig. 3.13** – Diffraction à grande distance par une ouverture rectangulaire [1].

### 3.4.4 Diffraction par une ouverture circulaire

La diffraction par une ouverture circulaire est présente dans tous les systèmes optiques ayant une ouverture circulaire tels que les objectifs, lentilles, etc. Bien que la diffraction semble avoir des conséquences mineures sur la qualité d'une image, elle peut limiter la qualité de l'image ainsi que la résolution dans les appareils scientifiques, c'est le cas du télescope du mont Palomar. Il a pourtant un miroir d'un diamètre de 5 m, mais la qualité de l'image d'une étoile est affaiblie par la diffraction. Il en est de même dans le domaine des infiniment petits du microscope électronique.

L'intégrale (3.41) s'écrit sous la forme

$$u(Y, Z) = \int_{\text{ouverture circulaire}} e^{-ik \frac{(zZ+yY)}{X}} dz dy \quad (3.44)$$

Puisque nous avons une symétrie circulaire, nous changeons de système de coordonnées et nous choisissons les coordonnées polaires (fig. 3.14).

$$z = r \cos \phi \quad Z = R \cos \psi \quad (3.45)$$

$$y = r \sin \phi \quad Y = R \sin \psi \quad (3.46)$$

avec

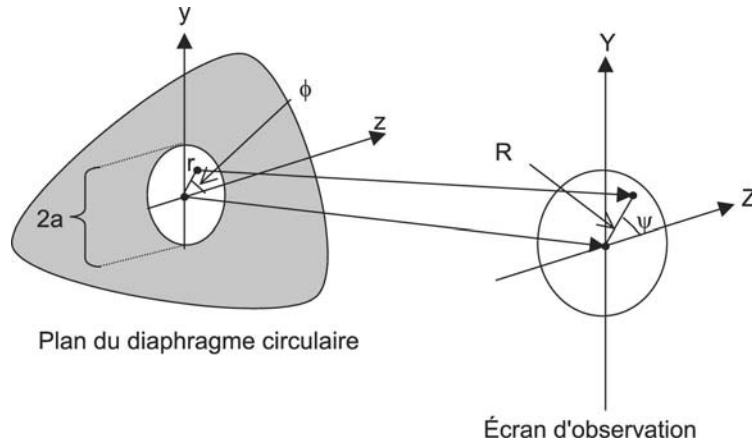
$$0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (3.47)$$

Rappelons que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . L'intégrale précédente s'écrit

$$u(r, \phi) = u_o \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^a e^{-i2\pi \left( \frac{rR}{\lambda X} \right) \cos(\psi - \phi)} r dr d\phi \quad (3.48)$$

Cette intégrale est une fonction de Bessel d'ordre zéro.

$$J_0(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iq \cos(\psi - \phi)} d\phi \quad (3.49)$$



**Fig. 3.14** – Coordonnées retenues dans l'étude de la diffraction par une ouverture circulaire.

avec  $q = 2\pi \frac{rR}{\lambda X}$  d'où :  $r = \frac{\lambda X}{2\pi R} q$ .

L'équation (3.48) devient

$$u = u_o \left( \frac{\lambda X}{2\pi R} \right)^2 \cdot 2\pi \int_{q=0}^{q=2\pi(\frac{aR}{\lambda X})} J_o(q) q dq \quad (3.50)$$

Utilisons la relation

$$\int_0^{q'} J_o(q) q dq = q' J_1(q') \quad (3.51)$$

Nous déduisons l'expression de l'intensité  $I$

$$I = I_o \left[ \frac{J_1(2\pi(\frac{aR}{\lambda X}))}{(2\pi(\frac{aR}{\lambda X}))} \right]^2 \quad (3.52)$$

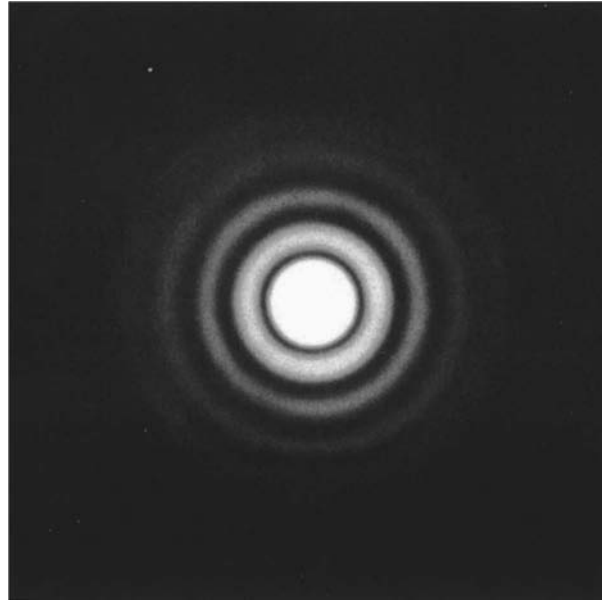
$I_o$  est la constante de normalisation.

La tache centrale de la figure de diffraction est appelée disque d'Airy. Nous montrons (fig. 3.15) une photographie de la figure de diffraction observée sur un écran. Nous représentons sur l'exemple (D.6) trois courbes de diffraction pour différentes valeurs du rayon du diaphragme. Le maximum central le moins large correspond à l'ouverture ayant le plus grand diamètre et vice versa. Ce résultat est analogue à celui que nous avons vu lors de l'étude de la diffraction par une fente. L'angle de diffraction calculé à partir de l'équation (3.52) est  $\theta = 1,22\lambda/2a$ ;  $2a$  désigne le diamètre du diaphragme. L'angle de diffraction d'une fente est différent, il a pour expression  $\theta = \lambda/2d$ ,  $d$  est la largeur de la fente.

*Remarque.*

Le facteur numérique de la largeur de la tache centrale de diffraction par une ouverture circulaire est 1,22. Il précise les limites de résolution des lentilles et il est indiqué dans les catalogues descriptifs des montages optiques. Ce facteur est égal à 1 dans le cas de la diffraction par une fente.





**Fig. 3.15** – Diffraction par une ouverture circulaire [1].

Nous traçons un graphe en trois dimensions sur l'exemple (D.7). Nous effectuons dans l'application (3.8) le calcul de l'angle de diffraction du diaphragme circulaire. Nous montrons (fig. 3.15) une photographie des anneaux d'Airy.

**Exemple D.6.** *Traçons les variations de l'intensité diffractée par un diaphragme circulaire.*

Nous changeons les valeurs du rayon de l'ouverture et observons dans quel sens varie la largeur de la tache centrale. Le sens de variation est une propriété générale des figures de diffraction. La largeur du maximum central est proportionnelle à la longueur d'onde.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application D.6**

1. Effectuer la normalisation de la fonction 3.51, voir aussi l'application D.8.
2. Étudier la dépendance de la figure de diffraction en fonction de  $\lambda$  et du rayon  $a$ .
  - prendre des longueurs d'onde égales à  $\lambda/2$ ,  $2\lambda$  puis des rayons égaux à  $2a$  et  $a/2$  ;
  - considérer le rapport  $2a/\lambda$ , nous prenons  $2a$  car c'est le diamètre de l'ouverture à rapprocher de la largeur d'une fente de largeur  $d$ .

**Exemple D.7.** *Ouverture circulaire. Tracer en trois dimensions la courbe de l'intensité diffractée.*

Paramètres :

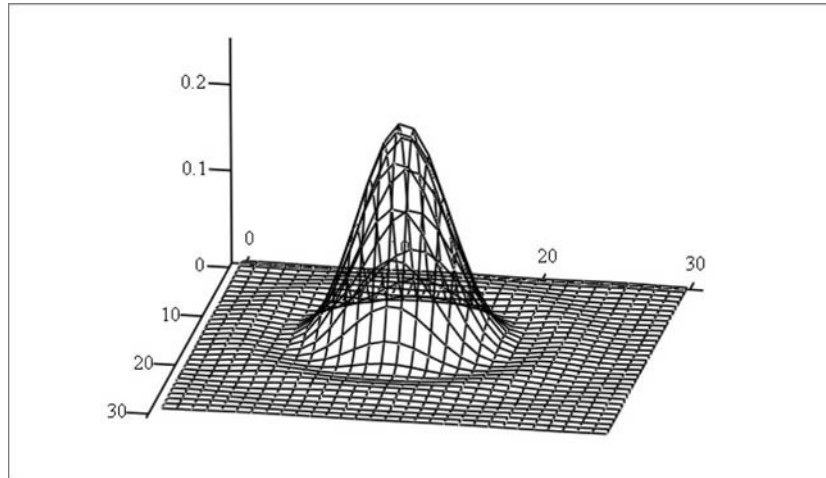
$a = 0,1$  = rayon de l'ouverture,  $X = 4\,000$  = distance plan du diaphragme-écran,  $N = 30$ ,  $\lambda = 0,000\,5$

$$R(x, y) = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} \quad \text{et} \quad g(x, y) = \left[ \frac{J_1\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R(x, y)}{X \cdot \lambda}\right)}{\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R(x, y)}{X \cdot \lambda}\right)} \right]^2$$

Nous traçons la courbe à trois dimensions  $M_{i,j} = g(x_i, y_j)$ .

**Application D.7**

1. Changer la valeur du rayon  $a$  du diaphragme puis celle de la longueur d'onde.



M

2. Changer simultanément ces deux paramètres, leur donner une valeur double, puis une valeur deux fois plus petite. Interpréter les modifications de la figure de diffraction.
3. Considérer le rapport  $2a/\lambda$ . Lui donner une valeur double de celle étudiée, puis une valeur deux fois plus petite. Comment est transformée la figure de diffraction ?

#### Exemple D.8. Diffraction par une ouverture circulaire.

Nous traçons la courbe de variation de l'intensité diffractée en fonction de  $\theta$ .

Paramètres :  $R = 3 \dots 10$ ,  $X = 1\,000$ ,  $\lambda = 0,01$ .

Le premier minimum a lieu quand  $\theta = 1,22\lambda/2a$ .

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application D.8

1. Tracer la fonction de Bessel  $J_1(q)$  d'ordre 1 quand le paramètre  $q$  varie de 0 à 20. Normaliser  $J_1(q)$  et déterminer la valeur  $q$  du premier zéro au voisinage de  $q = 3,9$ . Calculer avec une précision de cinq chiffres.
2. Tracer le graphe de la figure de diffraction et déterminer le premier minimum.  
( $R/X = (\lambda/a)(q/2\pi) = 0,003$ ).
3. Nous avons vu que l'angle de diffraction par une fente est :  $Y/X = (\lambda/d)$  ou  $(Y/X)/(\lambda/d) = 1$ .
  - calculer cet angle pour la diffraction par une ouverture circulaire.
  - calculer la position du premier zéro de  $I(R) = J_1(2\pi aR/\lambda X)/(2\pi R/\lambda X)$  avec :  $\lambda = 0,01$  mm,  $X = 1\,000$  mm,  $a = 1,5$  mm.  
Appeler  $RR$  cette première valeur. Placer cette valeur dans l'expression  $R/X = (RR/2\pi)(\lambda/a)$ , mais garder l'expression littérale du rapport  $(\lambda/a)$ .
4. Introduire le diamètre  $d$  du diaphragme,  $d = 2a$ , puis calculer  $(R/X)/(\lambda/d)$ . On trouvera  $(R/X)/(\lambda/d) = 1,22$ .
5. Comparer les figures de diffraction par une fente et par un diaphragme circulaire. Tracer les deux graphes en retenant les mêmes paramètres,  $d = 2a$ , afin que le diamètre de l'ouverture circulaire soit égal à la largeur de la fente. Comparer les valeurs de  $\theta$  pour le premier minimum. Constater que la tache centrale de la courbe de l'ouverture circulaire est plus large que celle de la fente. La hauteur du premier maximum du diaphragme circulaire est plus petite que celle de la fente.

**Remarque.**

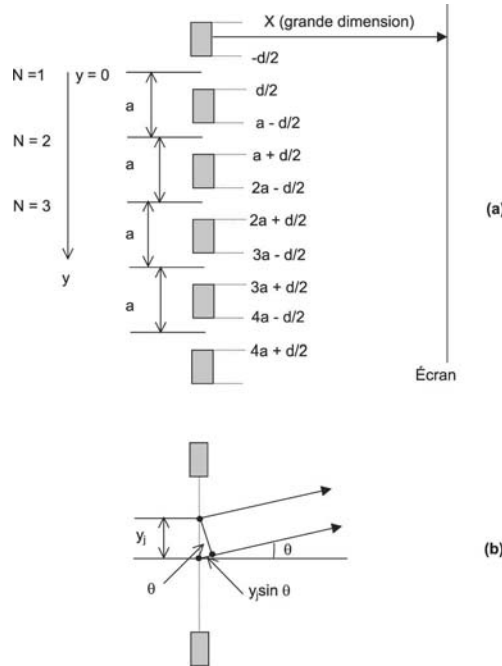
La figure de diffraction par une fente est linéaire. La figure de diffraction par un diaphragme circulaire présente une symétrie radiale.

**3.4.5 Réseaux**

Les spectromètres à réseaux sont utilisés du proche infrarouge jusqu'à la région des rayons X. Un réseau dont les faces réfléchissantes ont un profil en zigzag est appelé *réseau échelette*. Un réseau d'amplitude par transmission a une structure périodique alternativement transparente puis opaque. Nous supposons que ces réseaux sont constitués d'une suite de fentes.

**Réseau d'amplitude**

Nous devons maintenant calculer l'intégrale de l'amplitude de l'onde diffractée par une répartition périodique de fentes (fig. 3.16).



**Fig. 3.16** – Réseau d'amplitude. Paramètres géométriques pour l'étude de la diffraction par un réseau d'amplitude.

L'intégrale pour une fente est

$$u(\theta) = \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{-ik(y \sin \theta)} dy \quad (3.53)$$

Nous l'appliquons à un grand nombre de fentes

$$U(\theta) = \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ik(y_1 \sin \theta)} dy_1 + \int_{a-d/2}^{a+d/2} e^{-ik(y_2 \sin \theta)} dy_2 + \int_{2a-d/2}^{2a+d/2} \dots dy_3 + \dots \quad (3.54)$$

Nous faisons, dans la deuxième intégrale, le changement de variable  $y_1 = y_2 - a$ , et ainsi de suite. Le changement sera  $y_1 = y_N - (N - 1)a$  dans la  $N^{ième}$  intégrale. Il vient

$$\{1 + e^{-ika \sin \theta} + e^{-ik2a \sin \theta} + e^{-ik3a \sin \theta} + \dots e^{-ik(N-1)a \sin \theta}\} \cdot \int_{-d/2}^{d/2} e^{-ik(y \sin \theta)} dy \quad (3.55)$$

La sommation représente l'amplitude du facteur d'interférence par  $N$  sources (voir le chapitre 2) disposées régulièrement à la distance  $a$ . L'intégrale représente le facteur de diffraction par une fente.

L'amplitude de l'onde finale  $Pa(\theta)$  est le produit du facteur d'interférence  $Ia(\theta)$  par le facteur de diffraction  $Da(\theta)$ , soit symboliquement

$$\text{Amplitude diffractée } Pa = (\text{Facteur d'interférence } Ia)^*(\text{Facteur de diffraction } Da) \quad (3.56)$$

c'est-à-dire

$$Pa(\theta) = Ia(\theta)Da(\theta) \quad (3.57)$$

Calculons maintenant le facteur d'interférence  $Ia(\theta)$

$$\begin{aligned} Ia(\theta) &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{-ikma \sin \theta} = \frac{(1 - e^{-ikNa \sin \theta})}{(1 - e^{-ika \sin \theta})} \\ &= \left\{ \frac{\sin(\pi \frac{Na \sin \theta}{\lambda})}{N \sin(\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda})} \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

*Intensité de l'onde diffractée.*

L'intensité est :  $P(\theta) = Pa(\theta)Pa(\theta)^*$

$$P(Y) = \left[ \frac{\sin(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})}{\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N \frac{a \sin \theta}{\lambda})}{N \sin(\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \quad (3.59)$$

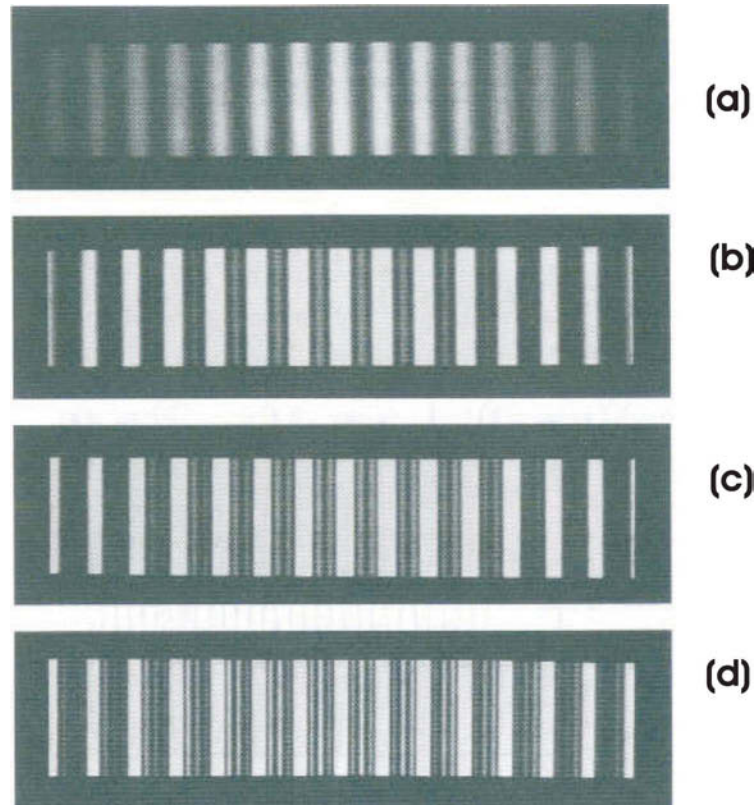
Faisons l'approximation  $\sin \theta = Y/X$

$$P(Y) = \left[ \frac{\sin(\pi \frac{dY}{X\lambda})}{\pi \frac{dY}{X\lambda}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N \frac{aY}{X\lambda})}{N \sin(\pi \frac{aY}{X\lambda})} \right]^2 \quad (3.60)$$

Nous avons normalisé l'intensité en divisant par  $1/N^2$ .

Nous représentons les graphes des équations (3.59) (exemple D.9). Le premier graphe représente les variations du numérateur  $y(\theta)$  du facteur d'interférence et nous traçons les variations d'intensité du facteur d'interférence  $I(\theta)$ . Au centre, le numérateur et le dénominateur du facteur d'interférence sont simultanément égaux à zéro :  $0/0$ . Un développement limité montre que ce terme tend vers 1 et nous obtenons un maximum principal (voir le chapitre 2). L'ordre zéro du facteur d'interférence, deuxième graphe, a lieu pour  $\theta = 0$ , maximum principal. Nous avons  $N - 1$  minima latéraux et  $N - 2$  maxima secondaires compris entre les minima. Deux maxima secondaires n'apparaissent pas, nous avons vu cette particularité dans le chapitre 2. Nous montrons (fig. 3.17), une photographie de la figure de diffraction obtenue avec deux, trois, quatre puis cinq fentes. Nous observons un seul maximum latéral pour  $N = 3$ , deux

maxima pour  $N = 4$ , trois quand  $N = 5$ .



**Fig. 3.17** – Figure de diffraction par un réseau d'amplitude. (a)  $N = 2$ ; (b)  $N = 3$ ; (c)  $N = 4$ ; (d)  $N = 5$  [1].

Nous avons normalisé la courbe en divisant par  $N^2$ , afin d'éviter une difficulté informatique à l'origine  $0/0$  quand  $\theta = 0$ , nous ne calculons pas la valeur  $X = 0$  mais prenons des valeurs très voisines de zéro :  $X = 0,001$  au lieu de  $0,000\ 0$ . Il y a  $N - 1$  minima de chaque côté d'un maxima et  $N - 2$  maxima entre deux maxima principaux successifs.

Nous traçons séparément sur le second graphe les facteurs d'interférence et de diffraction. Le facteur d'interférence positionne les maxima et les minima. Le terme de diffraction forme l'enveloppe des pics d'interférence pour la courbe finale.

Nous traçons (exemple D.10) les variations de l'intensité diffractée par une fente de largeur dix fois plus petite que la distance de périodicité  $a$  séparant deux fentes. Selon la valeur du rapport  $a/d$ , nous voyons certains maxima. Ils sont supprimés pour d'autres valeurs. Prenons l'exemple de  $a/d = 2$  : nous voyons les maxima de l'ordre zéro et du premier ordre, le maximum de l'ordre deux n'apparaît pas.

Prenons une valeur plus élevée de  $a/d$  telle que  $a/d = n$ , nous observons un nombre plus élevé de pics. La figure s'élargit mais le  $n^{\text{ième}}$  ordre est supprimé.

Les photographies de la figure (3.17) montrent les intensités de diffraction par  $N$  fentes, ici  $N = 2, 3, 4, 5$ . Nous distinguons un seul maximum secondaire pour  $N = 3$ , deux maxima secondaires quand  $N = 4$  et trois maxima secondaires quand  $N = 5$ .

**Exemple D.9. Réseau d'amplitude.**

Nous traçons la courbe de variation de l'intensité diffractée par un réseau d'amplitude formé par  $N$  fentes régulièrement espacées.

$$\lambda = 0,000\,5 \quad d = 0,001 \quad a = 0,002 \quad N = 6$$

Nous traçons séparément la courbe d'interférence, la courbe de diffraction, puis la courbe finale produit des deux précédentes.

Les maxima ont lieu quand le rapport numérateur sur dénominateur est égal à 0/0. Le facteur de diffraction est celui d'une fente. À l'origine se trouve l'ordre zéro du facteur d'interférence et son maximum d'intensité. Nous avons normalisé l'intensité en divisant par  $N^2$ . Nous avons une singularité quand  $\theta = 0$  puisque l'intensité est de la forme 0/0. Nous évitons toute complication de calcul par l'ordinateur et ne donnons pas la valeur 0 à  $\theta$  mais des valeurs très petites  $\theta = 0,001$ .

Il y a  $N - 1$  minima et  $N - 2$  maxima secondaires entre deux maxima principaux.

$D(A)$  = facteur de diffraction     $I(A)$  = facteur d'interférence normalisé

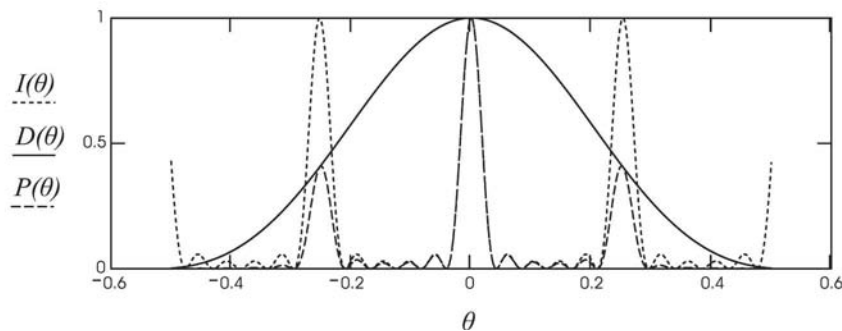
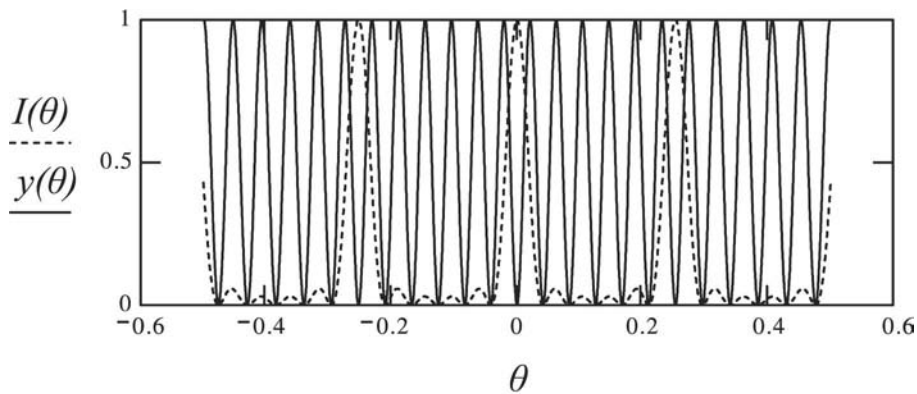
$P(A) = D(A)I(A)$  = intensité observée

Nous traçons séparément le numérateur afin de préciser la localisation des maxima principaux correspondant au rapport (0,0).

$$\theta = -0,500\,1, -0,499\,9 \dots 0,5$$

$$D(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]} \right]^2 \quad I(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \cdot N \right]}{N \cdot \sin \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]} \right]^2$$

$$P(\theta) = D(\theta) \cdot I(\theta) \quad y(\theta) = \sin \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \cdot N \right]^2$$

**Application D.9**


1. Écrire les formules de l'exemple (D.9) dans l'approximation des petits angles, tracer le graphe avec les valeurs indiquées ci-dessous en millimètres.

$$d = 0,01 \quad \lambda = 0,000\,5 \quad a = 0,02 \quad N = 20 \quad X = 4\,000 \quad Y = -200 \dots 200,$$

Comparer le facteur d'interférence  $I(Y)$  avec l'intensité totale  $P(Y)$ .

Observer que :

- $P(Y) = 1$  quand  $I(Y) = 0$  ;
- le nombre de maxima secondaires entre deux maxima principaux successifs est  $N - 2$  et que le premier maxima secondaire proche d'un maximum principal n'apparaît pas ;
- montrer que cette particularité existe pour d'autres valeurs de  $N$  ;
- montrer qu'il y a  $N - 1$  minima.

2. À partir de l'exemple (D.9) tracer le graphe de l'intensité.

$d = 0,0018$     $\lambda = 0,0005$     $a = 0,0036$     $\theta = -1,401 \dots 1,4$ .

- Quelle est l'expression de la largeur d'un maximum en fonction de  $\theta$  ?
- Que devient un maximum quand on change  $d$  et que l'on choisit  $d = 0,0009$ ,
  - tracer sur un seul graphe les courbes des facteurs d'interférence et de diffraction de l'intensité pour les longueurs d'onde limites du spectre visible : longueur d'onde du bleu  $\lambda_1 = 0,0004$  mm, longueur d'onde du rouge  $\lambda_2 = 0,0007$  mm.
  - comparer les deux courbes pour différentes valeurs de  $N$ .
- Tracer les courbes de diffraction correspondant à deux longueurs d'onde très voisines :  $\lambda_1 = 0,0005$     $\lambda_2 = 0,00055$  afin de déterminer la valeur  $\Delta\lambda/\lambda$  qui permet de résoudre deux maxima en fonction de  $N$  et ceci pour différents ordres.  
1 radian est sensiblement égal à  $5 - 6$  degrés.
- Établir l'expression littérale de l'intensité diffractée, puis calculer les valeurs numériques de  $\sin\theta$  pour lesquelles ce facteur est égal à  $N^2$ . ( En fait quand la courbe est normalisée ce facteur devient égal à l'unité).  
La relation  $\sin\theta = f(a, m, \lambda)$  est appelée équation du réseau.

---

**Exemple D.10.** Traçons le graphe de l'intensité diffractée  $P(Y)$  par deux fentes d'Young.  
 $d = 0,02$     $\lambda = 0,0005$     $a = 0,2$     $X = 4000$     $N = 2$     $Y = -800, -799,9 \dots 800$ .

Nous montrons (fig. 3.18) une photographie des franges de diffraction observées.

Cette étude est faite sur le CD.

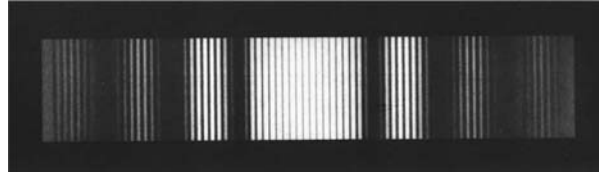
**Application D.10**

1. Étude en fonction des variations de  $d$ . Faire varier ce paramètre entre les valeurs extrêmes  $d = a/2$  et  $d \ll a$ . Décrire les variations du facteur de diffraction  $D(Y)$  ; la courbe de diffraction  $P(Y) = D(Y)I(Y)$  est-elle modifiée ?
2. À partir de la figure (3.16), établir la condition de diffraction ou équation du réseau :  $a \sin\theta = m\lambda$  par une dérivation élémentaire. Nous pouvons aussi écrire cette relation à partir de l'intensité d'un maximum principal.
3. Nous choisissons  $d = a/10$ . Tracer la courbe d'intensité puis établir la liste des maxima successifs calculés en fonction de  $Y$ . Comparer ces valeurs avec celles lues sur le graphe.
4. Ordres manquants. Choisir  $4d = a$ , compter le nombre de maxima secondaires de  $P(Y)$  à partir du maximum central. Le 4<sup>e</sup> maximum de  $I(Y)$  disparaît dans le facteur  $D(Y)$ . Choisir d'autres valeurs du rapport  $a/d$ .
5. Prendre une valeur de longueur d'onde double  $\lambda_2 = 0,0010$  (au lieu de  $\lambda_1 = 0,0005$ ), puis une valeur égale à la moitié de la valeur initiale :  $\lambda_3 = 0,00025$ . Comment la figure de diffraction est-elle modifiée ? Prendre ensuite une valeur de  $\lambda$  égale à la moitié de la valeur initiale :  $\lambda_3 = 0,00025$ , même question que précédemment.

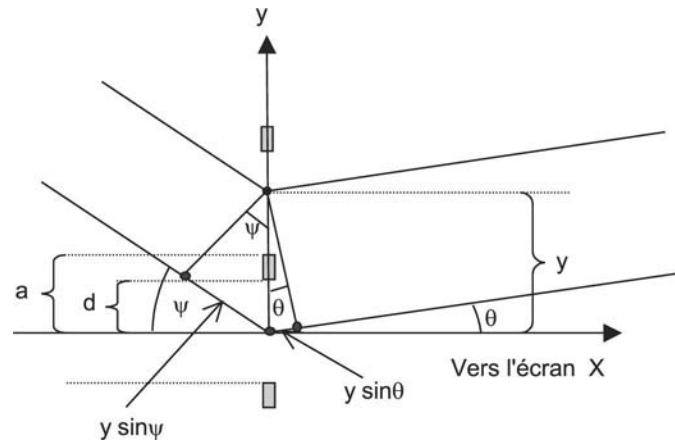
---

**Réseau d'amplitude éclairé sous une incidence  $\theta$ .**

Maintenant nous éclairons le réseau sous incidence  $\theta$  par rapport à la normale (fig. 3.19).



**Fig. 3.18** – Diffraction par deux fentes séparées par une grande distance  $a$  par rapport à la largeur de la fente  $d$ . La région centrale présente une figure de diffraction analogue à celle des fentes d'Young [1].



**Fig. 3.19** – Réseau d'amplitude éclairé par un faisceau sous incidence  $\psi$  par rapport à l'axe  $X$ .

La différence de calcul, par rapport à l'incidence normale, est dans la différence de chemin optique (relation 3.54) qui s'accroît de  $a \sin \psi$ . Nous avons  $\delta = a(\sin \theta + \sin \psi)$ .

$$I(\theta) = \left[ \frac{\sin \pi d \frac{(\sin \theta + \sin \psi)}{\lambda}}{\pi d \frac{(\sin \theta + \sin \psi)}{\lambda}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin [\pi N a \frac{(\sin \theta + \sin \psi)}{\lambda}]}{N \sin [\pi a \frac{(\sin \theta + \sin \psi)}{\lambda}]} \right]^2 \quad (3.61)$$

La courbe de diffraction a même forme que la courbe de diffraction établie sous incidence normale. Le maximum central n'est plus selon la direction  $\theta = 0$ . En effet, nous avons un maximum principal quand le facteur d'interférence est égal à 1 ce qui a lieu quand la condition  $(\sin \theta + \sin \psi) = 0$  est réalisée et  $\sin \theta = -\sin \psi$ . Le maximum central apparaît maintenant selon la direction  $\theta = -\psi$ . Nous voyons ce résultat sur le graphe de l'exemple (D.11).

**Exemple D.11. Diffraction par un réseau éclairé sous un angle  $\psi$ .**

Tracer la courbe de diffraction par un réseau éclairé sous l'angle  $\psi$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application D.11**

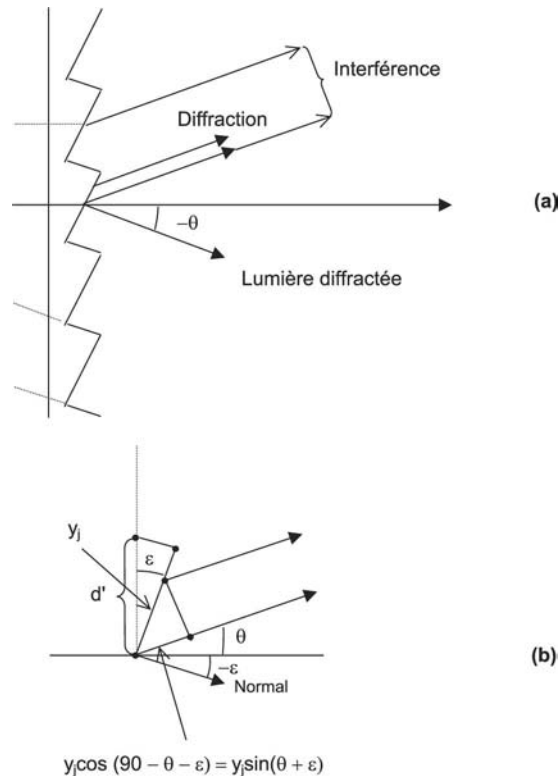
Pour quelle valeur de  $(\sin \theta + \sin \psi)$  le facteur d'interférence est-il égal à  $N^2$  ?

Établir l'expression littérale en fonction de  $a$ ,  $m$ . Comparer ce résultat avec l'équation des réseaux.



### Réseau échelette, réseau de phase.

Soit un réseau par transmission comprenant  $N$  marches inclinées sous un angle  $\epsilon$  (fig. 3.20) ; c'est un réseau de phase, appelé réseau échelette. Il peut être soit un réseau par transmission, réalisé dans un milieu diélectrique d'indice  $n$ , soit un réseau par réflexion. La surface des marches est recouverte d'une pellicule réfléchissante.



**Fig. 3.20** – Réseau échelette. (a) Faisceau réfracté et faisceau d'interférence. (b) Coordonnée pour le calcul de la diffraction par une facette, la différence de marche est  $y_i \sin(\theta + \epsilon)$ , le maximum central est situé selon la direction  $\theta = -\epsilon$ .

#### Intensité diffractée.

Calculons la différence de marche entre les ondelettes équivalentes sur deux marches successives, puis intégrons sur toutes les marches. Les facteurs d'interférence et de diffraction dépendent de la périodicité des marches et de l'angle de construction.

#### Hypothèses :

- la périodicité est égale à la largeur  $d$  des facettes du réseau
  - l'angle d'incidence du faisceau est tel que le faisceau transmis est réfracté selon une direction perpendiculaire aux facettes du réseau. L'angle compris entre la normale aux facettes et la normale au plan de périodicité (fig. 3.20) est égal à  $\epsilon$ , angle de miroitement.
- L'intensité finale est le produit du facteur d'interférence par le facteur de diffraction. Le facteur d'interférence ne change pas, il est le même que celui d'un réseau d'amplitude. Le facteur de

diffraction est calculé avec la différence de marche  $y_i \sin(\theta + \epsilon)$  (fig. 3.20) et l'intensité diffractée devient

$$I(\theta) = \left[ \frac{\sin \pi d \frac{(\sin \theta + \epsilon)}{\lambda}}{\pi d \frac{(\sin \theta + \epsilon)}{\lambda}} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin [\pi N a \frac{(\sin \theta)}{\lambda}]}{N \sin [\pi a \frac{(\sin \theta)}{\lambda}]} \right]^2 \quad (3.62)$$

Nous représentons sur l'exemple (D.12) les courbes du facteur d'interférence, du facteur de diffraction, de l'intensité totale en fonction de l'angle de miroitement  $\epsilon$ . Quand  $\epsilon = -0,25$ , le maximum du facteur de diffraction est aligné avec le maximum du premier ordre du facteur d'interférence. Nous disons que le réseau est à l'angle de miroitement. Le facteur d'interférence a son maximum d'ordre zéro situé au minimum du facteur de diffraction, en conséquence, il n'apparaît pas dans l'intensité totale. Si la longueur d'onde est légèrement différente, le premier ordre sera déplacé à l'intérieur de l'enveloppe de diffraction.

Considérons une source émettant un spectre continu sur un large intervalle spectral. Le premier ordre du domaine des longueurs d'onde est distribué selon la région déterminée par le facteur de diffraction.

Changeons la valeur de l'angle de miroitement :

- quand  $\epsilon = 0,25$ , l'ordre zéro du facteur de diffraction est décalé sur l'ordre  $-1$  du facteur d'interférence, ce que nous voyons sur le deuxième graphe de l'exemple (D.12) ;
- quand  $\epsilon = -0,5$ , l'ordre zéro du facteur de diffraction glisse vers l'ordre  $+2$  du facteur d'interférence, troisième graphe de l'exemple (D.12).

L'étudiant peut choisir différentes valeurs de l'angle, il trouvera que les maxima principaux du facteur d'interférence ne se trouvent pas à la position des maxima du facteur de diffraction.

**Exemple D.12. Traçons la courbe diffractée par un réseau échelle. Nous choisissons trois valeurs de l'angle de miroitement  $\epsilon$ .**

Le terme d'interférence reste le même pour toutes les courbes, tandis que le terme de diffraction est fonction de  $\epsilon$ .

Quand  $\epsilon = -0,25$ , la courbe du facteur de diffraction a son maximum central placé sur un maximum de la courbe du facteur d'interférence.

Le maximum d'ordre zéro du facteur d'interférence est au minimum du facteur de diffraction, en conséquence il n'apparaît pas dans la courbe finale.

Si nous utilisons une source polychromatique ayant une bande passante étroite, le maximum du premier ordre du facteur d'interférence du spectre de la source occupe la place du maximum du terme de diffraction.

Quand les maxima des deux facteurs coïncident, nous disons que nous sommes dans la position de l'angle de miroitement (en anglais blaze angle).

- Choisir  $\epsilon = 0,25$  et constater que l'ordre zéro du facteur de diffraction est déplacé sur l'ordre  $-1$  du facteur d'interférence.
- Choisir  $\epsilon = 0,52$  et constater que l'ordre zéro du facteur de diffraction est déplacé sur l'ordre  $+2$  du facteur d'interférence.
- Prendre une autre valeur de  $\epsilon$  pour observer un désalignement des intensités de ces deux facteurs.

Paramètres.

Toutes les distances sont en millimètres et les angles en radians.  $d = 37$     $a = 40$     $\lambda = 10$     $N = 20$ . Nous étudions la figure obtenue par trois réseaux ayant les angles de miroitement :

$$\epsilon_1 = -0,2 \quad \epsilon_2 = 0,2 \quad \epsilon_3 = 0,52$$

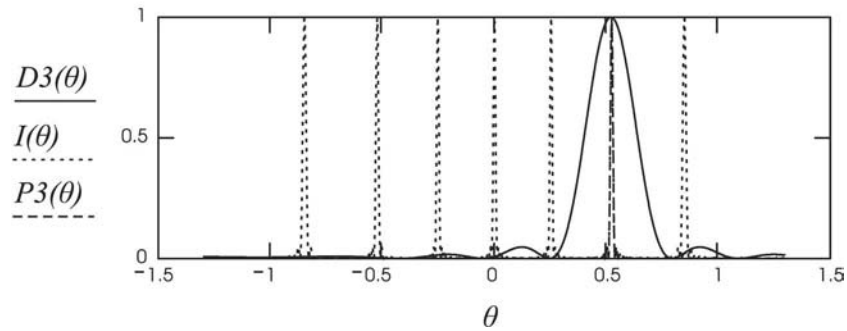
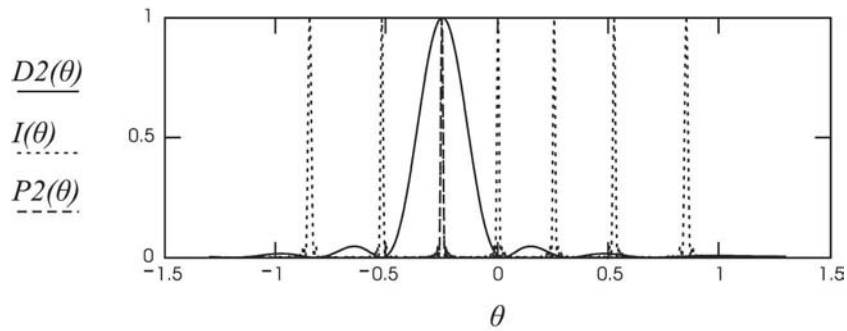
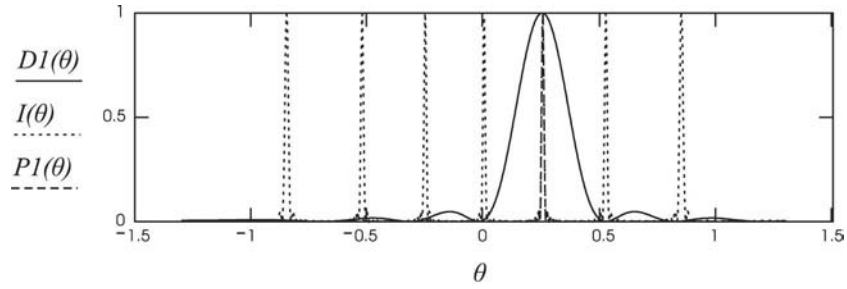
Nous écrivons :  $D(\theta)$  = facteur de diffraction    $I(\theta)$  = facteur d'interférence    $P(\theta) = D(\theta).I(\theta)$  = intensité finale observée.

$$\theta = -0,301, -1,299 \dots 1,3$$

$$D1(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 1) \right]}{\left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 1) \right]} \right]^2 \quad I(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ N \pi \sin \left( \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right) \right]}{N \sin \left[ \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta \right]} \right]^2$$

$$D2(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 2) \right]}{\left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 2) \right]} \right]^2 \quad D3(\theta) = \left[ \frac{\sin \left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 3) \right]}{\left[ \pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta + \epsilon 3) \right]} \right]^2$$

$$P1(\theta) = D1(\theta) \cdot I(\theta) \quad P2(\theta) = D2(\theta) \cdot I(\theta) \quad P3(\theta) = D3(\theta) \cdot I(\theta)$$



### Application D.12

Tracer à nouveau la courbe précédente avec les paramètres suivants :

$$d = 0,04, \quad a = 0,04, \quad \lambda = 0,01, \quad N = 20.$$

1. Partir de  $\epsilon = 0$  puis accroître positivement  $\epsilon$  jusqu'à ce que le premier ordre négatif de  $I(\theta)$  soit à la place du pic  $D(\theta)$ . Faire un autre graphe en prenant des valeurs négatives de  $\epsilon$  jusqu'à ce que le premier ordre positif  $I(\theta)$  soit à la place du maximum de  $D(\theta)$ .
2. Tracer trois graphes principaux comprenant chacun trois graphes de composants  $P(\theta)$ ,  $D(\theta)$ ,  $I(\theta)$  :

-	$P1(\theta)$	$D1(\theta)$	$I1(\theta)$	$\lambda_1 = 0,015$
-	$P2(\theta)$	$D2(\theta)$	$I2(\theta)$	$\lambda_2 = 0,01$
-	$P3(\theta)$	$D3(\theta)$	$I3(\theta)$	$\lambda_3 = 0,007$

- Trouver une valeur de  $\epsilon$  telle que le maximum principal d'interférence du premier ordre de  $\lambda_2$  soit à la position du maximum du facteur de diffraction. Le réseau est maintenant à l'angle de miroitement pour la longueur d'onde  $\lambda_2 = 0,01$ .
- Tracer deux courbes supplémentaires  $P1(\theta)$  et  $P3(\theta)$ , les longueurs d'onde sont  $\lambda_1$  et  $\lambda_3$ . Constater l'apparition de plusieurs pics. Nous observons deux ordres et le réseau échelonné serait moins efficace.

### 3.4.6 Résolution

Les spectromètres à réseaux sont utilisés pour obtenir le spectre d'émission d'une source. Prenons une lampe à vapeur de sodium ; elle émet un doublet de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 5\,890\text{ Å}$  et  $\lambda_2 = 5\,896\text{ Å}$ , c'est la région de la lumière jaune, certains lampadaires ont des lampes à vapeur de sodium. Si nous jetons du sel dans une flamme elle grésille et surtout devient jaune.

Nous avons  $\lambda_2 - \lambda_1 = 6\text{ Å}$ , différence très petite, nous désirons déterminer les caractéristiques que doivent avoir les réseaux afin que les maxima de diffraction des deux courbes puissent être distincts à l'observation. Les maxima doivent apparaître séparés.

La position des maxima est donnée par l'équation des réseaux  $a \sin \theta_1 = \lambda_1$  et  $a \sin \theta_2 = \lambda_2$  (fig. 3.21a).

Nous prenons l'exemple d'une source contenant deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  séparées par l'intervalle  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ . Nous supposons que  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Nous devons déterminer quelle largeur  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  doit avoir la différence des longueurs d'onde afin que nous puissions observer la séparation des pics, c'est-à-dire observer deux lignes spectrales.

- Quand  $\Delta\lambda$  est suffisamment grand, nous observons séparément les deux lignes spectrales (fig. 3.21a).
- Quand  $\Delta\lambda$  est trop petit, nous observons un seul pic (fig. 3.21b).

Le critère de Rayleigh permet de calculer à partir de quelle valeur quantitative les deux pics sont séparés.

**Critère de Rayleigh :** *deux pics sont séparés quand le maximum de l'un est placé à la position du minimum de l'autre.*

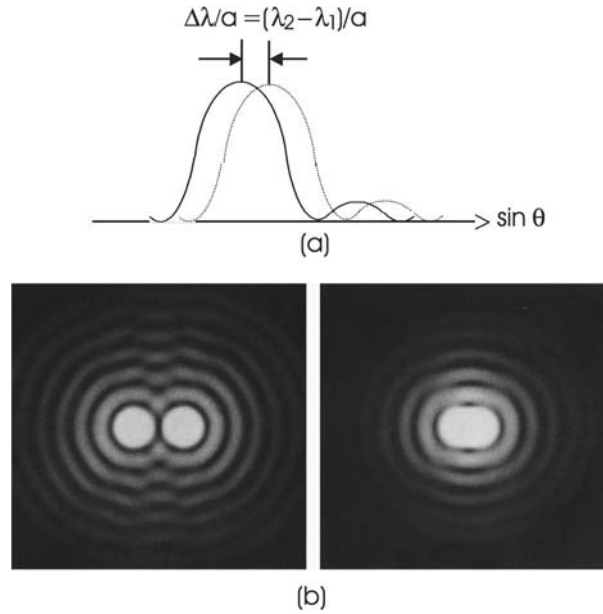
Dans cette situation, à l'intersection des deux courbes, l'intensité est sensiblement égale à la moitié de l'intensité maximum du pic.

La distance (fig. 3.22) entre un maximum et le minimum est

$$\left( \frac{N+1}{N} - \frac{N}{N} \right) \frac{\lambda_1}{a} = \frac{\Delta\lambda}{a} \quad (3.63)$$

Puis

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_1}{N} \quad (3.64)$$



**Fig. 3.21** – Étude de la résolution. Représentation de deux pics centraux de diffraction obtenus à partir d'une source contenant deux radiations  $\lambda_2$  et  $\lambda_1$  voisines. Nous posons :  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  avec  $\lambda_2 > \lambda_1$ . (a) Les figures de diffraction sont séparées. (b) Les deux pics sont à la limite de résolution [1].

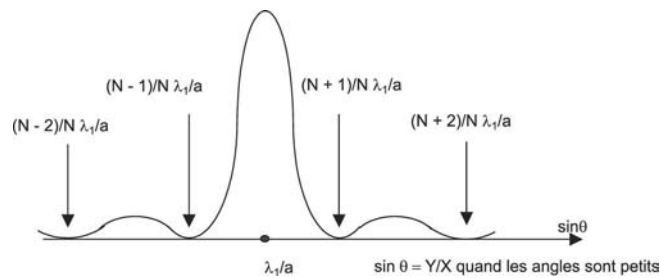
Appelons  $\lambda$  la valeur  $\lambda_2$  et considérons le  $m^{\text{ème}}$  ordre de diffraction. Nous écrivons

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (3.65)$$

Puisque  $\lambda\nu =$  vitesse de la lumière dans le milieu considéré,  $\nu =$  fréquence de l'onde, nous avons

$$\frac{\nu}{\Delta\nu} = mN \quad (3.66)$$

Le rapport  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ , ou  $\frac{\nu}{\Delta\nu}$ , est appelé *pouvoir de résolution du réseau*.



**Fig. 3.22** – Figure de diffraction par un réseau. Le réseau comprend  $N$  gravures. La lumière monochromatique a la longueur d'onde  $\lambda_1$ .

Nous traçons (exemple D.13) les courbes de diffraction de deux ondes ayant les longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . La séparation des maxima dépend de  $N$ . Nous pouvons changer la valeur de  $N$  de façon à être dans les limites de résolution correspondant au critère de Rayleigh. Nous

pouvons aussi constater la dépendance de la résolution en fonction de l'ordre  $m$ . Nous traçons la figure de diffraction par deux ouvertures circulaires de rayon  $a$  dans l'exemple (D.14). La source contient toujours deux longueurs d'onde. La première ouverture est centrée à l'origine, le centre de la deuxième est à la distance  $b$  choisie de façon à observer les courbes de diffraction dans les limites du critère de Rayleigh. Le deuxième graphe est à trois dimensions. Notre exemple est choisi avec  $mN$  égal à environ 1 000, c'est-à-dire que dans le premier ordre nous devons avoir 1 000 gravures du réseau. Si le réseau a une constante de périodicité de 1 micron, sa largeur totale sera de l'ordre du millimètre. Quand nous utilisons un réseau de 10 cm de largeur, le nombre de gravures est de 100 000. Nous obtenons la résolution  $\Delta\lambda = 0,02\text{\AA}$  dans le premier ordre et pour la longueur d'onde  $\lambda = 5\,000\text{\AA}$ .

**Exemple D.13. Réseau d'amplitude, nous traçons la courbe de diffraction par un réseau de fentes, la source contenant deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .**

Nous gardons la notation du cours :  $d$  = largeur d'une fente,  $a$  = constante de périodicité,  $N$  = nombre de fentes.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application D.13**

1. Choisir successivement trois valeurs de  $\lambda_2$  et déterminer  $N$  afin que le maximum de la courbe due à  $\lambda_2$  soit au minimum de la courbe correspondant à  $\lambda_1$ .
2. Choisir  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , déterminer le nombre  $N$  de façon à être dans les conditions du critère de Rayleigh.
3. Considérons un ordre  $m$  élevé, choisissons une paire de lignes si proches qu'elles ne soient pas résolues dans le premier ordre ; à partir de quel ordre sont-elles résolues ?

**Exemple D.14. Étudions la résolution de deux franges. Considérons l'exemple de la diffraction par deux diaphragmes circulaires. Calculons la distance de Rayleigh.**

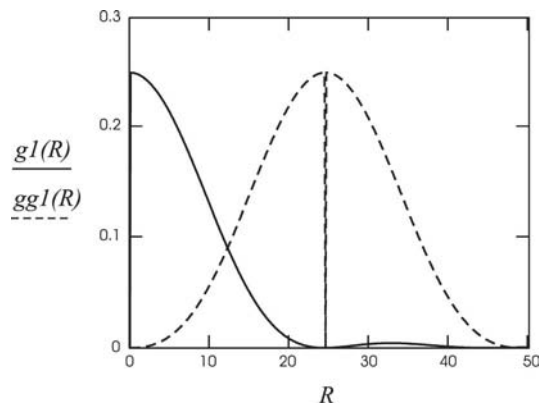
Tracer en trois dimensions le graphe de diffraction par deux ouvertures circulaires :

Paramètres :

$b$  = distance entre deux pics, nous choisissons  $b = 24,5$ ,  $a$  = rayon d'une ouverture,  $d$  = distance entre les centres des deux diaphragmes,  $R$  = coordonnées dans le plan d'observation,  $X$  = distance entre le plan des diaphragmes et l'écran d'observation.

1. Détermination de la distance de résolution de Rayleigh :  $a = 0,05$   $X = 4\,000$   $R = 0,1 \dots 50$ ,

$$g1(R) = \left[ \frac{J_1\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R}{X \cdot \lambda}\right)}{\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R}{X \cdot \lambda}\right)} \right]^2 \quad gg1(R) = \left[ \frac{J_1\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R-b}{X \cdot \lambda}\right)}{\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{R-b}{X \cdot \lambda}\right)} \right]^2$$



2. Graphe en 3D de la figure de diffraction par deux ouvertures circulaires dont les pics sont séparés par une distance  $b$ .

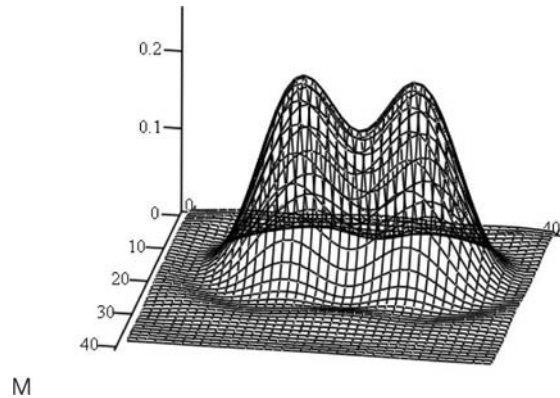
Paramètres :

$$\lambda = 0,000\,5 \quad N = 60 \quad X = 4\,000 \quad d = 0,1 \quad i = 0, \dots, N \quad j = 0, \dots, N$$

$$x_i = (-40) + 2,000\,1 \cdot i \quad y_j := -40 + 2,000\,1 \cdot j \quad RR(x, y) = \sqrt{(x)^2 + (y)^2}$$

$$g2(x, y) = \left[ \frac{J_1\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{RR(x, y)}{X \cdot \lambda}\right)}{\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{RR(x, y)}{X \cdot \lambda}\right)} \right]^2 \quad gg2(x, y) = \left[ \frac{J_1\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{RR(x, y-b)}{X \cdot \lambda}\right)}{\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{RR(x, y-b)}{X \cdot \lambda}\right)} \right]^2$$

Nous traçons la courbe  $M_{i,j} = g2(x_i, y_j) + gg2(x_i, y_j)$



3. Calcul de  $\Delta\lambda$  correspondant à la limite de résolution, nous avons  $b/X = \Delta\theta$ . Le réseau est constitué d'ouvertures circulaires de rayon  $a$  distants de  $d$ . Nous calculons  $\Delta\lambda = d\Delta\theta$  ou  $\Delta\lambda = (d/X)b$  à partir de la formule des réseaux.

#### Application D.14

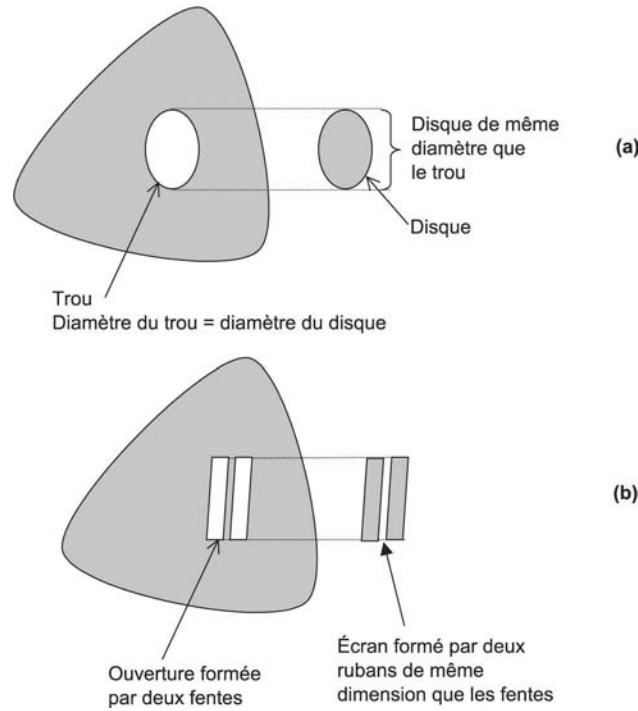
1. Revenir au graphe en deux dimensions, choisir la distance  $b$  afin que le maximum d'une courbe soit au minimum de l'autre, puis revenir à une représentation en trois dimensions.
2. Nous avons tracé les deux pics avec la même longueur d'onde. Déterminer  $\Delta\lambda$  correspondant à la résolution, introduire les longueurs d'onde correspondantes dans les fonctions de Bessel et estimer la variation.
3. Sachant que la différence d'angle à la résolution est connue en fonction de l'ordre  $m$ , calculer la différence de longueur d'onde résolue  $\Delta\lambda$ .

### 3.5 Théorème de Babinet

Deux écrans sont complémentaires quand la surface opaque de l'un est la surface transparente de l'autre.

**Théorème de Babinet :** les figures de diffraction de deux écrans complémentaires sont identiques.

Nous représentons sur la figure (3.23) deux écrans complémentaires. Quand deux écrans complémentaires sont placés ensemble au même endroit, tout se passe comme s'il n'y avait plus de diaphragme mais un écran de largeur infinie.



**Fig. 3.23** – Exemple d'écrans complémentaires.

*Exemple d'écrans complémentaires.*

Considérons deux réseaux fentes, de même périodicité  $a$ . L'un a une largeur de fente  $d_1$ , l'autre une largeur  $d_2$ . Ils forment deux écrans complémentaires quand  $d_1 + d_2 = a$ .

Démontrons le théorème de Babinet.

Les deux écrans sont placés ensemble. Calculons l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel. Nous intégrons sur les deux ouvertures, la somme des deux intégrales est égale à zéro car la réunion des deux surfaces est un système opaque.

Supposons qu'il y ait une seule onde incidente. Plaçons-nous dans le cas de la diffraction à grande distance (ou diffraction à l'infini).

$$\begin{aligned} \varphi_I(Y) = C \int \phi(y) (e^{ik(\frac{yY}{X})}) dy \quad \text{et} \quad \varphi_{II}(Y) = C \int \phi(y) (e^{ik(\frac{yY}{X})}) dy \\ \text{ouverture de l'écran I} \quad \quad \quad \text{ouverture de l'écran II} \end{aligned} \quad (3.67)$$

En dehors de la région éclairée, nous avons

$$\varphi_I(Y) + \varphi_{II}(Y) = 0 \quad \text{or} \quad \varphi_I(Y) = -\varphi_{II}(Y) \quad (3.68)$$

*Intensité.*

$$[\varphi_I(Y)]^2 = [\varphi_{II}(Y)]^2 \quad (3.69)$$

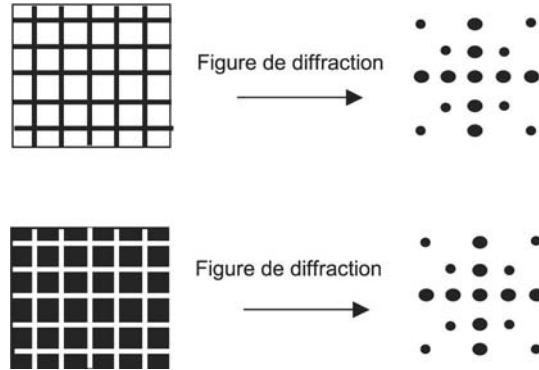
La première équation (3.68) nous indique que les amplitudes des ondes diffractées de deux écrans complémentaires ont entre elles une différence de phase de  $\pi$ . Les figures de diffraction sont pourtant les mêmes.

Nous montrons (fig. 3.24) une photographie des figures de diffraction de deux écrans complémentaires, l'un a des ouvertures en forme de croix, l'autre a les parties opaques représentées



par des dessins de croix.

Nous étudions (exemple D.15) deux réseaux d'amplitude dont les surfaces forment deux écrans complémentaires. Les figures de diffraction sont identiques, mais les pics n'ont pas les mêmes hauteurs car les ouvertures n'ont pas les mêmes largeurs. Nous avons choisi  $d_1$  différent de  $d_2$ .



**Fig. 3.24** – Figures de diffraction par des écrans complémentaires. Répartition régulière des ouvertures. Les figures de diffraction par ces écrans sont identiques.

#### **Exemple D.15. Écrans complémentaires.**

Considérons deux écrans complémentaires formés par deux réseaux d'amplitude, des bandes parallèles entre elles. Ils ont la même période spatiale  $a$ .

La largeur de la fente du premier est  $d_1$ , celle du second est  $d_2$ . Nous choisissons la période telle que :  $a = d_1 + d_2$ . Ces deux réseaux sont complémentaires.

Nous traçons les courbes de diffraction de chacun d'eux. À  $P_1$  correspond la largeur  $d_1$ , à  $P_2$  la largeur  $d_2$ .

Nous voyons que ces deux figures ont des maxima situés à la même place et sont de même largeur. Toutefois elles n'ont pas la même intensité car les distances  $d_1$  et  $d_2$  sont différentes.

Paramètres :

Diffraction par deux réseaux d'amplitude. L'un a des bandes d'ouverture de largeur  $d_1$ , l'autre des ouvertures de largeur  $d_2$ . Chaque réseau a la même distance comprise entre deux bandes successives. Cette distance est  $a = d_1 + d_2$ .

$X$  = distance plan du plan des réseaux,  $N$  = nombre de lignes, incidence normale.

$P(A) = D(A)I(A)$  = intensité finale diffractée.

Les deux réseaux sont complémentaires. L'un a des ouvertures de diamètre  $d_1$ , l'autre de diamètre  $d_2$ .

La constante de périodicité est  $a = d_1 + d_2$ .

Application numérique :

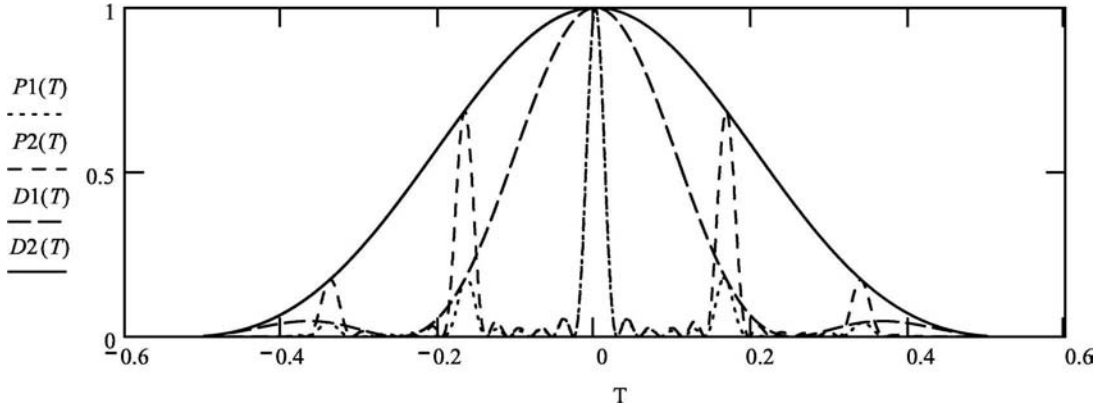
$d_1 = 0,002$ ,  $d_2 = 0,001$ ,  $a = d_1 + d_2$ ,  $\lambda = 0,0005$ ,  $N = 6$ ,  $\theta = -0,5001, -0,4999 \dots 0,5$

$$D1(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{d_1}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)}{\left(\pi \cdot \frac{d_1}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)} \right]^2 \quad I(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot N\right)}{N \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)} \right]^2 \quad P1(\theta) = D1(\theta) \cdot I(\theta)$$

$$D2(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{d_2}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)}{\left(\pi \cdot \frac{d_2}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)} \right]^2 \quad I(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \cdot N\right)}{N \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin(\theta)\right)} \right]^2 \quad P2(\theta) = D2(\theta) \cdot I(\theta)$$

Nous traçons les intensités transmises par chacun des deux réseaux. Si la répartition des intensités est différente pour chaque réseau, la position des pics d'intensité est la même pour chaque réseau : c'est

ce que nous dit le principe de Babinet.



#### Application D.15

1. Garder la valeur  $a = d_1 + d_2$  et prendre une valeur de  $d_1$  très petite par rapport à  $d_2$ . Observer comment les intensités diffractées des deux réseaux sont modifiées.
2. Choisir maintenant des valeurs  $d_1$  et  $d_2$  sensiblement égales.
3. Changer la valeur de la constante  $a$  et observer comment sont modifiées les figures de diffraction.

### 3.6 Diaphragmes répartis au hasard

Nous avons étudié (chapitre 2) la figure d'interférence obtenue par les ondes issues de  $N$  sources disposées régulièrement. Quand la répartition de ces sources devenait aléatoire, la figure d'interférence se réduisait à une constante. Maintenant, nous examinons ce qu'il advient de la courbe de diffraction-interférence quand les ouvertures identiques sont disposées au hasard.

#### Disposition périodique des ouvertures.

L'intensité est donnée par l'expression

$$P_{\text{périodique}} = \left[ \frac{\sin(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})}{(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi N \frac{a \sin \theta}{\lambda})}{(N \sin(\pi \frac{a \sin \theta}{\lambda}))} \right]^2 \quad (3.70)$$

#### Disposition au hasard des ouvertures.

Considérons un réseau d'amplitude. La disposition des fentes, ou des gravures, est irrégulière. L'intensité finale est le produit du terme d'interférence par le terme de diffraction

Nous utilisons le résultat du chapitre 2. Le terme d'interférence devient une constante. Cette constante est valeur moyenne des interférences, il reste simplement le facteur de diffraction

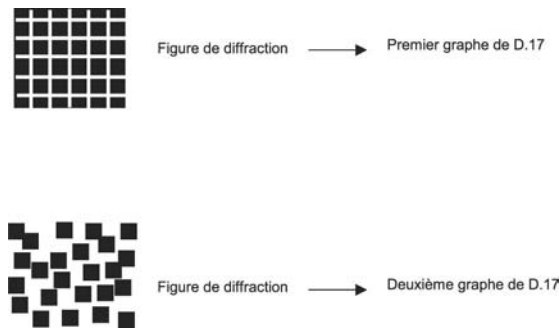
$$P_{\text{répartition au hasard}} = \left[ \frac{\sin(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})}{(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \quad (3.71)$$

#### Interprétation.

La figure de diffraction de fentes disposées au hasard est la même que celle d'une seule fente. Nous traçons (exemple D.16) deux courbes de diffraction d'un réseau. La première est la

courbe complète, la deuxième est celle qui reste quand le terme d'interférence devient une constante. Nous représentons les courbes de diffraction en deux dimensions puis trois dimensions (exemple D.17). Le premier graphe est celui de la diffraction par une répartition régulière d'ouvertures. Le deuxième représente la diffraction obtenue par une répartition au hasard des ouvertures.

Nous représentons (fig. 3.25) les figures de diffraction d'ouvertures ayant les formes carrées disposées successivement régulièrement puis au hasard. Dans le premier cas nous observons la diffraction à l'intérieur de l'enveloppe de la figure d'interférence d'une disposition périodique. Dans l'autre cas nous obtenons la superposition des intensités de  $N$  figures de diffraction d'un diaphragme de forme carrée.



**Fig. 3.25** – Diffraction par une répartition d'écrans rectangulaires. Diffraction par une répartition régulière d'écrans. Diffraction par une répartition irrégulière.

**Exemple D.16. Comparaison des figures de diffraction par des diaphragmes répartis régulièrement et des diaphragmes répartis au hasard.**

Nous traçons : la courbe de diffraction d'un réseau  $P1(\theta)$  puis la courbe  $P2(\theta)$  quand les fentes sont réparties irrégulièrement dans un plan. La courbe d'interférence dans ce dernier exemple se réduit à une constante.

Cette étude est faite sur le CD.

**Exemple D.17. Diffraction par des ouvertures rectangulaires disposées au hasard selon une dimension.**

Nous représentons l'intensité diffractée par des ouvertures disposées périodiquement. L'intensité est le produit du terme de diffraction par le terme d'interférence.

Quand nous avons une distribution au hasard des diaphragmes le terme de diffraction ne change pas, le terme d'interférence prend une valeur moyenne constante. L'intensité observée est donc le produit du terme de diffraction par une constante.

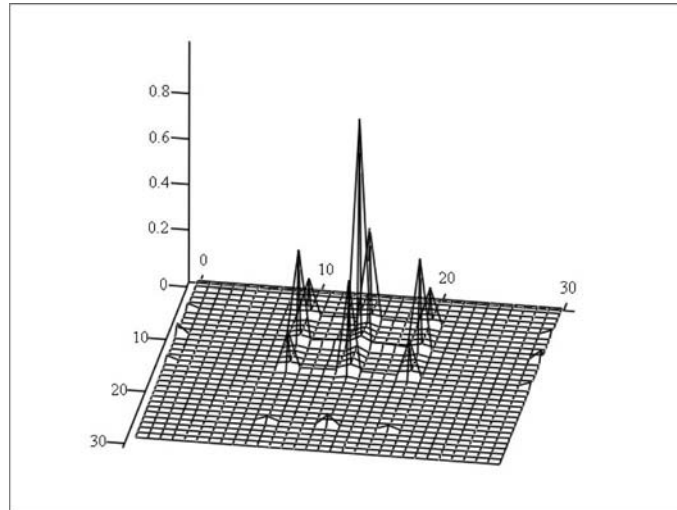
1. Répartition régulière de diaphragmes rectangulaires.

Paramètres.

$$d = 2, \quad d1 = 2, \quad a1 = 4, \quad a = 4, \quad N = 40, \quad \lambda = 4, \quad p = 6, \quad i = 0 \dots N, \\ j = 0 \dots N, \quad x_i = (-3) + 0,200 \ 01 \cdot i \quad y_j = -4 + 0,200 \ 01 \cdot j$$

$$f(x, y) = \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot d \cdot \frac{x}{2 \cdot \lambda}\right)}{(2 \cdot \pi \cdot d \cdot \frac{x}{2 \cdot \lambda})} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot d1 \cdot \frac{y}{2 \cdot \lambda}\right)}{(2 \cdot \pi \cdot d1 \cdot \frac{y}{2 \cdot \lambda})} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{x \cdot p}{2 \cdot \lambda}\right)}{p \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{x}{2 \cdot \lambda}\right)} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot a1 \cdot \frac{y \cdot p}{2 \cdot \lambda}\right)}{p \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot a1 \cdot \frac{y}{2 \cdot \lambda}\right)} \right]^2$$

Nous traçons la courbe  $M_{i,j} = f(x_i, y_j)$ .

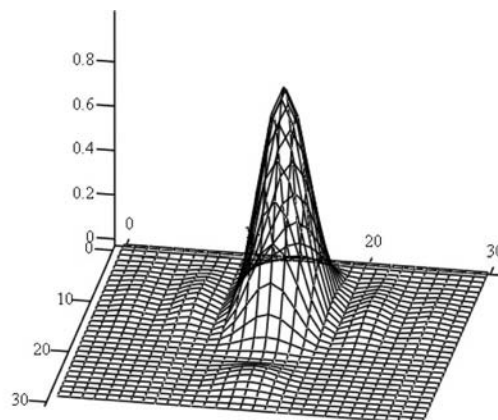


M

2. Répartition au hasard des ouvertures :

$$f1(x, y) = \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot d \cdot \frac{x}{2 \cdot \lambda}\right)}{(2 \cdot \pi \cdot d \cdot \frac{x}{2 \cdot \lambda})} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin\left(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{y}{2 \cdot \lambda}\right)}{(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{y}{2 \cdot \lambda})} \right]^2$$

Nous traçons la courbe :  $MM_{i,j} = f1(x_i, y_j)$ .



MM

### 3.7 Diffraction de Fresnel

Au début de ce chapitre nous avons utilisé la théorie de diffraction de Fresnel. Nous avons calculé les caractéristiques du point de Poisson, nous avons appliqué l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel à la diffraction par une bille et trouvé une illumination constante sur l'axe de symétrie du système, derrière l'ombre de la bille ou de l'ouverture circulaire. Nous nous intéressons maintenant à la diffraction par le bord d'un écran : il peut être considéré comme formé par une fente dont nous éloignons un bord vers l'infini. Cette étude a été réalisée par Fresnel avec les intégrales qui portent maintenant son nom. La première étape est de donner la définition des intégrales de Fresnel.

#### 3.7.1 Diffraction par une fente et intégrales de Fresnel

L'intégrale de Kirchhoff-Fresnel, avec l'approximation des petits angles, devient

$$G(Y) = C \int_{y_1=-d/2}^{y_2=d/2} e^{[ik \frac{(Y-y)^2}{2X}] dy} \quad (3.72)$$

Nous prenons  $C = 1$ .

*Intégrale de Fresnel.*

Mettons cette intégrale sous la forme d'une intégrale de Fresnel. Nous effectuons le changement de paramètre suivant

$$(y - Y)^2 = \eta^2 \left( \frac{\lambda X}{2} \right) \quad (3.73)$$

D'où

$$\eta = (Y - y) \sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad (3.74)$$

Les limites de l'intégration sont maintenant  $\eta_1$  et  $\eta_2$

$$\eta_1 = (Y + \frac{d}{2}) \sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad \text{et} \quad \eta_2 = (Y - \frac{d}{2}) \sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad (3.75)$$

Effectuons la substitution des équations (3.74) et (3.75) dans l'intégrale (3.72). Nous obtenons :

$$G(\eta) = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{i(\frac{\pi}{2})\eta^2} d\eta \quad (3.76)$$

Nous pouvons écrire

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{i(\frac{\pi}{2})\eta^2} d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \cos[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta + i \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sin[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta \quad (3.77)$$

Nous obtenons les quatre intégrales de Fresnel

$$\begin{aligned} & \int_0^{\eta_2} \cos[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta - \int_0^{\eta_1} \cos[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta \\ & + i \{ \int_0^{\eta_2} \sin[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta - \int_0^{\eta_1} \sin[(\frac{\pi}{2})\eta^2] d\eta \} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Par définition, les intégrales de Fresnel sont de la forme

$$C(\eta') = \int_0^{\eta'} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta^2 d\eta, \quad S(\eta') = \int_0^{\eta'} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta^2 d\eta \quad (3.79)$$

Nous représentons les graphes d'intégrales de Fresnel (exemple D.18).

---

**Exemple D.18. Intégrales de Fresnel.**

*Courbes de variation des intégrales de Fresnel  $C$  et  $S$ . Nous traçons les courbes  $C(\eta')$  et  $S(\eta')$  comme  $C(Y)$  et  $S(Y)$  pour  $Y = 0 \dots 5$ .*

*Cette étude est faite sur le CD.*

---

### 3.7.2 Diffraction de Fresnel par une fente

Soit une fente de largeur  $d$ , nous représentons les coordonnées sur la figure (3.26). L'amplitude de l'onde diffractée est calculée à partir des relations (3.73) et (3.76).

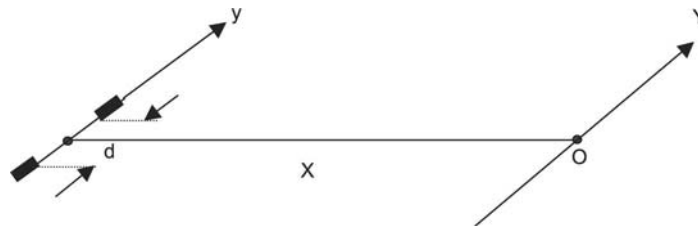
$$G(Y) = C[\eta_2(Y)] - C[\eta_1(Y)] + i\{S[\eta_2(Y)] - S[\eta_1(Y)]\} \quad (3.80)$$

Les expressions de  $\eta$  en fonction de  $Y$  sont

$$\eta_1 = (Y + d/2)\sqrt{\left(\frac{2}{\lambda X}\right)} \quad \text{et} \quad \eta_2 = (Y - d/2)\sqrt{\left(\frac{2}{\lambda X}\right)} \quad (3.81)$$

*Intensité.*

$$I(Y) = \{C[\eta_2(Y)] - C[\eta_1(Y)]\}^2 + \{S[\eta_1(Y)] - S[\eta_2(Y)]\}^2 \quad (3.82)$$



**Fig. 3.26** – Diffraction de Fresnel par une fente de largeur  $d$ . Choix des coordonnées.

Nous traçons (exemple D.19) l'intensité diffractée par une fente, dans les conditions de Fresnel. Nous voyons que le premier minimum n'a pas une valeur égale à zéro. Quand nous changeons la valeur de  $d$  pour une valeur plus petite, ou bien quand nous considérons une valeur plus grande de  $X$ , nous pouvons obtenir une valeur nulle pour le premier minimum.

---

**Exemple D.19. Diffraction de Fresnel par une fente.**

*Nous traçons le graphe  $I(Y)$  de l'intensité diffractée par une fente de largeur  $d$ . Nous prenons les conditions d'expérience de l'exemple (D.3) :  $x = 4\,000\text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,000\,5\text{ mm}$ . Ce sont les valeurs de l'étude de la diffraction à grande distance ou à l'infini.*

- Quand  $d$  est petit, il n'y a pas de différence avec la diffraction à l'infini.
- Quand  $d$  est grand, le premier minimum d'intensité de la diffraction Fresnel n'est pas égal à zéro.

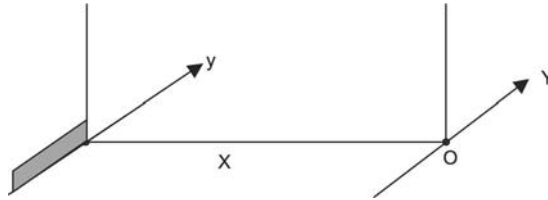
Cette étude est faite sur le CD.

#### Application D.19

1. Normaliser la figure de diffraction d'une fente obtenue selon les conditions de diffraction de Fresnel. Au centre la valeur doit être égale à 1. Tracer la courbe en prolongeant les valeurs positives et négatives de  $Y$ .
2. Tracer le graphe de l'intensité diffractée dans les conditions de Fraunhofer. Prendre la même largeur de fente, la même longueur d'onde et la même distance du plan des fentes au plan d'observation.
3. À partir de quelle valeur de  $d$  les deux courbes sont-elles sensiblement les mêmes ?

### 3.7.3 Diffraction de Fresnel par le bord d'un écran

La diffraction de Fresnel par le bord d'un écran est traitée comme étant de la diffraction par une fente de très grande largeur ; l'un des bords est situé à l'ordonnée  $y = 0$ , l'autre bord est situé à l'ordonnée  $y = \infty$  (fig. 3.27). Quand nous avons étudié la diffraction par une fente, les limites d'intégration étaient comprises entre  $-d/2$  et  $+d/2$ . Remarquez le signe négatif de la relation (3.74).



**Fig. 3.27** – Diffraction par le bord d'un écran considéré comme une fente de largeur infinie. Paramètres pour l'étude de la diffraction par le bord d'un écran considéré comme une fenêtre de grande largeur  $d$ . Le bord inférieur de la fente est à l'ordonnée  $Y = 0$ , le bord supérieur à l'ordonnée  $Y = \infty$ . Nous calculons l'intégrale en prenant pour  $\theta_1$  la valeur 0,5. La dépendance en fonction de  $Y$  est maintenant contenue dans le terme  $\theta_1$ .

$$\eta_1 = (Y + \frac{d}{2})\sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad \eta_2 = (Y - \frac{d}{2})\sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad (3.83)$$

Les limites d'intégration sont maintenant les suivantes

$$\eta_1 = (Y)\sqrt{\frac{2}{\lambda X}} \quad \eta_2 = -\infty \quad (3.84)$$

Les limites d'intégration dans l'exemple de la fente deviennent  $y = 0$  pour un bord et  $y = \infty$  pour l'autre.

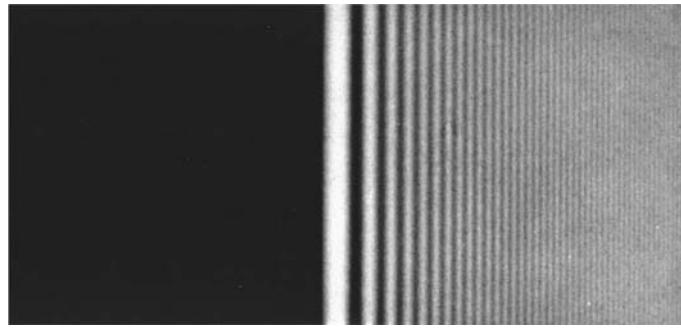
$$u(Y) = \int_{\eta_1}^{-\infty} e^{-i(\frac{\pi}{2})\eta^2} d\eta = [C(\eta) + iS(\eta)]_{\eta_1}^{-\infty} \quad (3.85)$$

Les intégrales  $C(\eta)$  et  $S(\eta)$  ont des limites comprises entre 0 et  $-\infty$  et pour cette dernière valeur le résultat est  $-0,5$ .

**Intensité non normalisée.**

$$I(Y) = \{-0,5 - C(\eta_1)\}^2 + \{-0,5 - S(\eta_1)\}^2 \quad (3.86)$$

Nous représentons (fig. 3.20) l'intensité résultante donnée par la relation (3.86). Nous montrons une photographie (fig. 3.28) de la diffraction par le bord d'un écran. Nous effectuons (exemple D.20) les calculs de l'intégrale de Fresnel relatifs à une fente large. Nous en déduisons la diffraction par le bord d'un écran.



**Fig. 3.28** – Photographie de la figure de diffraction par le bord d'un écran [1].

**Exemple D.20. Diffraction de Fresnel par le bord d'un écran.**

Nous traçons le graphe de l'intensité.

Nous désignons par  $II(Y)$  l'intensité diffractée par la fente de grande largeur.

Paramètres :

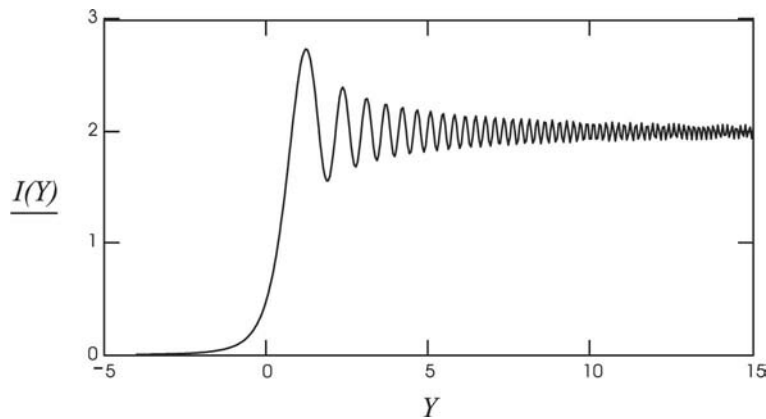
Variations de  $Y$  :  $Y = -5 \text{ mm} \quad \dots \quad Y = +15 \text{ mm}$  et  $Y = -4, -3, 95 \dots 15$ ,  $\sqrt{\frac{2}{\lambda \cdot X}} = 1$

$X = 4\,000 \quad \lambda = 5 \cdot 10^{-4}$

Nous considérons que la diffraction par le bord d'un écran est la même que la diffraction par une fente dont nous éloignons un bord à grande distance.

$Cq(Y) = \int_0^{q(Y)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta^2\right) d\eta \quad Sq(Y) = \int_0^{q(Y)} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta^2\right) d\eta$

Courbe  $I(Y) = (Cq(Y) - (-0.5))^2 + (Sq(Y) - (-0.5))^2$



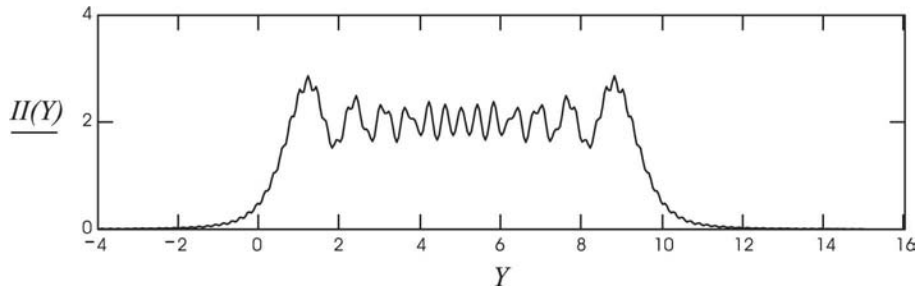


Par comparaison avec la courbe précédente traçons la courbe de diffraction d'une fente large comprise entre 0 et 10.

$$p(Y) = (Y - 10)$$

$$Cp(Y) = \int_0^{p(Y)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta^2\right) d\eta \quad Sp(Y) = \int_0^{p(Y)} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \eta^2\right) d\eta$$

Nous traçons les variations de  $II(Y) = (Cq(Y) - Cp(Y))^2 + (Sq(Y) - Sp(Y))^2$ .



#### Application D.20

Faire varier la largeur de la fente en choisissant d'autres valeurs que 10 dans  $P(Y) = (Y - 10)$  et comparer la courbe de diffraction d'une fente avec la courbe de diffraction par le bord d'un écran.

## Appendice 3.1

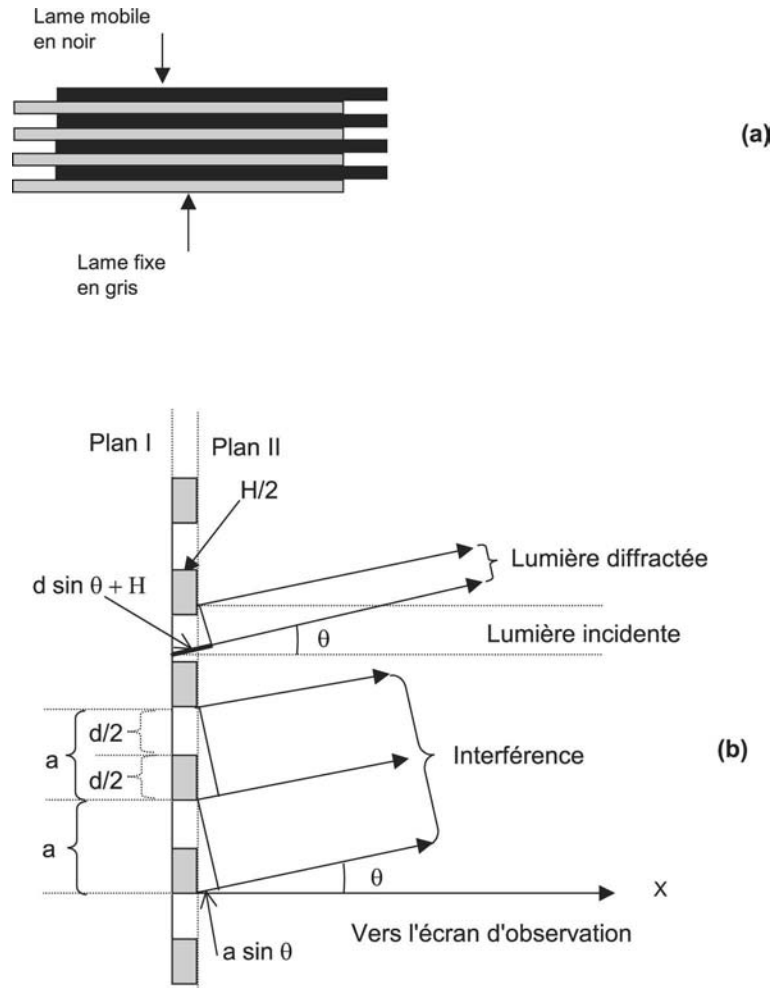
### A3.1.1 Réseau lamellaire

Étudions la diffraction par un réseau de phase. Les gravures sont rectangulaires, de largeur  $d$  et de hauteur  $H$ . Nous pouvons faire varier  $H$ . La constante de périodicité est  $a$ , le nombre de gravures est  $N$ . Les caractéristiques de ce réseau sont représentées sur la figure (A3.29). Nous pouvons considérer ce réseau comme constitué de deux réseaux dont les effets sont communs, l'un ayant la diffraction sur le plan I, l'autre sur le plan II. Il y a interférence de la lumière entre le chemin parcouru du plan I à celui du plan II selon la direction d'observation  $\theta$ . La distance  $H$  entre ces deux plans varie continûment. Nous enregistrons l'intensité diffractée que nous appelons : *l'interférogramme*. Supposons que la lumière incidente contienne un spectre large de longueurs d'onde, la transformée de Fourier des valeurs de l'interférogramme donne le spectre de la source.

Nous étudions le réseau lamellaire de la figure (3.A29),  $H$  étant fixe. Nous observons la figure de diffraction à grande distance. Chaque réseau produit sa propre diffraction mais nous devons tenir compte de l'interférence entre le trajet des rayons réfléchis par I et II selon la direction  $\theta$ .

La différence de marche entre deux rayons est :  $\delta = d \sin \theta + H$ . Selon le chapitre des interférences, nous devons inclure cette différence de marche  $\delta$  dans le terme d'interférence  $[\cos(\pi \delta / \lambda)]^2$ .

L'intensité totale  $P = uu^*$  est le produit de trois termes : (terme de l'intensité de diffraction) \* (terme de l'intensité d'interférence de chacun des deux réseaux) \* (terme dû à l'interférence entre les deux réseaux).



**Fig. A3.29** – (a) Principe du réseau lamellaire. (b) Coordonnées pour le calcul de la différence de marche, nous ne représentons que la lumière diffractée. Les rayons se réfléchissent sur les plans I et II et interfèrent.

Résumons les expressions mathématiques de ces différents termes :

1. terme de diffraction

$$D(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]^2 \quad (\text{A3.1})$$

2. terme d'interférence

$$I(\theta) = \left[ \frac{\sin\left(\pi \frac{N a \sin \theta}{\lambda}\right)}{\left(N \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}\right)} \right]^2 \quad (\text{A3.2})$$

3. terme d'interférence dû à la marche entre deux lames

$$ST(\theta) = \left[ \cos\left\{ \pi \frac{(d \sin \theta + H)}{\lambda} \right\} \right]^2 \quad (\text{A3.3})$$

L'intensité totale  $P$  est le produit de ces trois dernières équations, ce qui donne

$$P(\theta) = \left[ \frac{\sin(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})}{(\pi \frac{d \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\sin(\pi \frac{Na \sin \theta}{\lambda})}{(N \pi \frac{a \sin \theta}{\lambda})} \right]^2 \cdot [\cos\{\pi \frac{(d \sin \theta + h)}{\lambda}\}]^2 \quad (\text{A3.4})$$

La figure de diffraction dépend de  $a$  et  $d$  mais aussi de la hauteur  $H$  de la marche.

Nous représentons (exemple D.21) les variations de  $P(\theta)$  pour plusieurs valeurs de  $H$  et  $(\theta)$ . La courbe du facteur de diffraction  $D$  est l'enveloppe qui contient les pics d'interférence. L'ordre zéro est au centre, le premier ordre reste à l'intérieur de l'enveloppe.

- Seuls apparaissent les ordres zéro et un de la figure d'interférence du réseau, ce qui est dû au rapport  $d/a$  qui est égal à  $1/2$ . En conséquence, le deuxième ordre est supprimé par les minima de diffraction placés au même endroit.
- Les variations de  $H$  distribuent l'énergie entre l'ordre zéro et le premier ordre, ce qui est compris par le principe de conservation de l'énergie.
- Nous négligeons les intensités dans le troisième ordre ainsi que les intensités dans les ordres supérieurs à trois.

*Interprétation de l'intensité diffractée.*

- $H = 0$  ou  $H = m\lambda \Rightarrow$  la lumière incidente est entièrement réfléchiée dans l'ordre zéro qui est la direction de réflexion sur le réseau.
- $H = \lambda/4 \Rightarrow$  aucune lumière ne se dirige selon l'ordre zéro, aucune lumière n'est réfléchiée par les facettes du réseau. Toute la lumière se dirige selon la direction de l'ordre un.
- $H$  est un multiple de longueur d'onde  $H = m\lambda \Rightarrow$  toute la lumière est diffractée dans l'ordre zéro.
- $H$  est multiple de demi-longueurs d'onde  $H = (2m + 1)\lambda/2 \Rightarrow$  toute la lumière est réfléchiée dans le premier ordre.

Nous traçons (exemple D.21) l'intensité  $P(\theta)$  pour différentes valeurs de la longueur d'onde. Nous observons un maximum dans l'ordre zéro, mais deux maxima dans le premier ordre. L'intensité de l'ordre zéro change avec la valeur de  $H$ . L'enregistrement de l'énergie en fonction de  $H$  constitue l'interférogramme.

**Exemple D.21. Réseau d'amplitude de gravures rectangulaires.**

Tracer quatre intensités diffractées pour quatre valeurs de  $H = n\lambda$ .

- $n =$  nombre entier. Toute l'intensité diffractée est dans l'ordre zéro.
- $n =$  nombre fractionnaire. Nous lui soustrayons le nombre entier le plus élevé immédiatement inférieur à  $n$ . Il reste un nombre fractionnaire  $n'$ .

Exemple :  $n = 10,5$ , nous retenons  $n' = 0,5$ . La différence de marche optique est maintenant une demi-longueur d'onde et toute la lumière est diffractée dans les premiers ordres.

Exemple : l'indice  $n$  a successivement les valeurs  $n = 0,125, 0,25, 0,375$ . La lumière est partiellement diffractée dans l'ordre zéro et dans le premier ordre.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application D.21**

1. Trouver les valeurs de  $n$  pour lesquelles les interférences constructives et destructives redeviennent identiques.
  - Constater que la différence de marche entre une interférence constructive et l'interférence destructive est  $\lambda/2$ .

- Constater que la différence de marche entre deux interférences constructives successives et deux interférences destructives successives est  $\lambda$ .

Ces différences correspondent à la différence de marche produite par  $H$ .

2. Un réseau lamellaire dont le principe est celui d'un réseau à gravures rectangulaires est un interféromètre dont la variable est la hauteur  $H$ .

Nous créons une différence de marche en faisant varier  $H$  par petits pas. Généralement le réseau travaille en réflexion et les lames sont réfléchissantes.  $H$  est seulement la moitié de la longueur nécessaire pour obtenir la même différence de marche par transmission (voir l'exemple a).

**Exemple D.22. Étudions un réseau lamellaire (gravures rectangulaires).**

Graphes de quatre intensités  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Chaque courbe est tracée avec quatre valeurs de  $H$  :  $H_1, H_2, H_3, H_4$ . Chaque paire de courbes a la même longueur d'onde.  $H_1$  et  $H_2$  sont choisis de façon que  $P_1$  et  $P_2$  aient des interférences constructives avec  $\lambda_1$  et  $P_3, P_4$  des interférences destructives avec  $\lambda_2$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application D.22**

Interféromètre lamellaire.

1. Enregistrer la courbe de l'exemple (D.21).
  - Modifier les courbes  $P_1, P_2, P_3, P_4$  en donnant au paramètre  $H$  la même valeur maximum pour toutes les courbes. Maintenant, nous pouvons simuler un interféromètre lamellaire. Nous prenons  $\lambda_1 = 0,000\ 5$ ,  $\lambda_2 = 0,000\ 7$  et choisissons un pas d'échantillonnage de  $0,000\ 05$  et partons de la valeur  $H = 0,000\ 05$ .
  - Observer sur l'écran la modification de la figure d'interférence des maxima et minima d'interférence pour ces deux longueurs d'onde.

L'interférogramme est obtenu en recueillant au centre la sommation des intensités des deux longueurs d'onde.

2. Revenons à l'exemple (D.21).
 

Les quatre figures d'interférence montrent des interférences constructives et destructives pour différents réglages du réseau lamellaire, c'est-à-dire pour quatre valeurs différentes de  $H_1, H_2, H_3, H_4$ . Les quatre graphes sont différents.

Au centre, observer des interférences constructives pour les deux longueurs d'onde. Les interférences destructives apparaissent à une distance  $Y$  différente pour chacun d'eux.

Puisque le détecteur est placé au centre, il n'enregistre que l'énergie de l'ordre zéro. Déterminer son diamètre maximum pour ne pas enregistrer le premier ordre.

3. Application numérique : calculer ce diamètre sachant que la plus petite longueur d'onde est  $\lambda_1 = 0,001$  et la plus grande  $\lambda_2 = 0,004$ .
4. Comment est modifiée la surface du détecteur quand nous changeons  $a$  et lui donnons la valeur  $2a$  puis  $a/2$  ?
5. Même question quand nous changeons la valeur de  $N$ .

## Appendice 3.2

### A3.2.1 Spirale de Cornu

La courbe  $S(h)$  en fonction de  $C(h)$  est appelée spirale de Cornu. Nous la traçons sur l'exemple (D.23).

Il est possible d'obtenir une figure de diffraction à partir de la spirale de Cornu.

La distance (fig. 3.31) entre deux points  $\eta_1$  et  $\eta_2$  ne dépend que de  $Y$ , si  $d$ ,  $\lambda$ ,  $X$  sont connus. Prenons l'exemple de la diffraction par une fente, l'intensité diffractée est donnée par l'expression

$$I(Y) = \{C[\eta_2(Y)] - C[\eta_1(Y)]\}^2 + \{S[\eta_2(Y)] - S[\eta_1(Y)]\}^2 \quad (\text{A3.5})$$

$I(Y)$  représente la distance entre deux points de la spirale de Cornu.

La figure de diffraction est obtenue en plaçant les points  $(distance)^2$  en fonction de  $Y$ , c'est-à-dire  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . Nous obtenons une intensité normalisée en divisant les valeurs par la  $(distance)^2$  correspondant à  $Y = 0$ .

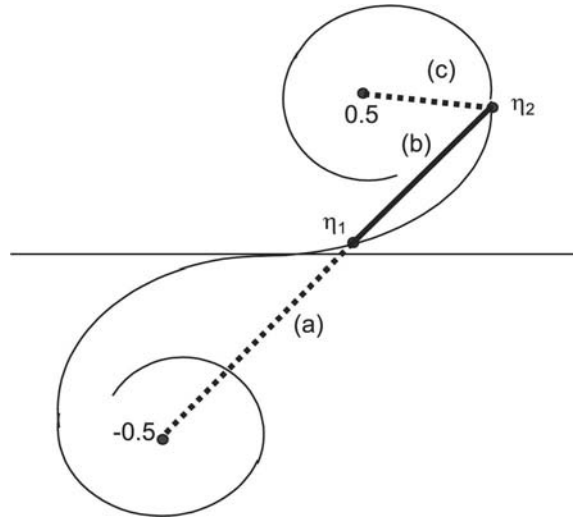
---

**Exemple D.23. Spirale de Cornu.**

Nous traçons la spirale de Cornu c'est à dire le graphe  $S = S(Y)$  en fonction de  $C = C(Y)$ . Cette étude est faite sur le CD.

---

### A3.2.2 Principe de Babinet et spirale de Cornu



**Fig.** A3.30 – Spirale de Cornu. La ligne  $b$  correspond à la diffraction par une fente, les lignes (a) et (c) représentent la diffraction par un écran complémentaire.

Soit deux écrans complémentaires  $I$  et  $II$ . L'écran  $I$  est formé par une feuille de carton percée d'un seul petit trou circulaire. L'écran  $II$  complémentaire peut être une plaque de verre sur laquelle est peint ou collé un petit disque opaque de même diamètre que le petit diaphragme de l'écran  $I$ . Si nous plaçons l'un sur l'autre ces deux écrans, aucune lumière ne passe.

Le théorème de Babinet nous dit que : *deux écrans complémentaires ont la même figure de diffraction*. Nous traçons sur l'exemple (D.23) la demi-spirale de Cornu, le paramètre  $\eta$  varie de 0 à  $+\infty$ .

*Exemple de figure de diffraction tracée à partir de la spirale de Cornu.*

Considérons une fente et son écran complémentaire. L'écran  $I$  comporte une fente de largeur

*d.* L'écran *II* est une plaque de verre avec une bande opaque de largeur  $d$ .

La figure de diffraction de *I* est obtenue, pour une certaine valeur de  $Y$ , en mesurant la distance  $b$  comprise entre les points  $\eta_1$  et  $\eta_2$ .

La figure de diffraction par l'écran *II* est obtenue en lisant les distances (a) de  $-\infty$  à  $\eta_1$  et (c) de  $\eta_2$  à  $\infty$ , car l'écran *II* est complémentaire de l'écran *I*.

Si nous désirons d'autres valeurs de l'intensité diffractée, nous choisissons d'autres valeurs de  $Y$  auxquelles correspondent les points  $\eta_1$  et  $\eta_2$  calculés.

Les distances (a) et (c) et la distance (b) entre  $\eta_1$  et  $\eta_2$  représentent la diffraction par l'addition des deux écrans complémentaires, situation pour laquelle nous n'observons pas de diffraction (fig. 3A.30).

**Exercices chapitre 3- Diffraction, sur le CD**

- DD01- Diffraction par une fente et largeur de la tâche centrale observée, exemple (D.2)du cours
- DD02- Diffraction par une fente, position des maxima secondaires, exemple (D.3)du cours
- DD03- Diaphragme rectangulaire, exemple (D.5)du cours
- DD04- Diaphragme circulaire, largeur de la tache centrale de diffraction
- DD05- Fentes doubles, fentes d'Young, exemple (D.9)du cours
- DD06- Étude du réseau sous incidence normale
- DD07- Étude du réseau d'amplitude éclairé sous incidence  $\theta$  , exemple .11)
- DD08- Réseau échelette, exemple (D.12)du cours
- DF09- Étude du réseau échelette
- DD10- Principe de Babinet
- DD11- Résolution du réseau, détermination de la distance de Rayleigh
- DD12- Comparaison des diffractions de Fresnel et de Fraunhofer par une fente, exemple (D.19) du cours
- DD13- Diffraction de Fresnel par le bord d'un écran, exemple (D.20) du cours

# Chapitre 4

## Cohérence

### 4.1 Cohérence spatiale

#### 4.1.1 Introduction

Lors de l'étude des interférences (chapitre 2) nous avons toujours considéré une seule onde incidente émise par une source située à grande distance. Dans l'expérience d'Young, l'onde incidente lors de son passage à travers soit les deux trous, soit les deux fentes fines parallèles séparées par une distance  $d$ , génèrait deux ondes. Ces deux ondes sont appelées ondes cohérentes, car elles ont entre elles une relation de phase fixe ; elles interfèrent, la superposition de leur amplitude donne la figure d'interférence, dont nous observons l'intensité.

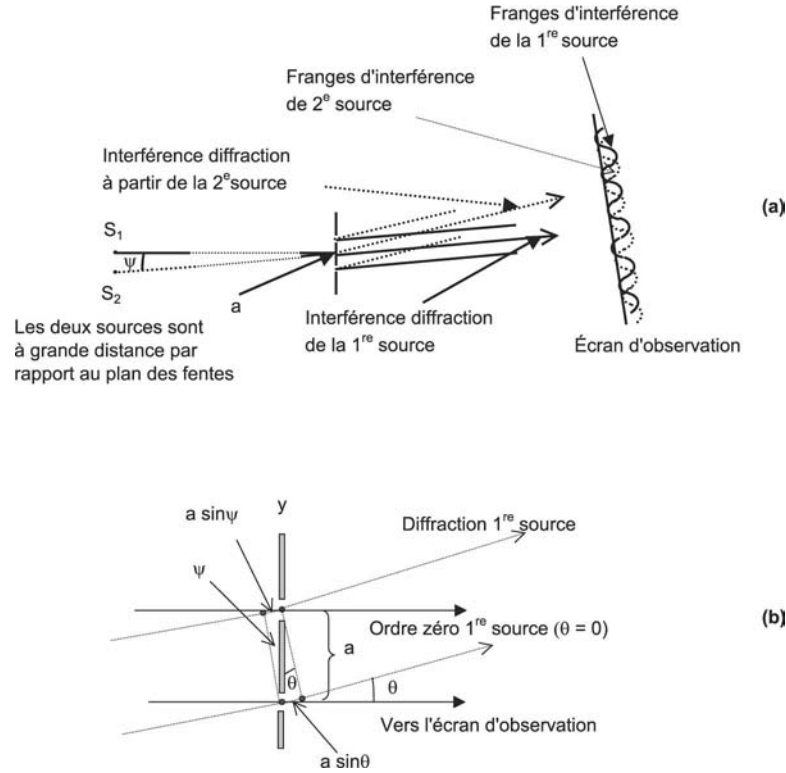
Nous étudions maintenant, dans ce chapitre, la lumière issue de plusieurs sources éloignées. Nous réalisons des interférences à l'aide des deux fentes d'Young, nous pouvons observer des interférences selon des distances bien spécifiques des sources entre elles. Selon ces distances soit nous observons des interférences, soit nous n'observons pas d'interférence. Quand nous observons des interférences, nous disons que ces sources ont entre elles une cohérence spatiale, lorsque ces interférences n'existent plus, nous disons que ces sources ont une incohérence spatiale.

#### 4.1.2 Cohérence spatiale : exemple de deux sources ponctuelles

Nous prenons l'exemple de deux étoiles suffisamment rapprochées, avant d'étudier les conditions de cohérence d'une source étendue. Nous disons que nous avons une double étoile. Chaque étoile émet de la lumière indépendamment de l'autre. La lumière, issue de chaque étoile, forme sa figure d'interférence, et sa figure de diffraction, après passage dans un montage de diaphragmes. Nous choisissons un montage formé par les deux fentes d'Young, les fentes ont la largeur  $d$ , la distance du centre de l'une au centre de l'autre est  $a$ . La première étoile  $S_1$  est placée sur l'axe de symétrie (fig. 4.1), la deuxième  $S_2$  est décalée latéralement d'une distance  $s$ , elle est vue sous l'angle  $\Psi$  du centre des deux fentes.

La lumière issue de chaque source forme sa figure de diffraction, nous observons l'intensité résultant de la superposition des deux intensités des fig.s de diffraction. Nous supposons que ces deux étoiles émettent une onde monochromatique de même longueur d'onde  $\lambda$ . Les ondes, issues de la source  $S_1$  placée sur l'axe de symétrie, sont sous incidence normale au plan des fentes, la figure de diffraction est centrée sur cet axe.





**Fig. 4.1** – Expérience d’Young. (a) Superposition des deux fig.s de diffraction obtenues par les ondes issues de deux sources séparées  $S_1$  et  $S_2$ . Une figure est située sur l’axe, l’autre est décalée,  $a$  = distance entre les fentes,  $d$  = largeur des fentes,  $Z$  = distance source  $\Rightarrow$  plan des fentes,  $X$  = distance fentes  $\Rightarrow$  plan d’observation,  $\theta$  = angle de diffraction. (b) La lumière issue de  $S_2$  est incidente sous l’angle  $\Psi$  par rapport à l’axe, nous observons la diffraction correspondant à l’angle diffracté  $\theta$ .

L’intensité des ondes issues de  $S_1$ , après diffraction par les deux fentes de Young, est

$$I(\theta, 0) = I_0 \left[ \frac{\sin[(\frac{\pi d}{\lambda}) \sin \theta]}{(\frac{\pi d}{\lambda}) \sin \theta} \right]^2 \cdot \left[ \cos[(\frac{\pi a}{\lambda}) \sin \theta] \right]^2 \quad (4.1)$$

$\theta$  = angle de diffraction,  $I_o$  = intensité normalisée, quand  $\theta = 0$ ,  $I(0, 0) = 1$ . Les ondes issues de la source  $S_2$  sont incidentes sous l’angle  $\Psi$ . En conséquence, la figure de diffraction se trouve centrée selon la direction  $-\Psi$ ; en effet la différence de marche du facteur de diffraction est  $d(\sin \theta - \sin \psi)$ , la différence de marche du facteur de d’interférence est  $a(\sin \theta - \sin \psi)$ . Ces expressions sont similaires à celle de la différence de marche des rayons éclairant un réseau sous un angle  $\Psi$ . L’expression de l’intensité obtenue devient

$$I(\theta, \psi) = I_0 \left[ \frac{\sin[(\frac{\pi d}{\lambda})(\sin \theta - \sin \psi)]}{(\frac{\pi d}{\lambda})(\sin \theta - \sin \psi)} \right]^2 \cdot \left\{ \cos[(\frac{\pi a}{\lambda})(\sin \theta - \sin \psi)] \right\}^2 \quad (4.2)$$

Le calcul de la différence de marche optique est similaire à celui utilisé lors de l’étude du réseau éclairé sous une certaine incidence par rapport à la normale, chapitre 3.

**Remarques.**

- Les deux sources émettent une radiation monochromatique de même longueur d’onde.

- Bien entendu les ondes des deux sources passent par le même système de fentes. Les deux étoiles émettent indépendamment l'une de l'autre.
- Une onde émise par  $S_1$  n'a pas de relation de phase fixe avec une onde émise par  $S_2$ , chaque source est indépendante. Les ondes issues de chaque source forment une figure de diffraction.
- Les deux fig.s de diffraction des deux sources sont indépendantes l'une de l'autre, nous observons l'intensité due à la superposition des deux intensités des fig.s.
- Cependant, nous observons, ou n'observons pas, des franges selon la valeur du paramètre  $s$ , donc de  $\Psi$ , de la valeur de  $\lambda$ , de la distance  $s$  entre les deux fentes.

Nous calculons (exemple C.1) la superposition des intensités diffractées selon les différentes valeurs du paramètre  $s$ .

Nous traçons trois graphes.

- Sur le premier :  $s = 0 \Rightarrow$  les deux étoiles sont à la même place.
- Sur le deuxième :  $s = 1,5 \Rightarrow$  la figure observée est réduite.
- Sur le troisième :  $s = 2,25 \Rightarrow$  la figure d'interférence disparaît.
- Sur la quatrième :  $s = 2,6 \Rightarrow$  la figure d'interférence réapparaît mais son intensité est moins contrastée. Nous voyons donc que la superposition des intensités des figures d'interférence de deux sources émettant une lumière incohérente s'annule, disparaît quand la distance entre les deux sources est :  $s = 2,25$ .

### Conclusion.

Quand la superposition des intensités des deux systèmes de franges d'interférence donne un système de franges d'interférence nous disons que la lumière issue des deux sources a *une cohérence spatiale* ; quand nous n'observons pas de système de franges, nous disons que les deux sources ont une *incohérence spatiale*.

---

#### **Exemple C.1. Lumière issue de deux sources ponctuelles incohérentes.**

Nous traçons les graphes obtenus par la superposition des deux intensités  $I(\theta, 0)$  et  $I(\theta, \psi)$  diffractées des ondes issues de deux sources ponctuelles distantes de  $s$ .

$a = 1 \text{ mm} = 0,01 \text{ mm}$   $\lambda = 0,0005 \text{ mm}$

$Z =$  distance comprise entre les deux sources et le plan des fentes  $= 9\,000 \text{ mm}$

$X = 4\,000 \text{ mm}$  distance entre le plan des fentes et l'écran d'observation.

Superposition de deux figures d'interférence obtenues lors de l'expérience d'Young .

$d =$  largeur des fentes.

$a =$  distance comprise entre ces deux fentes.

$Z =$  distance sources  $\Rightarrow$  fentes.

$X =$  distance plan des fentes  $\Rightarrow$  plan d'observation.

$Y =$  coordonnée sur l'écran.

$\theta = Y/X$ .

$\psi =$  angle sous lequel la deuxième source est vue du centre des deux fentes.

- Une figure d'interférence est centrée selon la direction  $\psi = 0,0$
- L'autre figure est centrée selon la direction  $-\psi = -x/Z$ .

Nous faisons croître l'angle  $\psi$  à partir de la valeur  $0,0$ . Nous observons une disparition des franges d'interférence pour une première valeur  $\psi_1$ , si nous continuons à augmenter ce paramètre nous constatons une nouvelle apparition progressive des franges mais le minimum n'est plus égal à zéro. Nous pouvons aussi garder  $s$  constant et faire varier  $a$ .

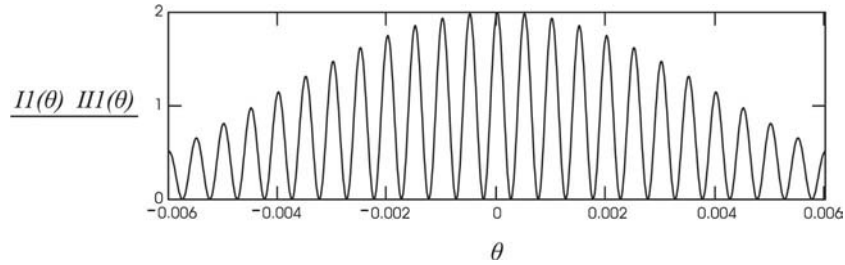
Paramètres :

$\theta = 0,006, -0,00599, 0,006, \quad d = 0,05, \quad a = 1, \quad Z = 9\,000, \quad \lambda = 0,0005$

$s_1 = 0,0 \quad \psi_1 = \frac{s_1}{Z}$

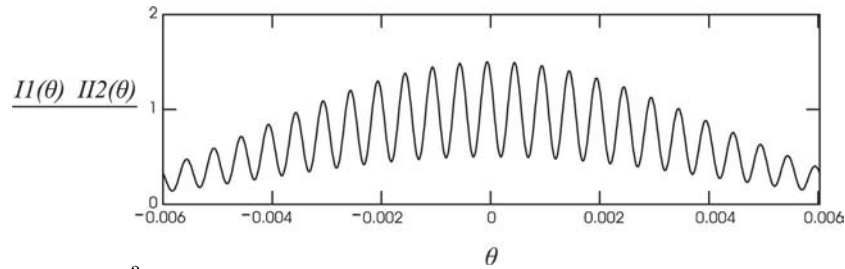
$$I_1(\theta) = \frac{\sin \left[ \left( \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot \sin(\theta) \right)^2 \right]}{\left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2$$

$$II1(\theta) = \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta) + \sin(\psi1)) \right]^2$$



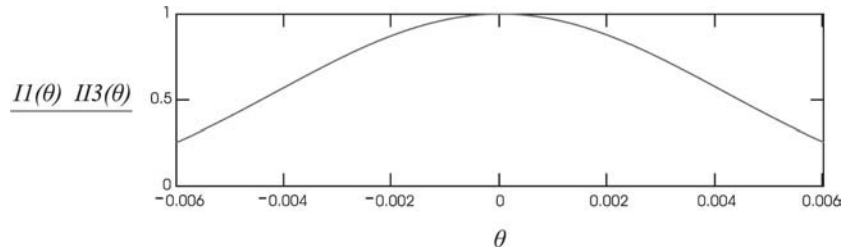
$$s2 = 1,5 \quad \psi2 = \frac{s2}{Z}$$

$$II2(\theta) = \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta) + \sin(\psi2)) \right]^2$$



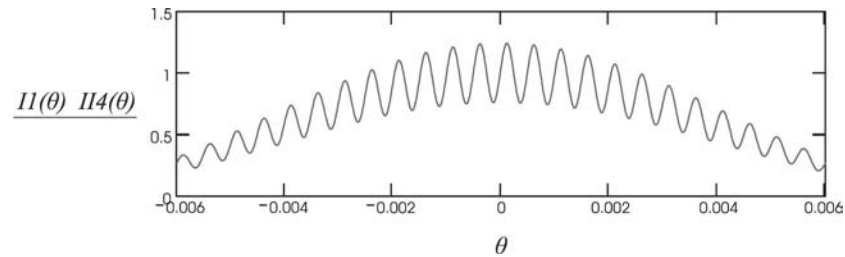
$$s3 = 2,25 \quad \psi3 = \frac{s3}{Z}$$

$$II3(\theta) = \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta) + \sin(\psi3)) \right]^2$$



$$s4 = 0,0 \quad \psi4 = \frac{s4}{Z}$$

$$II4(\theta) = \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta) + \sin(\psi4)) \right]^2$$



### Application C.1

1. Prendre  $d = 0,1$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Garder cette valeur pour des comparaisons ultérieures.

2. Prendre  $\lambda = 0,000\ 6$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Garder cette valeur pour des comparaisons ultérieures.
3. Prendre  $a = 1,2$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Garder cette valeur pour des comparaisons ultérieures.

### 4.1.3 Conditions de cohérence

Nous constatons que nous obtenons une figure d'interférence par la superposition des intensités des franges des deux sources incohérentes séparées par une distance  $s$ . Selon la valeur de  $s$ , nous observons, ou n'observons pas, d'interférence. Dans notre exemple, nous observons des franges pour  $s = 0$ , c'est-à-dire quand les deux sources se superposaient, la figure d'interférence est analogue à celle obtenue par une seule source ponctuelle; par contre, nous constatons que la figure d'interférence résultante disparaît quand  $s = 2,25$ . Quand  $s$  est petit la figure d'interférence est analogue à celle obtenue par une seule source ponctuelle.

Nous allons établir la condition de cohérence, c'est-à-dire que nous définissons quelle largeur maximum doit avoir  $s$  afin d'obtenir une figure d'interférence analogue à celle obtenue par une source ponctuelle.

Nous supposons, dans cette discussion, que les fentes sont fines, le terme de diffraction devient égal à 1. Les intensités des fig.s d'interférence des sources  $S_1$  et  $S_2$  deviennent

$$I_1(\theta, 0) = I_0 \left\{ \cos \left[ \left( \pi \frac{a}{\lambda} \right) \sin \theta \right] \right\}^2 \quad (4.3)$$

$$I_2(\theta, \psi) = I_0 \left\{ \cos \left[ \left( \pi \frac{a}{\lambda} \right) (\sin \theta - \sin \psi) \right] \right\}^2 \quad (4.4)$$

La première intensité  $I_1$  est centrée sur l'axe et correspond donc à  $(a \sin \theta) = 0$ , son premier minimum a lieu pour  $(a \sin \theta) = \lambda/2$ . Les deux figures d'interférence sont confondues en une seule figure d'interférence si  $\Psi = 0$ . Quelle valeur maximum peut prendre  $\Psi$  si nous désirons observer approximativement une seule figure?

Quand le maximum central de  $I_2$  est placé au premier minimum de  $I_1$ , c'est-à-dire que  $a \sin \psi = \lambda/2$ , l'angle  $\psi$  est trop grand, et nous obtenons la première disparition des franges. En conséquence, si nous désirons observer, approximativement, une seule figure d'interférence par la superposition des deux intensités  $I_1$  et  $I_2$ , donc voir approximativement un seul maximum,  $a \sin \psi$  doit être petit par rapport à  $\lambda/2$  et la condition suivante doit être réalisée

$$(a \sin \psi) \ll \lambda/2 \quad (4.5)$$

Nous pouvons (fig. 4.2) avec une bonne approximation écrire :

$$\sin \psi = s/Z, \quad a \sin \psi = sa/Z, \quad a/Z = \text{angle d'ouverture } \omega.$$

La relation (4.5) devient

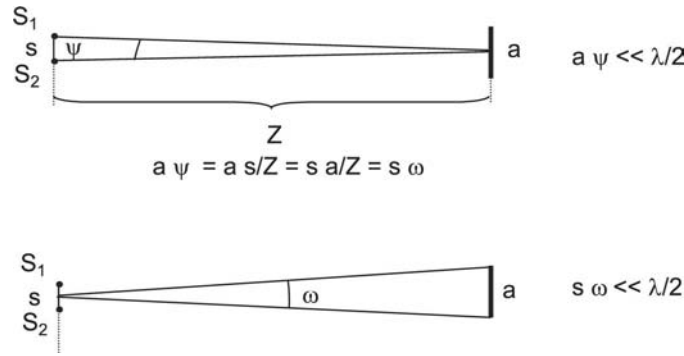
$$s \cdot \frac{a}{Z} = s \cdot \omega \ll \frac{\lambda}{2} \quad (4.6)$$

#### Condition de cohérence.

*Le produit de la distance entre les deux sources par l'angle d'ouverture des rayons doit être petit par rapport à  $\lambda/2$ .*

$$(\text{distance entre les deux sources}) * (\text{angle solide } \omega) \text{ doit être } \ll \frac{\lambda}{2} \quad (4.7)$$

Quand nous observons des franges dans la superposition de deux intensités, c'est-à-dire de la superposition de deux figures d'interférence, nous disons que nous sommes dans des conditions de cohérence spatiale. Quand nous n'observons pas de franges, nous sommes dans des conditions d'incohérence spatiale.



**Fig. 4.2** – Condition de cohérence spatiale. La condition  $a \sin \psi = a(s/Z) \ll \lambda/2$  s'écrit aussi :  $s \cdot a/Z = s \cdot \sin \omega \ll \lambda/2$ . **Interprétation** : le produit de la distance entre les deux sources par l'ouverture angulaire doit être très inférieur à la moitié de la longueur d'onde, tout revient à dire que nous avons une situation analogue à celle d'une source ponctuelle.

#### 4.1.4 Cohérence spatiale d'une source étendue

L'étude précédente peut être appliquée à l'étude des interférences obtenues à partir d'une source étendue. Nous désirons maintenant déterminer : quelle étendue doit avoir une source afin que nous observions des interférences analogues à celles d'une source ponctuelle ? Nous choisissons une source de dimension finie, une source fente, de grande largeur, considérée comme formée par une infinité de points adjacents. La distance entre deux points sources est infiniment petite. Chaque point source émet une radiation indépendamment de son voisin, en conséquence, il n'y a pas de relation de phase fixe entre la lumière émise par deux points. Nous pouvons appliquer le résultat établi précédemment ; il suffit d'intégrer l'expression de l'intensité  $I(\theta, \psi)$  sur le paramètre variable  $\psi$  quand celui-ci varie de 0 à  $\psi_s = s/Z$ .

$$I_0 = \int_0^{s/Z} \left[ \frac{\sin[(\pi \frac{d}{\lambda})(\sin \theta - \sin \psi)]}{[(\pi \frac{d}{\lambda})(\sin \theta - \sin \psi)]} \right]^2 \cdot \left\{ \cos\left[\pi\left(\frac{a}{\lambda}\right)(\sin \theta - \sin \psi)\right] \right\}^2 d\psi \quad (4.8)$$

Nous pouvons comparer le résultat avec celui de la superposition de l'intensité des franges d'interférence due aux deux sources ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$ . Maintenant, l'intensité observée  $I(\theta, \psi)$  est la superposition des intensités de tous les systèmes de franges d'interférence produits par tous les points sources compris entre  $S_1$  et  $S_2$ .

Nous traçons (exemple C.2) quatre courbes de variation de l'intensité  $I(\theta, \psi)$  obtenue à partir d'une source étendue (équation 4.8). La source a successivement les largeurs suivantes :

- première courbe  $s = 1 \Rightarrow$  nous observons une figure d'interférence ;
- deuxième courbe  $s = 1.5 \Rightarrow$  nous observons toujours une figure d'interférence ;
- troisième courbe  $s = 4.5 \Rightarrow$  nous n'observons plus de figure d'interférence ;

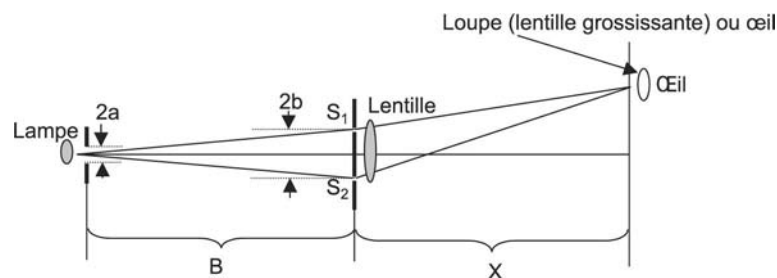
- quatrième courbe  $s = 5 \Rightarrow$  la figure d'interférence réapparaît, mais elle est moins contrastée.

**Remarque.**

Nous constatons que les franges disparaissent quand la largeur de la source,  $s = 4,5$  (et  $s \cdot \psi = \lambda/2$ ), est le double de la distance comprise entre les deux étoiles lors de la disparition des franges obtenues à partir de ces deux étoiles, nous avons  $s = 2,25$ .

Nous pouvons réaliser l'expérience avec une source circulaire et comparer le diamètre de cette source avec la largeur de la source fente. Les franges disparaissent quand le diamètre est deux fois plus large que la distance comprise entre deux points sources. Nous montrons (fig. 4.3) une expérience pour observer les franges d'interférence obtenues à partir d'une source étendue.

La condition de cohérence (équation 4.7) peut être appliquée à une source étendue, l'énoncé est le suivant : nous observons une cohérence quand la produit de la largeur de la source par l'angle d'ouverture est très inférieur à  $\lambda/2$ . Cette condition doit être réalisée dans l'expérience d'Young. La source doit être petite afin que l'onde arrivant sur les deux trous ait une relation de phase fixe. La largeur de la fente source est déterminée par le rapport  $a/Z$  qui doit être très inférieur à  $\lambda/2$ . C'est ainsi que la lumière issue de deux étoiles forme un faisceau incident quasiment parallèle éclairant les deux fentes. Nous voyons des franges, nous pouvons dire que la lumière issue d'une étoile de grand diamètre est *partiellement cohérente*.



**Fig. 4.3** – Diffraction par une source étendue. Caractéristiques du montage de l'expérience en laboratoire :  $B = 20 \text{ m}$ ,  $X = 1 \text{ m}$ ,  $s = S_1S_2 = 4 \text{ mm}$ ,  $b = 6 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,000 57 \text{ mm}$ . Nous observons la première disparition des franges quand  $a = 2 \text{ mm}$ . La valeur limite de visibilité des franges est  $2a = 4 \text{ mm}$  [2].

**Exemple C.2. Étudions la cohérence d'une source étendue.**

Nous traçons quatre graphes de l'intensité résultant de l'intégration sur une source rectiligne de largeur finie ; les limites de l'intégration ont lieu quand  $\psi_0 = s/Z$ , nous choisissons successivement :

$s = 1 \text{ mm}$ ,  $s = 1,5 \text{ mm}$ ,  $s = 4,5 \text{ mm}$ ,  $s = 5 \text{ mm}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $d = 0,05 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0,000 5 \text{ mm}$ ,  $Z = 9 000 \text{ mm}$ ,  $X = 4 000 \text{ mm}$ ,  $d = 0,1 \text{ mm}$ .

**Remarque.**

Nous avons choisi les valeurs des paramètres  $a$  et  $\lambda$  identiques à celles retenues dans l'exemple (C.1). Maintenant, nous trouvons que les franges disparaissent pour la première fois quand  $s = 4,5$  au lieu de  $s = 2,25$ , la valeur est donc le double de celle obtenue, dans l'étude de la cohérence spatiale, par deux étoiles.

**Cohérence spatiale.**

Quand :

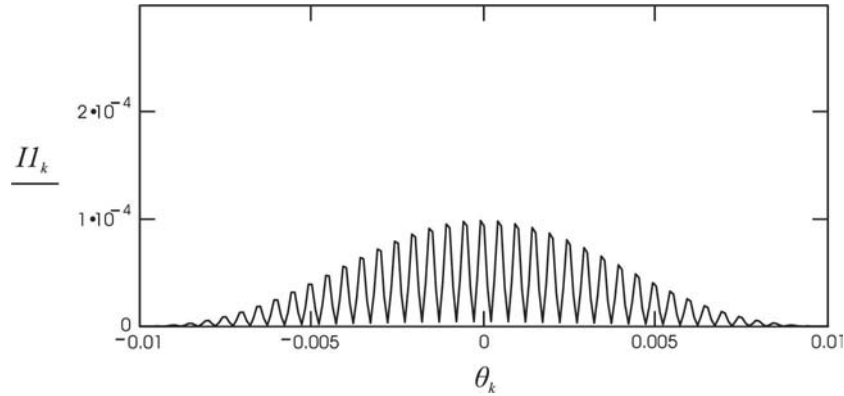
- $s < 4,5 \text{ mm} \Rightarrow s \cdot y < \lambda/2 \Rightarrow$  nous observons des franges  $\Rightarrow$  cohérence spatiale ;
- $s = 4,5 \text{ mm} \Rightarrow s \cdot y = \lambda/2 \Rightarrow$  les franges disparaissent ;
- $s > 4,5 \text{ mm} \Rightarrow s \cdot y > \lambda/2 \Rightarrow$  les franges réapparaissent  $\Rightarrow$  cohérence spatiale mais le contraste

*des franges est plus faible.*

$$0 \leq \psi \leq 2 \quad k = 0, 0, 200 \quad \theta_k = 0,01 - k \cdots 0,0001$$

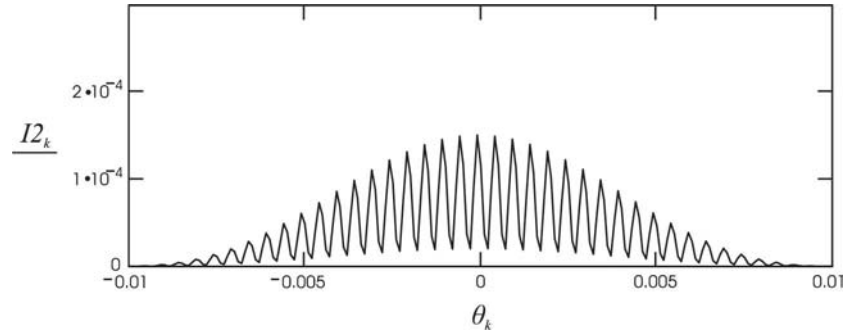
$$s1 = 1 \quad \psi_1 = \frac{s1}{Z}$$

$$I1_k = \int_0^{\psi_1} \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2 d\psi$$



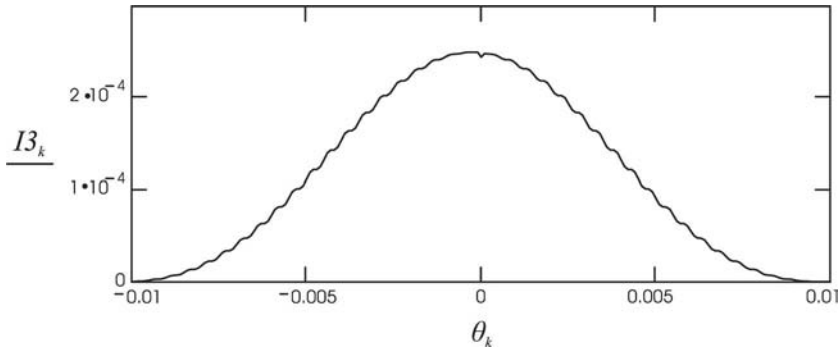
$$s2 = 1,5 \quad \psi_2 = \frac{s2}{Z}$$

$$I2_k = \int_0^{\psi_2} \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2 d\psi$$



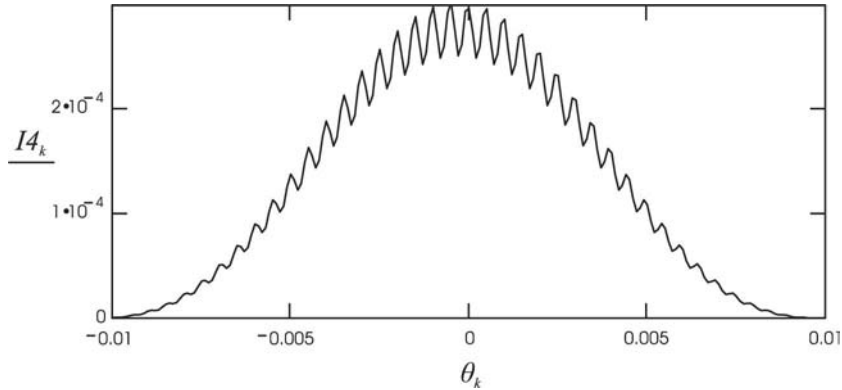
$$s3 = 4,5 \quad \psi_3 = \frac{s3}{Z}$$

$$I3_k = \int_0^{\psi_3} \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2 d\psi$$



$$s4 = 5 \quad \psi_4 = \frac{s4}{Z}$$

$$I4_k = \int_0^{\psi_4} \frac{\sin \left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2}{\left[ \pi \cdot \frac{d}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2} \cdot \cos \left[ \pi \cdot \frac{a}{\lambda} \cdot (\sin(\theta_k) + \sin(\psi)) \right]^2 d\psi$$



### Application C.2

1. Prendre  $d = 0,1$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Comparer les résultats à ceux de l'exemple (C.1).
2. Prendre  $\lambda = 0,0006$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Comparer les résultats à ceux de l'exemple (C.1).
3. Prendre  $a = 1,2$ , déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle les franges disparaissent. Comparer les résultats à ceux de l'exemple (C.1).

## 4.1.5 Visibilité, contraste des franges

### Visibilité ou contraste des franges obtenues à partir de deux sources ponctuelles

Nous venons d'étudier le phénomène d'apparition, puis de disparition, des franges d'interférence en fonction de la distance comprise entre deux sources, quand elles sont ponctuelles, de la largeur de la source pour une source étendue.

Il est important de pouvoir caractériser la qualité de ces franges. Ainsi Michelson a défini la notion de contraste, ou la notion de visibilité des franges, par la formule

$$V = \frac{|I_{tot,max} - I_{tot,min}|}{I_{tot,max} + I_{tot,min}} \quad (4.9)$$

$I_{tot,max}$  désigne l'intensité d'un maximum d'interférence,  $I_{tot,min}$  = intensité d'une frange sombre ou minimum. Appliquons cette relation à l'intensité des franges d'interférence des ondes issues de deux sources fentes correspondant (exemple C.2) au premier exemple. Nous lisons  $I_{max} = 1$ ,  $I_{min} = 0$  et nous avons :  $V = 1$ , les deux sources étaient superposées et nous observons en fait un système commun de franges. Séparons maintenant les deux sources, exercices 2, 3, 4 de l'exemple cité. Nous superposons les deux intensités des deux sources étudiées, maintenant  $I_{max}$  et  $I_{min}$  dépendent de la variable  $\psi$ . Puisque  $Z$  est grand nous pouvons faire l'approximation des petits angles :  $\sin\theta = Y/X$  et  $\sin\psi = Y'/X$ . Nous choisissons des diaphragmes fentes, dans le montage des fentes d'Young, et le facteur de diffraction est égal à l'unité. L'intensité totale, compte tenu des relations (4.3) et (4.4), s'écrit

$$I_{tot}(Y) = \left\{ \cos\left[\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\left(\frac{Y}{X}\right)\right] \right\}^2 + \left\{ \cos\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\left(\frac{Y - Y'}{X}\right) \right\}^2 \quad (4.10)$$

Utilisons la relation :  $2 \cos^2 \alpha/2 = 1 + \cos \alpha$ , il vient

$$I_{tot}(Y) = 1 + \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\left(\frac{Y}{X}\right)\right] \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)\left(\frac{Y - Y'}{X}\right)\right] \right\} \quad (4.11)$$



Mais  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left\{ \frac{(\alpha + \beta)}{2} \right\} \cos \left\{ \frac{(\alpha - \beta)}{2} \right\}$  et

$$I_{tot}(Y) = 1 + \left\{ \cos \left[ \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y'}{X} \right) \right] \right\} \left\{ \cos \left[ \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y - \frac{Y'}{2}}{X} \right) \right] \right\} \quad (4.12)$$

$I_{tot,max}$  et  $I_{tot,min}$  dépendent du paramètre  $Y$  puisque  $Y'$  reste constant. La valeur maximum du terme  $\left\{ \cos(2\pi a/\lambda X)(Y - Y'/2) \right\}$  est 1, tandis que sa valeur minimum n'est pas égale à zéro mais à  $-1$ , donc

$$\begin{aligned} I_{tot,max} &= 1 + \left\{ \cos \left[ \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y'}{X} \right) \right] \right\} \\ I_{tot,min} &= 1 - \left\{ \cos \left[ \left( \frac{2\pi a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y'}{X} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le contraste, aussi appelé visibilité des franges, est défini par la relation finale

$$V = \left| \cos \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y'}{X} \right) \right| \quad (4.14)$$

Nous avons un maximum quand  $\psi = Y'/X = s/Z$ . Le contraste a sa première valeur nulle quand  $\pi a Y'/\lambda X = \pi/2$  soit  $Y'/X = s/Z = \lambda/2a$ . Nous étudions la visibilité (exemple C.3) et nous traçons le graphe de l'équation (4.14); les valeurs numériques sont celles de l'exemple (C.1). La visibilité  $V$  a sa première valeur égale à zéro quand  $s = 2,25$ , il n'y a plus de franges. Les franges réapparaissent quand  $s = 5$ .

#### Remarque.

L'intervalle, à partir de  $s = 0$  à la valeur de  $s$  pour laquelle la visibilité a sa première valeur nulle, est appelé *intervalle de cohérence*.

#### Exemple C.3. Visibilité des franges obtenues par deux sources, cohérence spatiale.

Nous traçons le graphe de l'équation (4.13).

Cette étude est faite sur le CD.

#### Application C.3

1. Choisir  $\lambda = 0,0006$  et déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle  $V = 0$ . Comparer les résultats avec ceux de l'exemple (C.1).
2. Choisir  $a = 1,2$  et déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle  $V = 0$ . Comparer les résultats avec ceux de l'exemple (C.1).

### Visibilité des franges obtenue à partir d'une source étendue

Nous devons calculer  $I_{tot,max}$  et  $I_{tot,min}$  de l'intensité finale obtenue en prenant l'intégrale de l'intensité sur la largeur de la fente, nous choisissons une source rectiligne rectangulaire. Nous prenons le facteur de diffraction égal à l'unité.

$$I_{tot}(Y) = I_0 \int_0^{s/Z} \left\{ \cos \left[ \left( \pi \frac{a}{\lambda} \right) (\sin \theta - \sin \psi) \right] \right\}^2 d\psi \quad (4.15)$$

Nous développons la fonction cosinus selon le principe des relations (4.9), (4.10) et (4.11). La visibilité devient

$$I_{tot}(Y) = I_0 \int_0^{Y'/X} \left\{ \cos \left[ \left( \pi \frac{a}{\lambda} \right) \left( \frac{Y}{X} - \frac{Y''}{X} \right) \right] \right\}^2 d\left( \frac{Y''}{X} \right) \quad (4.16)$$

$$V = \left| \frac{\sin\left[\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{Y'}{X}\right)\right]}{\pi \frac{a}{\lambda} \left(\frac{Y'}{X}\right)} \right| \quad (4.17)$$

Puisque  $Y'/X = s/Z$  le premier minimum de  $V$  a lieu quand  $(\pi a/\lambda X)Y' = \pi$ , soit  $Y'/X = \lambda/a$  ce qui est deux fois plus large que la valeur de résolution obtenue par deux sources ponctuelles. Nous traçons (exemple C.4) la visibilité d'une source étendue avec les mêmes valeurs que celles de l'exemple (C.2), le paramètre variable est  $s$ , largeur de la source. Nous observons la première disparition des franges quand  $s = 4,5$ , ce qui est aussi la valeur déterminée dans l'exemple (C.2).

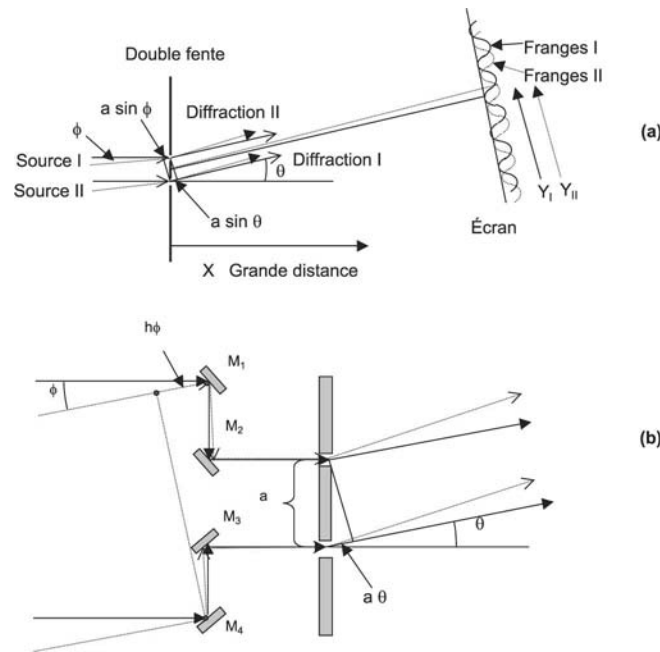
**Exemple C.4. Visibilité des franges de la figure d'interférence obtenue à partir d'une source étendue, nous prenons le facteur de diffraction égal à 1.**

Nous faisons varier  $s$ , largeur de la source étendue, et nous étudions la visibilité.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application C.4**

1. Choisir  $\lambda = 0,0006$  et déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle  $V = 0$ . Comparer les résultats avec ceux de l'exemple (C.2).
2. Choisir  $a = 1,2$  et déterminer la valeur de  $s$  pour laquelle  $V = 0$ . Comparer les résultats avec ceux de l'exemple (C.2).



**Fig. 4.4** – Interféromètre stellaire de Michelson. (a) les ondes issues de deux étoiles I et II forment l'angle d'incidence  $\phi$ ,  $b$  = largeur des fentes. Nous observons sur l'écran les deux fig.s de diffraction.  $Y_1$  et  $Y_2$  désignent les coordonnées des franges dans le plan de l'écran d'observation  $h$  = distance entre les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$ ,  $\theta$  = angle de diffraction. (b) la mise en place des quatre miroirs  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  permet d'introduire une nouvelle différence de marche optique  $\delta' = h\phi$ , la distance  $h$  est ajustable.

#### 4.1.6 Interféromètre de Michelson

Dans les deux études des intensités obtenues, expérience d'Young, à partir de deux sources, puis d'une source étendue, la distance comprise entre les fentes était fixe, les paramètres variables étaient : soit la distance comprise entre les deux étoiles, soit la largeur de la fente source, ou son diamètre quand la source étendue était un disque.

L'expérience des deux fentes d'Young a été modifiée par Michelson afin de mesurer la distance séparant un système d'étoiles double, la distance entre les étoiles est fixe, il modifia le montage afin de faire varier l'intensité mesurée : il faisait varier la distance  $a$  entre les fentes. Cependant les diamètres à mesurer étaient trop petits et Michelson modifia à nouveau le montage (fig. 4.5).

Nous avons vu (fig. 4.4a) que la forme des figures d'interférence dépend de la distance  $s$  comprise entre ces deux étoiles. Les intensités obtenues par chaque étoile étaient calculées avec l'approximation des petits angles, et nous obtenions

$$u_I = A^2 \left\{ \cos\left(\pi \frac{a\theta}{\lambda}\right) \right\}^2 \quad (4.18)$$

$$u_{II} = A^2 \left\{ \cos\left(\pi \frac{a(\theta - \phi)}{\lambda}\right) \right\}^2 \quad (4.19)$$

Nous observons l'intensité  $I = u_I + u_{II}$ . Nous désirons déterminer l'angle  $\phi$ .

Le déplacement entre les deux figures d'interférence des sources, dans le montage de la figure (4.5a), est limité par la dimension de la distance  $a$  comprise entre les deux fentes. Les modifications du montage réalisées par Michelson sont représentées sur la figure (4.4b). Il introduit le paramètre  $h$ , distance entre les deux premiers miroirs,  $h$  est grand et varie, ce qui entraîne un changement dans les caractéristiques des franges d'interférence. À partir des changements d'aspect des deux intensités mesurées entre deux mesures de  $h$ , il pouvait déduire l'angle  $\phi$ . Les deux intensités observées deviennent

$$u_I = A^2 \left\{ \cos\left(\pi \frac{a\theta}{\lambda}\right) \right\}^2 \quad (4.20)$$

$$u_{II} = A^2 \left\{ \cos\left[\pi \frac{(a\theta - h\phi)}{\lambda}\right] \right\}^2 \quad (4.21)$$

L'intensité totale  $2u_I + u_{II}$  de la superposition des intensités montre des maxima et minima selon les valeurs du paramètre variable  $h$ ,  $\phi$  et  $a$  restant fixes. Nous faisons varier  $h$  et mesurons  $\phi$  à partir de la valeur  $h = h_1$  donnant un maximum et la valeur suivante de  $h = h_2$  donnant le premier minimum suivant à mesurer.

Nous observons une frange maximum quand

$$\left[ \pi \frac{(a\theta - h_1\phi)}{\lambda} \right] = \left( \frac{\pi}{2} \right) (2m) \quad (4.22)$$

Nous obtenons la frange minimum suivante quand

$$\left[ \pi \frac{(a\theta - h_2\phi)}{\lambda} \right] = \left( \frac{\pi}{2} \right) (2m + 1) \quad (4.23)$$

Nous mesurons  $h_2 - h_1$  sachant que nous avons :  $h_2 - h_1 = \lambda/2\phi$ . Cet interféromètre a été utilisé pour mesurer le diamètre angulaire de Bételgeuse de la constellation d'Orion. L'interféromètre du mont Wilson a deux miroirs d'un diamètre de 302 cm, l'angle mesuré était de

$22,6 \cdot 10^{-8}$  rad. La distance Terre-Bételgeuse était connue à partir de mesures de parallaxes, le diamètre calculé est environ 300 fois celui du Soleil.

Nous étudions un exemple numérique dans l'exemple (C.5). Nous traçons trois graphes de variation de l'intensité pour différentes valeurs de  $h$  et de  $\phi$ . Nous déterminons deux valeurs de  $h$  correspondant à un maximum et un minimum. Nous appliquons la relation  $h_2 - h_1 = \lambda/2\phi$ , pour calculer  $\phi$ , et nous devons retrouver la valeur de  $\phi$  retenue dans la simulation.

---

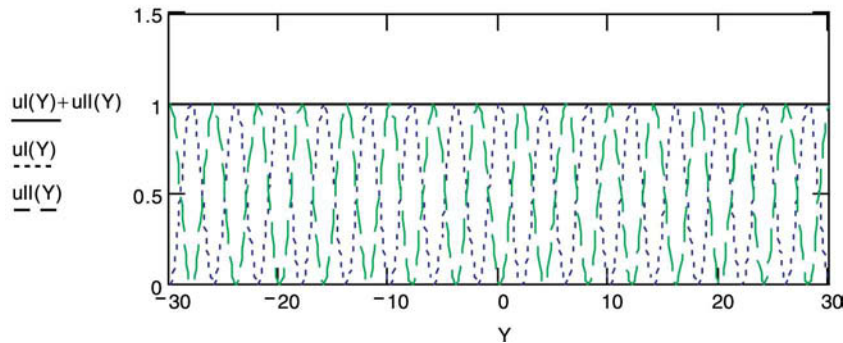
**Exemple C.5. Interféromètre stellaire de Michelson.**

Nous traçons les graphes de l'intensité  $I = u_I + u_{II}$  en fonction du paramètre  $h$  quand  $Y$  varie de  $-20$  à  $20$ . Nous choisissons :  $X = 4\,000$ ,  $\lambda = 0,000\,5$ ,  $a = 0,5$ . Nous avons, dans cette simulation, choisi  $\phi = 0,000\,05$ , valeur que nous désirons calculer par cette expérience. Nous faisons varier le paramètre  $h$  puis nous déterminons les valeurs de  $h$  pour lesquelles nous observons un maximum puis le premier minimum suivant. Nous retrouvons  $\phi$  par la relation :  $h_2 - h_1 = \lambda/2\phi$ .

Exemple : nous choisissons  $h = 100$  puis  $h = 50$   $Y = -30, \dots, -29,9 \dots 30$ ,  $\Phi = 0,000\,05$

$$X = 4\,000, \quad \lambda = 0,000\,5, \quad d = 0,5, \quad h = 95$$

$$u_I(Y) = \cos \left[ \pi \cdot d \cdot \left( \frac{Y}{X \cdot \lambda} \right) \right]^2 \quad u_{II}(Y) = \cos \left( \frac{\pi \cdot \frac{Y}{X} \cdot d - h \cdot \Phi}{\lambda} \right)^2$$



**Application C.5**

Choisir une autre valeur de longueur d'onde :  $\lambda = 0,000\,5$ . Calculer  $\phi$  à partir des valeurs  $h_2 - h_1$  observées.

---

## 4.2 Cohérence temporelle

### 4.2.1 Trains d'onde et lumière quasiment monochromatique

Nous avons étudié, chapitre 2, la superposition d'ondes monochromatiques, l'amplitude et la figure d'interférence de l'intensité résultante. Nous étudions maintenant les trains d'onde et la superposition de trains d'onde.

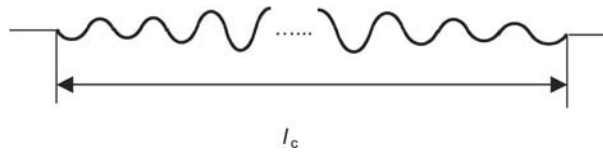
Les ondes monochromatiques sont infiniment longues. Quand plusieurs ondes monochromatiques de différentes fréquences, mais comprises dans un intervalle spectral limité, se superposent, nous obtenons des trains d'onde. Nous disons aussi que nous obtenons des paquets d'ondes. Les ondes apparaissent à grandes distances avec une amplitude décroissante (fig. 4.6). La longueur du paquet d'ondes  $\Delta x = l_c$  est proportionnelle à  $1/\Delta\nu$ ,  $\Delta\nu$  est l'intervalle de fréquence correspondant à la distribution  $\Delta\lambda$  du train d'onde. Appelons  $\lambda_m$  la valeur moyenne

du train d'onde. La réciprocity entre  $\Delta x$  et  $\Delta \nu$  apparaît dans la théorie de la transformée de Fourier,  $l_c$  désigne la fenêtre dans l'espace des distances et  $\Delta \nu$  est la fenêtre dans l'espace des fréquences en  $\text{cm}^{-1}$ . Le produit  $\Delta x \cdot \Delta \nu$  est constant, nous retrouvons cette formule, mais écrite avec une autre constante, en mécanique quantique sous la forme du principe d'incertitude, principe fondamental de la mécanique quantique. Les trains d'onde qui satisfont la condition

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_m} \ll 1 \quad (4.24)$$

forment la lumière quasiment monochromatique. Afin de comprendre la notion de trains d'onde formant une lumière quasiment monochromatique nous superposons (dans l'exemple C.6) quatre ondes ayant respectivement les longueurs d'onde  $\lambda = 1,85, 1,95, 2,05, 2,15$ , la longueur d'onde moyenne est  $\lambda_m = 2$ . Nous traçons sur un deuxième graphe l'onde résultant de l'intégration sur le même intervalle de longueurs d'onde.

$$u(Y) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{ \cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \right\} d\lambda \quad (4.25)$$



**Fig. 4.5** – Trains d'onde. Trains d'onde de longueur finie  $l_c$ ,  $l_c$  = longueur de cohérence.

---

**Exemple C.6. Trains d'onde.**

Faire la somme de l'amplitude de quatre ondes ayant les longueurs d'onde suivantes :  $\lambda = 1,85, 1,95, 2,05, 2,15$ , la longueur d'onde moyenne est  $\lambda_m = 2$ , nous supposons que ces ondes n'ont pas, entre elles, de différence de phase.

Tracer le graphe de l'amplitude résultant de la somme.

Tracer le graphe de la fonction (4.24) représentant l'intégrale, sur l'intervalle spectral  $\lambda = 1,85 \cdots 2,15$ . Cette étude est faite sur le CD.

**Application C.6**

1. Étendre l'échelle des ordonnées  $x$  vers des valeurs plus grandes. Observer pour les valeurs élevées :
    - la périodicité de la sommation ;
    - le décroissement de l'amplitude  $u(Y)$  correspondant à l'intégrale.
  2. Étudier la forme de l'amplitude de l'onde finale. Choisir différentes longueurs d'onde avec des intervalles spectraux différents. Étudier l'amplitude somme, puis l'amplitude intégrée.
  3. Généralisation.
 

Considérer que le train d'onde est formé par un grand nombre d'ondes de différentes longueurs d'onde, mais l'intervalle spectral ne change pas et reste celui de la question (a). L'étudiant choisira un grand nombre d'ondes et fera la somme ; il tracera la courbe correspondante de l'amplitude somme. Comparer ensuite avec le graphe de l'amplitude de la fonction intégrée.
-

### 4.2.2 Superposition des trains d'onde

Nous avons supposé, dans le chapitre sur les interférences, que la lumière incidente était monochromatique, nous observions donc la figure d'interférence par des ondes monochromatiques. En particulier, nous avons étudié la superposition des amplitudes de deux ondes ayant entre elles une différence de marche  $\delta$ , l'intensité résultante était de la forme  $\cos(\pi\delta/\lambda)$ .

Des franges d'interférence peuvent aussi être observées si la lumière incidente n'est pas rigoureusement monochromatique mais comprend une bande passante étroite. Nous traçons (exemple C.7) les variations de l'amplitude résultant de la superposition de deux ondes. L'intervalle d'intégration est compris entre  $\lambda = 1,85$  et  $\lambda = 2,15$ , la longueur d'onde moyenne est  $\lambda_m = 2$ . Ces courbes sont tracées avec successivement les différences de marche  $\delta = 0, 1/2\lambda_m$  et  $\lambda_m$ .

$$I(Y) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [\cos(2\pi \frac{(x - \delta_m a)}{\lambda})] + [\cos(2\pi \frac{x}{\lambda})] d\lambda \quad (4.26)$$

L'intensité de franges décroît quand  $x$  devient de plus en plus grand.

**Exemple C.7. Trains d'onde : superposition de deux ondes.**

Le train d'onde est obtenu par l'intégration entre  $\lambda = 1,85$  et  $\lambda = 2,15$ . Nous traçons trois graphes correspondant successivement à la différence de marche optique  $\delta = 0, 1/2\lambda_m, \lambda_m$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application C.7**

Choisir un intervalle de longueurs d'onde plus petit et tendre vers :

- en 1, le cas correspondant à celui de l'onde monochromatique ;
- en 2, le cas de l'onde monochromatique correspondant à une interférence destructive ;
- en 3, le cas de l'onde monochromatique correspondant à une interférence constructive.

**Exemple C.8. Nous traçons les intensités de la superposition de deux ondes.**

La différence de marche entre elles est successivement  $\lambda = 0, \lambda_m/2, \lambda_m$ .

L'intégration est faite quand la longueur d'onde varie de 1,85 à 2,15, la longueur d'onde moyenne est  $\lambda_m = 2$ .

Cette étude est faite sur le CD.

**Application C.8**

Prendre un intervalle spectral de plus en plus petit et tendre vers :

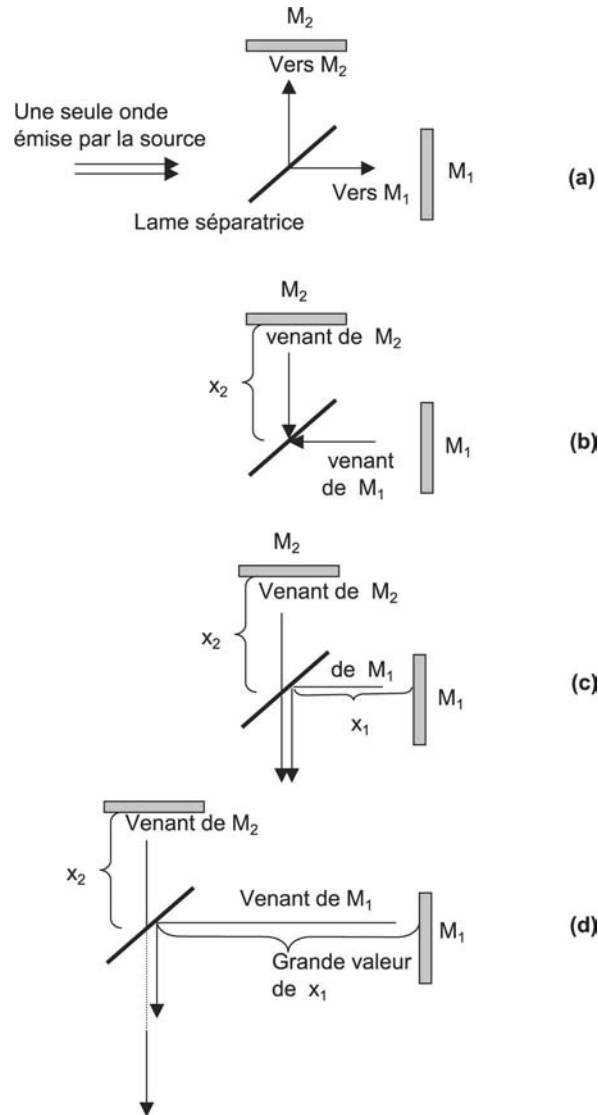
- un exemple de deux ondes monochromatiques n'ayant pas entre elles de différence de phase ;
- un exemple de deux ondes monochromatiques en opposition de phase, l'interférence est destructive ;
- un exemple de deux ondes monochromatiques en phase ; l'interférence est constructive.

### 4.2.3 Longueur d'un train d'onde

Les trains d'onde de longueur finie (fig. 4.5) peuvent être étudiés avec l'interféromètre de Michelson. Le faisceau de lumière incidente est divisé en deux faisceaux ; l'un se dirige vers  $M_1$ , l'autre vers  $M_2$  (fig. 4.6).

Chaque faisceau, après réflexion sur un miroir, retourne vers la lame séparatrice. Le faisceau venant de  $M_1$  se réfléchit partiellement sur la lame, le faisceau venant de  $M_2$  est partiellement transmis. Ensuite les deux faisceaux se superposent et se dirigent vers le détecteur. La lumière reçue par le détecteur forme la figure d'interférence due à la superposition de deux trains d'onde de longueur finie. Quand l'un des miroirs se déplace parallèlement à lui-même, apparaît tout d'abord la figure d'interférence de la superposition de deux ondes monochroma-

tiques. À partir d'une certaine grande distance  $x$  de séparation des miroirs, donc de différence de marche entre les ondes, les franges d'interférence disparaissent. Le train d'onde venant d'un miroir de l'interféromètre de Michelson arrive après l'autre train d'onde car les deux trains d'onde ont des longueurs finies (fig. 4.6d).



**Fig. 4.6** – Interféromètre stellaire de Michelson. Division et superposition des ondes, exemples : (a), (b), (c). Selon le déplacement  $h$  les ondes se superposent ou ne superposent pas ; ce que nous montrons dans l'exemple (d).

#### Prenons un exemple.

Considérons l'émission du krypton 86 :  $^{86}\text{Kr}$  émet la longueur d'onde  $\lambda = 6\,056,16 \text{ \AA}$ . La longueur du train d'onde est sensiblement 1 m. Si nous déplaçons le miroir de l'interféromètre d'une distance  $x = 50 \text{ cm}$ , la différence de marche sera  $2x$  donc de 1 mètre ; nous n'observons

plus de franges d'interférence, l'intensité enregistrée par le détecteur est constante. La longueur du train d'onde correspondant à cette situation est appelée longueur de cohérence.

Dans la plupart des émissions atomiques, la longueur de cohérence est beaucoup plus petite, tandis que la longueur de cohérence de la lumière émise par résonance d'une cavité laser est beaucoup plus élevée, elle est de l'ordre de  $10^5$  m.

## Appendice 4.1

### A4.1.1 Spectroscopie par transformée de Fourier et émission du corps noir

Le corps noir émet sur un grand intervalle spectral, sa bande passante est large et la longueur de cohérence des ondes émises par rapport à une longueur d'onde moyenne  $\lambda_m$  est de quelques longueurs d'onde. Si nous plaçons devant cette source une série de filtres ayant des bandes passantes de plus en plus petites, la longueur de cohérence de la lumière passant à travers ces filtres devient de plus en plus grande.

L'interféromètre de Michelson est utilisé en spectroscopie par transformée de Fourier. Nous étudierons l'interférométrie par transformée de Fourier dans le chapitre suivant. Quand nous utilisons une source émettant les radiations du corps noir, la bande passante de la lumière incidente doit être comprise entre la fréquence 0 et une fréquence maximum  $\nu_M$  établie par le théorème de l'échantillonnage. Nous effectuons une transformée de Fourier qui permet d'analyser le spectre et son intensité avec une résolution  $\Delta\nu = 1/2L$  ;  $L$  désigne la longueur en mètres du déplacement du miroir mobile de l'interféromètre. Quand  $L$  devient grand la résolution  $\Delta\nu$  décroît ; en conséquence la longueur de cohérence  $l_c$  augmente. Ce processus a une fin quand la signature du signal de l'interférogramme enregistré a une intensité *comprise* dans le bruit de fond.

La longueur de cohérence de l'émission atomique du  $^{86}\text{Kr}$  est limitée par la durée du processus d'émission de l'atome, mais en interférométrie par transformée de Fourier, si nous utilisons comme source le corps noir, la longueur de cohérence est limitée par le rapport signal/bruit de fond.



**Exercices chapitre 4- Cohérence, sur le CD**

- CC01- Cohérence de la lumière issue de deux sources ponctuelles
- CC02- Cohérence de la lumière émise par une source étendue
- CC03- Visibilité des franges
- CC04- Calcul de la visibilité des franges obtenues par l'interférence des ondes  
dans l'expérience des miroirs de Fresnel
- CC05- Étude comparative des visibilités
- CC06- Interféromètre stellaire de Michelson
- CC07- Lumière quasiment monochromatique
- CC08- Lumière quasiment monochromatique et interféromètre de Michelson

## Chapitre 5

# Spectroscopie par transformée de Fourier

### 5.1 Transformée de Fourier

#### 5.1.1 Introduction

Nous présentons, dans ce chapitre, les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier et nous examinerons ses applications en interférométrie. Citons un exemple d'application de la transformée de Fourier en spectroscopie : la détermination des fréquences contenues dans un spectre d'émission. Nous enregistrons une fonction  $f(x)$  due à la superposition d'un grand nombre d'ondes de fréquences et d'amplitudes différentes. Les données numériques fournies pour la transformée de Fourier appartiennent aux coordonnées d'espace  $f(x)$ , la transformée donne le spectre des fréquences correspondant aux longueurs d'onde formant le spectre d'énergie. Une autre application, fréquente, est l'analyse de l'interférogramme enregistré à partir d'un faisceau incident traversant un matériau absorbant. La transformée de Fourier permet de calculer le spectre d'absorption du matériau.

Nous nous intéresserons à de nombreux exemples rencontrés en interférométrie, nous aborderons très peu l'aspect théorique mathématique de la transformée de Fourier. Il nous semble plus important de faire surtout des applications numériques utilisables dans la plupart des programmes usuels d'ordinateur.

#### 5.1.2 Intégrales de Fourier

Les intégrales définies dans le chapitre de la diffraction dans les conditions d'approximation des distances éloignées, ou à l'infini, de la théorie de Kirchhoff-Fresnel, sont des transformées de Fourier. La donnée initiale est la forme du diaphragme, la donnée finale est la figure de diffraction ; l'intégrale de Fourier transforme une fonction en l'autre.

Prenons un exemple : celui de la diffraction par une fente. La fonction mathématique associée à ce diaphragme est la fonction rectangle  $S(y)$ , sa transformée par l'intégrale de Fresnel donne

la figure de diffraction  $G(\nu)$ .  $S(y)$  est définie par

$$S(y) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow +\frac{d}{2} < y \leq \infty \\ 1 & \Rightarrow -\frac{d}{2} \leq y \leq +\frac{d}{2} \\ 0 & \Rightarrow -\infty \leq y < -\frac{d}{2} \end{cases} \quad (5.1)$$

Nous disons que  $G(\nu)$  (équation 5.2) est la transformée de Fourier de  $S(y)$ . Nous utilisons des coordonnées légèrement différentes de celles du chapitre 3.

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} S(y) e^{-i2\pi\nu y} dy \quad (5.2)$$

La théorie de la transformée de Fourier montre que la relation inverse est aussi vraie et nous avons sous la forme non normalisée : la transformée de Fourier inverse de  $G(\nu)$  est  $S(y)$  (équation 5.3). Remarquer que la transformation se fait avec la fonction  $e^{+i2\pi y}$ , dans cette transformée inverse le signe  $-$  devient  $+$ .

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i2\pi\nu y} d\nu \quad (5.3)$$

Les deux variables  $\nu$  et  $y$  varient continûment de  $-\infty$  à  $+\infty$ . La variable  $y$  est dans l'espace des dimensions, la variable  $\nu$  est dans l'espace des fréquences, sa dimension est :  $1/(\text{espace des coordonnées})$ . En spectroscopie infrarouge, l'unité utilisée est le  $\text{cm}^{-1}$ ,  $S(y)$  et  $G(\nu)$  ne sont pas ici normalisées.

#### Remarque

Quand  $G(\nu)$  est une fonction symétrique, par rapport à zéro, l'intégrale peut se mettre sous la forme

$$S(y) = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) \cos(2\pi\nu y) d\nu \quad (5.4)$$

### 5.1.3 Exemples de transformations de Fourier avec des fonctions analytiques

Nous étudions deux exemples de transformées de Fourier directes et de leurs transformées de Fourier inverses. Nous constaterons que la transformée de Fourier inverse d'une fonction est la fonction initiale.

#### Fonction de Gauss.

Soit la fonction de Gauss

$$S(y) = e^{-\frac{a^2 y^2}{2}} \quad (5.5)$$

Nous devons calculer l'intégrale (5.2) qui devient

$$\int_0^{\infty} e^{-c^2 x^2} \cos(bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2c} e^{-\frac{b^2}{4c^2}} \quad (5.6)$$

Nous obtenons

$$G(\nu) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{-2\pi^2 \frac{\nu^2}{a^2}} \quad (5.7)$$

**Transformée de Fourier inverse.**

Prenons la transformée de Fourier inverse de la fonction  $G(\nu) = (\sqrt{2\pi}/a) \exp(-2\pi^2\nu^2/a^2)$  (équation 5.3), nous obtenons la fonction initiale  $S(y)$ .

$$S(y) = e^{-\frac{a^2 y^2}{2}} \quad (5.8)$$

Cet exemple montre que la transformée de Fourier inverse d'une transformée de Fourier est la fonction initiale.

**Transformées de Fourier des fonctions  $1/(1+x^2)$  et  $\pi e^{-2\pi\nu}$ .**

Calculons la transformée de Fourier de la fonction

$$S(y) = \frac{1}{(1+y^2)} \quad (5.9)$$

Appliquons le calcul intégral

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{\cos ax}{(1+x^2)} \right\} dx = \left( \frac{\pi}{2} \right) e^{-a} \quad (5.10)$$

Nous obtenons

$$G(\nu) = \pi e^{-2\pi\nu} \quad (5.11)$$

La transformée de Fourier de la fonction  $G(\nu)$  donne la fonction initiale, ce que nous faisons ci-dessous

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx dx = \frac{a}{(a^2 + m^2)} \quad (5.12)$$

Nous voyons donc que la transformée de Fourier de  $1/(1+y^2)$  est  $\pi e^{-2\pi\nu}$ . Inversement, la transformée de Fourier de  $\pi e^{-2\pi\nu}$  donne la fonction  $1/(1+y^2)$

$$e^{-2\pi\nu} \leftrightarrow \frac{1}{(1+y^2)} \quad (5.13)$$

Ces deux exemples sont exceptionnels, il se peut que l'on ne puisse pas calculer analytiquement l'inverse d'une transformée de Fourier, ce qui est le cas de la fonction rectangle. La transformée de Fourier de la fonction rectangle est la fonction  $(\sin a\nu)/a\nu$ , la transformée de Fourier inverse ne peut pas être calculée analytiquement car la fonction est discontinue à l'origine, nous devons utiliser une méthode numérique pour réaliser la transformée de Fourier.

**5.1.4 Transformée de Fourier de valeurs numériques****Transformée de Fourier rapide.**

Pour les applications numériques de transformée de Fourier, nous utilisons un *programme de transformée de Fourier rapide (fft)*, utilisable dans la plupart des micro-ordinateurs.

**Transformée de Fourier par une fonction réelle (fft).** Ce programme de transformation rapide utilise des données réelles, il est nécessaire de lui donner  $2^n$  valeurs initiales, nous obtenons  $2^{n-1}$  valeurs calculées.

Revenons à l'équation (5.4) de transformation réelle

$$S(y) = 2 \int_0^\infty G(\nu) \cos(2\pi\nu y) d\nu \quad (5.14)$$

Nous pouvons écrire en deux parties cette intégrale

$$\int_{-\infty}^0 G(\nu) \cos(2\pi\nu y) d\nu + \int_0^{\infty} G(\nu) \cos(2\pi\nu y) d\nu \quad (5.15)$$

Le premier terme, intégration sur la valeur négative de la fréquence, représente l'image par rapport à l'origine 0 de la partie positive. Les fréquences négatives sont inutiles puisque nous étudions des phénomènes physiques, nous n'en tenons pas compte.

Les valeurs numériques, mises dans le programme, sont disposées de façon que la partie négative suive la partie positive. Supposons que nous ayons 128 valeurs, les valeurs positives représentent les mesures allant de 1 à 64, les valeurs négatives sont symétriques des valeurs positives et jouent le rôle d'image miroir par rapport à zéro, elles vont de 65 à 128, elles sont les mêmes que celles du domaine positif. En conséquence, il est inutile d'effectuer la transformée de Fourier des 128 valeurs, il suffit de considérer seulement la transformée de Fourier des 64 premières données numériques, c'est-à-dire de la moitié de l'enregistrement. La transformée de Fourier inverse (ifft) se fait à partir de 64 données numériques, mais elle tient compte de la partie imaginaire et donne à la sortie 128 valeurs. Ainsi le programme Mathcad utilise 64 valeurs de 0 à 63, et  $2^7 = 128$  valeurs de 0 à 127.

Nous étudions (exemple F.1) la transformée de Fourier d'un seul côté de la fonction marche avec 256 valeurs numériques pour la transformée de Fourier réelle. Nous comparons le résultat (exemple F.2) avec la transformée de Fourier réelle des deux côtés de la fonction marche avec 256 valeurs numériques pour l'ensemble. Les deux calculs montrent la même transformation directe et inverse, seulement 128 valeurs sont nécessaires.

**Exemple F.1. Transformée de Fourier rapide en réel de la fonction marche.**

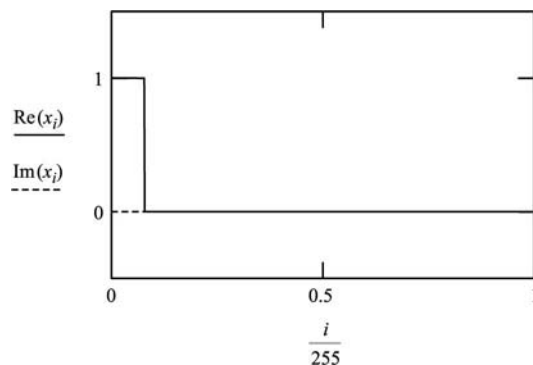
La fonction originale comprend 256 points à mesurer. La transformée de Fourier rapide est la moitié de la fonction  $\sin x/x$  de 128 valeurs. La partie imaginaire égale à zéro dans la fonction initiale n'est plus égale à zéro dans la transformée de Fourier, elle redevient égale à zéro dans la transformation inverse. La transformation inverse donne la fonction initiale. Nous effectuons la transformée de Fourier en réel.

La fonction marche est une fonction d'Heaviside  $\Phi(x)$  définie par

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \Rightarrow x > 0 \\ 0 & \Rightarrow x \leq 0 \end{cases}$$

Variation de  $i$  :  $i = 0 \dots 255$  et nous prenons la TdF de  $x_i = (\Phi(i) - \Phi(i - d))$ .

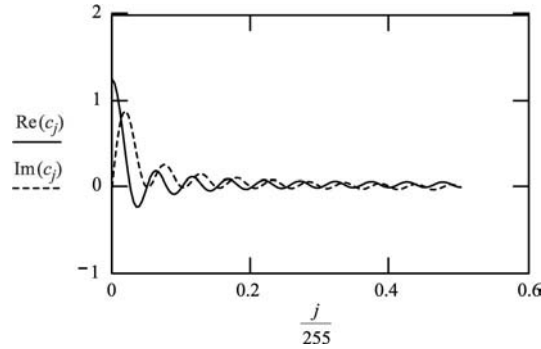
Définition de  $d$  :  $d = 20$ .



*Transformée de Fourier.*

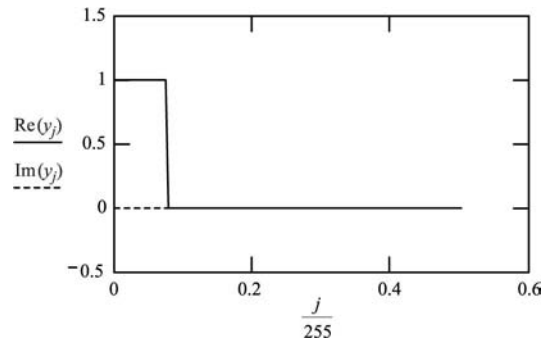
$$c = fft(x) \quad N = \text{last}(c) \quad N = 128 \quad j = 0 \dots N$$

*Le premier zéro de la TdF est :  $1/2d$ .*



*Transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier.*

$$y = ifft(c) \quad N = \text{last}(c) \quad N = 128 \quad j = 0 \dots N \frac{1}{2d} = 0,025.$$



**Exemple F.2. Transformée de Fourier rapide en réel de la fonction rectangle entière.**

La fonction initiale est la fonction rectangle, nous avons 256 valeurs. La transformation donne la moitié de la fonction  $\sin x/x$  représentée pour 128 points. La transformation inverse redonne la fonction initiale. La partie imaginaire est zéro pour la fonction initiale. Elle apparaît dans la transformation, elle est de nouveau égale à zéro dans la transformation inverse.

Cette étude est faite sur le CD.

**Transformée de Fourier complexe (cfft).**

La fonction rectangle est une fonction réelle, cependant, nous venons de voir (exemples F.1 et F.2) que sa transformée de Fourier complexe a une partie imaginaire et cette partie imaginaire est différente selon que nous effectuons la transformation sur une demie, ou sous l'entière fonction rectangle. Pour comprendre cette différence, due à la caractéristique de la transformée de Fourier en complexe, nous effectuons (exemple F.3) la transformation sur la moitié de la fonction rectangle qui devient une fonction marche, aussi appelée fonction d'Heaviside, nous effectuons (exemple F.4) la transformation sur toute la fonction rectangle.

Le programme de la transformée de Fourier complexe (cfft) rapide nécessite d'entrer  $2^n$  valeurs, il sort  $2^n$  valeurs de transformées. Il en est de même de la transformée de Fourier inverse : elle se fait avec  $2^n$  valeurs d'entrée et donne  $2^n$  valeurs de sortie. La partie imaginaire de la TdF, d'une fonction marche, est différente de la partie imaginaire d'une fonction rectangle.

---

**Exemple F.3. Transformée de Fourier complexe de la fonction marche.**

La fonction marche est la moitié de la fonction rectangle, nous prenons 256 points. La transformée de Fourier complexe est une fonction  $\sin x/x$  entière, il y a les deux côtés de cette fonction avec 256 points. La deuxième moitié est le miroir de la première partie. La transformée de Fourier inverse donne la fonction initiale. La partie imaginaire de la fonction initiale est zéro. Cette étude est faite sur le CD.

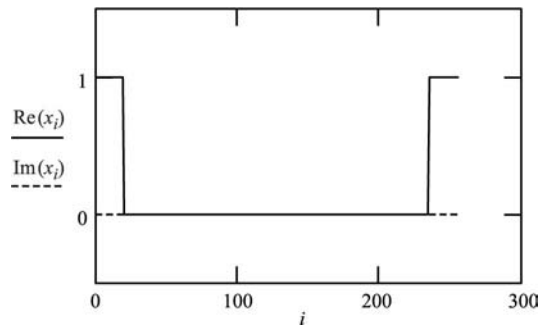
---

**Exemple F.4. Transformée de Fourier complexe d'une double fonction marche.**

La fonction originale est une double fonction marche, nous avons 256 valeurs. La transformée de Fourier est une fonction  $\sin x/x$  entière, 256 points, la deuxième moitié est le miroir de la première moitié. La transformée de Fourier inverse redonne la fonction originale. La partie imaginaire de la fonction originale est zéro, elle apparaît dans la transformation et redevient zéro dans la transformation inverse.

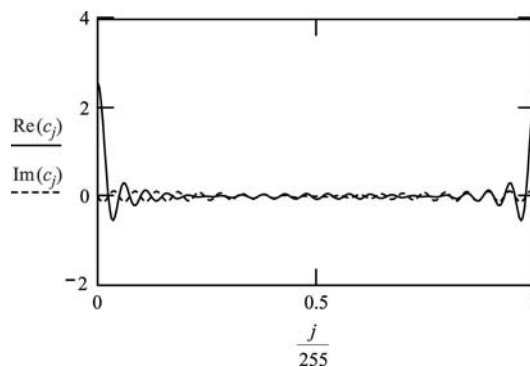
$$i = 0 \dots 255 \quad x_i = [\Phi(i) - \Phi(i - d)] + \Phi(i - 255 + d)$$

$$d = 20$$



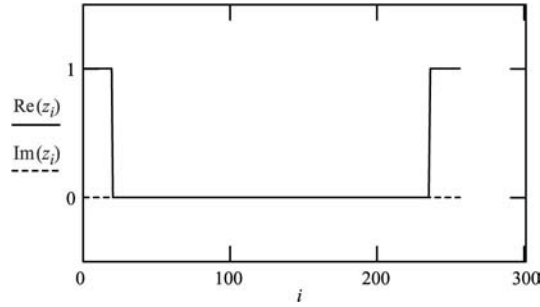
Transformée de Fourier

$$c = cfft(x) \quad N = \text{last}(c) \quad N = 255 \quad j = 0 \dots N$$



*Transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier.*

$$z = \text{icfft}(c) \quad N2 = \text{last}(z) \quad N2 = 255 \quad k = 0 \dots N2$$




---

**Exemple F.5. Transformée de Fourier réelle de  $\sin x/x$ .**

La fonction originale est la moitié de  $\sin x/x$ , 256 valeurs. La transformée de Fourier en nombre réel est une fonction marche avec seulement 128 valeurs.

La transformée de Fourier inverse en réel donne la fonction initiale.

La partie imaginaire de l'originale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse.

Cette étude est faite sur le CD.

---

**Exemple F.6. Transformée de Fourier complexe de  $\sin x/x$ .**

La fonction initiale est la moitié de  $\sin x/x$  avec 256 points. La transformée de Fourier complexe est une fonction rectangle, c'est-à-dire une double fonction marche, avec 256 valeurs. La transformée de Fourier complexe inverse donne la fonction initiale. La partie imaginaire de la fonction initiale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse.

Cette étude est faite sur le CD.

---

**Généralisation de la transformée de Fourier.**

Les transformées de Fourier rapides nécessitent  $2^n$  points expérimentaux. Quand le nombre de valeurs utilisées est différent, nous devons effectuer la transformée de Fourier complexe (cfft) et il en est de même pour la transformée de Fourier inverse (ifft). Nous calculons (exemple F.7) la transformée de Fourier complexe de 184 points expérimentaux. De même (exemple F.8) nous effectuons la transformée de Fourier inverse de  $\sin x/x$ . Nous comparons la transformée de Fourier rapide avec la transformée de Fourier classique (exemples F.7 et F.8). Nous avons choisi des fonctions de Gauss dont le paramètre  $a$  n'est pas le même. Nous retenons 256 points (exemple F.9) puis 326 valeurs (exemple F.10).

Nous étudions aussi, appendice (5.1), deux fonctions  $\sin x/x$  ayant différentes fréquences.

L'étudiant peut comparer les transformées de Fourier du domaine complexe et du domaine réel, choisir d'autres fréquences, d'autres nombres  $N$  de points expérimentaux pour comprendre comment le spectre de fréquences est résolu.

---

**Exemple F.7. Généralisation.**

La fonction initiale est la fonction marche, nous prenons 184 points. La transformée de Fourier complexe donne une fonction  $\sin x/x$  entière, elle comprend ses deux côtés. La transformée de Fourier



*inverse et complexe redonne la fonction initiale. La partie imaginaire de la fonction initiale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse. Cette étude est faite sur le CD.*

---

**Exemple F.8. Fonction initiale :  $\sin z/z$ .**

*Nous prenons 184 points. La transformée de Fourier complexe donne une double fonction marche, elle comprend ses deux côtés. La transformée de Fourier inverse, et complexe, redonne la fonction initiale. La partie imaginaire de la fonction initiale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse. Cette étude est faite sur le CD.*

---

**Exemple F.9. Fonction de Gauss.**

*Nous choisissons deux fonctions de Gauss ayant l'une  $a = 50$ , l'autre  $a = 100$ , nous prenons 256 points. La transformée de Fourier en complexe est une fonction de Gauss plus étroite. La transformée de Fourier complexe inverse redonne la fonction initiale. La partie imaginaire de la fonction initiale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse. Cette étude est faite sur le CD.*

---

**Exemple F.10. Fonction de Gauss.**

*Nous choisissons deux fonctions de Gauss ayant l'une  $a = 50$ , l'autre  $a = 100$ , nous prenons 326 points. La transformée de Fourier complexe est une fonction de Gauss plus étroite. La transformée de Fourier inverse redonne la fonction initiale. La partie imaginaire de l'originale est zéro, elle apparaît dans la transformation, et redevient zéro dans la transformation inverse. Cette étude est faite sur le CD.*

---

### 5.1.5 Transformée de Fourier du produit de deux fonctions, intégrale de convolution

Rappelons que la transformée de Fourier de  $S(y)$  est  $G(\nu)$ .

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{i\pi\nu y} d\nu \quad (5.16)$$

Examinons maintenant le cas où  $G(\nu)$  est le produit de deux fonctions  $g_1(\nu)$  et  $g_2(\nu)$

$$G(\nu) = g_1(\nu)g_2(\nu) \quad (5.17)$$

Si nous désirons garder séparées les deux fonctions, nous devons représenter la transformée de Fourier de  $G(\nu)$  par l'intégrale de convolution.

**Intégrale de convolution.**

Le théorème de convolution indique que nous pouvons remplacer la transformée de Fourier du produit de deux fonctions par l'intégrale de convolution des transformées de Fourier des fonctions  $g_1(\nu)$  et  $g_2(\nu)$ .

Les transformées de Fourier de chaque fonction sont

$$s_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\nu) e^{i\pi\nu y} d\nu \quad (5.18)$$

et pour  $g_2(\nu)$

$$s_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\nu) e^{i\pi\nu y} d\nu \quad (5.19)$$

La transformée de Fourier  $S(y)$  de la fonction  $G(\nu)$  produit de deux fonctions  $G(\nu) = g_1(\nu)g_2(\nu)$  est calculée par l'intégrale de convolution

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(y - \tau)d\tau \quad (5.20)$$

$s_1(y)$  et  $s_2(y)$  sont les transformées de Fourier de  $g_1(\nu)$  et  $g_2(\nu)$ .

**Exemple de la fonction de Gauss.**

Prenons cet exemple simple

$$G(\nu) = e^{-\frac{(a^2\nu^2)}{2}} \quad (5.21)$$

écrivons que cette fonction est le produit de deux fonctions de Gauss

$$e^{-(\frac{3}{4})(\frac{a^2\nu^2}{2})} \quad (5.22)$$

$$e^{-(\frac{1}{4})(\frac{a^2\nu^2}{2})} \quad (5.23)$$

Puis calculons les transformées de Fourier de chacune de ces fonctions

$$s_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-(\frac{3}{4})(\frac{a^2\nu^2}{2})}\} \cos 2\pi\nu y d\nu \quad (5.24)$$

et

$$s_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \{e^{-(\frac{1}{4})(\frac{a^2\nu^2}{2})}\} \cos 2\pi\nu y d\nu \quad (5.25)$$

Utilisons la formule de l'équation (5.6)

$$s_1(y) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{a\sqrt{3}}\right) e^{-\frac{(8\pi^2 y^2)}{(3a^2)}} \quad (5.26)$$

$$s_2(y) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\right) e^{-\frac{(8\pi^2 y^2)}{(a^2)}} \quad (5.27)$$

La transformée de Fourier de  $G(\nu)$  est maintenant obtenue par l'intégrale de convolution suivante

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(y - \tau)d\tau \quad (5.28)$$

Mais

$$S(y) = \frac{8\pi}{(\sqrt{3})(a^2)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(8\pi^2 \tau^2)}{(3a^2)} - \frac{(8\pi^2)}{(a^2)(y-\tau)^2}} d\tau \quad (5.29)$$

Appliquons la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \{\sqrt{\pi}\} \quad (5.30)$$

$$S(y) = \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{a}\right) e^{(-\frac{2\pi^2 y^2}{a^2})} \quad (5.31)$$

**Remarque.**

Le calcul direct de la transformée de Fourier de la fonction donnerait le même résultat qui est

$$S(y) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right) e^{(-\frac{2\pi^2 y^2}{a^2})} \quad (5.32)$$

Nous étudions (exemple F.11) l'intégrale de convolution du produit de deux fonctions, l'une est la fonction marche (fonction d'Heaviside), l'autre la fonction  $\sin x/x$ , elles sont les transformées de Fourier des deux fonctions initiales.

---

**Exemple F.11. Intégrale de convolution.**

*Intégrale de convolution du produit de la fonction d'Heaviside et de la fonction  $(\sin x/x)$ .*

*Cette étude est faite sur le CD.*

**Application F.11**

*Calculer l'intégrale de convolution en intervertissant les deux fonctions et suggérer que le résultat final n'est pas le même.*

---

## 5.2 Spectroscopie par transformée de Fourier

### 5.2.1 Interférogramme, transformation de Fourier. Superposition d'ondes sinusoïdales en cosinus

Soit une onde plane solution de l'équation scalaire de propagation des ondes

$$u(x, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \phi \right) \quad (5.33)$$

La fonction est symétrique par rapport aux paramètres  $x$  et  $t$ . La phase  $\phi$  appartient soit au temps, soit à l'espace, nous avons déjà étudié ces fonctions dans le chapitre 2 des interférences. Nous considérons deux ondes ayant entre elles une différence de marche. Les ondes, décrites par cosinus, dépendent entre elles de la différence de marche  $\delta$  dans le système de coordonnées spatiales  $x, y, z$ ; nous étudions leur superposition. Nous retenons la superposition des deux ondes. Les deux ondes ont entre elles une différence de marche telle que  $x_2 = x_1 - \delta$

$$u_1(x, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (5.34)$$

$$u_2(x, t) = A \cos 2\pi \left[ \frac{(x_1 - \delta)}{\lambda} - \frac{t}{T} \right] \quad (5.35)$$

Utilisons la formule

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \left[ \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \right] \cdot \left[ \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2} \right] \quad (5.36)$$

Appliquons le principe de superposition  $u = u_1 + u_2$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= 2A \left[ \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta}{2} \right) \right) \right] \left\{ \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

**Intensité.**

$$I = \left[ 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta}{2} \right) \right) \right]^2 \cdot \left[ \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) - \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta}{2} \right) \right] \right]^2 \quad (5.38)$$

Le deuxième facteur est une fonction du temps, il contient un terme oscillant fonction de  $t$ , il oscille très rapidement, en conséquence, nous détectons seulement sa valeur moyenne qui est une constante, nous écrivons donc

$$I = \left[ 2A \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\delta}{2} \right) \right) \right]^2 \quad (\text{multipliée par une constante}) \quad (5.39)$$

L'intensité résultant de la superposition de deux ondes est seulement fonction de la différence de marche optique  $\delta$ .

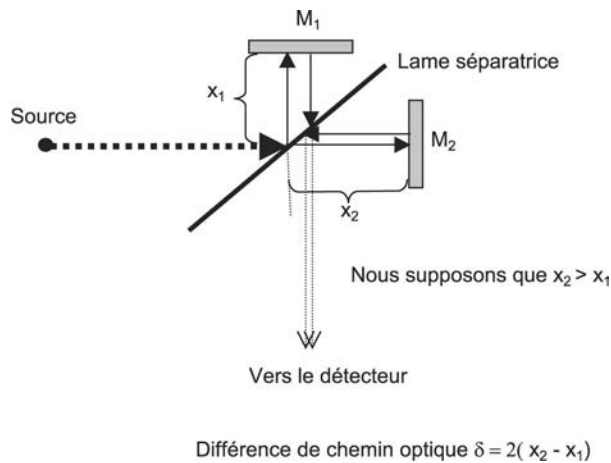
### 5.2.2 Interféromètre de Michelson et interférogrammes

Nous avons vu, au chapitre 2, le principe de l'interféromètre de Michelson. Étudions l'interféromètre de Michelson idéal (fig. 5.1) : sa lame séparatrice est bien sûr idéale, elle réfléchit 50 % de la lumière et transmet donc 50 % .

Le faisceau incident est divisé en deux faisceaux par la lame séparatrice, ils sont respectivement réfléchis ensuite par les miroirs  $M_1$  et  $M_2$ . Puis le faisceau venant de  $M_1$  est transmis à nouveau par la lame, le faisceau venant de  $M_2$  est réfléchi par la lame. Les deux faisceaux se superposent ensuite et se dirigent vers le détecteur.

La différence de marche est introduite par le déplacement du miroir mobile  $M_2$  qui se déplace parallèlement à lui-même. Quand le miroir se déplace d'une distance  $n\delta/2$ , la différence de marche optique entre les deux faisceaux est :  $n\delta$  pour chaque longueur d'onde composant le faisceau lumineux. Quand  $\delta = 0$ , nous avons une interférence constructive pour toutes les longueurs d'onde, c'est le **maximum central**.

- Quand nous observons une interférence constructive pour une longueur d'onde, la lumière est entièrement transmise, aucune lumière ne retourne vers la source.
- Quand l'interférence est destructive, toute la lumière associée à cette longueur d'onde est réfléchie et retourne vers la source, aucune lumière n'est transmise vers le détecteur.



**Fig. 5.1** – Principe de l'interféromètre de Michelson. La différence de marche  $\delta/2 = x_2 - x_1$  est obtenue par le déplacement du miroir  $M_2$ .

Puisque seul le terme de l'espace de l'onde harmonique joue un rôle important, nous écrivons l'amplitude de l'onde incidente sous la forme

$$u_1(x) = A \cos 2\pi\left(\frac{x_1}{\lambda}\right) \quad (5.40)$$

L'amplitude de l'onde résultant de la superposition des deux ondes émergeant de la lame séparatrice est

$$u(\delta) = B \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right) \quad (5.41)$$

$B$  est une constante.

**Intensité.**

$$I(\delta) = \{B \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)\}^2 \quad (5.42)$$

L'intensité maximum quand  $\delta = 0$  est égale à  $B^2$ .

Nous avons, jusqu'ici, supposé que la lumière était monochromatique et comportait une seule onde, équation (5.40). L'intérêt de la spectroscopie, par transformée de Fourier rapide, est de déterminer le spectre de fréquences d'une source composée de beaucoup d'ondes de différentes fréquences.

Supposons que la lumière incidente comprennent «  $p$  » ondes. Soit  $A_j$  l'amplitude,  $\lambda_j$  la longueur d'onde de la  $j^{\text{ème}}$  onde à laquelle correspond la fréquence  $\nu_j = 1/\lambda_j$  exprimée en  $\text{cm}^{-1}$ .

**Remarque :** les physiciens *spectroscopiques* travaillant dans l'infrarouge utilisent tous cette définition de la fréquence.

L'amplitude lumineuse totale incidente sur l'interféromètre est la somme des amplitudes de ses composantes

$$u = \sum_{i=1}^p A_i \cos(2\pi\nu_i x_1) \quad (5.43)$$

D'où l'expression de l'intensité correspondante

$$I(y) = \sum_{i=1}^p \{B_i \cos(2\pi\nu_i \frac{y}{2})\}^2 \quad (5.44)$$

$y$  = différence de marche optique due au déplacement du miroir mobile. Nous avons changé de notation et appelons  $y$  la différence de marche au lieu de  $\delta$ .

Chaque onde, comprise dans la sommation (5.43) a sa propre figure d'interférence, en conséquence, l'intensité finale enregistrée par le détecteur est la somme des intensités de chaque onde, la figure d'interférence observée est la somme de toutes les figures d'interférence.

Appliquons à chaque terme la relation

$$\cos^2 \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)(1 + \cos 2\alpha) \quad (5.45)$$

Nous obtenons

$$I(y) = \sum_{j=1}^p 2C_j^2 \{1 + \cos(2\pi\nu_j y)\} \quad (5.46)$$

Notons que le facteur  $1/2$ , contenu dans la relation 5.44, de l'argument du cosinus, a maintenant disparu.

La figure d'interférence finale enregistrée est **l'interférogramme**.

### 5.2.3 Intégrale de la transformation de Fourier

Nous observons, en interférométrie, l'interférogramme enregistré par le détecteur ; le paramètre variable est  $y$  dans l'espace des coordonnées spatiales, nous calculons le spectre de la lumière incidente par une transformée de Fourier rapide.

Considérons maintenant que la lumière contient une distribution continue de fréquence comprise entre  $\nu = 0$  et  $\nu = \infty$ , l'équation (5.46) devient une intégrale sur la différentielle  $d\nu$ , dans l'espace des fréquences.

$$J(y) = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) \{1 + \cos(2\pi\nu y)\} d\nu \quad (5.47)$$

Nous avons remplacé  $C_j^2$  par la fonction continue  $G(\nu)$  et la somme par une intégrale. Quand  $y = 0$  il vient

$$J(0) = 4 \int_0^{\infty} G(\nu) d\nu \quad (5.48)$$

Les intégrales de Fourier nécessitent que les paramètres  $y$  et  $\nu$  varient de  $-\infty$  à  $\infty$ . En conséquence, nous élargissons le domaine des fréquences en supposant que  $G(\nu)$  est symétrique par rapport à l'origine donc que :  $G(-\nu) = G(\nu)$ . L'équation (5.48) peut s'écrire

$$J(0) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) d\nu \quad (5.49)$$

Écrivons la relation (5.47) en notation complexe avec l'introduction des fréquences négatives, nous obtenons

$$J(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \{1 + e^{i(2\pi\nu y)}\} d\nu \quad (5.50)$$

Plaçons la relation (5.49) dans l'équation (5.50), la relation finale est

$$J(y) = (1/2)J(0) + \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \{e^{i(2\pi\nu y)}\} d\nu \quad (5.51)$$

L'interférogramme est la fonction suivante

$$S(y) = J(y) - (1/2)J(0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \{e^{i(2\pi\nu y)}\} d\nu \quad (5.52)$$

La fonction interférogramme  $S(y)$  est directement reliée à l'intensité observée  $J(y)$ . La soustraction de  $1/2 \cdot J(0)$  à  $J(y)$  fait que  $S(y)$  prend des valeurs négatives, et l'intégrale de Fourier est du type de celle que nous avons précédemment étudiée. Si nous enregistrons un double interférogramme, c'est-à-dire un interférogramme complet pour  $-\infty < y < +\infty$ , le paramètre  $y$  prend des valeurs négatives, puis positives, selon le déplacement du miroir  $M_2$  de l'interféromètre de Michelson. Si nous calculons le spectre par une transformée de Fourier rapide (fft),  $2^n$  points sont nécessaires, nous commençons par les valeurs de la région positive de  $S(y)$  suivies par celles de la région négative qui est l'image, par un miroir, de la partie positive. L'information qui nous intéresse est seulement contenue dans le demi-interférogramme, c'est-à-dire l'interférogramme d'un seul côté.

L'intégrale  $S(y)$  est l'une des deux intégrales des transformées de Fourier.

**Transformée directe-transformée inverse**

$$S(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) \{e^{i(2\pi\nu y)}\} d\nu \quad (5.53)$$

$G(\nu)$  est calculée par

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} (S(y)\{e^{-i(2\pi\nu y)}\})dy \quad (5.54)$$

L'intégrale de l'équation (5.54) est celle dont nous avons besoin pour obtenir le spectre en fréquences de la fonction interférogramme  $S(y)$  observée.

Les deux variables  $\nu$  et  $y$  sont supposées varier continûment de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Quand  $G(\nu)$  et  $S(y)$  sont symétriques par rapport à zéro, la partie imaginaire disparaît et nous avons seulement à travailler avec un seul côté de l'intégrale : de 0 à  $+\infty$ .

$$S(y) = 2 \int_0^{\infty} G(\nu)\{\cos(2\pi\nu y)\}d\nu \quad (5.55)$$

$$G(\nu) = 2 \int_0^{\infty} (S(y)\{\cos(2\pi\nu y)\})dy \quad (5.56)$$

## 5.2.4 Variation discrète des coordonnées et des fréquences

### Suite de valeurs discrètes des coordonnées

L'intégrale de Fourier, équation (5.56), est la transformée de Fourier de la fonction interférogramme. Mais nous enregistrons des valeurs numériques écrites sous la forme

$$G(\nu_i) = \sum_{k=1}^n S(y_k) \cos(2\pi\nu_i y_k) \quad (5.57)$$

Puisque  $n_i$  et  $y_k$  prennent une suite de valeurs discrètes, la transformation de Fourier revient à trouver la solution d'un système à  $n$  équations linéaires. Les valeurs expérimentales sont enregistrées et constituent les valeurs de l'interférogramme. Le miroir  $M_2$  (fig. 5.1) est déplacé par intervalles réguliers et à chaque déplacement nous enregistrons l'énergie sur le détecteur. La position du miroir correspondant à une différence de marche nulle donne le maximum central. Les valeurs sont calculées à chaque déplacement. Les valeurs des points de l'interférogramme sont calculées après avoir soustrait la moitié de la valeur du maximum central.

Les valeurs  $y_k$  des cosinus des équations (5.57) sont finies mais il peut y avoir plusieurs valeurs identiques de  $\nu_i$ . Choisissons la longueur de l'intervalle  $y_k = k$  avec 128 points de  $k = 1$  à 128, nous avons à considérer

$$\cos[2\pi(\nu_i k)] \quad (5.58)$$

Quand  $k = 128$  et  $\nu_i = 1/128$  nous avons  $\nu_i k = 1$ , toutes les valeurs de cosinus sont égales à 1. Pour des valeurs plus grandes de  $\nu_i$  le produit  $\nu_i k$  est plus grand que 1 et nous avons une répétition des valeurs de cosinus. Prenons l'exemple  $\nu_i = 133/128 = 1 + 5/128$ .

$$\begin{aligned} \cos[2\pi(\frac{133}{128})k] &= \cos[2\pi(1 + \frac{5}{128})k] \\ &= \cos[2\pi(\frac{5}{128})k] \end{aligned} \quad (5.59)$$

Puisque cosinus est une fonction périodique, la fréquence  $\nu_i = 133/128$  est équivalente à celle de  $\nu_i = 5/128$ . Quand  $k$  varie de 0 à 128 dans l'espace des distances, nous obtenons après transformée de Fourier 128 fréquences en  $\text{cm}^{-1}$ . La répétition sur  $2\pi$  est représentée dans l'exemple (F.12). Les fonctions cosinus de l'équation (5.57) ont une fonction symétrique par effet miroir au centre de l'intervalle (pour  $i = 64$ ) ainsi qu'aux deux extrémités, ce que nous

montrons dans l'exemple (F.13).

Nous traçons les graphes des amplitudes et des intensités de la superposition des cosinus. Ce sont des simulations des interférogrammes, les fonctions dépendant de la différence de marche optique.

**Exemple F.12. Ondes sinusoïdales.**

Graphes de  $\cos(2\pi\nu_i k)$  : la variable dans l'espace des coordonnées est comprise entre 1 et 128 et les fréquences sont :

$$1/128, \quad 2/128, \quad 3/128, \quad 64/128, \quad 127/128, \quad 128/128, \quad 129/128, \quad 130/128.$$

Cette étude est faite sur le CD.

**Application F.12**

Considérons un nombre total de points :  $n = 32$  dans l'espace des coordonnées, nous traçons le graphe pour les cinq premières fréquences. Trouver les fonctions qui ont même valeur au voisinage des fréquences 32 et 64.

**Exemple F.13. Graphes de  $\cos(2\pi\nu_i k)$ .**

La variable dans l'espace des coordonnées est comprise entre 1 et 128 et les fréquences sont :

$$1/128, \quad 2/128, \quad 63/128, \quad 64/128, \quad 65/128.$$

Dans la région de  $k$  compris entre 20 et 80 les  $\cos(2\pi\nu_i k)$  pour :

63/128, 64/128, 65/128, nous voyons que la fréquence 63/128 apparaît similaire à celle de 65/128, toutes les deux ont un cycle plus large que 64/128.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application F.13**

Tracer le graphe de  $\cos(2\pi\nu_i k)$  pour les fréquences plus élevées et plus petites que 64/128 et montrer qu'elles apparaissent similaires aux graphes de fréquences plus grandes et plus petites.

**Exemple F.14. Graphes de fonctions sinusoïdales en fonction de la différence de marche.**

Les fonctions sont des cosinus.

Cette étude est faite sur le CD.

## 5.2.5 Échantillonnage

Nous avons vu (exemple F.14) que les fonctions cosinus des équations (5.57) sont symétriques par rapport à la fréquence 64/128 quand nous choisissons 128 points de l'espace des coordonnées ; nous avons exactement deux points par cycle. Dans cet exemple, nous constatons que deux points par cycle des coordonnées doivent être utilisés pour caractériser les fréquences. De la théorie de l'échantillonnage il résulte le théorème suivant.

**Il est nécessaire d'avoir deux points par cycle, quand nous mesurons à distances régulières de l'échantillonnage une fonction périodique continue, afin de pas perdre d'information sur cette fonction.**

Dans notre exemple, les fonctions continues sont les fonctions cosinus. La fonction cosinus ayant la plus grande fréquence est échantillonnée avec deux points par cycle, nous pouvons prendre une valeur au maximum de la fonction, l'autre au minimum de la fonction. Les basses fréquences sont aussi correctement échantillonnées, mais les grandes fréquences apparaissent aussi aux basses fréquences et nous devons les éliminer à l'aide d'un filtre de fréquences.



Si nous raisonnons avec les longueurs d'onde au lieu des fréquences, nous avons le même résultat : le pas de l'échantillonnage doit être égal à la moitié de la longueur d'onde la plus petite (fréquence la plus élevée).

Appelons  $l$ , la distance d'échantillonnage, c'est-à-dire le pas d'échantillonnage, nous avons

$$l = \frac{1}{2\nu_M} \quad (5.60)$$

$\nu_M$  est la fréquence la plus élevée du spectre considéré. Nous admettons en spectroscopie par transformation de Fourier, c'est-à-dire en interférométrie, que les fréquences plus élevées sont éliminées par passage du faisceau à travers un filtre de lumière.

### Pliage en accordéon du spectre obtenu par transformée de Fourier.

Que se passe-t-il quand l'échantillonnage n'est pas correct, c'est-à-dire que nous avons retenu un *pas de déplacement* trop grand ou trop petit ? Comment est affecté le spectre ? Nous verrons que les fréquences les plus élevées sont repliées autour de la fréquence la plus élevée  $\nu_M$ , relation (5.67), qui est la fréquence correspondant à la distance d'échantillonnage, ces fréquences élevées apparaissent en superposition des fréquences les plus basses, ce que nous ne voulons pas.

*Exemple.*

Considérons dans l'espace des coordonnées  $1/256, 2/256 \dots 1$ , la sommation d'une fonction cosinus ayant les fréquences 65, 85, 105.

1. Nous choisissons d'abord un échantillonnage  $l = 1/256$ .

$$y1_i = \cos \left[ 2\pi \cdot 65 \cdot \left( \frac{i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 85 \cdot \left( \frac{i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 105 \cdot \left( \frac{i}{256} \right) \right] \quad (5.61)$$

$i$  varie de 1 à 256.

2. Nous considérons un pas d'échantillonnage de  $2/256$ .

$$y2_i = \cos \left[ 2\pi \cdot 65 \cdot \left( \frac{2i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 85 \cdot \left( \frac{2i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 105 \cdot \left( \frac{2i}{256} \right) \right] \quad (5.62)$$

$i$  varie de 1 à 256.

3. Nous prenons un pas d'échantillonnage de  $4/256$ .

$$y4_i = \cos \left[ 2\pi \cdot 65 \cdot \left( \frac{4i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 85 \cdot \left( \frac{4i}{256} \right) \right] + \cos \left[ 2\pi \cdot 105 \cdot \left( \frac{4i}{256} \right) \right] \quad (5.63)$$

$i$  varie de 1 à 256.

Nous comparons (exemple F.15) les spectres obtenus avec les échantillonnages  $1/256, 2/256, 4/256$ .

---

**Exemple F.15. Etude de différents pas d'échantillonnage. Les trois fréquences étudiées sont 65, 85, 105.**

1. **Échantillonnage avec un pas de  $1/256$  pour la fonction  $y1$ .** La plus haute fréquence théorique  $\nu_M$  donnée par la relation (5.60) est  $\nu_M = 128$ . Toutes les fréquences apparaissant dans le spectre de la transformation de Fourier à leur bonne place.

## 2. Intervalle d'échantillonnage de 2/256 pour $y_2$ .

Nous avons maintenant un pas d'échantillonnage double du précédent, la plus haute fréquence  $\nu_M$  calculée à partir de la relation (5.60) est maintenant  $\nu_M = 64$ , les trois fréquences retenues 65, 85, 105 sont plus élevées que 64. Le spectre est plié en accordéon, dans le sens droite  $\Rightarrow$  gauche (pliage en arrière), les trois fréquences apparaissent dans le spectre obtenu par transformation de Fourier aux fréquences 45, 85, 125.

Nous voyons que la fonction  $y_2$  apparaît comme si elle avait les fréquences  $2 \cdot 65, 2 \cdot 85, 2 \cdot 105$ , et avait été échantillonnée avec un intervalle de  $1/256$ , celui de la relation 5.61, ce que nous avons fait dans la question précédente, mais la différence est que maintenant la plus haute fréquence est 128. Nous devons ensuite regarder les fréquences  $130 = 2 \cdot 65, 170 = 2 \cdot 85, 210 = 2 \cdot 105$  qui dépassent l'intervalle compris entre 1 et 128. Nous avons vu dans les exemples (F.12) et (F.13) que les fréquences supérieures à 128 sont repliées en arrière, en sens inverse de la droite vers la gauche dans le spectre autour de la fréquence limite supérieure qui, ici, est 128, car nous échantillonnons  $y_2$  comme  $y_1$ . Nous devons maintenant soustraire des fréquences 130, 170, 210 la fréquence la plus élevée qui est 128, nous obtenons donc en réalité les fréquences  $130 - 128 = 2, 170 - 128 = 42, 210 - 128 = 82$ . Ces fréquences sont tracées dans le sens droite  $\Rightarrow$  gauche à partir de la fréquence 128 puisqu'il y a pliage en accordéon, nous obtenons donc les fréquences  $128 - 2 = 126, 128 - 42 = 86, 128 - 82 = 46$ , mais, en réalité, nous observons, dans le spectre, les fréquences 125, 85, 45 car nous n'avons pas tenu compte du fait que la transformée de Fourier part de la valeur 0 et pas de la valeur 1.

## 3. Intervalle d'échantillonnage de 4/256 pour la fonction $y_4$ .

Maintenant, nous échantillonnons la fonction avec un pas de  $4/256$ . La plus haute fréquence limite donnée par la relation (5.60) est 32. Après transformation de Fourier les trois fréquences apparaissent à 5, 85, 90.

Puisque le spectre est étudié avec 128 points expérimentaux, nous examinons  $y_4$  comme si cette fonction avait les fréquences  $4 \cdot 65 = 260, 4 \cdot 85 = 340, 4 \cdot 105 = 420$  par analogie avec la formule (5.61) qui serait échantillonnée avec le pas de  $1/255$  comme nous l'avons fait pour la fonction  $y_1$ . Nous devons examiner les fréquences 260, 340, 420. Elles sont supérieures à la fréquence limite théorique correspondant à l'intervalle compris entre 0 et 128. Nous avons vu (exemples F.12 et F.13) les fréquences supérieures à 128 sont repliées en accordéon en arrière dans le sens droite  $\Rightarrow$  gauche à partir de la fréquence supérieure de 128, car nous échantillonnons  $y_4$  avec le même pas que l'échantillonnage de  $y_1$ . Nous soustrayons la fréquence 128 des fréquences 260, 340, 420, pliage  $128 \Rightarrow 0$ , nous obtenons les fréquences  $260 - 128 = 132, 340 - 128 = 212, 420 - 128 = 293$ . Ensuite nous soustrayons à nouveau 128 et obtenons les fréquences :  $132 - 128 = 4, 212 - 128 = 84$ , pliage  $0 \Rightarrow 128$ . Les deux premières fréquences sont bien à leur place dans le spectre mais la dernière :  $293 - 128 = 165$  est supérieure à 128 ; nous soustrayons 128 :  $165 - 128 = 37$ , nous obtenons 37 et plaçons cette fréquence dans le sens du pliage  $128 \Rightarrow 0$  à partir de 128 :  $128 - 37 = 91$ . Elle a en réalité la fréquence 90 et non pas la fréquence 91. Finalement les trois fréquences retenues sont, après transformation de Fourier, aux places 4, 85, 90. Les deux premières ont subi deux pliages, la troisième a eu trois pliages.

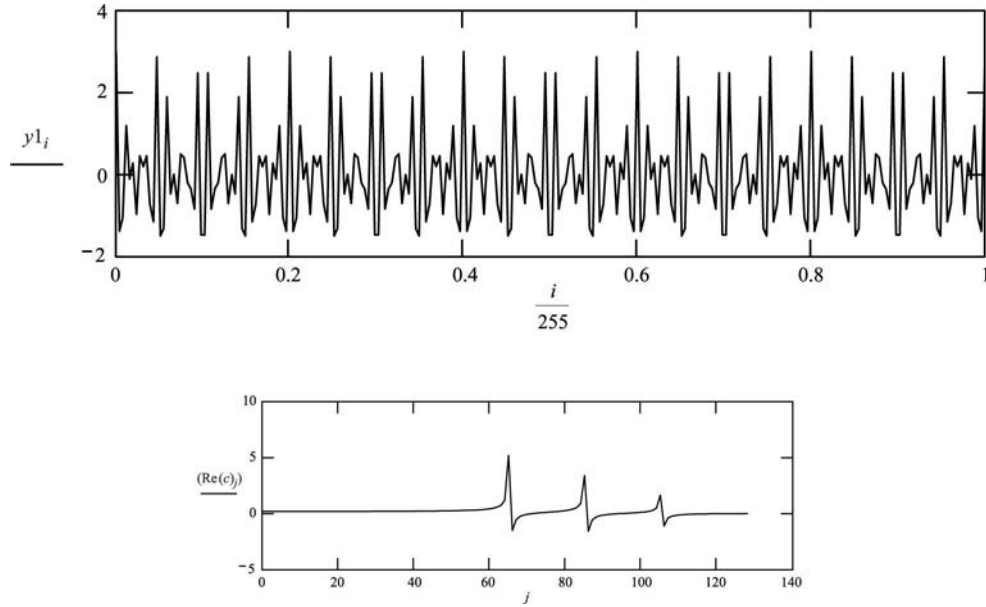
Nous n'avons pas tenu compte que la transformée de Fourier part de la valeur 0 et non pas 1.

Quand le pas d'échantillonnage est de  $1/255$ , la plus grande fréquence enregistrée devient 128 ; les fréquences de notre spectre sont à 65 et 105, elles sont au-dessous de la valeur 127.

### 1. Pas d'échantillonnage $i/255$ .

$$y1_i = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 65 \cdot \frac{i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 85 \cdot \frac{i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot \frac{i}{255}\right) \quad i = 0 \dots 255$$

$$c = \text{fft}(y1) \quad N = \text{last}(c) \quad N = 128 \quad j = 0 \dots 128$$

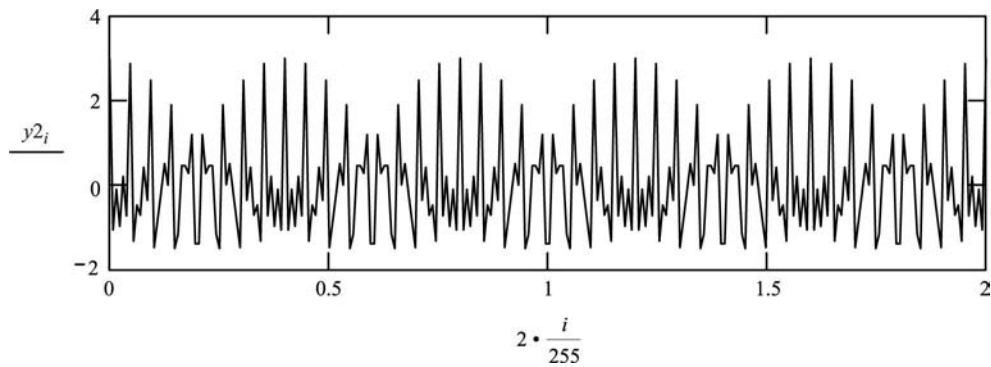


Les pics de fréquences sont à 65, 85, 105.

2. Pas d'échantillonnage  $2i/255$ .

Quand le pas d'échantillonnage est  $2/255 \Rightarrow \nu_M = 64$  les fréquences initiales sont à 65, 85, 105 : valeurs supérieures à 64, en conséquence, elles sont pliées dans le sens droite  $\Rightarrow$  gauche.

$$y2_i = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 65 \cdot \frac{2i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 85 \cdot \frac{2i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot \frac{2i}{255}\right)$$

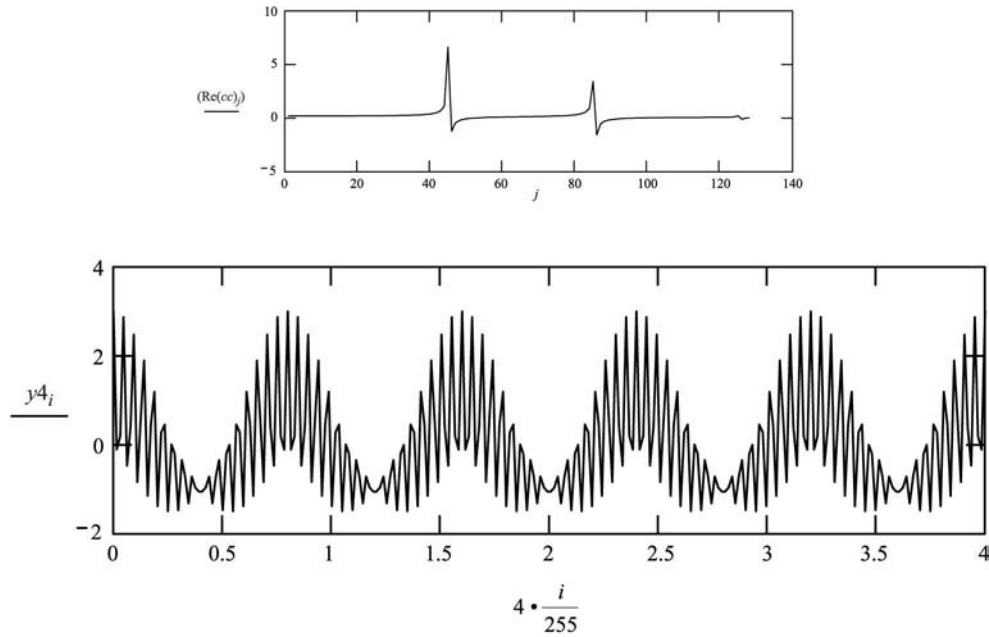


$$c = \text{fft}(y2) \quad N = \text{last}(cc) \quad N = 128 \quad j = 0 \dots 128$$

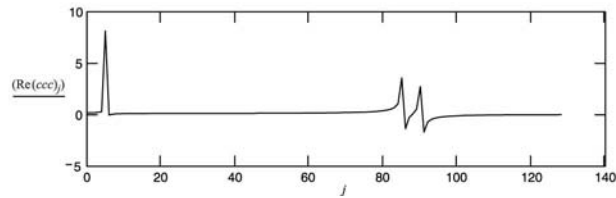
Les pics des fréquences apparaissent à 45, 85, 125.

3. Échantillonnage  $4i/255$ . Quand le pas d'échantillonnage est  $4/255 \Rightarrow \nu_M = 32$ , les fréquences initiales ont des valeurs supérieures à 1 multiplié par 32 et  $2 \cdot 32$ .

$$y4_i = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 65 \cdot \frac{4i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 85 \cdot \frac{4i}{255}\right) + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot 105 \cdot \frac{4i}{255}\right)$$



$$ccc = \text{fft}(y4) \quad N = \text{last}(ccc) \quad N = 128 \quad j = 1 \dots 128$$



Les pics après TdF apparaissent aux fréquences :

$$\begin{aligned} 65 \text{ à } & \rightarrow 125 \\ 85 \text{ à } & \rightarrow 185 \\ 105 \text{ à } & \rightarrow 45 \end{aligned}$$

#### Application F.15.

Choisir les fréquences 15, 34, 97, étudier le spectre obtenu par transformation de Fourier, suivre la méthode de l'exemple (F.15).

### 5.2.6 Spectroscopie de haute résolution

Le physicien recherchant de la spectroscopie à haute résolution avec des spectres dont la finesse est très grande et une résolution  $\Delta\nu$  très fine, travaille avec des bandes passantes très étroites. Le pas d'échantillonnage « 1 » du domaine de l'espace est dépendant de la fréquence la plus élevée  $\nu_M$  qui, elle, est du domaine «  $1/\text{longueur}$  ». Si nous augmentons le nombre  $N$  de points du domaine des distances, nous augmentons par conséquent le nombre  $N$  de valeurs

du domaine des fréquences. Puisque le pas d'échantillonnage détermine la bande comprise entre 0 et  $\nu_M$ , un plus grand nombre de points mesurés dans l'espace des longueurs entraîne un plus grand nombre de valeurs du domaine des fréquences ; nous obtenons une résolution plus grande dans l'intervalle compris entre 0 et  $\nu_M$ . Le pouvoir de résolution est inversement proportionnel à la longueur totale de l'interférogramme. La longueur totale est  $L = Nl$ , nous avons

$$Nl = L = \frac{1}{\left(\frac{2\nu_M}{N}\right)} \quad (5.64)$$

La résolution est  $\nu_M/N$

$$\frac{\nu_M}{N} = \Delta\nu = \frac{1}{2L} \quad (5.65)$$

Une grande résolution en interférométrie signifie que la différence de marche optique est grande, le déplacement du miroir  $M_2$  de l'interféromètre de Michelson est grand afin d'obtenir une résolution  $\Delta\nu$  fine.

**Premier exemple : spectre étudié de 0 à  $100 \text{ cm}^{-1}$ .**

Prenons  $L = 50 \text{ cm} \Rightarrow \Delta\nu = (1/100) \text{ cm}^{-1}$ . Le pouvoir de résolution R, c'est-à-dire la finesse F, est :  $R = \nu_M/\Delta\nu$  à 100 microns (correspondant dans le domaine des fréquences à  $100 \text{ cm}^{-1}$ ).

$$R = \frac{\nu_M}{\Delta\nu} = \frac{100}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 10\,000 \quad (5.66)$$

Nous en déduisons le nombre total de points N mesurés dans cette expérience

$$N = \frac{100}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 10\,000 \quad (5.67)$$

Compte tenu du temps de déplacement du miroir, nous devons, approximativement, effectuer une mesure toutes les trois secondes, en conséquence cette expérience nécessite neuf heures de mesures. Le bilan après neuf heures de travail est l'obtention d'un spectre entre 0 et  $100 \text{ cm}^{-1}$ , spectre obtenu avec une résolution de  $0,01 \text{ cm}^{-1}$ .

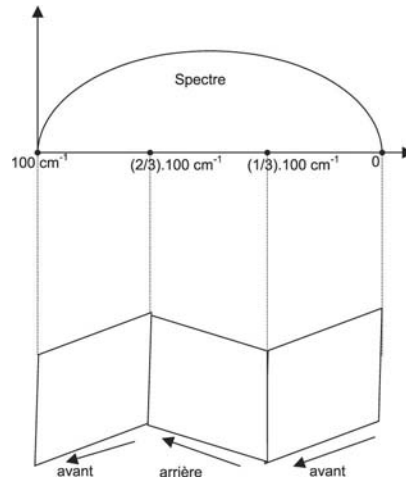
Si nous nous intéressons seulement à une section du spectre, nous pouvons utiliser le pliage en accordéon du spectre et une bande passante plus petite pour analyser une partie du spectre.

**Deuxième exemple : spectre étudié de  $200/3 \text{ cm}^{-1}$  à  $100 \text{ cm}^{-1}$  avec le même déplacement « L » du miroir.**

Nous nous intéressons au domaine compris entre  $66$  et  $100 \text{ cm}^{-1}$ , nous retenons un filtre passe-bande qui élimine les autres fréquences. Puis nous replions trois fois le spectre transformé en choisissant un pas d'échantillonnage trois fois plus grand (fig. 5.2). Cet exemple ressemble à celui que nous avons étudié (exemple F.15) où nous avons étudié le pliage en accordéon d'une sommation de cosinus en choisissant successivement les pas d'échantillonnages  $1/256$ ,  $2/256$ ,  $4/256$ . Dans l'exemple précédent le pas d'échantillonnage était  $l$  et nous enregistrons 10 000 mesures, maintenant avec une fréquence maximum  $\nu_M/3$  le pas d'échantillonnage devient  $3l = L/3\,333$ . Nous avons un pas de  $L/3\,333$  au lieu d'un pas de  $L/10\,000$ . *Le nombre total de points à mesurer diminue de 10 000 à 3 333, mais la longueur finale de déplacement du miroir reste la même.*

**Conclusion.**

Nous obtenons la même résolution : *une haute résolution, dans un intervalle spectral plus étroit, avec 1/3 de points seulement.* Les spectres des deux régions  $1$  à  $33 \text{ cm}^{-1}$  et  $33$  à  $66 \text{ cm}^{-1}$  sont repliés droite  $\Rightarrow$  gauche pour le premier, gauche  $\Rightarrow$  droite pour le deuxième sur le spectre



**Fig. 5.2** – Filtrage du rayonnement. Un filtre passe-bande élimine le spectre compris entre 1 et  $66\text{ cm}^{-1}$ . Le spectre est plié *en accordéon* sur un intervalle égal à trois fois  $l$ ,  $l$  = pas de l'intervalle spectral correspondant limité par la fréquence la plus élevée :  $\nu_M = 100\text{ cm}^{-1}$  ; nous avons :  $l = 1/(2 \cdot 100\text{ cm}^{-1}) = 0,0005\text{ cm} = 50\text{ microns}$ . L'échelle des fréquences change à partir de cette fréquence maximum et est repliée en accordéon selon que l'on a un multiple pair, ou impair, de pliages. La largeur spectrale étudiée avec la longueur du déplacement du miroir  $L$  est  $\nu_M/3$ .

de la région  $66$  à  $100\text{ cm}^{-1}$ . S'il contenait des informations le spectre serait *mélangé*, comme les transformées de Fourier (exemple F.15). Nous obtenons donc la même résolution avec, d'une part une bande passante étroite, d'autre part le pas d'échantillonnage plus élevé, en conséquence, nous enregistrons moins de points. Dans notre exemple, le spectre enregistré nécessite trois fois moins de temps.

Nous représentons, sur la figure (5.3), le spectre enregistré avec l'interféromètre de Michelson ; nous utilisons un filtre passe-bande, sa largeur était  $\nu_M/q$ ,  $q$  étant un nombre entier, ici  $q = 6$ .

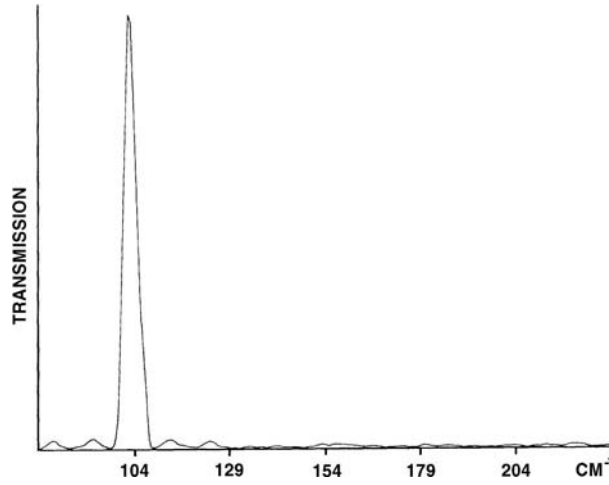
Le spectre représenté (fig. 5.4) est un spectre de haute résolution de la vapeur d'eau entre  $104$  et  $107\text{ cm}^{-1}$ . Le pas de l'échantillonnage était six fois plus grand que celui avec lequel nous avons enregistré le spectre de la figure (5.3) mais le temps d'expérimentation était six fois moins long.

#### Méthode d'enregistrement d'un spectre.

Nous éliminons d'abord les fréquences indésirables en choisissant un filtre passe-bande qui élimine les fréquences supérieures à la fréquence la plus élevée  $\nu_M$  ainsi que les fréquences au-dessous de la fréquence  $\nu_m$ . La fréquence  $\nu_m$  doit être choisie afin que le nombre  $q = \nu_M/(\nu_M - \nu_m)$  soit un nombre entier. Puis, sachant que le pas de l'échantillonnage est donné par la relation

$$l = \frac{1}{2(\nu_M - \nu_m)} \quad (5.68)$$

nous choisissons le nombre total  $N$  de points à enregistrer, nous obtenons donc le déplacement final  $L$  du miroir mobile et la résolution recherchée car nous avons les relations :  $L = Nl$  et  $\Delta\nu = 1/(2L)$  ; la fréquence la plus élevée mesurée est  $\nu_M/q$ . Le spectre s'écrit dans le sens gauche  $\Rightarrow$  droite quand  $q$  est impair, dans le sens droite  $\Rightarrow$  gauche quand  $q$  est pair.



**Fig. 5.3** – Spectre de l'énergie enregistrée entre  $104 \text{ cm}^{-1}$  et  $107 \text{ cm}^{-1}$ . Le spectre a été replié en accordéon six fois [5].

### 5.2.7 Apodisation

Les intégrales de Fourier sont

$$S(y) = 2 \int_0^{\infty} G(\nu) \{\cos(2\pi\nu y)\} d\nu \quad (5.69)$$

$$G(\nu) = 2 \int_0^{\infty} S(y) \{\cos(2\pi\nu y)\} dy \quad (5.70)$$

L'intervalle d'intégration est compris entre 0 et  $\infty$ . Nous avons déjà étudié la transformation de Fourier de valeurs discontinues et discrètes, ces fonctions sont en interférométrie de la forme

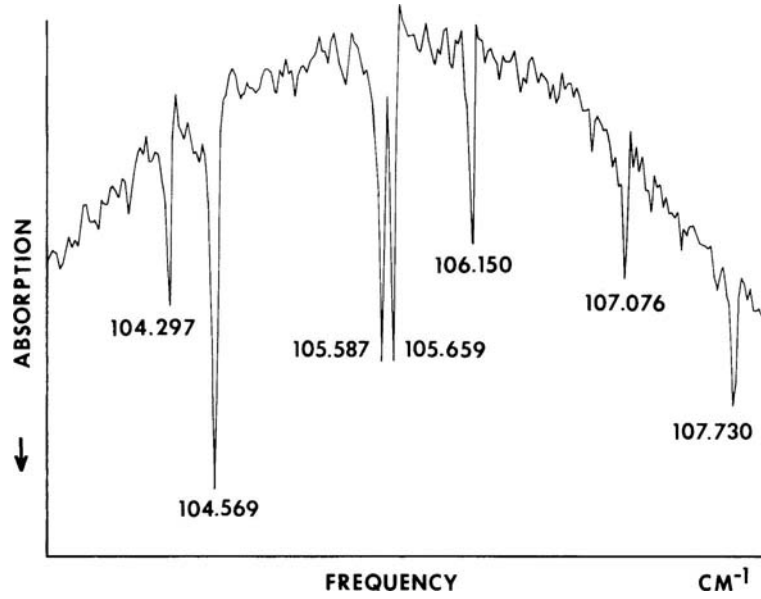
$$G(\nu_j) = \sum_{k=1}^n S(y_k) \{\cos(2\pi\nu_j y_k)\} \quad (5.71)$$

Or, cette sommation est finie tandis que l'intégrale a une borne  $+\infty$ . Nous avons vu, dans l'étude de la transformée de Fourier d'une fonction fente, que l'intégration théorique entre  $-\infty$  et  $+\infty$  se limite à une intégration entre  $-a$  et  $+a$  d'une fonction fente. Le domaine d'intégration est  $2a$ , car en dehors de ces valeurs la fonction considérée est égale à zéro, aucune information n'était perdue. Dans l'expression (5.70) nous pouvons multiplier la fonction  $S(y)$  par une fonction fente,  $p(y)$ , appelée aussi fonction rectangulaire.

$$p(y) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow +a < y \leq \infty \\ 1 & \Rightarrow -a \leq y \leq +a \\ 0 & \Rightarrow -\infty \leq y < -a \end{cases}$$

Nous obtenons une transformation de Fourier continue entre  $-\infty$  et  $+\infty$ , la relation (5.70) devient

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y) S(y) e^{(-i2\pi\nu y)} dy \quad (5.72)$$



**Fig. 5.4** – Spectre de la vapeur d'eau enregistré avec l'interféromètre de Michelson et un filtre passe bande [5].

L'intégration est désormais comprise entre  $-a$  et  $a$ , ce que nous écrivons sous la forme

$$G(\nu) = \int_{-a}^a S(y) e^{(-i2\pi\nu y)} dy \quad (5.73)$$

L'équation (5.73) est équivalente à la transformée de Fourier des fonctions discontinues, discrètes, indiquées dans la relation (5.71) et utilisée pour calculer les valeurs numériques, expérimentales, de la transformée de Fourier.

Nous étudions un exemple de transformation de Fourier d'une fonction cosinus intégrée sur un intervalle fini. Nous choisissons la fonction  $y_k = \cos(2\pi f \frac{k}{255})$  avec  $f = 31$ . Nous traçons les variations pour un intervalle compris entre  $k = 0$  à 400 puis nous effectuons la multiplication par la fonction fente de largeur 256 points. La transformée de Fourier en réel a un pic à  $f = 31$ , il n'est pas infiniment étroit et a des lobes négatifs. Puisque des intensités négatives n'apparaissent pas en spectroscopie il est important de trouver un processus de gommage de ces artefacts, ce qui est fait en introduisant la technique de l'*apodisation*.

*Apodisation.*

Nous remplaçons la fonction fente, c'est-à-dire les valeurs  $p_k$ , par les valeurs  $q_k$  de la fonction triangulaire, valeurs définies de la façon suivante

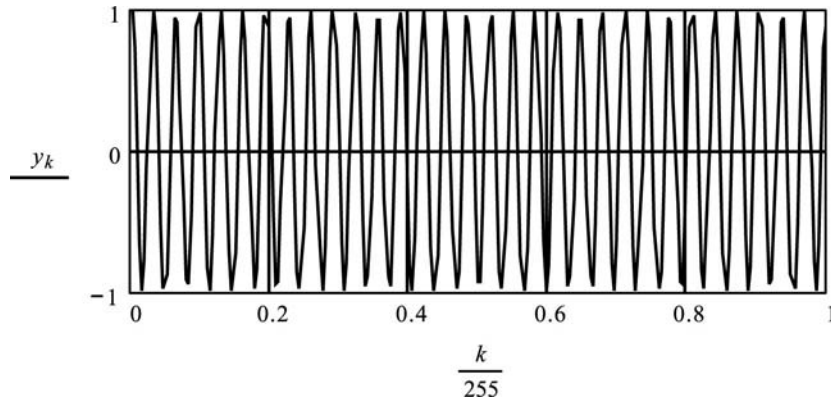
$$q_k = 1 - \frac{k}{255} \quad (5.74)$$

Nous montrons (exemple F.18) le résultat de la multiplication de  $y_k$  par  $q_k$ . Nous effectuons ensuite la transformée de Fourier de ce produit. La nouvelle fonction  $y_k$  décroît vers 0. La transformée de Fourier montre que les valeurs négatives du spectre de fréquence ont disparu : le spectre est **apodisé**. Cette technique de multiplication par la fonction triangle, avant de calculer la transformée de Fourier, est l'*apodisation*. Le défaut de cette méthode est que la résolution du spectre est divisée par deux.



**Exemple F.16. Exemple d'apodisation. Transformée de Fourier d'une fonction  $\sin x$  apodisée.**

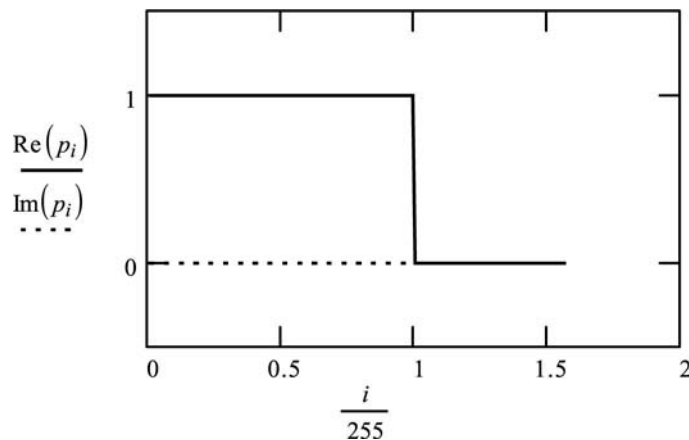
1. L'intervalle infini d'intégration est réduit à un intervalle fini par la multiplication de la fonction initiale par la fonction rectangle, en conséquence la transformée de Fourier a des intensités négatives.
2. La multiplication par la fonction triangle  $q_k = 1 - k/255$  remplace, après transformation de Fourier, les valeurs négatives des fréquences en valeurs positives, mais la résolution est diminuée de 50 %.
  - Paramètres de la fonction initiale :  
 $k = 0 \dots 255 \quad y_k = \left( \cos \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{k}{255} \right) \right) \quad f = 31$   
 Courbe.



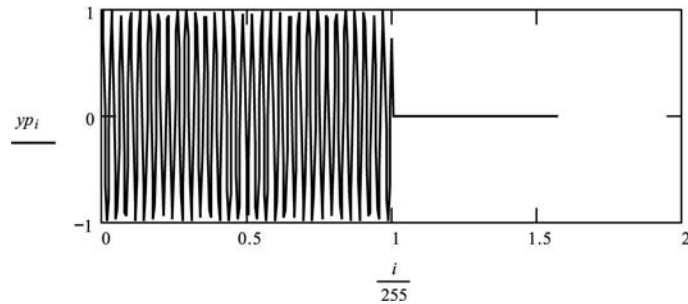
- Nous avons déjà défini la fonction marche ou fonction d'Heaviside  $\Phi x$  précédemment page 184.

Caractéristique de la fonction marche utilisée :

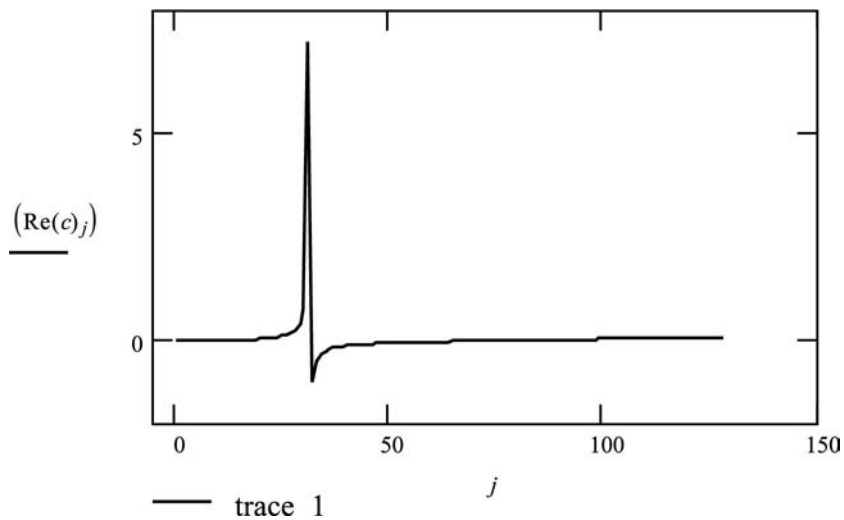
$$i = 0 \dots 400 \quad \text{et la fonction } p(i) \text{ est : } p_i = (\Phi(i) - \Phi(i - (d))) \quad d = 255$$



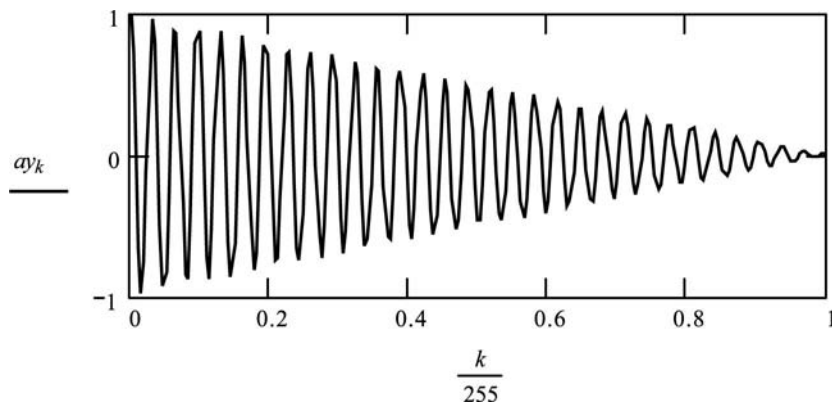
- Courbe du produit de ces deux fonctions :  $yp_i = \left( \cos \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{i}{255} \right) \right) \cdot p_i$ .



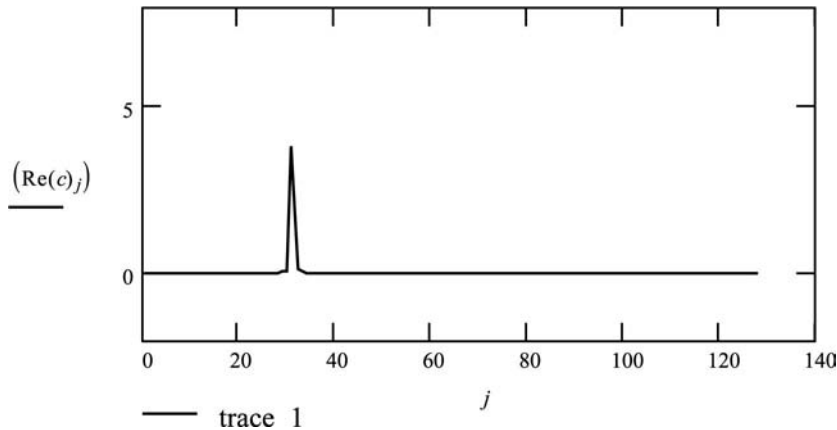
3. Transformée de Fourier du produit des deux fonctions (fonction trigonométrique sinus apodisée)  
 $y \times p$  : nous utilisons 255 points :  $x_k = (\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot \frac{k}{255})) \cdot (\Phi(k) - \Phi(k - (d)))$   $k = 0 \dots 255$   
 $c = \text{fft}(x)$   $N = \text{last}(c)$   $N = 128$   $j = 0 \dots N$ .  
 Courbe résultante :



4. Apodisation par une fonction triangle, courbe du produit des deux fonctions : sinus \* triangle.



5. Transformée de Fourier du produit précédent  $y * p$  ; nous effectuons la TdF de 255 valeurs  $y * p$ .  
 $N = 128$   $j = 0 \dots N$   $c = \text{fft}(ay)$   $N = \text{last}(c)$ .

**Application F.16**

1. Choisir la fonction d'apodisation  $qq_k = (1 - k/255)^2$  puis calculer la transformée de Fourier. Comparer le résultat avec celui obtenu en prenant comme fonction  $p_k$  puis  $q_k$ .
2. Montrer les conséquences de diminution de 50% de la résolution. Recalculer la transformée d'une somme de cinq cosinus ayant cinq différentes fréquences telles que 30, 35, 40, 45, 50. Etudier les différentes résolutions obtenues quand les fonctions d'apodisation sont  $p_k$ ,  $q_k$ , puis  $qq_k$ .

**APPENDICE 5.1****A5.1.1 Spectroscopie par transformée de Fourier asymétrique**

Nous venons d'étudier les propriétés de la spectrométrie par interférométrie et nous avons retenu l'exemple de l'interféromètre de Michelson. L'échantillon pouvait être placé avant que le faisceau ne soit divisé par la lame séparatrice. Il pouvait aussi être mis après la recombinaison du faisceau devant le détecteur. La lame séparatrice ayant un facteur de réflexion de 50 % et un facteur de transmission de 50 %, l'intensité des faisceaux divisés était la même : il y avait interférence entre deux faisceaux ayant même amplitude, même intensité, la seule dissymétrie était dans le déphasage introduit par la différence de chemin optique. Il était possible d'effectuer dans l'espace des nombres réels la transformée de Fourier.

Maintenant, nous supposons que l'échantillon est placé sur la surface d'un miroir. Les deux faisceaux séparés n'ont plus les mêmes propriétés, et nous devons effectuer la transformée de Fourier dans le domaine des nombres complexes. La conséquence du calcul de la transformée de Fourier complexe est que nous avons beaucoup plus d'informations car nous calculons avec des nombres complexes et non plus avec des nombres réels. Nous obtenons, non seulement l'intensité, mais aussi des informations sur la phase. Si nous étudions la réflexion sur un échantillon, nous connaissons, dans un domaine spectral, l'amplitude réfléchie et le déphasage lors de la réflexion ; nous pouvons calculer les constantes  $n$  et  $k$  de l'indice complexe,  $n$  complexe  $= n - ik$ , du matériau dont est fait l'échantillon.

Nous partons des équations (5.34) et (5.35), relatives à la réflexion des deux faisceaux par deux miroirs, interféromètre de Michelson. Nous supposons que le faisceau réfléchi sur le miroir fixe a la même amplitude que le deuxième faisceau mais est déphasé de  $\pi$ , son amplitude en notation complexe est

$$u_1 = A(e^{i\pi})e^{i2\pi(\frac{x_1}{\lambda} - \frac{t}{T})} \quad (\text{A5.1})$$

car  $-1 = e^{i\pi}$ .

L'échantillon est placé sur le faisceau correspondant au miroir mobile de l'interféromètre. Le coefficient de réflexion de l'amplitude est  $r$ , le déphasage lors de la réflexion est  $\varphi$ . Nous désignons par  $y$  le déplacement du miroir à partir de la position où les miroirs sont disposés à égale distance de la lame séparatrice. L'amplitude  $u_2$  de l'onde est

$$u_2 = A(re^{i\varphi})e^{i2\pi(\frac{x_1+y}{\lambda}-\frac{t}{T})} \quad (\text{A5.2})$$

La superposition des deux ondes est

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= A \left[ re^{i\varphi} + e^{i2\pi(\frac{y}{\lambda}+\pi)} \right] \cdot e^{i2\pi(\frac{x_1}{\lambda}-\frac{t}{T})} \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

**Intensité :**  $I = uu^*$

$$uu^* = A^2 \left[ 1 + r^2 + 2r \cos(\varphi - \pi - 2\pi\frac{y}{\lambda}) \right] \quad (\text{A5.4})$$

Posons  $R = r^2$  et  $\nu = 1/\lambda$ , l'intensité  $I$  s'écrit

$$I(y) = A^2 [1 + R + 2r \cos(\varphi - \pi - 2\pi y\nu)] \quad (\text{A5.5})$$

Si nous avons une distribution continue de fréquences  $\nu$  de 0 à  $\infty$  nous écrivons

$$I(y) = \int_0^\infty A^2 \{1 + R + 2r \cos(\varphi - \pi - 2\pi y\nu)\} d\nu \quad (\text{A5.6})$$

Quand  $y$  prend des valeurs élevées, le terme en cosinus oscille et sa valeur moyenne est égale à zéro, nous appelons

$$I(\infty) = \int_0^\infty A^2 \{1 + R\} d\nu \quad (\text{A5.7})$$

et

$$I(y) - I(\infty) = \int_0^\infty A^2 \{2r \cos(\varphi - \pi - 2\pi y\nu)\} d\nu \quad (\text{A5.8})$$

Exprimons  $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ , l'équation précédente s'écrit

$$\begin{aligned} &I(y) - I(\infty) \\ &= \int_0^\infty A^2 r \left[ e^{i(\varphi-\pi-2\pi y\nu)} + e^{-i(\varphi-\pi-2\pi y\nu)} \right] d\nu \end{aligned} \quad (\text{A5.9})$$

**Remarque.**

Le signe de la différence  $(\pi - \varphi)$  n'a pas d'importance, nous pourrions écrire  $(\varphi - \pi)$  pour le changement de phase lors de la réflexion sur l'échantillon.

Mettons en facteur  $e^{i(\varphi-\pi)}$ , puis, élargissons l'intervalle d'intégration à la région des fréquences négatives symétriques des fréquences positives par rapport à zéro, nous avons déjà effectué cette extension lors de l'étude de la transformation de Fourier. Nous obtenons

$$I(y) - I(\infty) = \int_{-\infty}^\infty \left[ A^2 r e^{i(\varphi-\pi)} \right] \cdot \left[ e^{i(2\pi y\nu)} \right] d\nu \quad (\text{A5.10})$$

Cette relation est donc une transformée de Fourier, dans tout l'intervalle spectral des fréquences, de la fonction  $\{A^2 r(\nu) \exp i(\varphi - \pi)\}$ , la transformée de Fourier inverse dans l'espace des coordonnées est

$$A^2 r(\nu) e^{i(\varphi - \pi)} = \int_{-\infty}^{\infty} [I(y) - I(\infty)] e^{-i(2\pi y \nu)} dy \quad (\text{A5.11})$$

Nous voyons que cette intégrale représente la transformée de Fourier des points expérimentaux :  $\{I(y) - I(\infty)\}$ . Rappelons que l'échantillon est placé devant le miroir fixe de l'interféromètre. Le calcul de l'intégrale complexe donne une fonction complexe dépendant de la fréquence  $\nu$ , nous la désignons par :  $P(\nu) - iQ(\nu)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [I(y) - I(\infty)] e^{-i(2\pi y \nu)} dy = P(\nu) - iQ(\nu) \quad (\text{A5.12})$$

L'interférogramme de l'environnement, c'est-à-dire de l'énergie sans échantillon, est obtenu en faisant un enregistrement sans échantillon ; les faisceaux sont réfléchis seulement sur les deux miroirs, la transformation dans ce cas est

$$\begin{aligned} A^2 r e^{i(-\pi)} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} I_B(y) - I_B(\infty) e^{-i(2\pi y \nu)} dy = P_B(\nu) - iQ_B(\nu) \end{aligned} \quad (\text{A5.13})$$

Divisons les transformées de l'échantillon par la transformée sans échantillon, faisons le rapport : *(énergie enregistrée avec l'échantillon) / (énergie enregistrée sans échantillon)*, nous obtenons

$$r(\nu) e^{i\varphi(\nu)} = \frac{(P(\nu) - iQ(\nu))}{(P_B(\nu) - iQ_B(\nu))} \quad (\text{A5.14})$$

D'où le facteur de réflexion  $R = r^2$

$$r^2 = \frac{(P(\nu)^2 + Q(\nu)^2)}{(P_B(\nu)^2 + Q_B(\nu)^2)} \quad (\text{A5.15})$$

Puisque l'énergie de l'environnement est réelle, nous pouvons écrire

$$P(\nu) - iQ(\nu) = (\text{nombre réel}) e^{i\varphi(\nu)} \quad (\text{A5.16})$$

et

$$\tan \varphi = \frac{Q(\nu)}{P(\nu)} \quad (\text{A5.17})$$

Dans cette expression, le signe de  $\varphi$ , c'est-à-dire sa relation par rapport  $2\pi$ , doit être choisi.

### Formules de Fresnel.

Les constantes optiques  $n$  et  $k$  se calculent à partir des formules de Fresnel sous incidence normale et pour un indice de réfraction complexe.

$$r^2 = \frac{((1 - n)^2 + K^2)}{((1 + n)^2 + K^2)} \quad (\text{A5.18})$$

et

$$\tan \varphi = \frac{(2K)}{(n^2 + K^2 - 1)} \quad (\text{A5.19})$$

Nous avons deux équations à deux inconnues  $n$  et  $K$ , nous ne détaillons pas le calcul intermédiaire, le résultat final est

$$n = \frac{(1 - r^2)}{(1 + 2r \cos \varphi + r^2)} \quad (\text{A5.20})$$

$$K = \frac{(-2r \sin \varphi)}{(1 + 2r \cos \varphi + r^2)} \quad (\text{A5.21})$$

$n$  et  $K$  dépendent de  $r$  et  $\varphi$ . Le signe de  $\varphi$  est important dans l'équation (A5.21).

Nous avons obtenu, par transformation de Fourier, les nombres complexes  $P(\nu)$  et  $Q(\nu)$  à partir desquels nous avons calculé les coefficients de réflexion  $r$ , le déphasage  $\varphi$ , les constantes optiques  $n$  et  $K$ .

**Exercices Chapitre 5- Transformée de Fourier, sur le CD**

- FFT01- Transformée de Fourier d'une fonction de Gauss
- FFT02- Transformée de Fourier de la fonction  $1/(1 + x^2)$
- FFT03- Transformée de Fourier numérique
- FFT04- Fonction marche
- FFT05- Tdf en réel ou en complexe pour une fonction symétrique par rapport à l'origine,  
tdF pour un seul côté de cette fonction
- FFT06- Exemple d'intégrale de convolution
- FFT07- Interférogramme obtenue par un interféromètre de Michelson
- FFT08- Pliage en accordéon d'un spectre enregistré
- FFT09- Apodisation

## Chapitre 6

# Formation des images

### 6.1 Introduction

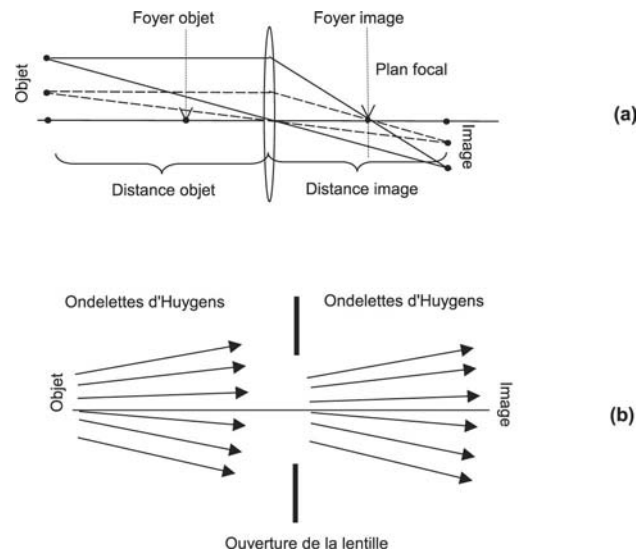
Nous avons étudié, dans le chapitre sur l'optique géométrique, le mécanisme de formation des images en partant d'un bagage mathématique simple. Prenons l'exemple des lentilles minces, nous calculons la position de l'image à l'aide de la formule de conjugaison d'une lentille de distance focale  $f$ .

Étudions maintenant la formation d'une image par une lentille, à l'aide de la théorie de propagation des ondes électromagnétiques. Les ondelettes d'Huygens sont issues de chaque point de l'objet et se dirigent vers la lentille qui forme la figure de diffraction de l'objet dans son plan focal image (fig. 6.1). Plaçons ensuite une deuxième lentille, elle forme l'image de la figure de diffraction : nous obtenons l'image de l'objet. La deuxième lentille réalise la transformée de Fourier de la figure de diffraction.

Nous considérons que le processus de formation de l'image par une lentille est le suivant : nous appliquons la transformée de Fourier de la distribution de l'objet, nous obtenons la figure de diffraction de l'objet, une deuxième transformée de Fourier appliquée à la figure de diffraction donne la distribution, c'est-à-dire la forme de l'image. Nous trouvons que la transformée de Fourier d'une transformée de Fourier est la fonction originale. Toutefois nous constatons, sur le plan expérimental, que cette image n'est pas exactement identique à l'objet initial. Aussi nous désirons savoir à quel moment une perturbation intervient dans le processus. La réponse à cette question a été un grand pas de l'optique.

Une grande étape dans la compréhension du phénomène optique a été réalisée quand E. Abbe [2] montra que toute perturbation de la figure de diffraction change les caractéristiques de l'image finale de l'objet. L'introduction d'un écran opaque (fig. 6.2) éliminant certaines parties de la figure de diffraction modifie cette figure ce qui entraîne une modification profonde de l'aspect de l'image. Nous pouvons aussi réaliser une modification de phase sur certaines parties de la figure de diffraction pour obtenir une image beaucoup plus contrastée [2].





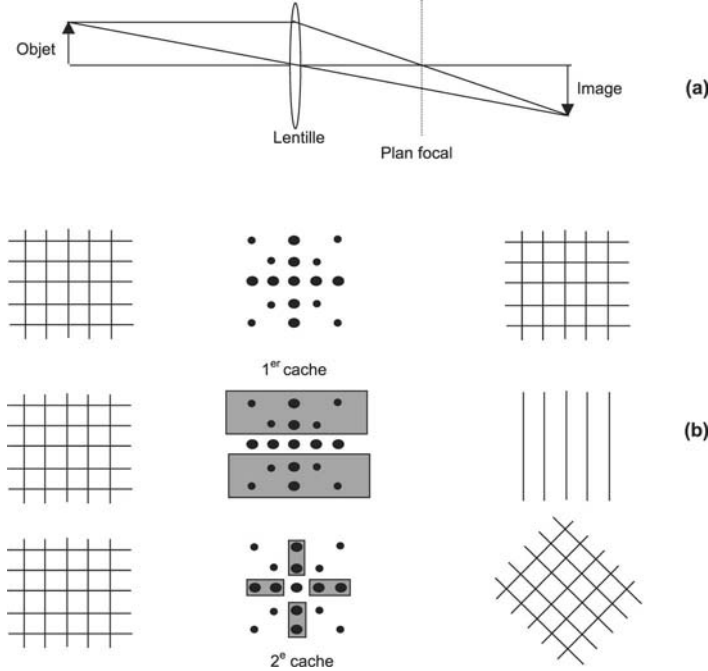
**Fig. 6.1** – (a) Image formée selon le principe de l'optique géométrique. Tout rayon parallèle à l'axe passe après réfraction par le foyer image. (b) Image formée selon la théorie de propagation des ondes électromagnétiques. Les ondelettes d'Huygens, diffusées par l'objet, forment la figure de diffraction dans le plan focal de la lentille. Les ondelettes d'Huygens issues de la figure de diffraction forment l'image.

## 6.2 Ondes et fréquences spatiales, transformée de Fourier

Nous décrivons la figure de diffraction de la lumière issue d'un objet à partir de la théorie scalaire de la diffraction, et à l'aide de l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel appliquée à une lumière monochromatique. Nous examinons la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille mince et voyons la diffraction de Fraunhofer. Cette intégrale peut être écrite sous la forme d'une transformée de Fourier, ce que nous avons fait dans le chapitre 3, lors de l'étude de la diffraction par une fente. Les coordonnées de l'objet, c'est-à-dire de la fente, sont dans le domaine des longueurs, tandis que les coordonnées de la transformée de Fourier sont dans le domaine  $1/\text{longueur}$ . En spectroscopie infrarouge l'unité de l'espace de la transformée de Fourier est en  $\text{cm}^{-1}$ . Remarquons que l'amplitude de la figure de diffraction, dans le domaine des fréquences spatiales, contient un terme de phase, une information de phase, même si la fonction initiale dans le plan objet est réelle. Après la deuxième transformée de Fourier, appliquée à la figure de diffraction dans le domaine des fréquences spatiales, nous obtenons donc la distribution de l'image. Nous voyons l'image géométrique recherchée qui est semblable à l'objet originel de l'espace des coordonnées.

Nous décrivons la figure de diffraction de la lumière issue d'un objet à partir de la théorie scalaire de la diffraction, et à l'aide de l'intégrale de Kirchhoff-Fresnel appliquée à une lumière monochromatique. Nous examinons la figure de diffraction dans le plan focal d'une lentille mince et voyons la diffraction de Fraunhofer. Cette intégrale peut être écrite sous la forme d'une transformée de Fourier, ce que nous avons fait dans le chapitre 3, lors de l'étude de la diffraction par une fente. Les coordonnées de l'objet, c'est-à-dire de la fente, sont dans le domaine des longueurs, tandis que les coordonnées de la transformée de Fourier sont dans le

domaine  $1/\text{longueur}$ . En spectroscopie



**Fig. 6.2** – (a) Schéma expérimental du montage pour observer des modifications de l'image par la mise en place de masques dans le plan focal image de la lentille. (b) L'objet est une grille, sa figure de diffraction est dans la plan focal de la lentille qui forme l'image finale : une grille, que nous représentons. Les masques, 1 et 2, sont placés dans le plan focal de la lentille, bloquant certains éléments de la figure de diffraction. Nous montrons, à droite, l'image obtenue dans ce cas, elle est modifiée.

La première transformée de Fourier est une transformation de l'espace géométrique dans le domaine des fréquences spatiales de la diffraction. L'objet est décrit par la géométrie des ondes spatiales dans l'espace des coordonnées, la transformée de Fourier décrit le spectre des fréquences de ces ondes spatiales. La fonction objet  $h(y)$  est la superposition des ondes spatiales, le résultat peut être enregistré sur une plaque photographique. Les maxima, de l'onde spatiale résultante, impressionnent la plaque et nous observons en ce point une impression « noire » tandis qu'au point de contact des minima la plaque reste intacte, elle reste blanche, les zones grises correspondent aux intensités égales à zéro (fig. 6.3). Nous obtenons ainsi une information de phase sur les ondes. La superposition d'une onde d'amplitude maximum  $A$  et d'une onde d'amplitude minimum  $-A$  donne du gris, amplitude 0. Nous interprétons mathématiquement ce résultat (exemple FI.1) et considérons la série de Fourier suivante

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \left\{ \left[ \frac{4}{((2n+1)\pi)} \right] (\sin 2\pi(f_n x)) \right\} \quad (6.1)$$

avec les fréquences  $f_n = (2n+1)/2a$ , le paramètre  $a$  désigne une certaine distance dans le domaine spatial.

Aux ondes de longueurs d'onde  $\lambda_o = 2a$ ,  $\lambda_1 = 2a/3$ ,  $\lambda_2 = 2a/5$  correspondent les fréquences  $f_0, f_1, f_2$ .

Nous représentons (exemple FI.1) la superposition de ces trois ondes, nous voyons que la superposition d'un grand nombre d'ondes spatiales donne une fonction rectangle.

**Exemple FI.1. Construction d'une fonction rectangle par une série de Fourier de fonctions trigonométriques sinus.**

Séries de Fourier de fonctions sinus, la somme donne une fonction rectangulaire représentant la forme d'un objet rectangulaire. Nous traçons trois graphes.

La série de Fourier étudiée est

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \left[ \frac{4 \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot x \cdot (f_n)]}{(2 \cdot n + 1) \cdot \pi} \right] \quad f_n = \frac{2 \cdot n + 1}{2 \cdot \Lambda}$$

- Quand  $N = 0$  : il y a un seul terme en sinus de  $-1$  à  $1$ , la longueur d'onde est  $\lambda = 2$ .
- Quand  $N = 1$  : un deuxième terme en sinus s'ajoute, la longueur d'onde est  $\lambda/3$  son amplitude est plus petite.
- Quand  $N = 2$  : un troisième terme en sinus s'ajoute, la longueur d'onde est  $\lambda/5$  son amplitude est plus petite, ainsi de suite.
- Quand  $N$  : est grand la fonction est une parfaite fonction rectangle. Pour une valeur moyenne de  $N$ , vers  $N = 20$ , apparaît le **phénomène de Gibbs**, les coins ne sont pas nets, et apparaissent aux extrémités des oscillations, il y a une superposition qui disparaît quand  $N$  devient grand.

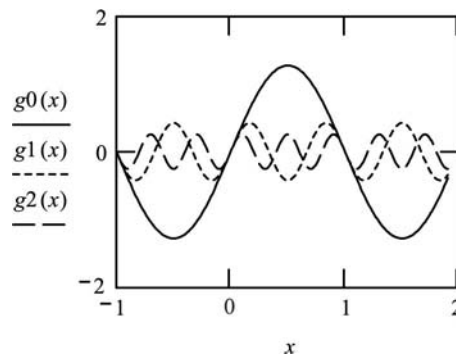
Quand  $N$  devient un nombre de plus en plus grand, nous voyons comment interviennent des longueurs d'onde de plus en plus petites pour la construction de la fonction rectangle.

**Paramètres et définitions des trois premières fonctions de la série.**

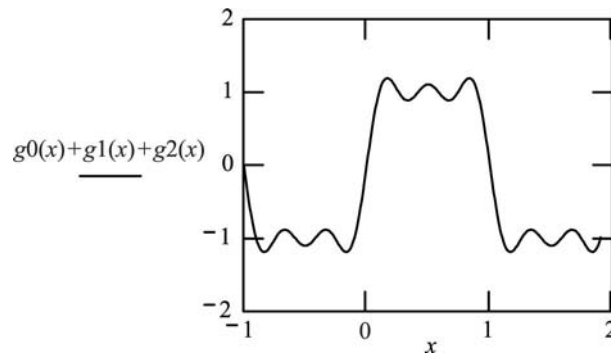
$$x = -1, -0,99 \dots 1, 9 \quad \Lambda = 1 \quad n = 0, 1 \dots 200 \quad N = 100$$

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow g_0(x) = \frac{4 \cdot \sin\left(\pi \cdot x \cdot \frac{1}{\Lambda}\right)}{(2 \cdot 0 + 1) \cdot \pi} \\ n = 1 &\Rightarrow g_1(x) = \frac{4 \cdot \sin\left(\pi \cdot x \cdot \frac{2 \cdot 1 + 1}{\Lambda}\right)}{(2 \cdot 1 + 1) \cdot \pi} \\ n = 2 &\Rightarrow g_2(x) = \frac{4 \cdot \sin\left(\pi \cdot x \cdot \frac{2 \cdot 2 + 1}{\Lambda}\right)}{(2 \cdot 2 + 1) \cdot \pi} \end{aligned}$$

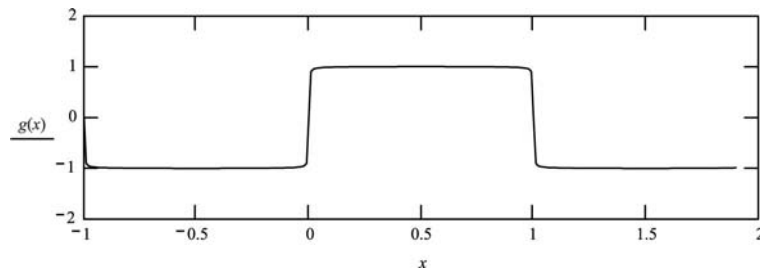
Courbe des composantes  $g_0(x)$ ,  $g_1(x)$  et  $g_2(x)$ .



Courbe de la somme :  $g_0(x) + g_1(x) + g_2(x)$ .



*Courbe finale  $g(x)$  avec  $n=200$ . Elle forme une fonction rectangle.*



#### **Application FI.1.**

1. Choisir différentes valeurs de  $N$  et  $NN$ , comparer la forme de la fonction résultante.
2. Les ondulations aux extrémités caractérisent le **phénomène de Gibbs**. Observer l'apparition puis la disparition du phénomène de Gibbs selon la valeur de  $N$ .
3. Refaire cette étude en prenant des fonctions cosinus au lieu de fonctions sinus, comparer les résultats.

Nous représentons des objets composés par la superposition de fonctions *rectangle* (exemple FI.2) et calculons la répartition du spectre de fréquence. Une deuxième transformée de Fourier forme l'image. Nous discutons l'option de transformée à retenir pour la deuxième transformée. Devons nous effectuer la transformée de Fourier complexe ou prendre la transformée de Fourier inverse, ce que nous avons fait ?

#### **Exemple FI.2. Objet formé par la superposition de fonctions rectangle.**

1. Objet composé d'une somme de fonctions rectangle. Nous étudions la transformée de Fourier en réel puis sa transformée de Fourier inverse. La transformée de Fourier en réel ne peut pas être appliquée deux fois.
2. Nous calculons en nombre complexe la transformée de Fourier puis la transformée de Fourier inverse. La transformée de Fourier en complexe peut être calculée deux fois de suite mais l'image subit une inversion gauche  $\Rightarrow$  droite.

Cette étude est faite sur le CD.

## 6.3 Objet, image et transformée de Fourier

### 6.3.1 Ondes issues de l'objet, d'une ouverture plane, d'une lentille

Dans le chapitre sur l'optique géométrique, nous avons étudié les lentilles minces, nous calculons l'image  $x_i$  d'un point objet d'abscisse  $x_o$  à partir de la relation de conjugaison de la lentille considérée dont la distance focale était  $f$ . Quand l'objet était étendu, la construction géométrique permettait de tracer, point par point, l'image dont la grandeur était calculée par l'expression du grandissement.

Quand nous calculons les caractéristiques de l'image par la théorie des ondes électromagnétiques, nous étudions aussi, point par point, les particularités de l'image. Les coordonnées de l'objet sont dans le plan  $y, z$ , une lentille est placée à la distance  $x$  de l'objet, un point de l'ouverture de la lentille a les coordonnées planes  $(\eta, \zeta)$ . Le plan de l'image est situé à la distance  $X$  de la lentille. Un point de l'image a les coordonnées planes  $Y, Z$  (fig. 6.3). Nous supposons que la lumière est monochromatique, nous étudions deux processus de sommation ainsi que le rôle de la lentille qui a déjà été étudié dans le chapitre sur la diffraction de Fraunhofer. Nous décrivons l'ouverture de la lentille par la fonction  $\alpha(\eta, \zeta)$ , les modifications du plan d'onde incident en front d'onde quittant la lentille sont données par la fonction  $e^{-ik\frac{(\eta^2+\zeta^2)}{2f}}$ . La lentille courbe le front d'onde de telle façon qu'il converge vers le point focal image. Le facteur de phase dans cette transformation est désigné par  $e^{ik\rho}$ ,  $\rho$  désigne la direction de propagation, et  $\rho = \frac{\eta^2}{2f}$ , d'où :  $e^{ik\rho} = e^{i\frac{k\eta^2}{2f}}$ .

Nous nous restreignons, par simplicité mais sans perdre les éléments importants, à l'étude à une dimension des différents éléments : objet, lentille, image.

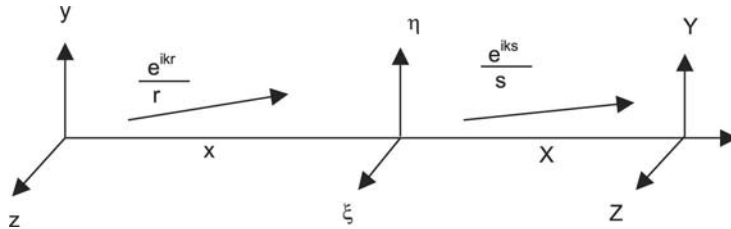


Fig. 6.3 – Système de coordonnées. Objet plan, ouverture plane, image plane

### 6.3.2 Processus de sommation des ondes formant l'image

#### Premier processus de sommation : sommation sur l'objet

L'objet est formé par un ensemble de points objets. L'amplitude d'un point objet est  $h(y, z)$ , à partir de chaque point émerge une onde sphérique décrite par d'amplitude  $h(y, z)\frac{e^{ikr}}{r}$ . L'amplitude totale est la somme de toutes les amplitudes, nous faisons la sommation de toutes les ondes passant par chaque point de coordonnées  $\eta, \zeta$  du plan de la lentille. Nous nous limitons à une seule dimension. Calculons  $\frac{e^{ikr}}{r}$  en fonction des paramètres  $x, y$ , et  $\eta$  (fig. 6.4), nous

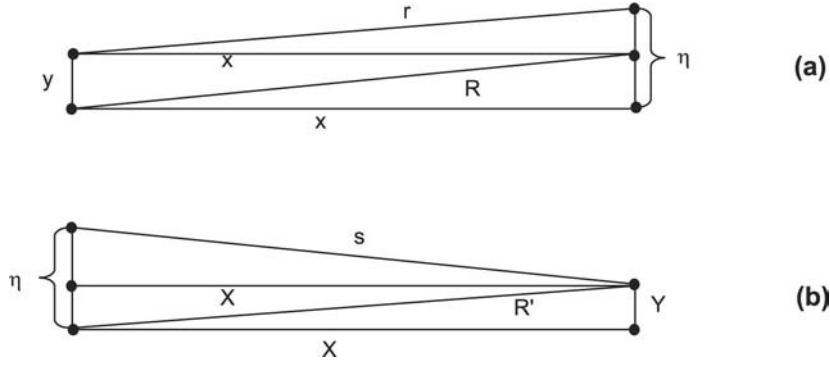
avons

$$\begin{aligned} r^2 &= (\eta - y)^2 + x^2 = \eta^2 - 2\eta y + y^2 + x^2 = R^2 + \eta^2 - 2\eta y \\ &= R^2 \left(1 + \frac{(\eta^2 - 2\eta y)}{R^2}\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

avec  $y^2 + x^2 = R^2$ , nous considérons  $R^2$  constant car  $y \ll x$ . Développons le terme  $[R^2(1 + (\eta^2 - 2\eta y)/R^2)]$  ce qui donne

$$r \approx R \left\{1 + \left(\frac{\eta^2 - 2\eta y}{R^2}\right)\right\} \approx R - \frac{\eta y}{R} + \frac{\eta^2}{2R} \quad (6.3)$$

Nous devons effectuer la sommation sur tous les points  $y$  de l'objet, ce qui conduit à remplacer



**Fig. 6.4** – Approximation paraxiale

la sommation par l'intégrale sur l'objet

$$\int h(y) e^{ik(R - \frac{\eta y}{R} + \frac{\eta^2}{2R})} dy \quad (6.4)$$

### Action de la lentille.

La fonction décrivant l'ouverture est  $\alpha(\eta)$ , nous avons vu, dans le chapitre sur la diffraction, que le passage du front d'onde à travers la lentille fait apparaître un changement de phase  $e^{(-ik\frac{\eta^2}{2f})}$ .

### Deuxième sommation : sur le plan de la lentille.

À partir de chaque point du plan de la lentille de coordonnées  $\eta, \zeta$  émerge une onde sphérique d'amplitude  $\alpha(\eta, \zeta) \frac{e^{iks}}{s}$ . Ces expressions comprennent le facteur de phase introduit par la lentille, nous en faisons la somme pour tout point image  $X, Y$ . L'amplitude de l'onde totale est la somme de toutes ces amplitudes, nous remplaçons cette sommation par une intégration. Nous procédons de la même façon que dans le paragraphe (6.3.2), nous pouvons

(fig. 6.4) faire l'approximation  $s \approx R' - \frac{\eta Y}{R'} + \frac{\eta^2}{2R'}$ , avec  $R'^2 = X^2 + Y^2 = \text{constant}$ . Désignons par  $g(Y)$  l'amplitude de l'image et

$$g(Y) = \int \left[ \int h(y) \left( \frac{1}{R} \right) e^{ik(R - \eta \frac{y}{R} + \frac{\eta^2}{2R})} dy \right] \alpha(\eta) e^{(-i \frac{k\eta^2}{2f})(\frac{1}{R'})} e^{ik(R' - \eta \frac{Y}{R'} + \frac{\eta^2}{2R'})} d\eta \quad (6.5)$$

Sortons de l'intégrale les termes constants, il vient

$$g(Y) = \left( \frac{1}{RR'} \right) e^{ik(R+R')} \int \left[ \int h(y) e^{-ik\eta \frac{y}{R}} dy \right] \alpha(\eta) e^{ik(\frac{\eta^2}{2R} - \frac{\eta^2}{2f} + \frac{\eta^2}{2R'})} e^{ik(-\eta \frac{Y}{R'})} d\eta \quad (6.6)$$

Puisque nous nous intéressons au mécanisme de formation d'une image posons :  $R \approx x_0$  et  $R' \approx x_i$ , nous avons  $e^{ik(\frac{\eta^2}{2R} - \frac{\eta^2}{2f} + \frac{\eta^2}{2R'})}$

$$(ik \frac{\eta^2}{2}) \left( \frac{1}{x_0} - \frac{1}{f} + \frac{1}{x_i} \right) = 0 \quad (6.7)$$

Désignons par  $C$  les termes constants placés devant l'intégrale

$$g(Y) = C \int \left[ \int h(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy \right] \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.8)$$

### 6.3.3 Transformée de Fourier de la transformée de Fourier

La fonction  $\alpha(\eta)$  est une constante.

$\alpha(\eta)$  est indépendant de  $\eta$ , nous mettons ce terme dans une constante en dehors de l'intégration (6.8), la constante  $C$  contient maintenant ce terme.

$$g(Y) = C \int \left[ \int h(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy \right] e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.9)$$

L'intégrale sur le paramètre  $y$  est une fonction de  $\eta$ , nous désignons cette fonction par  $\omega(\eta)$  avec

$$\omega(\eta) = \int h(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy \quad (6.10)$$

Nous écrivons

$$g(Y) = C \int \omega(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.11)$$

### Conclusion

L'amplitude de la fonction image  $g(Y)$  est la transformée de Fourier de la transformée de Fourier de la fonction amplitude de l'objet  $h(y)$ .

Puisque la transformée de Fourier d'une transformée de Fourier est, à un facteur constant près, la fonction initiale, nous avons dans le cas idéal le résultat suivant : la fonction représentant l'amplitude de l'image est la même que la fonction de l'amplitude de l'objet, à un facteur multiplicatif près.

### La fonction de l'ouverture de la lentille $\alpha(\eta)$ n'est pas une constante.

Nous modifions donc la première transformée de Fourier et, dans ce cas, l'amplitude de l'image est l'intégrale

$$g(Y) = C \int \omega(\eta) \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.12)$$

#### Conclusion.

La transformée de Fourier de la transformée de Fourier modifiée est l'amplitude de la fonction image. La fonction  $\alpha(\eta)$  désigne dans la plupart des cas la fonction caractérisant le diaphragme, une fonction rectangle ou une fonction diaphragme circulaire. Dans ce cas, seule l'amplitude selon  $\eta$  (dans le plan  $\alpha, \eta$ ) est altérée. Cependant  $\alpha(\eta)$  peut contenir un facteur de déphasage entre plusieurs points du plan  $\alpha, \eta$ .

## 6.4 Formation d'image quand la lumière est incohérente

### 6.4.1 Fonction de distribution

Nous avons étudié le mécanisme de formation d'une image en supposant que la lumière était monochromatique. Maintenant nous désirons utiliser une lumière polychromatique (contenant plusieurs longueurs d'onde), ce qui est le cas de la lumière émise par le soleil, nous étudions la formation des images. Nous admettons qu'il n'y pas de relation de phase constante entre les rayons de lumière émis par deux points de l'objet. Puisque nous voulons utiliser une seule longueur d'onde moyenne, la lumière que nous utilisons est quasiment monochromatique. Dans le cas où il existerait une relation de phase entre chaque paire de points objet, la lumière serait *monochromatique* pour le processus de formation de l'image ; nous étudions ce cas dans la section (6.5). Selon la même méthode que celle de l'optique géométrique, nous considérons l'objet formé par un grand nombre de points, et nous appliquons point par point la méthode de calcul pour obtenir l'image. Le détecteur recevant l'image : l'œil ou un appareil photo, est sensible à l'intensité de chaque point image. Considérons un point objet, nous devons maintenant remplacer  $h(y)$  du paragraphe (6.4.2) par une fonction de Dirac  $\delta$ . L'équation (6.8) devient

$$s(Y) = C \int \left[ \int \delta(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy \right] \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.13)$$

Puisque

$$\int \delta(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy = 1 \quad (6.14)$$

Nous obtenons

$$s(Y) = C \int \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.15)$$

Si  $\alpha(\eta)$  est une constante,  $s(Y)$  est une fonction de Dirac égale à la fonction amplitude  $h(y)$  de l'objet et nous avons point par point le mécanisme de formation d'une image. En général, la fonction  $\alpha(\eta)$  n'est pas une constante et nous revenons à la première sommation du paragraphe précédent, dans une étude à deux dimensions  $\alpha(\eta, \zeta)$  décrit la *distribution de l'amplitude* de la lumière émise par un point objet dans le plan de la lentille. En conséquence,  $s(Y)$  décrit la déviation à partir d'un point que nous aurions obtenu comme point image.



L'image reçue par un détecteur est proportionnelle à l'intensité de l'onde que nous désignons par  $S(Y)$  et nous écrivons

$$S(Y) = |C \int \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta|^2 \quad (6.16)$$

$S(Y)$  est la *fonction de distribution de l'intensité*. Elle désigne la répartition du point objet dans le plan image, répartition produite par la lentille.

### 6.4.2 Intégrale de convolution

L'intégrale (6.15) peut être écrite sous la forme d'une intégrale de convolution à partir du théorème de convolution. Ce théorème nous indique qu'*une transformée de Fourier du produit de deux fonctions, ici le produit  $\omega(\eta)\alpha(\eta)$ , est une intégrale de convolution du produit des transformées de Fourier de  $\omega(\eta)$  et de  $\alpha(\eta)$* .

Prenons un exemple et considérons l'équation (6.12)

$$g(Y) = C \int \omega(\eta) \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.17)$$

Tenons compte de la relation (6.10) et écrivons

$$\omega(\eta) = \int h(y) e^{(-ik\eta \frac{y}{x_0})} dy \quad (6.18)$$

La transformée de Fourier de  $\omega(\eta)$  est la fonction initiale  $h(y)$ , c'est-à-dire la fonction amplitude de l'objet.

$$h(Y) = C \int \omega(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.19)$$

De même, à partir de l'intégrale (6.15) nous avons

$$s(Y) = C \int \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.20)$$

Nous pouvons donc remplacer la fonction  $g(Y)$  de l'équation (6.17) par l'intégrale de convolution suivante

$$g(Y) = C \int h(Y) s(\tau - Y) d\tau \quad (6.21)$$

#### Interprétation.

La fonction amplitude de l'image finale est l'intégrale de convolution de la fonction : *(fonction amplitude  $h(y)$  de l'objet initial) \* (transformée de Fourier  $s(Y)$  de la fonction de l'ouverture  $\alpha(\eta)$  de la lentille)*.

Conclusion : dans ce calcul, interviennent seulement les coordonnées du plan image.

### 6.4.3 Impulsion de réponse, distribution d'intensité

Quand l'intensité de l'objet est décrite par  $I_{ob}(Y)$ , un point de celui-ci dans l'écran objet peut être représenté par le produit de cette intensité par la fonction de Dirac  $\delta(Y - Y')$ .

$$I_{ob}(Y) \delta(Y - Y') \quad (6.22)$$

Si  $Y = Y'$  l'intensité est  $I_{ob}(Y')$ .

*Lentille de grand diamètre, grande ouverture.*

L'image d'un point objet est un point objet sur l'écran d'observation. Tout au plus il faut introduire un facteur d'échelle.

*Lentille de petit diamètre, petite ouverture.*

Les ondes issues d'un point objet se distribuent selon une certaine répartition sur l'écran, la fonction  $I_{ob}(Y)\delta(Y - Y')$  doit être remplacée par une fonction de distribution  $S(Y - Y')$ . Cette fonction décrit la répartition de l'intensité (qui n'est plus ponctuelle) observée sur l'écran. Une distorsion est introduite par la lentille.

$$I_{ob}(Y)\delta(Y - Y') \longrightarrow I_{ob}(Y)S(Y - Y') \quad (6.23)$$

Quand l'objet se réduit à un objet ponctuel nous appelons cette transformation *l'impulsion de réponse*.

En lumière incohérente, la fonction de distribution représente l'image d'un point objet. Si l'objet est formé par deux points, le deuxième doit être traité selon la même procédure indépendante. L'intensité observée dans le plan image est la somme des deux intensités. Quand l'objet est formé par  $n$  points, la réponse impulsive devient une somme.

$$I_{im}(Y) = \sum I_{ob}(Y_n)S(Y - Y_n) \quad (6.24)$$

Quand l'objet est formé par une répartition continue de points, nous remplaçons la sommation par une intégration, il vient

$$I_{im}(Y) = \int I_{ob}(Y')S(Y - Y')dY' \quad (6.25)$$

Nous pouvons donc calculer la distribution de l'image observée quand nous connaissons cette fonction de distribution de l'ouverture de la lentille. Nous étudions maintenant quelques exemples.

#### 6.4.4 Exemples de convolution par une fonction de distribution

**L'objet est une barre, la lentille est une lentille cylindrique.**

Nous supposons que l'objet est une barre représentée par la fonction  $h(y)$  fonction rectangle de hauteur égale à 1 et de largeur comprise entre  $y = b1$  et  $y = b2$ . La fonction d'ouverture  $\alpha(\eta)$  de la lentille a une hauteur égale à 1, et  $\eta$  est compris entre  $-a$  et  $+a$  (exemple FI.3). Soit  $f$ , la distance focale de la lentille de diamètre  $2a$ . Nous appelons distance focale relative le rapport  $f/2a$ . Nous désignons la distance focale relative par l'expression  $f\#$ .

La distribution de la lumière sur l'écran est représentée par la fonction de distribution  $S(Y)$  de l'équation (6.16) ou  $X = f$ .

$$S(Y) = \left| \int (e^{-ikY\eta/f})d\eta \right|^2 \quad (6.26)$$

L'intégration se fait entre les limites  $-a$  et  $+a$ . Nous obtenons

$$S(Y) = 4a^2 \left( \frac{\sin ka\frac{Y}{f}}{ka\frac{Y}{f}} \right)^2 \quad (6.27)$$

La distribution de l'image est donnée par l'intégrale de convolution

$$I_{im}(Y) = 4a^2 \int_{Y'=b_1}^{Y'=b_2} I_{ob}(Y') S(Y - Y') dY' \quad (6.28)$$

Dans l'exemple (FI.3) nous avons posé  $Y' = YY$ . Nous avons choisi les paramètres suivants :  $\gamma = 0,0005$  mm,  $2a$  = diamètre de la lentille,  $f\# = 10$  = distance focale réduite,  $b_2 - b_1$  = diamètre de la barre et ses limites sont  $b_1 = -0,002$  à  $b_2 = 0,002$ .

---

**Exemple FI.3. Image d'une barre par une lentille cylindrique.**

*L'image est obtenue par la convolution de la fonction objet par la fonction de distribution. Cette fonction est la transformée de Fourier de l'impulsion de réponse représentant le cylindre.*

*Cette étude est faite sur le CD.*

**Application FI.3**

1. Choisir d'autres valeurs de  $b_2 - b_1$  de façon que cette différence soit très supérieure à la valeur du paramètre  $a$ .
  2. Choisir d'autres valeurs de  $b_2 - b_1$  de telle façon que cette différence soit très inférieure à la valeur de  $a$ .
- 

**Image de deux barres.**

Nous effectuons cette étude dans l'exemple (FI.4). Chaque barre a une largeur de 0,003, la distance  $bb$  comprise entre les centres des deux barres est  $bb = 0,013$ , nous prenons  $\lambda = 0,0005$  mm,  $f\# = 10$ , la lentille a un diamètre égal à  $2a$ . L'intensité de l'image de chaque barre est calculée, indépendamment l'une de l'autre, à partir de l'intégrale de convolution (6.28). Les équations sont linéaires et l'intensité observée sur l'écran est la somme des intensités produites par chaque barre.

---

**Exemple FI.4. Image de deux barres par une lentille cylindrique.**

*L'image de chaque objet est calculée avec l'intégrale de convolution du produit de la fonction objet par la fonction de distribution de la lentille. Cette fonction de distribution est la transformée de Fourier de l'impulsion de réponse (fonction rectangle) de la lentille cylindrique.*

*Cette étude est faite sur CD.*

**Application FI.4**

1. Choisir une autre distance entre les deux barres, étudier la résolution. À partir de quelle distance les deux images ne sont-elles pas résolues ?
  2. Changer de calcul, appliquer la fonction de distribution à l'image totale sur un grand domaine d'intégration. L'image paraît plus... ressemblante... à l'objet initial.
- 

**Image d'un objet circulaire par une lentille circulaire**

Nous avons vu dans l'étude de la diffraction au chapitre 3, que si la symétrie est celle du cercle, c'est le cas d'un diaphragme circulaire, l'étude à deux dimensions se réduit à une dimension, la solution de l'équation de l'amplitude de la solution des équations de diffraction est une fonction de Bessel. Nous procédons d'une façon similaire pour obtenir l'image de l'objet qui est maintenant un disque de diamètre  $2b$ , nous étudions ce problème (exemple FI.5) où

nous avons choisi  $2b = 0,004$ , la lentille a le diamètre  $2a$ .

Nous calculons l'intégrale de convolution (équation 6.28). Nous généralisons le paramètre  $R$ , rayon de l'ouverture de la lentille, en considérant les valeurs négatives. La fonction de distribution (appelée aussi fonction de répartition) est calculée sans normaliser la fonction de Bessel, nous obtenons

$$s^2(R) = 4a^2 \cdot \left[ \frac{J_1(2\pi \frac{aR}{\lambda f})}{2\pi \frac{aR}{\lambda f}} \right]^2 \quad (6.29)$$

Dans cet exemple, nous avons remplacé la fonction  $\sin y/y$  par la fonction de Bessel du premier ordre  $J_1(y')/y'$ , nous posons  $Y = R$  et  $Y' = R'$ . Le calcul de l'intégrale devient

$$I_{im}(Y) = 4a^2 \int_{Y'=b_1}^{Y'=b_2} I_{ob}(Y') \left[ \frac{J_1(2\pi a(\frac{Y-Y'}{\lambda f}))}{(2\pi a(\frac{Y-Y'}{\lambda f}))} \right]^2 dY' \quad (6.30)$$

Nous calculons cette intégrale dans l'exemple (FI.5).

**Exemple FI.5. Image d'un objet ayant la forme d'un disque.**

Nous calculons :

- la fonction de distribution : c'est-à-dire la transformée de Fourier de la fonction d'ouverture ;
- l'intégrale de convolution : c'est-à-dire l'intégrale du produit de la fonction amplitude de l'objet par la fonction de distribution ; nous obtenons l'image de l'objet.

Cette étude est faite sur CD.

**Application FI.5**

1. Choisir une valeur du diamètre de la lentille plus petite que 25. Que se passe-t-il ?
2. Choisir un diamètre de la lentille supérieur à 25. Quelle valeur permet d'obtenir une image la plus ressemblante à l'objet ?

**Image de deux objets circulaires par une lentille circulaire.**

$2b = 0,004$  la distance comprise entre les deux centres est  $bb = 0,014$ , le calcul est effectué dans l'exemple (FI.6). Nous calculons les intégrales

$$\begin{aligned} I_{im}(Y) = & 4a^2 \int_{Y'=b_1}^{Y'=b_2} I_{ob}(Y') S(Y - Y') dY' \\ & + 4a^2 \int_{Y'=b_3}^{Y'=b_4} I_{ob}(Y') S(Y - Y') dY' \end{aligned} \quad (6.31)$$

**Exemple FI.6. Image de deux objets circulaires par une lentille circulaire.**

L'image est obtenue en calculant l'intégrale de convolution du produit de chaque disque par la fonction de répartition. Cette fonction est la transformée de Fourier de la fonction impulsion rectangle, qui représente la lentille.

**Paramètres des deux disques.**

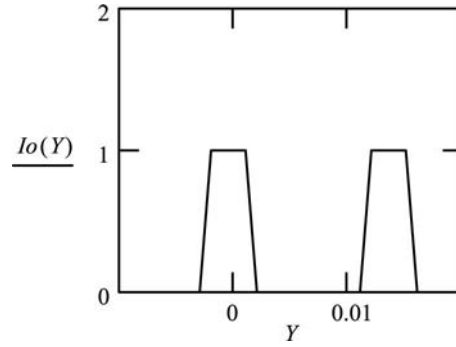
$Y = -0,1, -0,099 \dots 6$   $b_1 = -0,002$   $b_2 = 0,002$   $\lambda = 0,0005$

$Tol = 0,1$   $f/10 = f/2a$   $f = 500$   $a = 25$   $b_3 = 0,012$   $b_4 = 0,016$   $k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

**Objet :** c'est une somme de plusieurs fonctions d'Heaviside  $\Phi(x)$ . Nous avons défini précédemment cette fonction (dans le chapitre 5) page 184.

$$Io1(Y) = (\Phi(b2 - Y) - \Phi(b1 - Y)) \quad Io2(Y) = (\Phi(b4 - Y) - \Phi(b3 - Y))$$

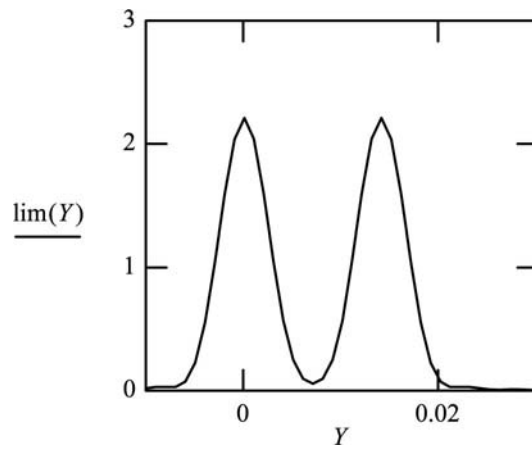
$$Io(Y) = Io1(Y) + Io2(Y)$$



*Image*

$$\lim(Y) = \int_{b1}^{b2} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right]^2 dYY + \int_{b3}^{b4} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right] dYY$$

*Transformation non normalisée.*



#### **Application FI.6**

1. *Changer la distance entre les deux barres et étudier la résolution de l'image de ces deux barres. Quand la distance entre les deux barres est trop petite, l'image se réduit à un seul pic.*
  2. *Appliquer la fonction de répartition à l'ensemble de l'image sur un large domaine d'intégration. L'image semble mieux ressembler à l'objet.*
- 

### **6.4.5 Fonction de transfert**

#### **Fonction de transfert et transformée de Fourier.**

La fonction de distribution de l'intensité est utilisée dans le système de coordonnées de l'image afin de calculer l'apparence de l'image sur l'écran d'observation où sont placées les

coordonnées de l'image. Si la lentille ne perturbait pas le transfert des rayons, nous observerions une image parfaite.

Cette image était obtenue par l'intégrale de convolution du produit de la fonction objet  $I_{ob}(Y')$  par la fonction de répartition  $S(Y - Y')$ , chacune de ces fonctions étant calculée dans l'espace des coordonnées de l'image.

$$I_{im}(Y) = \int I_{ob}(Y')S(Y - Y')dY' \quad (6.32)$$

Le théorème de convolution permet d'écrire cette intégrale sous la forme d'une transformée de Fourier  $I_{im}(Y)$  du produit de la transformée de Fourier  $\omega(\mu)$  de la fonction  $I_{ob}(Y)$  par la transformée de Fourier  $\tau(\mu)$  de la fonction de distribution (ou fonction de répartition)  $S(Y)$ . Les intégrales sont les suivantes :

$$\omega(\mu) = \int I_{ob}(Y')e^{-i2\pi\mu Y'} dY' \quad (6.33)$$

et

$$\tau(\mu) = \int S(Y')e^{-i2\pi\mu Y'} dY' \quad (6.34)$$

et l'intégrale (6.31) se met sous la forme

$$I_{im}(Y) = C \int \omega(\mu)\tau(\mu)e^{i2\pi\mu Y} d\mu \quad (6.35)$$

C regroupe toutes les constantes. La fonction  $\tau(\mu)$ , transformée de Fourier de  $S(Y')$  est appelée *fonction de transfert*, elle n'est pas normalisée. La relation (6.35) nous indique que la transformée de Fourier de  $I_{im}(Y)$ , que nous appelons  $\phi_{im}(\mu)$ , est égale au produit des deux transformées de Fourier  $\omega(\mu)\tau(\mu)$ . Nous écrivons

$$\phi_{im} = \omega(\mu)\tau(\mu) \quad (6.36)$$

Rappelons que nous avons  $1/Y = \mu$ , et  $\mu$  appartient au domaine des fréquences spatiales, exprimées en unité infrarouge en  $\text{cm}^{-1}$ . La fonction de transfert opère dans le domaine des fréquences spatiales.

Nous calculons (exemple FI.7) la transformée de Fourier d'un objet représenté par une fonction impulsion rectangulaire, puis nous étudions la transformée de Fourier d'une fonction de répartition d'une lentille cylindrique (fonction de transfert). Nous effectuons le produit de la transformée de Fourier de la fonction objet par la fonction de transfert, pour terminer, nous calculons la transformée de Fourier de ce produit. L'image finale devrait être une fonction rectangle.

---

**Exemple FI.7. Image d'une fonction rectangle (double fonction d'Heaviside). La fonction de distribution est  $(\frac{\sin x}{x})^2$ .**

- Calcul de la transformée de Fourier de la fonction rectangle.
- Calcul de la transformée de Fourier de la fonction de répartition  $(\sin x/x)^2$ .
- Produit des deux transformées de Fourier précédentes.
- Transformée de Fourier du résultat précédent.

L'image obtenue devrait être de forme identique à celle de l'objet, nous comparons l'image à l'objet.

Cette étude est faite sur le CD.

---

**Exemples de fonctions de transfert.**

*Fonction de transfert  $(\frac{\sin x}{x})^2$  et lentille cylindrique.*

Soit un objet formé par une grille constituée par quatre fonctions impulsions rectangulaires (exemple FI.8), nous calculons la transformée de Fourier  $\omega_{ob}(\mu)$ . La fonction de transfert d'une lentille cylindrique est donnée par la relation (6.27).

$$S(X) = 4a^2 \left[ \frac{\sin(\pi \frac{X}{\lambda f \#})}{(\pi \frac{X}{\lambda f \#})} \right]^2 \quad (6.37)$$

$X$  devient ici  $i/255$ ,  $i$  est le paramètre de la transformée de Fourier variant de 1 à 256 (0–255). Nous utilisons  $i/255$  dans le domaine de fréquence spatiale puisque «  $i$  » est dans le domaine de l'espace.

$\tau(\mu)$  = transformée de Fourier de  $S(X)$ .

Nous représentons (exemple FI.8) les variations de la fonction  $\phi(\mu) = \omega_{ob}(\mu)\tau(\mu)$ .

L'image finale est la transformée de Fourier de  $\phi(\mu)$ . Nous effectuons la transformée de Fourier complexe de 256 points pour l'objet et son symétrique inversé. Dans cet exemple, la plus grande longueur d'onde de l'espace spatiale est  $b = 128$ , il lui correspond la plus petite fréquence  $1/128$ . Nous prenons aussi pour échelle de la fonction de transfert  $1/256$ , et la plus petite fréquence est à  $1/128$ . Longueur d'onde retenue  $\lambda = 0,0005$  mm, distance focale relative  $f\# = \frac{f}{2a} = f_n = 10$ . Si nous prenons une autre valeur de  $f\#$  la figure sera modifiée,  $\tau_i$  sera modifié et un plus ou moins grand nombre de fréquences interviendront dans la formation de l'image.

---

**Exemple FI.8. Étude d'une fonction de transfert** L'objet est la grille précédemment décrite, nous calculons successivement :

- la transformée de Fourier de la fonction objet ;
- la transformée de Fourier de la fonction de distribution  $(\frac{J_1(y)}{y})^2$  ;
- le produit de ces deux transformées de Fourier ;
- la transformée de Fourier inverse du produit précédent ;
- comparaison de l'image avec l'objet, la ressemblance est ... approximative.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.8**

Choisir une autre valeur de  $f\#$  et observer par les modifications du triangle, que seules certaines fréquences sont utilisées pour former l'image.

---

**Étude d'une fonction de Bessel choisie comme fonction de transfert.**

Nous retenons la fonction de Bessel du premier ordre  $(\frac{J_1(y)}{y})^2$  correspondant à la fonction de distribution d'une lentille circulaire. Nous prenons la variable  $R$  au lieu de  $X$ . Nous utilisons

$$\frac{J_1(\frac{\pi R}{\lambda f_n})}{(\frac{\pi R}{\lambda f_n})} \quad (6.38)$$

La variable  $R$  est ici  $\frac{i}{255}$ , le paramètre de la transformée de Fourier variant de 1 à 256 (0–255). Nous utilisons  $\frac{i}{255}$  dans le domaine de fréquence spatiale puisque  $i$  est dans le domaine de l'espace.

L'objet (exemple FI.9) est toujours une grille. La fonction grille est une suite de fonctions

rectangles régulièrement réparties dans l'espace des dimensions, mais la fonction de distribution est maintenant  $(\frac{J_1(y)}{y})^2$ , sa transformée de Fourier est la fonction  $\tau(\mu)$ . Nous calculons  $\omega_{ob}(\mu)\tau(\mu)$ , et nous en traçons les variations.

La transformée de Fourier (inverse) de  $\phi(\mu) = \omega_{ob}(\mu)\tau(\mu)$  est l'image finale que nous représentons.

Si nous choisissons une autre valeur de  $f\#$ ,  $\tau_k$  sera modifié et un plus ou moins grand nombre de fréquences interviendront dans la formation de l'image.

**Exemple FI.9. Fonction de distribution (ou de répartition) :**  $(\frac{J_1(y)}{y})^2$ .

L'objet est la grille précédemment décrite, nous calculons successivement :

- la transformée de Fourier de la fonction objet ;
- la transformée de Fourier de la fonction de distribution ;
- le produit de ces deux transformées de Fourier ;
- la transformée de Fourier du produit précédent ;
- comparaison de l'image avec l'objet, la ressemblance est approximative.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.9**

Choisir une autre valeur de  $f\#$ , constater par les changements de la fonction de transfert que plus ou moins de fréquences sont utilisées dans la formation de l'image.

### 6.4.6 Étude de la résolution

Lors de l'étude de la diffraction, le critère de Rayleigh énonçait que *deux images ponctuelles sont résolues quand le maximum du maximum central de diffraction d'une image sera placé au premier minimum de la courbe de diffraction de la deuxième image* (exemple FI.10).

Étudions la résolution sur les courbes de diffraction de deux ouvertures circulaires (exemples FI.10 et FI.11). La lentille est aussi circulaire, appliquons le critère de Rayleigh. L'objet est constitué de deux rectangles de largeur respective  $b_1 - b_2$  et  $b_3 - b_4$ , la lentille a un diamètre  $2a$ , elle forme la figure de diffraction de chaque point des objets sur un écran. Nous posons

$$\pi \frac{R}{\lambda(\frac{f}{2a})} = \pi \frac{R}{\lambda(f\#)} \quad (6.39)$$

Données numériques :  $f\# = \frac{f}{2a} = 10$ ,  $\lambda = 0,000\ 5$ , nous remplaçons  $Y$  par le paramètre  $R$ .

Le premier zéro de la fonction de Bessel  $J_1(\pi R'/\lambda f\#)$  a lieu pour la valeur  $\pi R'/\lambda f\# = 3,83$ . Quand le maximum d'un pic de diffraction est à la place du minimum d'un autre point (exemple FI.10). La distance correspondante est :  $(3,83/\pi)\lambda f\# = 1,22\lambda f\#$ .

Nous avons choisi un diamètre de l'objet quasi ponctuel de  $0,000\ 5$  mm de même valeur que la longueur d'onde. Le produit  $\lambda f\#$  a donc ici la valeur  $0,005$ . La distance entre le centre de deux objets est de  $0,0061$ .

Nous traçons les images des deux objets lorsqu'ils sont à la distance minimum correspondant au critère de Rayleigh.

**Exemple FI.10. Résolution de deux figures de diffraction d'ouvertures circulaires.**

Les deux diaphragmes ont le même rayon  $a = 0,05$ , la distance entre les centres des deux diaphragmes est  $d = 24,5$ ,  $\lambda = 0,000\ 5$ ,  $X =$  distance des ouvertures du plan des ouvertures à l'écran d'observation  $= 4\ 000$ . Nous traçons les fonctions de Bessel dans l'espace à trois dimensions, les images sont résolues.



Cette étude est faite sur le CD.

---

**Exemple FI.11. Résolution de l'image de deux objets circulaires.**

Les deux objets ont un diamètre 0,000 5, la distance entre les centres des deux objets est de 0.0061. La convolution avec la fonction de distribution  $(\frac{J_1(y)}{y})^2$  donne une image qui est bien résolue.

Image de deux objets circulaires.

Les deux objets sont à la distance de résolution selon Rayleigh, nous changeons de notation et posons  $Y = R$ .

**Définition des objets.**

Ce sont des fonctions rectangles représentées par des sommes de plusieurs fonctions d'Heaviside  $\Phi(x)$ .

Nous avons défini précédemment cette fonction (dans le chapitre 5) page 184

$$Y = -0,01, -0,0099 \dots 02 \quad \lambda = 0,000 \ 5 \quad f\# = f/2a \quad Tol = 0,1 \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad f = 500 \ a = 25,$$

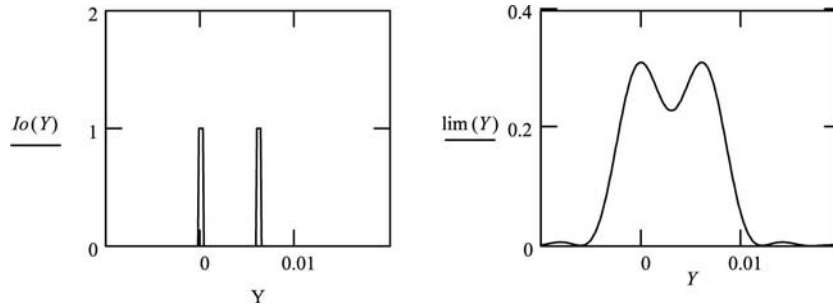
$$Io1(Y) = (\Phi(b2 - Y) - \Phi(b1 - Y)) \quad Io2(Y) = (\Phi(b4 - Y) - \Phi(b3 - Y)) \quad Io(Y) = Io1(Y) + Io2(Y)$$

Image des objets :

$$\lim(Y) = \int_{b1}^{b2} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J_1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right]^2 dYY + \int_{b3}^{b4} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J_1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right]^2 dYY$$

Limites des intégrations :  $b1 = 0,00025$      $b2 = +0,00025$      $b3 = +0,00585$      $b4 = +0,00635$ .

**Application FI.11**



1. Lire à partir des graphes la distance comprise entre les pics de l'image.
  2. Changer la distance entre les deux objets de façon que les deux pics de diffraction ne soient pas résolus mais soient à une distance légèrement inférieure à la distance de résolution, les deux maxima ne sont donc plus résolus.
  3. Prendre la distance entre les deux objets afin que les images soient à la limite de résolution les images sont tout justement résolues.
  4. Accroître la dimension des objets jusqu'à ce qu'ils ne puissent plus être résolus.
- 

## 6.5 Formation d'une image en lumière cohérente

### 6.5.1 Fonction de distribution en lumière cohérente

Dans la section précédente, section 6.4, le processus de formation des images était étudié en lumière incohérente, nous étudions maintenant la formation des images en lumière cohérente

et nous constatons que la fonction de distribution doit être changée. La procédure ressemble à celle de la section 6.4 portant sur la formation des images en lumière incohérente.

Maintenant une radiation cohérente émerge de chaque point de l'objet. Utilisons le principe d'Huygens : nous faisons d'abord la somme de toutes les ondelettes émergeant de l'objet qui se dirigent vers la lentille. Puis, après passage à travers la lentille, nous devons refaire la somme des ondelettes sortantes. Tenant compte de la fonction d'ouverture  $\alpha(\eta)$  de la lentille nous obtenons à nouveau l'équation (6.8) de l'amplitude  $g(y)$  de l'image

$$g(Y) = C \int \left[ \int h(y) \exp\left\{-ik\eta \frac{y}{x_0}\right\} dy \right] \alpha(\eta) \exp\left\{-ik\eta \frac{Y}{x_i}\right\} d\eta \quad (6.40)$$

$C$  est la constante d'intégration comprenant différentes autres constantes. En suivant le même raisonnement que celui de la lumière incohérente, nous introduisons la fonction de Dirac pour définir l'amplitude d'un point de l'objet. Nous remplaçons  $h(y)$  par cette fonction dans l'équation (6.40) et la première transformée de Fourier s'écrit

$$\int \delta(y) \exp\left\{-ik\eta \frac{y}{x_0}\right\} dy = 1 \quad (6.41)$$

La deuxième intégrale de (6.40) devient

$$s(Y) = C \int \alpha(\eta) e^{(-ik\eta \frac{Y}{x_i})} d\eta \quad (6.42)$$

Cette équation est la fonction de répartition, ou fonction de distribution  $s(Y)$  pour une lumière cohérente.

Nous formons l'image en calculant l'intégrale de convolution d'une façon analogue à celle que nous avons suivie lors de l'étude des images en lumière incohérente (équation 6.21). L'objet est décrit par  $h(Y)$  maintenant nous utilisons la fonction de répartition  $s(Y)$  qui contient une information de phase. Rappelons l'intégrale de convolution de l'équation donnant l'amplitude de l'image

$$\int h(Y') s(Y - Y') dY' \quad (6.43)$$

L'intensité de l'image est donnée par

$$I_{im}(Y) = |C \int h(Y') s(Y - Y') dY'|^2 \quad (6.44)$$

Par comparaison avec l'intensité en lumière incohérente, nous utilisons ici la fonction de distribution  $s(Y)$  au lieu de la fonction  $S(Y)$ . La fonction de répartition est d'abord calculée par la convolution de tous les points de l'objet, puis nous élevons au carré le résultat et obtenons la répartition de l'intensité de l'image.

## 6.5.2 Résolution en lumière cohérente

Prenons un exemple, étudions la résolution d'un objet formé de deux disques de diamètre 0,000 5mm,  $\lambda = 0,000 5\text{mm}$ , et  $f\# = 10$ . Nous déterminons la distance comprise entre les centres des deux disques afin que les images soient à la limite de résolution avec le critère de Rayleigh, les calculs sont présentés dans l'exemple (FI.12).

L'intensité de l'image est calculée par les intégrales de convolution suivantes, nous appelons  $i_{ob}(Y)$  la fonction  $h(Y)$ .

$$I_{im}(Y) = \left( \int_{Y'=b1}^{Y'=b2} i_{ob}(Y')s(Y-Y')dY' + \int_{Y'=b3}^{Y'=b4} i_{ob}(Y')s(Y-Y')dY' \right)^2 \quad (6.45)$$

Nous utilisons pour  $s(Y)$  la fonction de Bessel  $J1$  de l'équation (6.38). La fonction  $s(Y - Y')$  contient une information de phase. La distance correspondante entre les deux maxima principaux des figures de diffraction des deux objets est de 0,0082mm, elle est beaucoup plus grande que la distance calculée en lumière incohérente. Nous avons utilisé la même distance entre les objets que lors de l'étude précédente en lumière incohérente. Puisque la distance comprise entre les deux maxima de la limite de résolution, en lumière cohérente, est supérieure à la distance correspondant à la même expérience avec une lumière incohérente, nous en déduisons que nous obtenons une meilleure résolution quand nous éclairons avec une lumière incohérente.

#### **Exemple FI.12. Étude de la résolution en lumière cohérente.**

L'objet est constitué de deux disques de diamètre 0,000 5, la distance comprise entre les centres des disques est égale à 0,0061,  $\lambda = 0,000 5$ . Nous calculons la convolution de la fonction de distribution en lumière cohérente,  $(\frac{J1(y)}{y})$ , nous obtenons un seul pic, les deux images ne sont pas résolues.

Quand la distance entre les centres des deux objets est plus grande que 0,000 5, prenons par exemple une distance de 0,000 82, les deux pics centraux de diffraction sont résolus : nous obtenons deux images distinctes.

#### **Formation des images en lumière cohérente.**

Les deux objets sont des ouvertures circulaires placées à la distance de Rayleigh, donc à la limite de résolution, nous formons leurs images par une lentille circulaire, nous posons  $Y' = R'$ .

$Y = -0,01, -0,009 9 \dots 02$      $\lambda = 0,000 5$      $f/10 = f/2a$      $To1 = 0,1$      $k = \frac{2\pi}{\lambda}$   
 $f = 500$      $a = 25$ .

#### **Définition des amplitudes des objets.**

Ce sont deux fonctions rectangles constituées par une somme de plusieurs fonctions d'Heaviside  $\Phi(x)$ . Nous avons défini précédemment cette fonction d'Heaviside (dans le chapitre 5) page 184.

$$i_{ob}(1) = (\Phi(b2 - Y) - \Phi(b1 - Y)) \quad i_{ob2}(Y) = (\Phi(b4 - Y) - \Phi(b3 - Y)) \\ i_{ob}(Y) = i_{ob1}(Y) + i_{ob2}(Y)$$

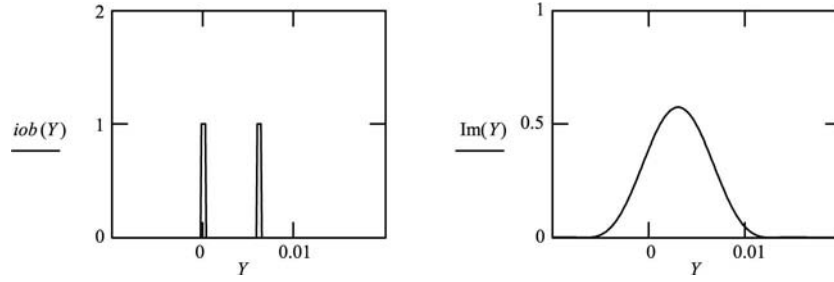
Image.

$$lim(Y) = \left[ \int_{b1}^{b2} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right] dYY + \int_{b3}^{b4} 4 \cdot a^2 \cdot \left[ \frac{J1 \left[ \frac{k \cdot a \cdot (Y - YY)}{f} \right]}{k \cdot a \cdot \frac{(Y - YY)}{f}} \right] dYY \right]^2$$

Limites d'intégration.

$b1 = -0,000 25$      $b2 = +0,000 25$      $b3 = +0,005 85$      $b4 = +0,006 35$      $\frac{b4-b3}{2} + b3 = 6,1 \cdot 10^{-3}$ .

La résolution est obtenue pour  $b3 = 0,007 95$ ,  $b4 = 0,008 45$ .

**Application FI.12**

Choisir une distance de 0,008 2 entre les centres des deux objets qui ont les diamètres suivants  $b_3 = 0,007\ 95$ ,  $b_4 = 0,008\ 45$  et montrer que les images de ces objets sont résolues.

**6.5.3 Fonction de transfert**

Par analogie avec la méthode suivie en lumière incohérente, nous écrivons

$$\omega(\mu) = \int iob(Y') e^{-i2\pi\mu Y'} dY' \quad (6.46)$$

et

$$\tilde{\tau}(\mu) = \int s(Y') e^{-i2\pi\mu Y'} dY' \quad (6.47)$$

$\tilde{\tau}(\mu)$  est la fonction de transfert en lumière cohérente.

Cette relation (6.47) est semblable à la relation (6.34), toutefois la fonction d'amplitude  $s(Y')$  de la relation (6.47) contient un terme de phase. L'amplitude de l'image est obtenue par une transformée de Fourier analogue à l'équation (6.35) lors de l'étude de la formation d'une image en lumière incohérente. L'intensité de l'image est obtenue en élevant au carré la relation (6.47), nous obtenons

$$I_{im}(Y) = |C \int \omega(\mu) \tilde{\tau}(\mu) e^{i2\pi\mu Y} d\mu|^2 \quad (6.48)$$

Désignons par  $\phi_{im}(\mu)$  la transformée de Fourier de  $I_{im}(Y)$ , nous avons

$$I_{im}(Y) = \{\text{TdF du produit de la TdF de } I_{ob} \text{ par la TdF de } s\}^2 \quad (6.49)$$

Dans le domaine des fréquences spatiales, nous avons une relation analogue à la relation (6.36)

$$\phi_{im}(\mu) = \{\omega(\mu) \tilde{\tau}(\mu)\} \quad (6.50)$$

Si nous comparons les relations (6.50) et (6.36), nous voyons qu'une fonction symétrique de blocage n'ayant pas d'information de phase a le même effet pour éliminer certaines fréquences spatiales soit en lumière cohérente, soit en lumière incohérente.

Étudions un exemple, formons l'image d'une structure périodique en lumière cohérente, puis en lumière incohérente.

Exemple : image d'un objet périodique.

Nous étudions (exemple FI.13) l'image en prenant la fonction de distribution  $\frac{\sin y}{y}$ , nous pouvons comparer le résultat avec celui de l'étude en lumière incohérente (exemple FI.8), mais dans cette étude la fonction était  $(\frac{\sin y}{y})^2$ . Nous choisissons, ensuite, la fonction de distribution

$(\frac{J_1(y)}{y})$ , nous effectuons l'étude de l'image (exemple FI.14). Nous pouvons à nouveau comparer le résultat avec celui de l'étude en lumière incohérente (exemple FI.9) où la fonction de répartition est  $[\frac{J_1(y)}{y}]^2$ . La différence est que la fonction de répartition n'est pas élevée au carré. L'image finale est le carré de la transformée de Fourier de l'amplitude (équation 6.48). Comparons les deux résultats : la fonction de transfert ( $\tau$ ) élimine les fréquences spatiales élevées d'une façon linéaire en lumière incohérente et par étapes en lumière cohérente.

La fonction de transfert  $\tau$  (exemple FI.13) est une fonction *d'impulsion rectangle* et peut être considérée comme une fonction *de blocage* éliminant certaines parties de la figure de diffraction de l'objet. C'est ce que nous montrons sur la figure (6.2) de la figure de diffraction afin de changer les caractéristiques de l'image.

---

**Exemple FI.13. Image d'une grille en lumière cohérente, fonction de distribution  $\frac{\sin y}{y}$ .**  
L'objet est une grille, la fonction grille est une suite de fonctions d'Heaviside ou de fonctions rectangles régulièrement réparties, nous calculons successivement :

- sa transformée de Fourier ;
- la transformée de Fourier de la fonction de distribution  $(\frac{\sin x}{x})$  ;
- le produit des deux transformées de Fourier ;
- la transformée de Fourier du produit précédent.

Nous obtenons ainsi l'image dont nous traçons le graphe. L'image ressemble plus ou moins à l'objet initial.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.13**

1. Choisir une autre valeur de  $f\#$ , la largeur de la fonction de répartition est modifiée, nous observons que plus ou moins de fréquences sont utilisées pour former l'image.
2. Comparer les résultats établis en lumière cohérente puis en lumière incohérente pour la même valeur de  $f\#$ , prendre une valeur plus grande puis plus petite de  $f\#$ .

---

**Exemple FI.14. Image d'une grille, fonction de répartition  $(\frac{J_1(y)}{y})$  en lumière cohérente.**  
L'objet est une grille. La fonction grille est une suite de fonctions d'Heaviside ou de fonctions rectangle, nous calculons successivement :

- sa transformée de Fourier ;
- la transformée de Fourier de la fonction de répartition  $(\frac{J_1(y)}{y})$  ;
- le produit des deux transformées de Fourier ;
- la transformée de Fourier du produit précédent.

Nous obtenons ainsi l'image dont nous traçons le graphe. L'image ressemble plus ou moins, à l'objet initial.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.14**

1. Choisir une autre valeur de  $f\#$ , la largeur de la fonction de répartition est modifiée, nous observons que plus ou moins de fréquences sont utilisées pour former l'image.
  2. Comparer les résultats établis en lumière cohérente puis en lumière incohérente pour la même valeur de  $f\#$ , prendre une valeur plus grande puis plus petite de  $f\#$ .
-

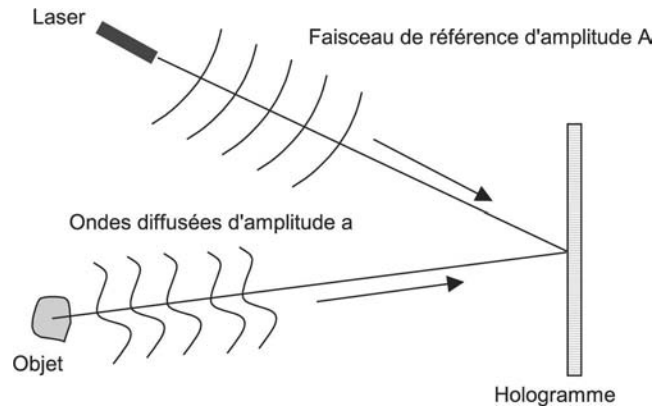
## 6.6 Holographie

### 6.6.1 Introduction

Quand nous étudions le mécanisme de formation des images en lumière cohérente, la première transformée de Fourier produisait la figure de diffraction de l'objet, elle contenait une information de phase quelle que soit la nature de l'objet, réel ou complexe. La deuxième transformée de Fourier avait besoin de cette information de phase pour créer l'image de l'objet. Il est possible de fixer cette information de phase en suivant le raisonnement de Goodman, page 198, [3].

### 6.6.2 Enregistrement de l'interférogramme

Le principe de l'holographie est d'enregistrer sur une pellicule photographique l'information d'amplitude et l'information de phase, toutes ces informations sont nécessaires pour reconstruire l'image de l'objet. Nous obtenons cet enregistrement par interférence de deux faisceaux de lumière cohérente : le faisceau de lumière réfléchi, et diffracté, par l'objet et un faisceau de lumière cohérent de référence (figure 6.5).



**Fig. 6.5** – Création d'un hologramme. La figure d'interférence, produite par les ondes diffusées par l'objet, ondes d'amplitudes  $a$ , interférant avec les ondes directes d'amplitudes  $A$ , est enregistrée sur une plaque photographique : c'est l'hologramme.

**Méthode :** la lumière diffusée par chaque point de l'objet est décrite par une amplitude complexe de la forme :  $\mathbf{a} = a_0 e^{-i\phi}$ ,  $a_0$  est fonction de  $y, z$ , et  $\phi$  est fonction de  $x, y, z$ . L'amplitude complexe de l'onde de référence a pour expression  $\mathbf{A} = A_0 e^{-i\psi}$ ,  $A_0$  est une constante,  $\Psi$  contient les coordonnées décrivant la direction de l'incidence et celle de la propagation vers le film photographique. L'amplitude totale de l'onde reçue sur le film est égale à  $(A + a)$ , l'intensité enregistrée due aux amplitudes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}$  est

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + \mathbf{a}|^2 &= A_0^2 + a_0^2 + A_0 a_0 e^{-i\phi} e^{i\psi} + A_0 a_0 e^{i\phi} e^{-i\psi} \\ &= A_0^2 + a_0^2 + 2A_0 a_0 \cos(\phi - \psi) \end{aligned} \quad (6.51)$$

En conséquence, l'information de phase est contenue dans l'intensité, autrement dit elle est contenue dans le profil de la densité impressionnée, dans le noircissement du film. La relation

entre l'intensité de la lumière incidente et le noircissement du film est logarithmique. L'étude détaillée de la transmission  $t$  du film, appelée hologramme, est présentée dans le livre de Goodman [4]. Dans certaines circonstances nous pouvons décrire cette transmission par une approximation linéaire

$$t_{\text{film}} = cA_0^2 + \beta'a_0^2 + \beta'A_0a_0e^{-i\phi}e^{i\psi} + \beta'A_0a_0e^{i\phi}e^{i-\psi} \quad (6.52)$$

$c$  et  $\beta'$  sont des constantes. Bien que les troisième et quatrième termes de cette relation soient complexes, leur somme est égale à zéro et  $t_{\text{film}}$  reste réel.

### 6.6.3 Reconstruction de l'image par la même onde plane utilisée lors de l'enregistrement

#### Image virtuelle.

Nous éclairons tout l'hologramme par un faisceau d'onde plane identique à celui avec lequel nous avons effectué l'enregistrement de l'hologramme.

L'amplitude incidente est désignée par  $A_0e^{-i\psi}$ , son conjugué s'écrit  $A_0e^{i\psi}$ , nous avons

$$A_0e^{-i\psi}t_{\text{film}} = A_0e^{-i\psi}(cA_0^2 + \beta'a_0^2 + \beta'A_0a_0e^{-i\phi}e^{i\psi} + \beta'A_0a_0e^{+i\phi}e^{-i\psi}) \quad (6.53)$$

$$A_0e^{i\psi}t_{\text{film}} = A_0e^{i\psi}(cA_0^2 + \beta'a_0^2 + \beta'A_0a_0e^{-i\phi}e^{i\psi} + \beta'A_0a_0e^{+i\phi}e^{-i\psi}) \quad (6.54)$$

Les premiers termes de ces deux équations sont constants, le deuxième peut être négligé car l'amplitude  $a_0$  est très inférieure à celle de  $A$ .

Le troisième terme est

$$A_0e^{-i\psi}\beta'A_0a_0e^{-i\phi}e^{i\psi} = (\beta'A_0^2)a_0e^{-i\phi} \quad (6.55)$$

Cette expression est une reproduction du plan d'onde original.

Nous montrons (fig. 6.6a) la reconstitution de l'image par le faisceau A. La lumière du plan d'onde, qui est la moitié du plan d'onde initiale, diverge : l'image est donc virtuelle. Nous obtenons cette image en prolongeant vers la gauche, dans notre exemple, les rayons transmis qui se coupent en un point image.

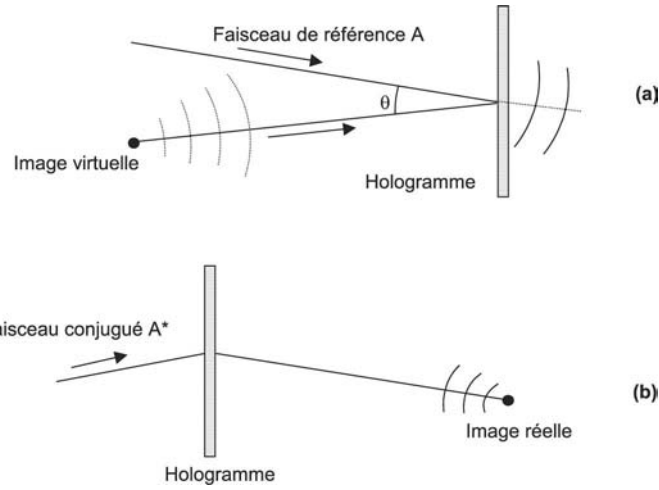
#### Image réelle.

D'une façon similaire, dans l'expression de la relation (6.54) le quatrième terme est

$$A_0e^{i\psi}\beta'A_0a_0e^{i\phi}e^{-i\psi} = (\beta'A_0^2)a_0e^{i\phi} \quad (6.56)$$

Cette expression est une reproduction du plan d'onde conjugué du plan d'onde original.

Nous montrons (fig. 6.6b) l'éclairage par le faisceau  $A^*$ , qui converge vers une image réelle, cette image est dans une direction opposée à celle de l'image virtuelle précédemment étudiée.

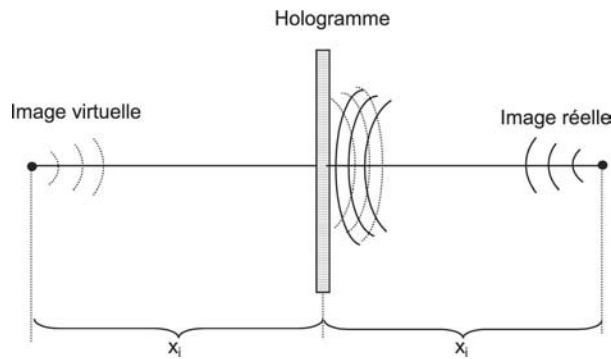


**Fig. 6.6** – Reconstitution de l'image de l'objet à partir de l'hologramme. (a) Le faisceau de référence A illumine l'hologramme, le front d'onde diverge, nous traçons les rayons en arrière du sens de propagation vers l'image virtuelle. (b) Le faisceau de référence A\* éclaire l'hologramme, le front d'onde converge vers une image réelle.

#### 6.6.4 Reconstitution de l'image par un plan d'onde différent

Si nous produisons un hologramme par un plan d'onde d'amplitude  $A$  et que nous illuminons l'hologramme par un plan d'onde d'amplitude  $B$ , de même direction horizontale, nous obtenons

$$B_0 t_{\text{film}} = cB_0 A_0^2 + dB_0 a_0^2 + \beta' B_0 A_0 a_0 e^{-i\phi} + \beta' B_0 A_0 a_0 e^{i\phi} \quad (6.57)$$



**Fig. 6.7** – L'image réelle et l'image virtuelle apparaissent dans la même direction d'observation.

Les images réelles et virtuelles apparaissent toutes les deux dans la même direction horizontale (fig. 6.7).



### 6.6.5 Création d'une image réelle et virtuelle sous une certaine incidence

Si l'expérimentateur désire voir séparément l'image virtuelle et l'image réelle, il faut choisir un faisceau de référence sous incidence différente de l'incidence normale par rapport à l'objet à partir duquel diffuse la lumière. Pour cela, nous prenons une onde de référence de la forme  $A_0 e^{-i2\pi \sin \theta (x/\lambda)}$ , l'amplitude transmise par le film devient

$$t_{\text{film}} = cA_0^2 + \beta' a_0^2 + \beta' A_0 a_0 e^{-i\phi} e^{i2\pi(\frac{x \sin \theta}{\lambda})} + \beta' A_0 a_0 e^{i\phi} e^{-i2\pi(\frac{x \sin \theta}{\lambda})} \quad (6.58)$$

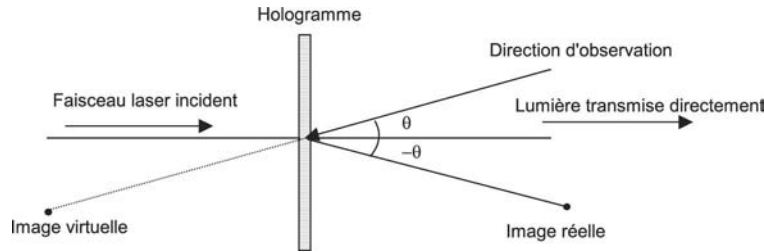
Reconstituons l'image en éclairant par un plan d'onde d'amplitude  $B$ . Le troisième terme (i) et quatrième terme (ii) de l'expression (6.56) deviennent

$$(\beta' A_0^2) a_0 e^{-i\phi} e^{i2\pi(\frac{x \sin \theta}{\lambda})} \quad (6.59a)$$

et

$$(\beta' A_0^2) a_0 e^{i\phi} e^{-i2\pi \sin(\frac{x \sin \theta}{\lambda})} \quad (6.59b)$$

L'image virtuelle (i) est obtenue en traçant vers l'arrière, dans le sens inverse de propagation de la lumière, les rayons selon la direction  $\theta$ , ce qui correspond à la direction selon laquelle nous désirons regarder, nous voyons l'image virtuelle, l'image réelle est dans la direction  $-\theta$ , qui n'est pas la direction de notre observation. Nous représentons le montage sur la figure (6.8) : les images virtuelles et réelles sont séparées.



**Fig. 6.8** – Reconstitution de l'image virtuelle La lumière incidente vient de la gauche, la lumière directement transmise se dirige à droite. Nous observons l'image virtuelle sous l'angle d'observation  $\theta$  en traçant vers la gauche le prolongement des rayons selon cette direction. L'image réelle apparaît sous l'angle  $-\theta$ .

### 6.6.6 Dimension d'un hologramme

Nous avons vu, dans l'étude du mécanisme de formation d'une image, que l'image formée en lumière cohérente pouvait être calculée à partir de la transformée de Fourier de la transformée de Fourier de l'objet. L'hologramme peut être comparé, selon un raisonnement simplifié, à la figure de diffraction de l'objet. Il contient la fréquence spatiale et l'information de phase. Nous pouvons ensuite substituer à l'hologramme la transformée de Fourier de l'objet, l'image est donc obtenue en calculant une deuxième transformée de Fourier.

À partir de ce modèle simple, nous pouvons facilement démontrer que l'objet peut être reconstitué en utilisant différentes dimensions d'hologrammes. Un hologramme de petite dimension

donnera une image de mauvaise qualité, si nous coupons un hologramme de grande dimension en petits morceaux nous perdons des informations sur les *fréquences spatiales*. Par simplicité, nous partons de la transformée de Fourier de l'objet réalisée de telle façon que les plus petites fréquences soient au centre et que les grandes fréquences à des distances croissantes à partir du centre.

Montrons que nous pouvons éliminer certaines fréquences, nous prenons l'exemple d'un objet formé par une grille. L'élimination de certaines fréquences spatiales de la figure de diffraction, c'est-à-dire de la transformée de Fourier, modifiera la forme de l'image, ce que nous illustrons dans l'exemple (FI.15) où nous utilisons une fonction de la région des basses fréquences. Nous éliminons par blocage les fréquences intermédiaires (exemple FI.16), nous choisissons (exemple FI.17) une grille pour éliminer les fréquences spatiales. Nous simulons (exemple FI.18) l'élimination des basses fréquences de l'hologramme par un blocage symétrique de ces fréquences.

**Exemple FI.15. Élimination de certaines fréquences.**

L'objet est une grille. La fonction de transfert élimine certaines hautes fréquences contenues dans la première transformée de Fourier. La dimension de la fonction de blocage dépend du paramètre  $a$ . Nous comparons l'image modifiée à l'objet.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.15**

Changer la valeur du paramètre  $a$  et observer la modification de l'image car la fonction de blocage est modifiée.

**Exemple FI.16. Élimination d'une partie des fréquences.**

L'objet est une grille. La fonction de blocage ne laisse passer qu'une région des fréquences de la première transformée de Fourier. L'étendue de cette fonction dépend des paramètres  $n$  et  $a$ . Nous comparons l'image et l'objet.

Cette étude est faite sur le CD.

**Application FI.16**

Changer la valeur des paramètres.

**Exemple FI.17. Élimination périodique de fréquences.**

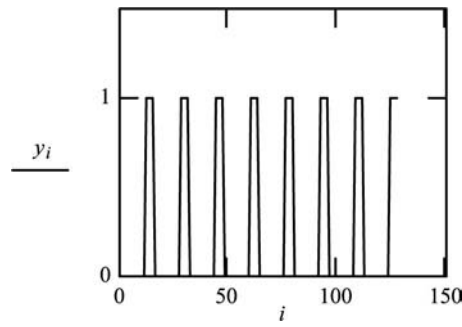
L'objet est une grille. La fonction de transfert est une grille qui élimine des régions périodiques des fréquences de la première transformée de Fourier. La largeur des pics de l'image et l'étendue de la fonction de blocage sont fonctions de  $q$  et  $a$ . Nous comparons l'image modifiée par rapport à l'objet initial.

La transformée de Fourier de l'objet est multipliée par une fonction de blocage choisie pour arrêter certaines fréquences. La transformée de Fourier inverse du produit de la TdF par cette fonction de blocage donne une nouvelle image que nous comparons à l'objet initial.

**Définition de l'objet.**

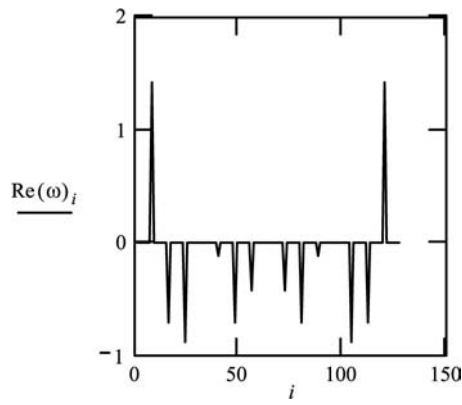
La grille est représentée par une somme de fonctions rectangles. Chaque fonction rectangle est la somme de deux fonctions d'Heaviside  $\Phi(x)$ . Nous avons défini précédemment cette fonction d'Heaviside (dans le chapitre 5) page 184.

$$y_i = [\sum_{n=0}^q (\Phi(i - (4 \cdot (2 \cdot n + 1) + 2) \cdot b) - \Phi(i - (4 \cdot (2 \cdot n + 1) + 4) \cdot b))] \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \dots 127 \\ b = 2 \\ q = 7 \end{matrix}$$



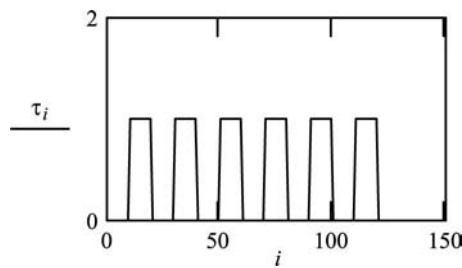
*TdF de l'objet.*

$$\omega = \text{cfft}(y) \quad N = \text{last}(\omega) \quad N = 127$$



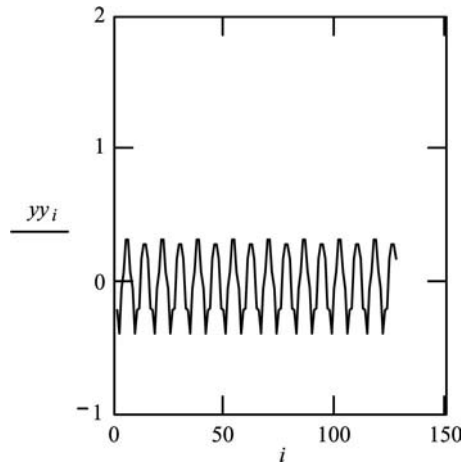
*Définition de la fonction de blocage.*

$$\tau_i = [\sum_{n=0}^q (\Phi(i - (4 \cdot n + 2) \cdot a) - \Phi(i - (4 \cdot n + 4) \cdot a))] \quad q = 5 \quad a = 5$$

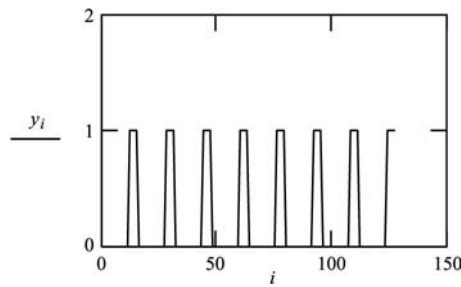


*Produit de la TdF par la fonction de blocage.*

$$\phi_i = \omega_i \cdot \tau_i \quad yy = \text{icfft}(\phi) \quad N2 = \text{last}(\phi) \quad k = 0 \dots N2.$$



Comparons avec l'objet initial.



#### Application FI.17

Observer les changements de l'image finale lorsque nous modifions les paramètres  $q$  et  $a$  de la fonction de blocage.

#### Exemple FI.18. Hologramme d'une composition de fonctions marche.

La fonction de transfert laisse passer les fréquences les plus petites de chaque côté de la figure de diffraction qui est la première transformée de Fourier. Le nombre de basses fréquences spatiales filtrées est contrôlé par  $a$  et  $b$ . L'hologramme est plus étendu quand le nombre de fréquences non éliminées est plus important. Nous comparons l'image modifiée à l'objet initial.

L'objet a une forme quelconque, sa TdF est l'hologramme représenté par la fonction  $c$ ; l'hologramme peut être observé dans le plan focal d'une lentille. L'hologramme est éclairé par un faisceau de lumière parallèle et reproduit l'objet, nous réalisons ainsi la TdF inverse de la TdF que nous désignons par la fonction  $cc$ . Nous étudions la reconstitution de l'objet quand nous utilisons partiellement l'information contenue dans l'hologramme. Nous multiplions l'information contenue dans  $cc$  par une fonction filtre  $f$ . Nous représentons séparément  $f$  et la TdF du produit de  $f$  par  $cc$ .

La largeur du spectre du filtre peut être changée selon la dimension de l'hologramme en donnant des valeurs différentes de  $a$  et  $b$ .

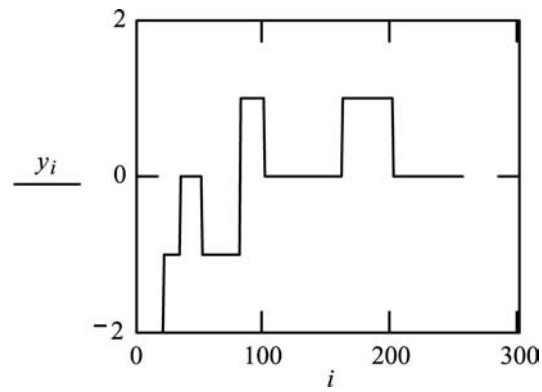
#### Caractéristiques de l'objet.

La fonction marche est une fonction d'Heaviside  $\Phi(x)$ . Nous avons défini précédemment cette fonction (dans le chapitre 5) page 184. Nous effectuons donc la somme des fonctions suivantes :

$$i = 0, 1 \dots 255 \quad A_1 = 33 \quad A_2 = 80 \quad A_3 = 80 \quad A_4 = 50$$

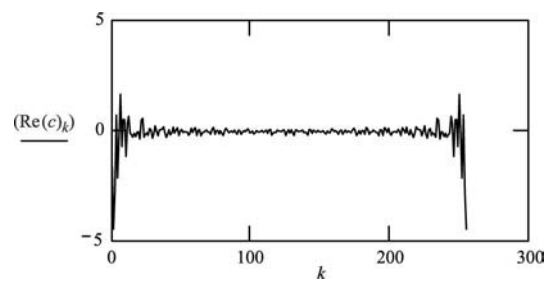
$$A_5 = 20 \quad A_6 = 99 \quad A_7 = 160 \quad A_8 = 200$$

$$y_i = \left[ \sum_{n=1}^3 (-\Phi(A_n - i)) \right] + \left[ \sum_{n=4}^8 [\Phi(A_n - i) \cdot (-1)^n] \right]$$



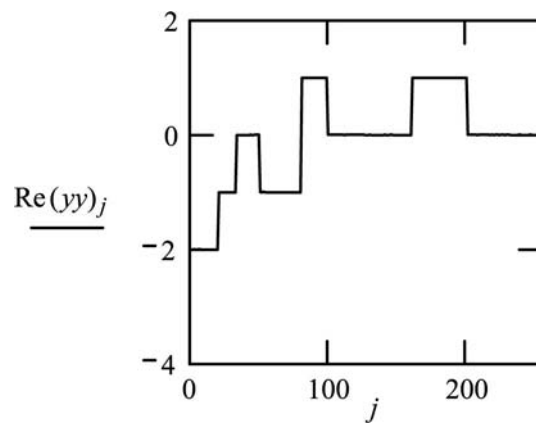
*Hologramme*

$c = \text{cfft}(y)$   $N = \text{last}(c)$   $N = 255$   $k = 0 \dots 255$   $j = 0 \dots 255$



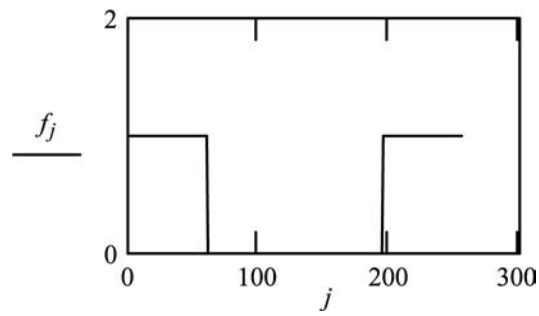
*TdF inverse de l'hologramme*

$cc_k = c_k y y = \text{icfft}(cc)$   $N = \text{last}(cc)$   $N = 255$   $j = 0 \dots 255$

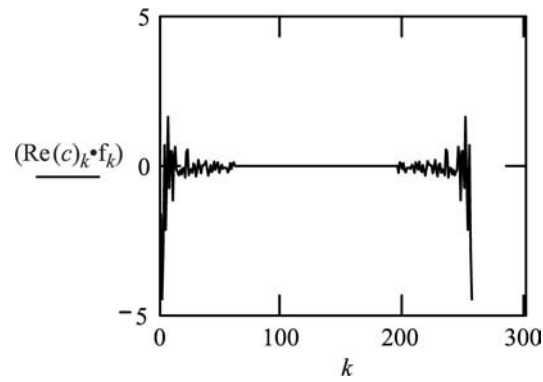


*Fonction filtre*

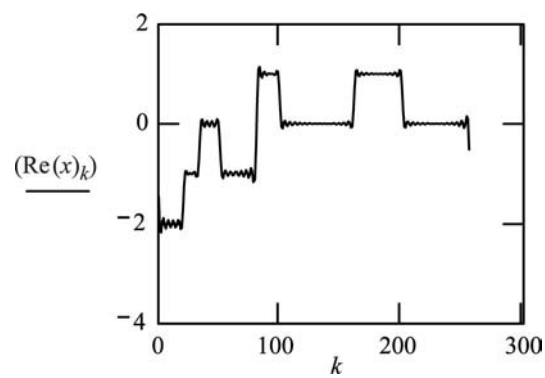
$f_j = \Phi(a - j) + \Phi(j - 255 + b)$   $a = 60$   $b = 60$ .



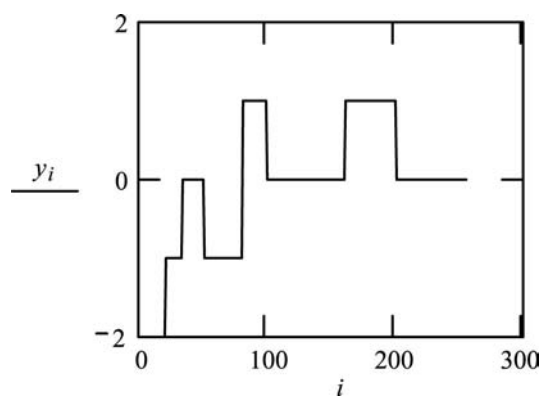
*TdF du produit : hologramme \* filtre.*



*TdF inverse de l'hologramme modifié : hologramme \* filtre, donne une fonction similaire à l'objet initial.  $ccc_k = c_k \cdot f_k$   $x = icfft(ccc)$   $N = \text{last}(ccc)$   $N = 255$   $k = 0 \dots 255$ .*



*Comparons à l'objet initial.*

**Application FI.18**

- Observer les modifications de la dimension de l'hologramme quand nous augmentons ou diminuons le nombre, c'est-à-dire le domaine des basses fréquences.
  - Observer les modifications quand nous choisissons d'autres valeurs des paramètres  $a$  et  $b$ , nous modifions la fonction de blocage ainsi que l'image finale.
-

**Exercices Chapitre 6- Formation des images à partir de la théorie de propagation des ondes électromagnétiques, sur le CD**

- FIM01- Séries de Fourier
- FIM02- Image de deux barres par une lentille cylindrique
- FIM03- Image de deux objets circulaires par une lentille circulaire
- FIM04- Utilisation d'une fonction de distribution  $(\sin y/y)^2$  comme fonction de transfert
- FIM05- Formation d'une image, la fonction de distribution  $(J_1(y)/y)^2$  est prise comme fonction de transfert
- FIM06- Distance de Rayleigh, résolution en lumière incohérente
- FIM07- Distance de Rayleigh, résolution en lumière cohérente
- FIM08- Fonction de transfert pour la fonction  $(\sin x/x)$ , lumière cohérente
- FIM09- Fonction de distribution  $(J_1(y)/y)^2$ , lumière cohérente
- FIM10- Fonction de blocage pour éliminer les hautes fréquences
- FIM11- Fonction de blocage laissant passer une bande passante de fréquences
- FIM12- Fonction de blocage laissant passer des bandes passantes périodiques de tout le spectre de fréquences
- FIM13- Dimension d'un hologramme et qualité de l'image



# Bibliographie

- [1] M. Cagnet, M. Françon et J.C. Thierr, *Atlas des Phénomènes optiques*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1962.
- [2] R.W. Pohl, *Einführung in die Optik*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1948.
- [3] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill Inc., New York, 1988.
- [4] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über theoretische Physik*. Dietrich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1950.
- [5] J. Kamarsky, *Far infrared high resolution Fourier transform spectrometer Application to H<sub>2</sub>O, NH<sub>3</sub>, and NO<sub>2</sub> lines*. Applied Optics, 1976.

# Index

écrans complémentaires, 146

Airy

fonction d’Airy, 98

angle de diffraction, 126, 131

apodisation, 202, 203

approximation, 120

approximation des petits angles, 120

approximation de la grande distance, 122

Babinet

principe de Babinet, 160

théorème de Babinet, 146

Bessel, 130

fonction de Bessel, 130

cavité

analogie, 59

résonance, 58, 61

séquence d’une cavité, 59

chemin optique, 2

cohérence, 163

lumière partiellement cohérente, 169

cohérence spatiale, 165

cohérence spatiale d’une source étendue, 168

condition de cohérence, 167

deux sources ponctuelles, 163

incohérence spatiale, 165

coin d’air, 83

construction géométrique, 15

convolution, 220

exemple : image d’un disque, 222

exemple : image d’une barre, 221

exemple : image de deux barres, 222

exemple : image de deux disques, 223

Cornu, 159

spirale de Cornu, 159, 160

corps noir, 179

déphasage de  $\pi$ , 76

diaphragme circulaire, 219

diaphragmes répartis au hasard, 149

diffraction

diffraction de Fresnel, 122

diffraction par une fente, 152

diffraction à l’infini, 123

par une fente, 124

diffraction par une fente, 127

par une ouverture rectangulaire, 128

diffraction de Fresnel, 122, 154

diaphragme circulaire

observation sur l’axe, 116

par un disque

observation sur l’axe, 118

dioptre sphérique, 8

concave, 16

convexe, 8, 14

distance de résolution de Rayleigh, 145

distance focale, 11

distance focale image, 11

distance focale objet, 11

distribution de l’amplitude, 219

expérience d’Young, 79

Fabry-Pérot

étalon Fabry-Pérot, 98

interféromètre Fabry-Pérot, 100

Fermat, 2

et loi de réfraction, 2

principe de Fermat, 2

finesse, 102

Fizeau

franges de Fizeau, 88, 91

fonction rectangle, 127, 181, 183

Fourier, 181

intégrales de Fourier, 181

spectroscopie

spectroscopie par transformée de Fourier  
asymétrique, 206

spectroscopie par transformée de Fourier, 88,  
179, 190

échantillonnage, 195

interférogramme, 190, 191

pliage en accordéon du spectre., 196

spectroscopie de haute résolution, 199

suite de valeurs discrètes, 194

transformée de Fourier, 122, 181, 212, 213

fonction de distribution, 219

- d'une fonction de Gauss, 182
- exemples, 183
- fonction de distribution en lumière cohérente, 228
- fonction de transfert, 224
- généralisation, 187
- impulsion de réponse, 220
- théorème de convolution, 220
- transformée de Fourier complexe, 185
- transformée de Fourier de la transformée de Fourier, 218
- transformée de Fourier inverse, 182, 183
- transformée de Fourier par une fonction réelle, 183
- transformée de Fourier rapide (fft), 183
- foyer objet, 11
- fréquences spatiales, 212
- Fraunhofer, 120, 123
  - diffraction de Fraunhofer, 119, 123
- Fresnel, 119
  - diffraction de Fresnel, 119, 122
    - par le bord d'un écran, 154
    - par une fente, 153
  - intégrale de Fresnel, 152
  - miroirs de Fresnel, 77, 79
- Galilée, 40
  - lunette de Galilée, 40
- grandissement, 13, 33, 34, 36, 38, 40, 55
- grossissement angulaire, 34, 37
- grossissement commercial, 38
- Heaviside, 185
  - fonction d'Heaviside, 185
- Heidinger
  - franges d'Heidinger, 88, 91
- holographie, 233
  - hologramme, 233
  - dimension, 235
- Huygens, 211
  - principe d'Huygens, 113
- image
  - réelle, 16
  - virtuelle, 16
- image virtuelle, 12
- instruments optiques, 29
  - loupe, 31
  - lunette
    - lunette de Galilée, 40
    - lunette de Képler, 38
  - microscope, 35
- intégrale de convolution, 188
- intensité, 71, 119, 124, 129, 135, 140, 147, 190, 192, 207
  - intensité constructive, 86
  - intensité destructive, 86
  - intensité réfléchie, 86
  - intensité transmise, 86
  - normalisation, 72
- interférence, 70
  - anneaux de Newton, 86
  - coin d'air, 83
  - constructive, 75, 76, 79, 82, 83, 99
  - destructive, 75, 76, 79, 82, 84, 99
  - division par deux de l'amplitude du faisceau, 80
  - par division du front d'onde, 73
  - par ondes multiples, 92
  - sources alignées régulièrement sur une ligne, 104
  - sur la surface de l'eau, 70
- interférogramme, 192
- interférométrie, 80, 88
  - fonction d'Airy, 98
  - interféromètre de Michelson, 191
  - interféromètre Fabry-Pérot, 100
  - interféromètres stellaire de Michelson, 174
  - résolution, 100
- Képler, 38
  - lunette de Képler, 38
- Kirchhoff-Fresnel, 115
  - intégrale de Kirchhoff-Fresnel, 115, 116, 123, 152, 212
- lame
  - lame à faces parallèles, 81, 92
  - lame séparatrice, 80, 88
- lentille mince, 19
  - distance focale, 20
  - grandissement, 21
  - lentille négative, 25
  - lentille positive, 21, 23
- Llyod
  - miroir de Llyod, 76
- longueur d'un train d'onde, 177
- lumière cohérente, 228
- matrice, 41
  - boule en verre, 49, 53
  - d'une lentille épaisse, 44
    - plans principaux, 46
  - d'une lentille mince, 45
  - de réfraction, 41
  - de réfraction du dioptré sphérique, 43

- de translation, 43
- deux lentilles placées dans l'air, 50
- du dioptré plan, 43
- hémisphère, 48
- Maxwell, 66, 115
- Michelson
  - interféromètre de Michelson
    - incidence  $\theta$ , 91
    - incidence normale, 88
  - interféromètre de Michelson, 88
- minimum de vision distincte, 31
- miroir, 53
  - miroir convexe sphérique, 57
  - miroir concave sphérique, 57
  - miroir plan, 53
  - miroir sphérique, 54
  - miroir sphérique concave, 56
- miroir de Llyod, 80
- miroirs de Fresnel, 77
- Newton, 6, 65
  - anneaux de Newton, 86
- notation complexe, 71
- notation en réel, 71
- objet réel, 12
- ouverture rectangulaire, 128
- phénomène de Gibbs, 214
- plans principaux, 46
- Poisson, 119
  - point de Poisson, 119
- prisme, 6
- punctum proximum, 34
- réseau, 134
  - réseau d'amplitude sous incidence, 138
  - réseau échelette, 134, 140
    - angle de miroitement, 140
  - réseau d'amplitude, 134
  - réseau lamellaire, 156
- résolution, 101, 143, 227
  - critère de Rayleigh, 227
  - Fabry-Pérot, 100
  - haute résolution, 200
  - résolution en lumière cohérente, 229
  - résolution en lumière incohérente, 231
- résonance, 99
- Rayleigh, 143
  - critère de Rayleigh, 101, 143, 227
- rectangle, 215
  - fonction rectangle, 215
- sources
  - sources alignées régulièrement sur une ligne, 103, 104
  - sources ponctuelles réparties au hasard, 107
- spectroscopie
  - spectroscopie infrarouge, 212
- superposition, 68
  - principe de superposition, 66
  - superposition de deux ondes, 68
  - superposition des ondes issues de N sources alignées régulièrement sur une ligne, 103
  - superposition des ondes issues de N sources réparties au hasard, 107
  - superposition des trains d'onde, 177
- trains d'onde, 175
- transformée de Fourier, 127, 181, 184
- valeur moyenne dans le temps, 71
- valeurs propres, 60
- visibilité, 171
  - franges obtenues par deux sources ponctuelles, 171
  - franges obtenues par une source étendue, 172
- visibilité des franges, 171
- vitesse de phase, 67
- Young, 65
  - fentes d'Young, 163, 164
  - trous d'Young, 75